ВЪРХУ БЕЗКРАЙНИ ИЗПЪКНАЛИ МНОГОСТЕНИ СЪС ЗАДАДЕНИ ДВУСТЕННИ ЪГЛИ

Екатерина Андрейчин

През 1813 г. Cauchy публикува следната теорема:

Теорема 1. Ако P и P' са два затворени изпъкнали многостена, еднакво съставени от равни стени, то P и P' са равни.

Основен момент в доказателството на тази теорема е получаването на резултата, че двустенните ъгли при съответните ръбове са равни, което може да се формулира като самостоятелна теорема:

Теорема 2. Ако в два затворени изпъкнали многостена с еднакъв строеж съответните ъгли на съответните стени са равни, то двустенните ъгли при съответните ръбове също са равни ([1], 153).

А. Д. Александров изследва изчерпателно въпроса за единственост и съществуване на изпъкнал многостен (краен, безкраен и с граница) по дадена метрика. При доказателството на теоремите за единственост А. Д. Александров използва метода на Cauchy, като го разширява съществено. Теоремите за единственост на безкрайни многостени той доказва с помощта на следните теореми:

Теорема 3. Нека P е безкраен изпъкнал многостен, от никой от върховете на който не излиза повече от един безкраен ръб. Тогава, ако многостенът P' има същия строеж като P и съответните ъгли на съответните стени на многостените P и P' са равни, то двустенните ъгли при съответните ръбове също са равни.

Теорема 4. Ако има такова изометрично съответствие φ на един изпъкнал многостен P върху изпъкнал многостен P', че при него „новите“ стени преминават в „нови“ и двустенните ъгли при съответните (нови) ръбове са равни, то φ може да се осъществи с движение или движение и отражение ([1], 161).

В статията си [2] J. J. Stoker изказва предположение, че равнинните ъгли на затворен изпъкнал многостен се определят еднозначно от двустенните му ъгли (теорема, обратна на теоремата на Cauchy). Резултатите в това направление принадлежат на H. Karcher [3] и А. Д. Милка [4].

В студентския кръжок по геометрия във Факултета по математика и механика на Софийския университет се постави въпросът, дали е валидна и кога теорема, обратна на теорема 3 на А. Д. Александров, т. е. дали и кога двустенните ъгли на един безкраен изпъкнал многостен определят еднозначно равнинните му ъгли. Доколкото ни е известно, резултати в това направление няма. В тази работа се разглеждат някои видове безкрайни изпъкнали многостени. В доказателствата на теоремите се използва следният резултат на Cauchy:

Теорема 5. Дадени са два многоъгълника P и P' (сферични или Евклидови). Техните страни са в 1,1-значно съответствие, такова, че когато се обикалят по същия начин страните, които следват, са равни по дължина. Съответните вътрешни ъгли са сравнени по големина и в P са отбелязани с $+$, $-$ или 0 според това, дали ъглите в P са $>$, $<$ или $=$ на ъглите на P'. Преброен е броят j на смените на знаците при едно обикаляне около P, като е пренебрегнат знакът 0; числото j се нарича индекс на многоъгълника. Заключението е, че j е поне равно на 4, освен ако всички знаци са 0, т. е. всички двойки съответни ъгли са равни и по такъв начин двата многоъгълника са конгруентни [(1], 151 и [2]).

В статията си Karcher прилага известния метод, който свежда решаването на тази задача до сферично изображение на многостени, и използува факта, че ако сферичното изображение на един многостен като сферична мрежа е еднозначно определено от дължините на ръбовете си, то равнинните ъгли на многостена са еднозначно определени от двустенните ъгли. В настоящата работа се прилага същият метод и се получават теоремите:

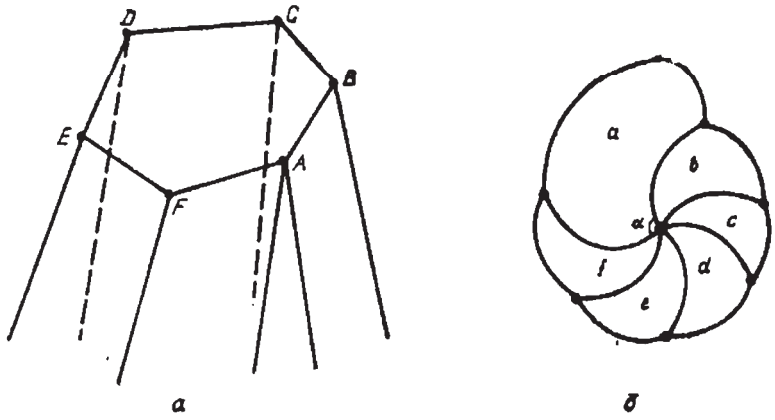
Теорема А: Ако във всеки връх с изключение на един на безкраен изпъкнал многостен P се срещат по три стени, а в последния връх — четири стени, то равнинните ъгли на многостена се определят еднозначно от двустенните му ъгли.

