АПРОКСИМИРАНЕ С АЛГЕБРИЧНИ ПОЛИНОМИ НА ФУНКЦИИ, ОТЛИЧНИ ОТ НУЛА САМО В ЕДНА ТОЧКА

Николай Кюркчиев и Благовест Сендов

В теорията за апроксимиране на функции с алгебрични полиноми относно хаусдорфова метрика [1] е естествена следната задача:

Измежду всички полиноми $P \in H_n$ да се намери този, който в интервала $[-1,1]$ най-добре апроксимира точковата съвкупност

$$\Delta_\alpha^M = \{(x, y): -1 \leqq x \leqq 1,\ y = 0 \text{ и } x = \alpha,\ 0 \leqq y \leqq M\},$$

т. е. допълнената графика на функцията

$$\Delta_\alpha^M(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \neq \alpha, \\ M & \text{при } x = \alpha; \end{cases}$$

относно хаусдорфово разстояние, където $M > 0$ и $\alpha \in (0, 1)$.

Тук с H_n сме означили съвкупността от алгебричните полиноми от степен $\leqq n$.

Известно е [1], че ако функцията f е дефинирана в интервала $[-1,1]$ и $\sup\limits_{x \in [-1,1]} |f(x)| = M$, то най-доброто приближение $E_n(f)_r$ на функцията f с алгебрични полиноми относно хаусдорфова метрика удовлетворява условието

$$E_n(f)_r = O(\ln n/n).$$

В тази работа е получена точната асимптотика на най-доброто приближение $\delta = E_n(\Delta_\alpha^M)_r$ на Δ_α^M с полиноми от H_n и е изложен един числен метод за пресмятане на δ, при който не се използва експлицитният вид на полиномите P_n на най-добро приближение.

1. Като се използват свойствата на търсения полином на най-добро приближение, не е трудно да се състави диференциалното уравнение, което удовлетворява P (вж. фиг. 1 за вида на тези полиноми и смисъла на означенията α, α' и δ):

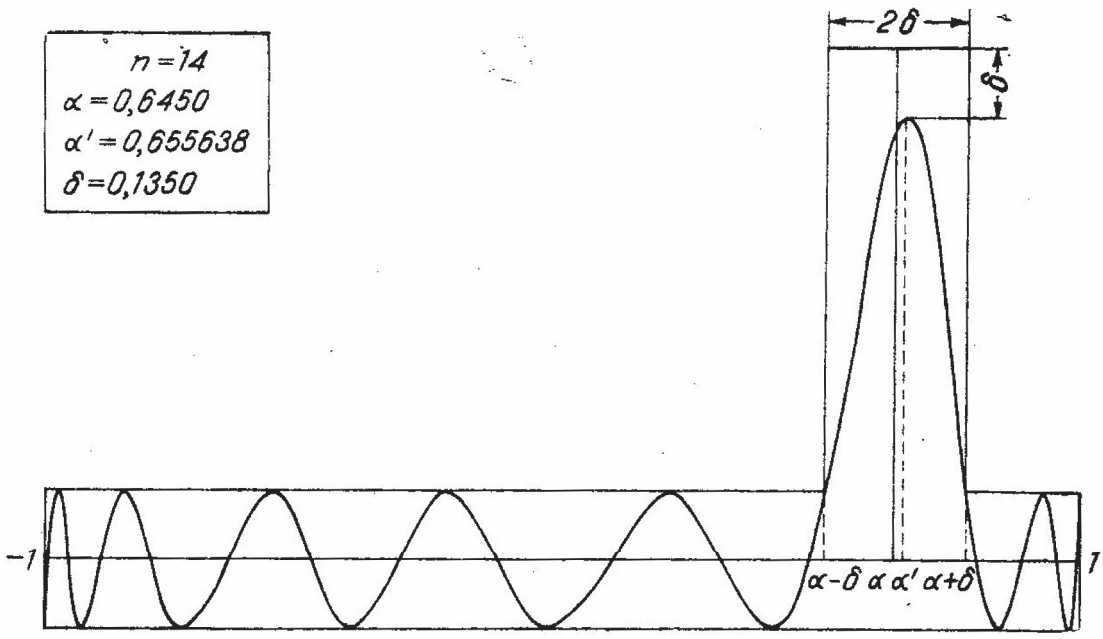
$$n^2[\delta^2 - P^2(x)](\alpha' - x)^2 = P'^2(x)(1 - x^2)(\alpha - \delta - x)(\alpha + \delta - x). \tag{1}$$

За $x \in [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$ имаме $P(x) > \delta$, следователно

$$P'(x)/\sqrt{P^2(x) - \delta^2} = n(\alpha' - x)/\sqrt{(1 - x^2)(\alpha + \delta - x)(x - \alpha + \delta)}. \tag{2}$$

