СПЕЦИАЛНИ ЧЕТИРИМЕРНИ РИМАНОВИ МНОГООБРАЗИЯ

Грозьо Станилов

Настоящата работа е продължение на работите ни [1] и [2]. Тук поставяме проблеми за връзката между въведените там величини: кривина на произволномерно линейно допирателно подпространство на риманово многообразие и взаимна инварианта на двойка линейни подпространства в една и съща точка на риманово многообразие. В настоящата работа намираме формули, които свързват, от една страна, кривините на сечението и обединението на ортогонална двойка линейни допирателни подпространства в точка на произволномерно риманово многообразие, а, от друга страна — кривините на самите подпространства, както и взаимната им инварианта. Основната цел в настоящата работа е изследването на специални четиримерни риманови многообразия, за които взаимната инварианта на произволна двойка ортогонални двумерни допирателни подпространства е постоянна величина, независеща от двойката. Това са четиримерните конформно плоски риманови многообразия, които в известен смисъл са аналог на айнщайновите риманови многообразия.

1. ВЪРХУ КРИВИНИТЕ НА ДОПИРАТЕЛНИТЕ ЛИНЕЙНИ ПОДПРОСТРАНСТВА НА ПРОИЗВОЛНОМЕРНО РИМАНОВО МНОГООБРАЗИЕ

Нека E^m, E^k са произволни допирателни линейни подпространства на допирателното пространство M_p към n-мерното риманово многообразие M в точката $p \in M$. Ако $u_1, u_2, \ldots, u_m$ е ортонормирана база за E^m, а $v_1, v_2, \ldots, v_k$ е такава база за E^k, то взаимната инварианта $K(E^m; E^k)$ на двойката линейни подпространства E^m, E^k се дава с формулата

$$K(E^m; E^k) = \sum_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,k}} \langle R(u_i, v_j)v_j, u_i \rangle. \tag{1}$$

Тук R е тензорът на кривината на M, а $\langle \cdot, \cdot \rangle$ е означение за скаларното произведение в M_p. Ако двете линейни подпространства са ортогонални, (1) приема вида

$$K(E^m; E^k) = \sum_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,k}} K(u_i, v_j), \tag{2}$$

където $K(u_i, v_j)$ е римановата кривина на двумерното линейно подпространство, определено с ортонормираната двойка вектори u_i, v_j. Кривината $K(E^m)$ на E^m се дава с формулата

$$K(E^m) = \sum_{1 \leq i < j \leq m} K_{ij}, \tag{3}$$

като $K_{ij} = K(u_i, u_j)$.

Нека сечението $E^m \cap E^k$ на подпространствата E^m, E^k има димензия d, а обединението им $E^m \cup E^k$ — димензия s. По-нататък предполагаме, че E^m, E^k се пресичат ортогонално. Това означава следното: ортогоналните допълнения $E^m \backslash (E^m \cap E^k)$, $E^k \backslash (E^m \cap E^k)$ на сечението $E^m \cap E^k$ в E^m и E^k са перпендикулярни, т. е. всеки вектор от едното допълнение е перпендикулярен на всеки вектор от другото.

Най-напред ще намерим формули, които свързват, от една страна, кривините на сечението и обединението на две такива линейни подпространства, а, от друга страна — кривините на самите подпространства, както и взаимната им инварианта.

На първо място ще докажем следната формула:

$$\begin{aligned} &K(E^m \cup E^k) + K(E^m \cap E^k) \\ &= K(E^m;\ E^k) + K(E^m \backslash (E^m \cap E^k)) + K(E^k \backslash (E^m \cap E^k)). \end{aligned} \tag{4}$$

Доказателство. Нека $u_1, u_2, \ldots, u_m$ е ортонормирана база за E^m, като $u_1, u_2, \ldots, u_d$ е база за сечението $E^m \cap E^k$. Да предположим, че векторите $u_1, u_2, \ldots, u_d, u_{m+1}, \ldots, u_s$ образуват ортонормирана база за E^k. Верността на (4) следва, като се вземат пред вид следните равенства:

$$K(E^m \cup E^k) = \sum_{1 \leq i < j \leq s} K_{ij},$$

$$K(E^m \cap E^k) = \sum_{1 \leq i < j \leq d} K_{ij},$$

$$K(E^m;\ E^k) = \sum_{\substack{i=1,\ldots,d,d+1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,d,m+1,\ldots,s}} K_{ij},$$

$$K(E^m \backslash (E^m \cap E^k)) = \sum_{d+1 \leq i < j \leq m} K_{ij},$$

$$K(E^k \backslash (E^m \cap E^k)) = \sum_{m+1 \leq i < j \leq s} K_{ij}.$$

Освен формулата (4), като имаме пред вид и равенствата

$$K(E^k) = \sum_{i=1,\ldots,d,m+1,\ldots,s} K_{ij},$$

$$K(E^m\backslash(E^m\cap E^k);\ E^k\backslash(E^m\cap E^k))=\sum_{\substack{i=d+1,\dots,m\\ j=m+1,\dots,s}} K_{ij},$$

получаваме следната формула:

$$K(E^m\cup E^k)+K(E^m\cap E^k) \tag{5}$$
$$=K(E^m\backslash(E^m\cap E^k);\ E^k\backslash(E^m\cap E^k))+K(E^m)+K(E^k).$$