Теорема В: Нека P е четиривръх безкраен изпъкнал многостен, от един връх на който излизат два безкрайни ръба, а от останалите върхове — най-много по един безкраен ръб. Твърди се, че равнинните ъгли на P се определят еднозначно от двустенните му ъгли.

Теорема С: Ако в допълнение на предположенията на теореми А и В е допуснато, че са зададени и дължините на крайните ръбове на многостена, следва, че многостенът е определен с точност до движение или движение и отражение.

Доказателство на теорема А:

Нека P е $ABCDEF$, като във върха A се срещат четири стени (фиг. 1, *а*). Сферичното изображение на този многостен се състои от пет



Фиг. 1. Безкраен многостен, удовлетворяващ условията на теорема А (*а*), и сферичното му изображение (*б*)

триъгълника, отговарящи на върховете B, C, D, E и F, и един четириъгълник, който е образ на върха A (фиг. 1, *б*). Триъгълниците b, c, d, e и f на сферичното изображение на многостена са еднозначно определени от дължините на страните си, които са допълнителни до π на двустенните ъгли на многостена P. Но тогава е определен и ъгъл α на четириъгълника a.

Нека има два многостена P и P', които са с равни двустенни ъгли, но се различават по някои равнинни ъгли. Разглеждат се сферичните изображения $abcdef$ и $a'b'c'd'e'f'$ на P и P'. Според горната забележка разлики в сферичните изображения може да има само в ъглите, различни от α на a и a'. Сравняват се ъглите на двата четириъгълника и се означават с $+$, $-$ или 0 ъглите на a при условие, че те са $>$, $<$ или $=$ на съответните ъгли на a'. Тъй като разлика може да има само в три ъгъла, то смените на знаците при обикаляне около a може да са наймного три. Но това противоречи на теорема 5. Оттук следва, че сферичното изображение на P е еднозначно определено и следователно равнинните ъгли на P се определят еднозначно от двустенните му ъгли.

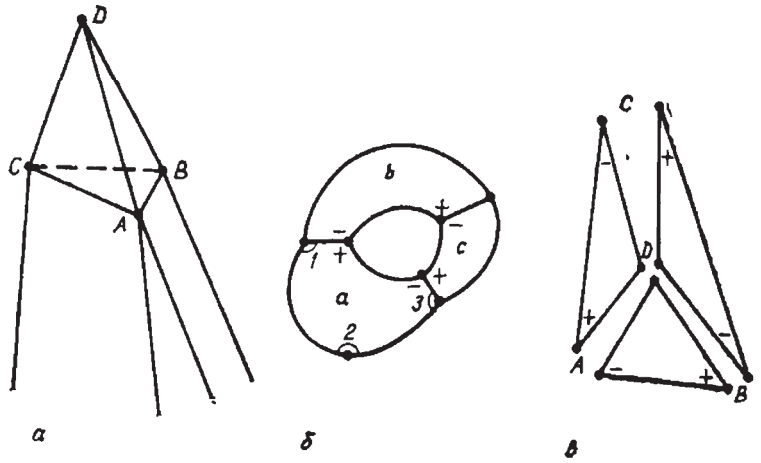
Следствие 1. Ако във всеки връх на безкраен изпъкнал многостен се срещат по три стени, то равнинните ъгли на многостена се определят еднозначно от двустенните му ъгли.

Доказателство. Сферичното изображение на такъв многостен се състои от $f - 1$ триъгълника, които са напълно определени от дължините на ръбовете си (двустенните ъгли на многостена), т. е. сферичното изображение е еднозначно определено. Но тогава са еднозначно определени и равнинните ъгли на многостена.

Доказателство на теорема B:

1. Ако многостенът P е $ABCD$ и тези четири точки лежат в една равнина, то полученият многостен удовлетворява условията на теорема A и следователно твърдението е вярно.

2. Нека P е многостенът $ABCD$ и тези четири точки не лежат в една равнина. Такъв многостен е показан на фиг. 2, *а*. Предполага се



Фиг. 2. Четиривръх безкраен многостен

че от връх A излизат два безкрайни ръба, а от върховете B и C — по един. Сферичното изображение на този многостен се състои от един триъгълник (отговарящ на върха D), два четириъгълника (отговарящи на върховете B и C) и един петоъгълник (отговарящ на върха A) (фиг. 2, *б*). Тъй като са зададени двустенните ъгли на многостена, фиксирани са дължините на страните на многоъгълниците на сферичното изображение. Тогава е напълно определен сферичният триъгълник d.