Като интегрираме (2) в граници от $\alpha-\delta$ до $\alpha+\delta$ и направим смяната

$$x=((\alpha-\delta)(1+\alpha+\delta)+2\delta t^2)/(1+\alpha+\delta-2\delta t^2),$$



Фиг. 1

получаваме следната връзка между величините α, δ и α':

$$(1+\alpha-\delta)\Pi(\nu_1,\ k_1)-(1+\alpha')K(k_1)=0, \tag{3}$$

където

$$k_1^2=4\delta/(1-\alpha+\delta)(1+\alpha+\delta),$$

$$\nu_1=-2\delta/(1+\alpha+\delta).$$

Тук с $K(k_1)$ и $\Pi(\nu_1, k_1)$ сме означили пълните елиптични интеграли съответно от първи и трети род.

За всяко $x\in[\alpha-\delta,\ \alpha+\delta]$ е в сила

$$\ln\left|P(x)/\delta+\sqrt{(P(x)/\delta^2-1}\right|=n\int\limits_{\alpha-\delta}^{\alpha+\delta}\frac{(\alpha'-x)dx}{\sqrt{(1-x^2)(\alpha+\delta-x)(x-\alpha+\delta)}}. \tag{4}$$

Оттук за стойността на полинома $P(x)$ в точката α' получаваме

$$P(\alpha')=M-\delta=\delta\,\mathrm{ch}\,2n((1+\alpha-\delta)\Pi(\nu_1,k_1,\varphi_0)$$
$$-(1+\alpha')F(k_1,\varphi_0))/\sqrt{(1-\alpha+\delta)(1+\alpha+\delta)}, \tag{5}$$

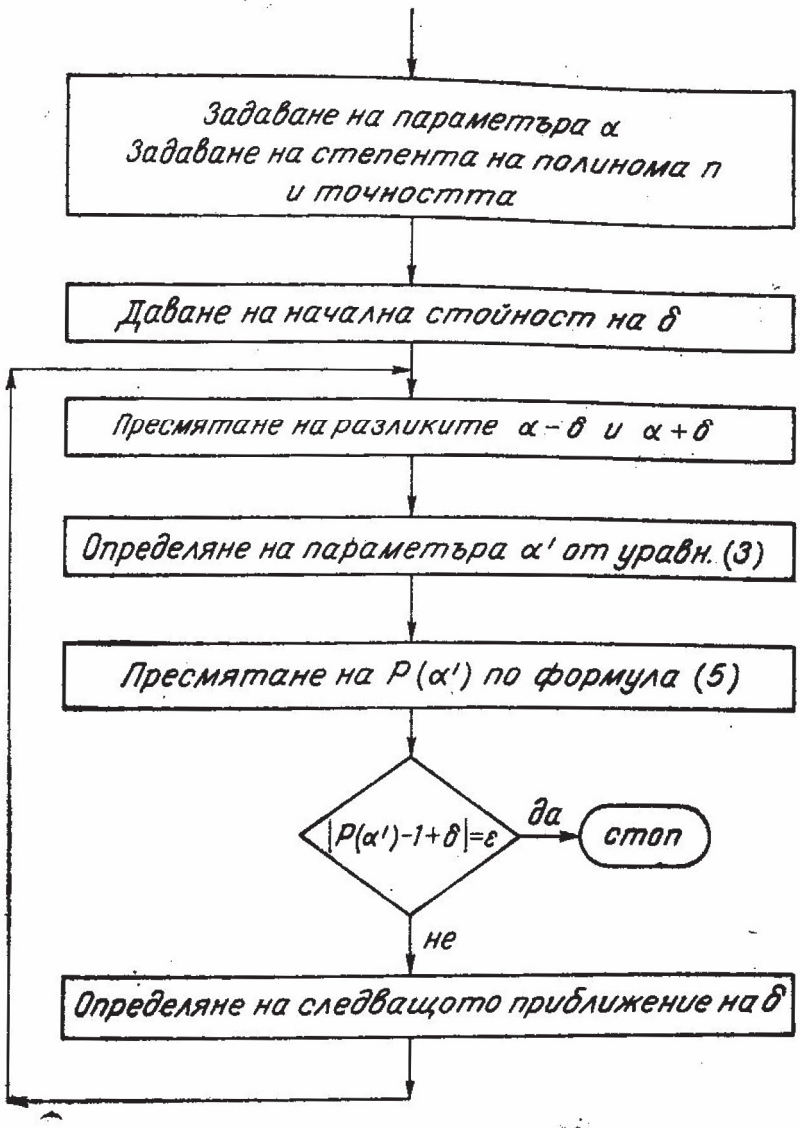
където

$$\varphi_0=\arcsin\sqrt{(1+\alpha+\delta)(\alpha'-\alpha+\delta)/2\delta(1+\alpha')},$$

а $F(k_1, \varphi_0)$ и $\Pi(\nu_1, k_1, \varphi_0)$ са непълните елиптични интеграли съответно от първи и трети род.