Формулите (4) и (5) са в сила за всеки две линейни подпространства E^m, E^k съответно от димензии m и k, които се пресичат ортогонално по d-мерното сечение $E^m\cap E^k$ и имат s-мерното обединение $E^m\cup E^k$. Доказателството, което дадохме, използва, че $d\geq 1$, т. е. сечението е непразно. Но (4) и (5) са в сила и когато сечението $E^m\cap E^k$ е празно. В този случай от (4) и (5) получаваме единствената формула

$$K(E^m\cup E^k)=K(E^m;\ E^k)+K(E^m)+K(E^k). \tag{6}$$

Доказателството на тази формула се получава и директно чрез използване на следните равенства:

$$K(E^m\cup E^k)=\sum_{i=1,2,\dots,m+k} K_{ij},$$

$$K(E^m)=\sum_{1\leq i<j\leq m} K_{ij},$$

$$K(E^k)=\sum_{m+1\leq i<j\leq m+k} K_{ij},$$

$$K(E^m;\ E^k)=\sum_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=m+1,\dots,m+k}} K_{ij},$$

като сега считаме, че E^m е определено с векторите $u_1,\dots,u_m$, а E^k — с векторите $u_{m+1},\dots,u_{m+k}$.

Като следствие от (4) и (5) получаваме формулата

$$K(E^m;\ E^k)=K(E^m\cup E^k)+K(E^m\cap E^k) \tag{7}$$
$$-K(E^m\backslash(E^m\cap E^k))-K(E^k\backslash(E^m\cap E^k)),$$

която показва, че взаимната инварианта на две ортогонални допирателни подпространства се изразява чрез кривини на линейни подпространства.

Сега ще приведем една формула, чрез която взаимната инварианта на две ортогонални допирателни линейни подпространства се изразява само чрез взаимни инварианти на допирателни подпространства от по-малки димензии. Тази формула е

$$K(E^m;\ E^k)=K(E^m\backslash(E^m\cap E^k);\ E^m\cap E^k)+K(E^k\backslash(E^m\cap E^k);\ E^m\cap E^k) \tag{8}$$
$$+K(E^m\backslash(E^m\cap E^k);\ E^k\backslash(E^m\cap E^k))+K(E^m\cap E^k;\ E^m\cap E^k).$$

Доказателството се получава, като се вземат пред вид следните равенства:

$$K(E^m\backslash(E^m\cap E^k);\ E^m\cap E^k)=\sum_{\substack{i=1,\dots,d,\\ j=d+1,\dots,m}} K_{ij},$$

$$K(E^k\backslash(E^m\cap E^k);\ E^m\cap E^k)=\sum_{\substack{i=1,\dots,d,\\ j=m+1,\dots,s}} K_{ij},$$

$$K(E^m\backslash(E^m\cap E^k);\ E^k\backslash(E^m\cap E^k))=\sum_{\substack{i=d+1,\dots,m,\\ j=m+1,\dots,s}} K_{ij},$$

$$K(E^m\cap E^k;\ E^m\cap E^k)=\sum_{i,j=1,\dots,d} K_{ij}.$$

Да предположим, че разглеждаме сега двойки ортогонални допълнения E^m, $E^{n-m}\perp$ на допирателното пространство M_p. Нека $u_1,\dots,u_n$ е ортонормирана база за M_p. Означаваме с $K(i_1\cdots i_m;\ \overline{i_1\cdots i_m})$ взаимната инварианта на двойката ортогонални допълнения в M_p, едното от които е определено с векторите $u_{i_1},\dots,u_{i_m}$. В сила е формулата

$$\sum_{1\leq i_1<\dots<i_m\leq n} K(i_1\cdots i_m;\ \overline{i_1\cdots i_m})=2\binom{n-2}{m-1}S(p), \tag{9}$$

където $S(p)$ е скаларната кривина на многообразието M в точката $p\in M$.

Доказателство. Съгласно (2) взаимната инварианта $K(i_1\cdots i_m;\ \overline{i_1\cdots i_m})$ се изразява чрез риманови кривини. В горната сума трябва да отчетем колко пъти се явява римановата кривина, например K_{12}. Тя се среща точно когато имаме величината $K(1\ i_2\cdots i_m;\ 2\ \overline{i_2\cdots i_m})$ или $K(2\ i_2\cdots i_m;\ 1\ \overline{i_2\cdots i_m})$. Числата $i_2,\dots,i_m$, на брой $m-1$, вземат $n-2$ стойности: $3, 4,\dots, n$. Следователно K_{12} се явява $2\binom{n-2}{m-1}$ пъти, с което формулата (9) е доказана.