Нека има два безкрайни изпъкнали многостена P $ABCD$ и P' $A'B'C'D'$, които имат равни двустенни ъгли, но се различават по някои равнинни ъгли. Разглеждат се сферичните изображения $abcd$ и $a'b'c'd'$ на P и P'. Според горната бележка триъгълниците d и d' съвпадат. Сравняват се ъглите на двете сферични изображения. Ако всички ъгли са равни, то ще следва, че многостените P и P' съвпадат. Следователно може да се допусне, че има поне една двойка ъгли, които се различават по големина. Ъглите на сферичното изображение на P се означават с $+$, $-$ или 0 според това, дали са $>$, $<$ или $=$ на съответните ъгли на сферичното изображение на P'. Ако се допусне, че всички знаци около d са 0, то от теорема 5 ще следва, че в четириъгълниците b и c всички знаци са нули и следователно промени на знаците може да има само в ъглите 1, 2 и 3 на петоъгълника a, т. е. може да има най-много три смени на знаците, което противоречи на теорема 5. Оттук следва, че около триъгълника d трябва да има поне един знак $+$. Тогава знаците около d ще са като показаните на фиг. 2, *б*.

Сега се постъпва по начина, приложен в [3]. Разглеждат се Евклидовите триъгълни стени на P, които се срещат във върха D. Пренасят се знаците от ъглите на сферичното изображение в равнинните ъгли на многостена. Тъй като ъглите на сферичното изображение на един многостен са допълнителни до π на равнинните ъгли на многостена, то следва, че знаците на равнинните ъгли ще са противоположни на тези на сферичното изображение (фиг. 2, *в*). Тогава от сравнението на ΔABD и $\Delta A'B'D'$ следва $DB < D'B'$ и $DA > D'A'$ или

$$\frac{DB}{DA} < \frac{D'B'}{D'A'};$$

от ΔDBC и $\Delta D'B'C'$ по същия начин се получава

$$\frac{DC}{DB} < \frac{D'C'}{D'B'}$$

и накрая от сравнението на ΔDCA и $\Delta D'C'A'$ следва

$$\frac{DA}{DC} < \frac{D'A'}{D'C'}.$$

Като се умножат получените три неравенства, се стига до противоречието $1<1$, което се дължи на допускането, че има промени в знаците на сферичното изображение на P. Следователно ъглите на двете сферични изображения съвпадат, откъдето следва, че сферичното изображение на

P се определя еднозначно от дължините на страните си. Оттук се получава, че равнинните ъгли на многостена са еднозначно определени.

Следствие 2. Нека P е четиривръх безкраен изпъкнал многостен, от всеки връх на който излиза най-много един безкраен ръб. Тогава равнинните ъгли на P се определят еднозначно от двустенните му ъгли.

Доказателство. Нека P е $ABCD$. Ако точките A, B, C и D лежат в една равнина, то верността на твърдението следва от следствие 1. Затова нека точките A, B, C и D не лежат в една равнина. Тогава да разгледаме сферичното изображение на P. То се състои от един триъгълник и три четириъгълника. Ако се допусне, че има два многостена с различни равнинни ъгли, но с еднакви двустенни ъгли, и се сравнят ъглите на двете сферични изображения (както в теорема B), се получава веднага, че около триъгълника трябва да има поне един знак +, защото в противен случай ще излезе, че ъглите на сферичните изображения са фиксирани и следователно многостените съвпадат. Ако се прехвърлят знаците на ъглите на сферичното изображение върху равнинните ъгли на многостена, получава се същият случай, както в теорема B. Следователно равнинните ъгли на многостена са еднозначно определени.

Доказателство на теорема C:

Нека има два многостена P и P', удовлетворяващи условията на теоремата. Тогава от теореми A и B следва, че равнинните ъгли на двата многостена са равни. Но в такъв случай се получава, че съответните стени на многостените са конгруентни и между тях може да се установи изометрично съответствие. При това P и P' са еднакво съставени от равни стени. Като се приложи теорема 4, се получава, че двата многостена P и P' са конгруентни. С това теоремата е доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров, А. Д.: Выпуклые многогранники. М. — Л., 1950.
2. Stoker, J. J.: Geometrical problems concerning polyhedra in the large. Comm. Pure Appl. Math., XXI (1968), No. 2, 119 — 168.
3. Karcher, H.: Remarks on polyhedra with given dihedral angles. Comm. Pure Appl. Math., XXI (1968), No. 2, 169 — 174.
4. Милка, А. Д.: К одной гипотезе Стокера. Укр. геом. сб., 9 (1970), 85 — 86.

Постъпила на 15. VI. 1974 г.

ON INFINITE CONVEX POLYHEDRA WITH GIVEN DIHEDRAL ANGLES

E. Andreitchin

(SUMMARY)

Some of the cases of the converse theorem to that of A. D. Alexandrov are considered. It is proved that the dihedral angles of an infinite convex polyhedron determine uniquely its face angles for the following types of polyhedra:

1. If three faces meet in each but one vertex of an infinite convex polyhedron and four faces at the most in the last vertex.

2. A 4-vertex infinite convex polyhedron one of whose vertices serves as the origin of two infinite edges, while the rest of the vertices can serve as the origin of not more than one infinite edge.

Moreover it is proved that if not only the dihedral angles but also the lengths of the finite edges of above types of polyhedra are given, then the polyhedra are defined within motion or motion and reflection.