За численото пресмятане на приближението δ използуваме съществено уравнения (3) и (5), като за простота сме взели $M=1$.

Численият метод, който използуваме за пресмятане хаусдорфовото приближение на Δ_α^1 с полиноми $P \in H_n$, е итерационен и се дава с блок-схемата на фиг. 2. Ако $P(\alpha')$ и $1-\delta$ са станали достатъчно близки,



Фиг. 2

прекратяваме процеса и за хаусдорфово приближение на Λ_α^1 взимаме стойността на δ от последната итерация.

Определянето на следващото приближение за δ в случай, че не е достигната желаната точност $\varepsilon>0$, става по начина, описан подробно в [3]. В таблица 1 привеждаме резултатите от численото пресмятане на δ за $n=13, 14, 15, 16, 17, 20$ при $\alpha=0{,}6450$.

Пресмятанията са извършени с машината „МИНСК-22“.

За численото пресмятане на полиномите на най-добро приближение може да се използува уравнение (4), както и следното представяне в интервала $[\alpha+\delta, 1]$

$$P(x)=\delta \sin(\pi/2+2n(2\delta\Pi(\nu, k, \varphi)$$

$$-(\alpha'-\alpha+\delta)F(k, \varphi))/\sqrt{(1-\alpha+\delta)(1+\alpha+\delta)}), \tag{6}$$

където

$$k^2=(1+\alpha-\delta)(1-\alpha-\delta)/(1-\alpha+\delta)(1+\alpha+\delta),$$

$$\nu=(\alpha+\delta-1)/(1-\alpha+\delta),$$

$$\varphi=\arcsin\sqrt{(1-\alpha+\delta)(x-\alpha-\delta)/(1-\alpha-\delta)(x-\alpha+\delta)}.$$

На фиг. 1 е дадена графиката на полинома P_{14} на най-добро приближение на $\Delta^1_{0,6450}$ в интервала $[-1,1]$. Ще отбележим, че трудностите, които срещнахме при провеждането на числения експеримент, ни дават основание да смятаме, че въпросът за намирането на един ефективен числен метод за пресмятане на хаусдорфовото приближение δ стои открит.

2. За най-доброто приближение $\delta=E_n(\Delta^M_\alpha)_r$ на Δ^M_α с полиноми от класа H_n по отношение на хаусдорфовото разстояние [1] е в сила следната

Теорема 1. За всяко натурално n полиномът $P\in H_n$ на най-добро приближение удовлетворява равенството

$$E_n(\Delta^M_\alpha)_r=r(\Delta^M_\alpha,P)=\sqrt{1-\alpha^2}\ln n/n+o(\ln n/n).$$

Доказателство. Като интегрираме (2) съответно в граници от $\alpha-\delta$ до α' и от $\alpha-\delta$ до $\alpha+\delta$, получаваме

$$\ln\frac{M-\delta+\sqrt{M^2-2M\delta}}{\delta}=\int_{\alpha-\delta}^{\alpha'}\frac{P'(x)dx}{\sqrt{P^2(x)-\delta^2}} \tag{7}$$

$$=n\int_{\alpha-\delta}^{\alpha'}\frac{(\alpha'-x)dx}{\sqrt{(1+x^2)(\alpha+\delta-x)(x-\alpha+\delta)}},$$

$$0=\int_{\alpha-\delta}^{\alpha+\delta}\frac{P'(x)dx}{\sqrt{P^2(x)-\delta^2}}=\int_{\alpha-\delta}^{\alpha+\delta}\frac{(\alpha'-x)dx}{\sqrt{(1-x^2)(\alpha+\delta-x)(x-\alpha+\delta)}}. \tag{8}$$

В (8) полагаме $x=\delta t+a$ и получаваме $\alpha'=\alpha+\delta F(\delta)$, където

$$F(\delta)=\int_{-1}^{1}\frac{tdt}{\sqrt{(1-t^2)(1-(\delta t+\alpha)^2)}}\int_{-1}^{1}\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-(\delta t+\alpha)^2)}}.$$