Като приложение на горните формули ще докажем следната

Теорема 1. Взаимната инварианта на двойка ортогонални допълнения се изразява чрез суми от кривините на двойки ортогонални допълнения:

$$K(E^m;\ E^{n-m}\perp)=\frac{\Sigma(K_{i_1\cdots i_m}+K_{\overline{i_1\cdots i_m}})}{\binom{n-2}{m}+\binom{n-2}{m-2}}-K(E^m)+K(E^{n-m}\perp)). \tag{10}$$

Обратно, сумата от кривините на коя да е двойка ортогонални допълнения се изразява чрез взаимни инварианти на двойки ортогонални допълнения:

$$(11)\qquad K(E^m)+K(E^{n-m}\perp)=\frac{\Sigma K(i_1\dots i_m;\ \overline{i_1\dots i_m})}{2\binom{n-2}{m-1}}-K(E^m;\ E^{n-m}\perp).$$

Доказателство. Съгласно (6) имаме

$$(12)\qquad S(p)=K(E^m;\ E^{n-m}\perp)+K(E^m)+K(E^{n-m}\perp).$$

В [2] доказахме формулата

$$(13)\qquad \sum_{1\leq i_1<\dots<i_m\leq n} K_{i_1\dots i_m}=\binom{n-2}{m-2}S(p),$$

като $K_{i_1,\dots,i_m}$ е кривината на m-мерното линейно подпространство, определено с векторите $u_{i_1}\dots u_{i_m}$. Последната формула прилагаме за ортогоналните допълнения на пространствата, определени с $u_{i_1},\dots,u_{i_m}$. Получаваме

$$\sum K_{\bar{i}_1\dots \bar{i}_m}=\binom{n-2}{m}S(p).$$

От последните две формули намираме

$$S(p)=\frac{\Sigma(K_{i_1\dots i_m}+K_{\bar{i}_1\dots \bar{i}_m})}{\binom{n-2}{m}+\binom{n-2}{m-2}},$$

което, заместено в (12), дава желаната формула (10).

Формулата (11) е просто следствие от (9) и (12).

Следствие. Взаимната инварианта на двойка ортогонални допълнения е константа C_m точно когато сумата от кривините на коя да е двойка ортогонални допълнения (от същия тип) е константа C'_m.

Доказателство. Нека

$$K(E^m;\ E^{n-m}\perp)=C_m.$$

Съгласно (11) имаме

$$K(E^m)+K(E^{n-m}\perp)=\frac{\binom{n}{m}}{2\binom{n-2}{m-1}}C_m-C_m=C'_m,$$

като

$$C'_m:=\left(\frac{\binom{n}{m}}{2\binom{n-2}{m-1}}-1\right)C_m.$$

Обратно, да приемем, че

$$K(E^m)+K(E^{n-m}{}_{\perp})=C'_m.$$

От (10) следва

$$K(E^m;E^{n-m}{}_{\perp})=\left(\frac{\binom{n}{m}}{\binom{n-2}{m}+\binom{n-2}{m-2}}-1\right)C'_m,$$

с което се установява валидността на следствието.

Забележка. Непосредствено се проверява, че е изпълнено равенството

$$\left(\frac{\binom{n}{m}}{\binom{n-2}{m}+\binom{n-2}{m-2}}-1\right)\left(\frac{\binom{n}{m}}{2\binom{n-2}{m-1}}-1\right)=1,$$

което е еквивалентно на

$$\frac{\binom{n}{m}}{2\binom{n-2}{m-1}}\cdot\frac{\binom{n}{m}}{\binom{n-2}{m}+\binom{n-2}{m-2}}=\frac{\binom{n}{m}}{2\binom{n-2}{m-1}}+\frac{\binom{n}{m}}{\binom{n-2}{m}+\binom{n-2}{m-2}}$$

или на

$$\binom{n-2}{m}+\binom{n-2}{m-2}+2\binom{n-2}{m-1}=\binom{n}{m}.$$

Като вземем пред вид, че

$$\binom{n-2}{m}+\binom{n-2}{m-2}+2\binom{n-2}{m-1}$$

$$=\left(\binom{n-2}{m}+\binom{n-2}{m-1}\right)+\left(\binom{n-2}{m-2}+\binom{n-2}{m-1}\right)$$

$$=\binom{n-1}{m}+\binom{n-1}{m-1}-\binom{n}{m},$$

следва верността на желаното равенство.

Твърдението в следствието е обобщение на следното твърдение от нашата работа [2]: Римановото многообразие е айнщайново точно когато кривината на хиперравнините е постоянна величина. Получава се при $m=1$.

2. ЕДНА ХАРАКТЕРИСТИКА НА ЧЕТИРИМЕРНИТЕ КОНФОРМНО ПЛОСКИ РИМАНОВИ МНОГООБРАЗИЯ

Поставяме за разрешение следния въпрос. Ако за едно риманово многообразие взаимната инварианта на коя да е двойка ортогонални допълнения E^m, $E^{n-m}\perp$ е константата C_m, то вярно ли е твърдението, че взаимната инварианта на коя да е двойка ортогонални допълнения $E^{m'}$, $E^{n-m'}\perp$ при $m\neq m'$ е също константа $C_{m'}$? Ще покажем, че отговорът на този въпрос е въобще отрицателен.

За целта нека отсега нататък да предположим, че $\dim M=4$. При дадена ортонормирана база u_1, u_2, u_3, u_4 за M_p имаме шест риманови кривини на двумерните допирателни (координатни) подпространства: $K_{12}, K_{13}, K_{14}, K_{23}, K_{24}, K_{34}$. Налице са три двойки ортогонални двумерни допълнения, чиито кривини са

$$K(12;\ 34)=K_{13}+K_{14}+K_{23}+K_{24},$$

$$K(13;\ 24)=K_{12}+K_{14}+K_{23}+K_{34},$$

$$K(14;\ 23)=K_{12}+K_{13}+K_{24}+K_{34},$$

като съгласно (9) е в сила равенството

$$K(12;34)+K(13;24)+K(14;23)=2S(p).$$

Имаме четири хиперповърхнини (или четири двойки ортогонални допълнения: едномерно + тримерно допирателно подпространство), чиито кривини са

$$K_{123}=K_{12}+K_{13}+K_{23},$$

$$K_{124}=K_{12}+K_{14}+K_{24},$$

$$K_{134}=K_{13}+K_{14}+K_{34},$$

$$K_{234}=K_{23}+K_{24}+K_{34},$$

като съгласно (13) е в сила равенството

$$K_{123}+K_{124}+K_{134}+K_{234}=2\ S(p).$$

Следователно за трите взаимни инварианти и четирите кривини на хиперравнините имаме една връзка:

$$K(12;34)+K(13;24)+K(14;23)$$
$$=K_{123}+K_{124}+K_{134}+K_{234}.$$

Значи имаме общо шест независими величини, точно колкото е броят на римановите кривини. Това ни навежда на мисълта да изразим римановата кривина чрез взаимни инварианти на двойка ортогонални двумерни допълнения и кривините на хиперравнините. Това се оказва възможно. Ето и формулата:

$$K_{23}=\frac{1}{2}(K_{123}+K_{234}-K(14;23)). \tag{14}$$

Резултатът, изразен с тази формула, може да се изкаже по следния начин: удвоената риманова кривина на двумерна площадка се получава, като от сумата на кривините на две тримерни ортогонални пространства през дадената двумерна площадка извадим взаимната инварианта на дадената площадка и нейното ортогонално допълнение.

Разбира се, за да бъде това твърдение коректно, трябва да покажем, че величината $K_{123}+K_{234}$ не зависи от въртене в равнината (u_1, u_4). За целта да извършим ротацията

$$u_1' = \cos\alpha\, u_1 + \sin\alpha\, u_4,$$

$$u_4' = -\sin\alpha\, u_1 + \cos\alpha\, u_4$$

и да пресметнем

$$K_{1'23}+K_{234'} = K_{1'2}+K_{1'3}+K_{23}+K_{23}+K_{24'}+K_{34'}.$$

Сумата $K_{1'2}+K_{1'3}+K_{24'}+K_{34'}$ не зависи от това въртене; тя е точно $K(14;23)$.

Ще покажем, че не е възможно да се изразят трите взаимни инварианти чрез четирите кривини на хиперравнините и обратно. Действително, ако приемем, че

$$K(12;34) = \alpha K_{123} + \beta K_{124} + \gamma K_{134} + \delta K_{234},$$

следват едновременно $\delta=0$, $\delta=1$, което е невъзможно. Аналогично се получава и абсурдността на представянето

$$K_{123} = \lambda K(12;34) + \mu K(13;24) + \nu K(14;23).$$

Направените разсъждения ни дават повод да разглеждаме следните три типа четиримерни риманови многообразия:

Първи тип: римановата кривина $K_{ij}=\text{const}$.

Втори тип: кривината на хиперравнините $K_{ijk}=\text{const}$.

Трети тип: взаимната инварианта на двойка ортогонални двумерни допълнения $K(ij;\bar{i}\bar{j})=\text{const}$.

Многообразията от първи тип са класическите риманови многообразия с постоянна риманова кривина. Многообразията от втори тип са айнщайновите многообразия, широко известни в класическата риманова геометрия. Както е известно от [1], те се характеризират по следния начин: разликата от риманови кривини на произволна двумерна площадка и нейното ортогонално допълнение е нула. Многообразията от трети тип, доколкото ни е известно, са, изглежда, непознати и тук се въвеждат за първи път.

Като използуваме формулата (14), получаваме

Теорема 2. Едно четиримерно риманово многообразие има постоянна риманова кривина точно когато е айнщайново и от тип 3.

По-нататък ще се запознаем със структурата на тензора на кривината за пространство от трети тип. Ако u_1, u_2, u_3, u_4 е ортонормирана база за допирателното пространство M_p, да положим

$$\mathring{R}_{ij,kl} = \langle R(u_i, u_j)u_k, u_l \rangle.$$

Тогава

$$K_{ij}=\mathring{R}_{ij,ji} \qquad (i\neq j).$$

Ще докажем следната

Теорема 3. Едно четиримерно риманово многообразие е многообразие с постоянна взаимна инварианта на двойка двумерни ортогонални допълнения точно когато за тензора на кривината му са в сила следните равенства:

$$\begin{aligned} &K_{12}+K_{34}=C,\\ (15)\qquad &K_{13}+K_{24}=C,\\ &K_{14}+K_{23}=C; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\mathring{R}_{21,13}-\mathring{R}_{24,43}=0,\\ &\mathring{R}_{21,14}-\mathring{R}_{23,34}=0,\\ (16)\qquad &\mathring{R}_{12,23}-\mathring{R}_{14,43}=0,\\ &\mathring{R}_{12,24}-\mathring{R}_{13,34}=0,\\ &\mathring{R}_{13,32}-\mathring{R}_{14,42}=0,\\ &\mathring{R}_{31,14}-\mathring{R}_{32,24}=0; \end{aligned}$$

$$(17)\qquad \mathring{R}_{13,24}=\mathring{R}_{14,23}=\mathring{R}_{12,34}=0.$$

Доказателство. Нека $(\bar{u}_1, \bar{u}_2, u_3, u_4)$ е друга ортонормирана база, като