За $\alpha+\delta<1$ и $\alpha-\delta>-1$, $F(\delta)$ е аналитична функция на δ за $\delta<1-\alpha$ и следователно

$$F(\delta)=F(0)+F'(0)\delta/1!+F''(\theta\delta)\delta^2/2!;\quad 0<\theta<1.$$

Лесно се пресмята, че $F(0)=0$, $F'(0)=\alpha/2(1-\alpha^2)$.
Така получаваме, че

(9) $$\alpha'=\alpha+\alpha\delta^2/2(1-\alpha^2)+O(\delta^3)=\alpha+a_1\delta^2+O(\delta^3).$$

От (7), като положим $x=\delta t+\alpha$ и вземем пред вид (9), получаваме

(10) $$\ln((M-\delta+\sqrt{M^2-2M\delta})/\delta)=n\delta G(\delta),$$

където

$$G(\delta)=\int_{-1}^{a_1\delta+O(\delta)}(a_1\delta+O(\delta^2)-t)((1-t^2)(1-(\delta t+\alpha)^2))^{-1/2}dt.$$

Непосредствено се проверява, че

$$G(0)=-\int_{-1}^{0}((1-\alpha^2)(1-t^2))^{-1/2}tdt=1/\sqrt{1-\alpha^2}$$

и тъй като $G(\delta)$ има непрекъсната производна в околността на нулата, то

$$G(\delta)=\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}}+O(\delta).$$

Така от последното и от (10) получаваме

$$\ln((M-\delta+\sqrt{M^2-2M\delta})/\delta)=n\delta/\sqrt{1-\alpha^2}+nO(\delta^2).$$

Но известно е, че

$$1/\delta=(\exp(n\delta/2\sqrt{1-\alpha^2}+nO(\delta^2))+\exp(-n\delta/2\sqrt{1-\alpha^2}-nO(\delta^2)))/2M,$$

откъдето следва, че

$$\delta=\sqrt{1-\alpha^2}\ln n/n+o(\ln n/n).$$

С това теоремата е доказана.
Ще отбележим, че при $\alpha=0$ се получава известната асимптотика [2]

$$E_n(\Delta_0^M)_r\sim\ln n/n.$$

Таблица 1

n α	δ	$\alpha-\delta$	$\alpha+\delta$	α'	$P(\alpha')+\delta$
13 0,6450	0,1450	0,5	0,79	0,657384	1,00001
14 0,6450	0,1350	0,51	0,78	0,655638	0,99997
15 0,6450	0,1280	0,517	0,7730	0,654045	1,00003
16 0,6450	0,1212	0,5238	0,7662	0,653172	1,00005
17 0,6450	0,1150	0,530	0,760	0,652598	0,99995
20 0,6450	0,1051	0,5399	0,7501	0,651291	1,00002

ЛИТЕРАТУРА

1. Сендов, Бл.: Некоторые вопросы теории приближения функций и множеств в хаусдорфовой метрике. Усп. мат. наук, 24, 5 (149), 1969, 141—178.
2. Сендов, Бл., Попов, В.: Приближение функций многих переменных алгебраическими многочленами в метрике Хаусдорфа. Год. на Соф. унив., Мат. фак., 63 (1968/69), 61—76.
3. Кюркчиев, Н., Марков, С.: Върху численото апроксимиране на точковото множество „КРЪСТ". Год. на Соф. унив., Мат. фак., 66 (1971/1972), 19—24.

Постъпила на 15. VI. 1974 г.

APPROXIMATION OF A CLASS OF FUNCTIONS BY ALGEBRAIC POLYNOMIALS WITH RESPECT TO HAUSDORFF DISTANCE

N. Kiurkchiev and Bl. Sendov

(SUMMARY)

The following problem for approximation of functions with respect to Hausdorff distance is considered: to find in the interval [—1,1] the algebraic polynomial of the best Hausdorff distance for the function

$$\Delta_\alpha^M(x) = \begin{cases} 0, & \text{for } x \neq \alpha \\ M, & \text{for } x = \alpha, \end{cases}$$

where $M > 0$ and $\alpha \in (0,1)$.

There is obtained the exact asymptotics (Theorem 1) of the best Hausdorff approximation $\delta_n = E_n(\Delta_\alpha^M)_r$ of the function $\Delta_\alpha^M(x)$ by algebraic polynomials of nth degree:

$$\delta_n = E_n(\Delta_\alpha^M)_r \sim \sqrt{1-\alpha^2} \ln n/n$$

A numerical method for the calculation of δ which can be realized according to the flow diagram (Fig. 2) is considered as well.

There are given the results of the numerical calculation of δ for $n = 13, 14, 15, 16, 17, 20$ when α is fixed ($\alpha = 0.6450$) and the graphic of the polynomial $P_{14}(x)$ in the interval $[-1,1]$ is shown (Table 1 and Fig. 1).