$$\bar{u}_i=\sum_{j=1}^{4}\alpha_i^j u_j, \quad i=1, 2, 3, 4.$$

Матрицата (α_i^j) е ортогонална. Ще намерим един удобен израз за сумата от кривините на произволна двойка двумерни ортогонални допълнения. Имаме

$$\begin{aligned} K(\bar{u}_1, \bar{u}_2)+K(u_3, u_4)&=\langle R(\bar{u}_1, \bar{u}_2)\bar{u}_2, u_1\rangle+\langle R(u_3, u_4)\, u_4, u_3\rangle\\ &=\sum_{i,j,k,l=1}^{4}\alpha_1^i\alpha_2^j\alpha_2^k\alpha_1^l\langle R(u_i, u_j)u_k, u_l\rangle\\ &+\sum_{i,j,k,l=1}^{4}\alpha_3^i\alpha_4^j\alpha_4^k\alpha_1^l\langle R(u_i, u_j)u_k, u_l\rangle\\ &=\sum_{i<j,k<l}(\alpha_1^i\alpha_2^j-\alpha_1^j\alpha_2^i)(\alpha_2^k\alpha_1^l-\alpha_2^l\alpha_1^k)\mathring{R}_{ij,kl}\\ &+\sum_{i<j,k<l}(\alpha_3^i\alpha_4^j-\alpha_3^j\alpha_4^i)(\alpha_4^k\alpha_3^l-\alpha_4^l\alpha_3^k)\mathring{R}_{ij,kl}. \end{aligned}$$

Полагаме

$$A^{ij}:=\alpha_1^i\alpha_2^j-\alpha_1^j\alpha_2^i,$$

$$B^{ij}:=\alpha_3^i\alpha_4^j-\alpha_3^j\alpha_4^i.$$

Тогава

$$K(u_1, u_2)+K(\bar{u}_3, \bar{u}_4)=-\sum_{i\ j,k<l}(A^{ij}A^{kl}+B^{ij}B^{kl})\mathring{R}_{ij,kl}.$$

По-нататък на няколко места ще се възползуваме от следното свойство на ортогоналните матрици: всеки минор в ортогонална матрица е равен на адюнгирания си минор.

Въз основа на това горната сума приема вида

$$(18)\qquad K(\bar{u}_1, \bar{u}_2)+K(\bar{u}_3, u_4)=((A^{12})^2+(A^{34})^2)(K_{12}+K_{34})$$
$$+((A^{13})^2+(A^{24})^2)(K_{13}+K_{24})+((A^{14})^2+A^{23})^2)(K_{14}+K_{23})$$
$$+2(A^{12}A^{13}-A^{24}A^{34})(\mathring{R}_{21,13}-\mathring{R}_{24,43})+2(A^{12}A^{14}+A^{23}A^{34})(\mathring{R}_{21,14}-\mathring{R}_{23\,34})$$
$$+2(A^{12}A^{23}+A^{14}A^{34})(\mathring{R}_{14,43}-\mathring{R}_{12,23})+2(A^{13}A^{34}-A^{12}A^{24})(\mathring{R}_{12,24}-\mathring{R}_{13,34})$$
$$+2(A^{13}A^{23}-A^{14}A^{24})(\mathring{R}_{13,32}-\mathring{R}_{14,42})+2(A^{13}A^{14}-A^{24}A^{23})(\mathring{R}_{31,14}-\mathring{R}_{32,24})$$
$$-4(A^{12}A^{34}\mathring{R}_{12,34}+A^{13}A^{24})\mathring{R}_{13,24}+A^{14}A^{23}\mathring{R}_{14,23}).$$

След тези подготвителни неща да преминем към доказателството на теоремата.

Нека са изпълнени равенствата (15), (16), (17), посочени в теоремата. Тогава

$$K(u_1, u_2)+K(\bar{u}_3, u_4)=((A^{12})^2+(A^{34})^2+(A^{13})^2+(A^{24})^2+(A^{14})^2+(A^{23})^2)C=C$$

съгласно теоремата на Лаплас, приложена за ортогоналната матрица (α_i^j). Значи сумата от кривините на произволна двойка ортогонални двумерни допълнения е постоянна величина и съгласно следствието на теорема 1 взаимната инварианта на такава двойка допълнения е също постоянна величина.

Обратно, да приемем, че многообразието има постоянна взаимна инварианта на всяка двойка двумерни ортогонални допълнения. Теорема 1 показва, че са изпълнени равенствата (15). При дадена ортогонална база u_1, u_2, u_3, u_4 да вземем векторите

$$e_1=\cos\alpha\, u_1+\sin\alpha\, u_3,$$
$$e_2=-\sin\alpha\, u_1+\cos\alpha\, u_3.$$

За сумата от кривините на двойките ортогонални двумерни допълнения (e_1, u_2) и (e_2, u_4) имаме

$$K(e_1, u_2)+K(e_2, u_4)=C+\sin 2\alpha(\mathring{R}_{12,23}-\mathring{R}_{14,43}).$$

Условието тази сума да е константата C (за всяко α) дава

$$\mathring{R}_{12,23}-\mathring{R}_{14,43}=0.$$

Чрез размяна на индексите 1, 2, 3, 4 се получават останалите равенства на (16).

За да докажем верността на (17), да вземем ортонормираната база

$$u_1'=\frac{1}{\sqrt{2}}(u_1+u_2),\quad u_2'=\frac{1}{\sqrt{2}}(u_3+u_4),$$

$$u_3' = \frac{1}{\sqrt{2}}(u_1 - u_2), \qquad u_4' = \frac{1}{\sqrt{2}}(u_3 - u_4).$$

Непосредствено, вземайки пред вид (15) и (16), пресмятаме

$$K(u_1', u_2') + K(u_3', u_4') = C + R_{13,42} + R_{14,32}.$$

Оттук следва

$$\mathring{R}_{13,42} + \mathring{R}_{14,23} = 0.$$

Да изберем първите два реда на ортогоналната матрица (α_i^j), както следва:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Намираме

$$A^{12} = -\frac{1}{2}, \quad A^{13} = 0, \quad A^{14} = -\frac{1}{2},$$

$$A^{23} = \frac{1}{2}, \quad A^{24} = 0, \quad A^{34} = -\frac{1}{2}.$$

Формулата (18) дава

$$\mathring{R}_{12,34} = \mathring{R}_{14,23}.$$

От тъждеството на Ричи

$$\mathring{R}_{13,42} = \mathring{R}_{12,34} + \mathring{R}_{14,23}$$

и последните две равенства за $\mathring{R}_{ij,kl}$ следват желаните равенства (17).

С това теоремата е доказана.

Теорема 4. Равенствата (15), (16) и (17) имат инвариантен характер относно смяната на ортонормираната координатна система в M_p.

Доказателство. Нека

$$\bar{u}_i = \sum_{j=1}^{4} \alpha_i^j u_j, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

като (α_i^j) е ортогонална матрица. Непосредствено намираме

$$\mathring{R}_{12,34} = -\sum_{i<j} A^{ij} B^{kl} \mathring{R}_{ij,kl}.$$

Като се използват (15) — (17) и някои свойства на ортогоналните матрици, в частност равенството

$$A^{12}A^{34} + A^{14}A^{23} + A^{13}A^{42} = 0,$$

следва $\overset{\circ}{R}_{12.34}=0$. Аналогично се показва верността на останалите равенства от (17) при новата база. Верността на (15) при новата база е очевидна. Остава да проверим (16). Имаме

$$\overset{\circ}{R}_{21.13}-\overset{\circ}{R}_{24.43}=-\sum_{i,j,k<l}(A_{12}^{ij}A_{13}^{kl}-A_{24}^{ij}A_{34}^{kl})\overset{\circ}{R}_{ij.kl},$$

като A_{ij}^{kl} е минор в ортогоналната матрица (α_i^j). Като вземем пред вид (15) — (17) и равенството

$$A_{12}^{12}A_{13}^{12}+A_{12}^{13}A_{13}^{13}+A_{12}^{14}A_{13}^{14}=A_{24}^{12}A_{34}^{12}+A_{24}^{13}A_{34}^{13}+A_{24}^{14}A_{34}^{14},$$

намираме

$$\overset{\circ}{R}_{21.13}-\overset{\circ}{R}_{24.43}=0.$$

По същия начин се прави проверката и за останалите равенства на (16).

С това теоремата е доказана.

С оглед на пълнотата на нашите разглеждания ще формулираме аналогични на теорема 3 и теорема 4 твърдения за другите два типа риманови многообразия.

Теорема 5. Едно четиримерно риманово многообразие е айнщайново точно когато за тензора на кривината му са в сила следните равенства:

$$K_{12}-K_{34}=K_{13}-K_{24}=K_{14}-K_{23}=0; \tag{19}$$

$$\begin{aligned} &\overset{\circ}{R}_{21.13}+\overset{\circ}{R}_{24.43}=0, \quad \overset{\circ}{R}_{12.24}+\overset{\circ}{R}_{13.34}=0,\\ &\overset{\circ}{R}_{21.14}+\overset{\circ}{R}_{23.34}=0, \quad \overset{\circ}{R}_{13.32}+\overset{\circ}{R}_{14.42}=0,\\ &\overset{\circ}{R}_{12,23}+\overset{\circ}{R}_{14,43}=0, \quad \overset{\circ}{R}_{31,14}+\overset{\circ}{R}_{32,24}=0. \end{aligned} \tag{20}$$

Теорема 6. Равенствата (19) и (20) имат инвариантен характер относно смяната на ортонормираната база в M_p.

Теорема 7. Едно произволномерно риманово многообразие е многообразие с постоянна риманова кривина точно когато за тензора на кривината му са в сила равенствата

$$\overset{\circ}{R}_{ij.ji}=C \ (\text{const}), \qquad i\neq j, \tag{21}$$

$$\overset{\circ}{R}_{ij.kl}=0 \tag{22}$$

за поне три различни индекса. Тези равенства имат инвариантен характер относно смяната на ортонормираната база в M_p.

Ние няма да излагаме доказателствата на последните три теореми, тъй като те са почти сходни с доказателствата на предните две теореми. Ще покажем само, че като се използва теорема 7, може по нов начин да се стигне до формулата

$$R_{ij.kl}=C(g_{il}g_{jk}-g_{ik}g_{jl}), \tag{23}$$

свързваща тензора на кривината и метричния тензор на риманово многообразие с постоянна риманова кривина C.

Действително нека $(x^1, \ldots, x^n)$ са локални координати върху римановото многообразие M и нека за базисните вектори $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)$ на M_p имаме представянията

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_{j=1}^{4} \lambda_i^j u_j, \qquad i = 1, 2, 3, 4.$$

Тогава

$$R_{ij,kl} := \subset < R\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^l} > = \sum_{i,j,k,\bar{l}} \lambda_i^i \lambda_j^j \lambda_k^k \lambda_l^l \mathring{R}_{\bar{i}\bar{j},k\bar{l}}.$$

Да приемем, че са изпълнени равенствата (21) и (22) в теорема 7, т. е. многообразието притежава постоянна риманова кривина. Тогава в последната сума трябва или $k = \bar{i}$, $\bar{l} = j$, или $k = j$, $\bar{l} = i$ и тензорът на кривината приема вида

$$R_{ij,kl} = C(\lambda_i^{\bar{i}} \lambda_j^{\bar{j}} \lambda_k^j \lambda_l^i - \lambda_i^i \lambda_j^j \lambda_k^{\bar{i}} \lambda_l^j). \tag{24}$$

Понеже (u_i) е ортонормирана база, то за метричния тензор g на многообразието имаме

$$g_{ij} := g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \lambda_i^{\bar{i}} \lambda_j^{\bar{i}}.$$

С това (24) приемат желания вид (23).

Обратно, нека са изпълнени (23). Ще покажем, че са в сила (21) и (22), т. е. имаме многообразие с постоянна риманова кривина. Ако приемем, че

$$u_i = \sum_{i=1}^{4} \alpha_i^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \qquad i = 1, 2, 3, 4,$$

то

$$\mathring{R}_{ij,ji} = \lambda_i^{\bar{i}} \lambda_j^{\bar{j}} \lambda_j^p \lambda_i^q C(g_{\bar{i}q} g_{\bar{i}p} - g_{\bar{i}p} g_{\bar{j}q}).$$

Понеже u_i, u_j образуват ортонормирана двойка вектори, то

$$g_{iq} \lambda_i^i \lambda_i^q = g_{jp} \lambda_j^{\bar{j}} \lambda_j^p = 1, \quad g_{\bar{i}p} \lambda_i^{\bar{i}} \lambda_j^p = 0.$$

Тогава $\mathring{R}_{ij,ji} = C$.

Да разгледаме компонентата на тензора на кривината с три различни индекса:

$$\mathring{R}_{ij,jk} = \lambda_i^{\bar{i}} \lambda_j^j \lambda_j^p \lambda_k^k C(g_{i\bar{k}} g_{\bar{j}\bar{p}} g_{\bar{i}p} g_{\bar{j}\bar{k}}).$$

Вследствие ортогоналността на u_i, u_k и u_i, u_j следва $\mathring{R}_{ij,jk} = 0$.

Да разгледаме компонентата на тензора на кривината с четири различни индекса:

$$\mathring{R}_{ij,kl}=\lambda_i^{\bar{i}}\lambda_j^{\bar{j}}\lambda_k^{\bar{k}}\lambda_l^{\bar{l}}\,C(g_{\bar{i}\bar{l}}\,g_{\bar{j}\bar{k}}-g_{\bar{i}\bar{k}}\,g_{\bar{j}\bar{l}}).$$

Поради ортогоналността на векторите u_j, u_l и u_i, u_j следва $\mathring{R}_{ij,kl}=0$, с което са проверени равенствата (21) и (22).

Естествен е въпросът за съществуване на четиримерни риманови пространства от трети тип, т. е. за които сумата от кривините на коя да е двойка ортогонални двумерни допирателни подпространства е постоянна величина. Френският геометър М. Берже ми съобщи, че четиримерните конформно плоски риманови пространства притежават това свойство. Действително тензорът на конформната кривина за едно риманово многообразие се дава с формулата [4]

$$C^h_{ijk}=R^h_{ijk}+\frac{1}{n-2}(\delta^h_j R_{ik}-\delta^h_k R_{ij}+g_{ik}R^h_j-g_{ij}R^h_k)+\frac{R}{(n-1)(n-2)}(\delta^h_k g_{ij}-\delta^h_j g_{ik}). \tag{25}$$

Оттук при $n=4$ и ако базата е ортонормирана, т. е. $g_{ij}=\delta_i^j$, следват равенствата (15), (16) и (17).

По-нататък ние ще покажем, че конформно плоските многообразия са единствените многообразия с това свойство.

Да означим с $\rho(u)$ кривината на Ричи за направлението u и нека $K(u, v)$ е римановата кривина на двумерната равнина, определена с ортонормираната база u, v. Най-напред ще докажем следната

Теорема 8. За едно четиримерно риманово многообразие сумата от римановите кривини на произволна двойка ортогонални двумерни допирателни подпространства е константа C точно когато изразът

$$\rho(u)+\rho(v)-2K(u, v) \tag{26}$$

е равен на константа C'.

Доказателство. Нека u_1, u_2, u_3, u_4 е произволна ортонормирана база за допирателното пространство M_p в точка p на многообразието M. Първото условие в теоремата е еквивалентно на следните равенства:

$$\begin{aligned} K(u_1, u_2)+K(u_3, u_4)&=C,\\ K(u_1, u_3)+K(u_2, u_4)&=C,\\ K(u_1, u_4)+K(u_2, u_3)&=C, \end{aligned} \tag{27}$$

а второто условие — на

$$\rho(u_1)+\rho(u_2)-2\,K(u_1, u_2)=C',$$

$$\rho(u_1)+\rho(u_3)-2\,K(u_1, u_3)=C',$$

$$\rho(u_1)+\rho(u_4)-2\,K(u_1, u_4)=C,'$$

$$\rho(u_2)+\rho(u_3)-2\,K(u_2,\,u_3)=C',$$
$$\rho(u_2)+\rho(u_4)-2\,K(u_2,\,u_4)=C', \tag{28}$$
$$\rho(u_3)+\rho(u_4)-2\,K(u_3\,u_4)=C'.$$

Сега е лесно да се провери, че равенствата (27) са еквивалентни на равенствата (28). С това теоремата е доказана. В допълнение ще отбележим, че между константите C, C' съществува връзката

$$C'=2\,C=\frac{2}{3}\,S(p).$$

Ако X, Y е произволна база за една двумерна равнина, то изискването в последната теорема е еквивалентно на следното равенство:

$$g(X,X)S(Y,Y)+g(Y,Y)S(X,X)-2g(X,Y)S(X,Y) \tag{29}$$
$$-2g(R(X,Y)Y,X)=C'(g(X,X)g(Y,Y)-g(X,Y)^2).$$

Тук с S сме означили тензора на Ричи за многообразието. В последното равенство заместваме X с $U+V$ и като вземем пред вид същото равенство, получаваме

$$2\,g(R(U,Y)Y,V)=g(U,V)S(Y,Y)+g(Y,Y)S(U,V) \tag{30}$$
$$-g(U,Y)S(V,Y)-g(V,Y)S(U,Y)-C'(g(U,V)g(Y,Y)$$
$$-g(U,Y)g(V,Y)).$$

От [3] използуваме следната формула за тензора на кривината:

$$3R(X,Y)Z=R(X,Y+Z)(Y+Z)-R(X,Y)Y-R(X,Z)Z \tag{31}$$
$$-R(Y,X+Z)(X+Z)+R(Y,X)X+R(Y,Z)Z.$$

Тогава от последните две формули след доста дълги пресмятания получаваме следната формула за тензора на кривината:

$$2\,g(R(X,Y)Z,U)=g(X,U)S(Y,Z)+g(Y,Z)S(X,U) \tag{32}$$
$$-g(Y,U)S(X,Z)-g(X,Z)S(Y,U)$$
$$+\frac{2}{3}\,S(p)(g(Y,U)g(X,Z)-g(X,U)g(Y,Z)).$$

Това е един израз на тензора на кривината на едно четиримерно конформно плоско риманово многообразие. Действително, като поставим в (32)

$$X=\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p,\quad Y=\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p,\quad Z=\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p,\quad U=\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)_p,$$

където x^1, x^2, x^3, x^4 е локална координатна система за многообразието, (32) приема следния вид:

$$R_{\lambda ijk}=\frac{1}{2}(g_{\lambda k}S_{ij}+g_{ij}S_{\lambda k}-g_{ik}S_{\lambda j}-g_{\lambda j}S_{ik}) \tag{33}$$

$$+\frac{S(p)}{3}(g_{ik}q_{\lambda j})-g_{\lambda k}g_{ij}).$$

Но това е точно формулата (25) за тензора на кривината на едно конформно плоско четиримерно риманово многообразие.

По този начин достигнахме до следната характеристика на конформно плоски четиримерни риманови многообразия:

Теорема 9. Нека M е четиримерно риманово многообразие. Тогава следните две твърдения са еквивалентни:

1. Многообразието е конформно плоско.

2. Сумата от кривините на произволна двойка ортогонални двумерни равнини е постоянна величина.

В този смисъл конформно плоските риманови многообразия се явяват аналог на многообразията на Айнщайн. При последните разликата от кривините е константата нула. Но при конформно плоските риманови многообразия константата няма глобален характер, тъй като се изразява със скаларната кривина на многообразието.

ЛИТЕРАТУРА

1. Станилов, Гр.: Обобщение на римановата кривина и някои приложения. Изв. Мат. инст. БАН, XIV (1973), 211 — 241.
2. Stanilov, Gr.: Eine Verallgemeinerung der Schnittkrümmung, Arch. Math., 4 (1970), 424 — 428.
3. Grommol, D., Klingenberg, W., Meier, W.: Riemannsche Geometrie im Grossen. Lect. Notes on Math., 55.
4. Eisenhart, L.: Riemannian Geometry. Princeton, 1926.

Постъпила на 14. IX. 1974 г.

SPECIAL 4-DIMENSIONAL RIEMANNIAN MANIFOLDS

G. Stanilov

(SUMMARY)

Let M be a riemannian manifold of dimension n and E^m, E^k two linear subspaces of the tangent space M_p of M at $p \in M$. Four years ago we have defined a notion of mutual curvature $K(E^m, E^k)$ of E^m, E^k and as a special case we have a notion of curvature $K(E^m)=\frac{1}{2}K(E^m, E^m)$ of E^m.

In this paper we estabilish at first the formulas (4) and (5) for orthogonal subspaces E^m, E^k. As a special case we have the relation (6).

We note the following results.

Theorem. The mutual curvature of every pair of orthogonal complements E^m, E^{n-m} in M_p can be expressed by a sum of curvatures of orthogonal complements of the same type $(m, n-m)$ and inverse.

Corollary. The mutual curvature of every pair of orthogonal complements is constant if and only if the sum of the curvatures of every pair (of the same type) of orthogonal complements is constant.

Theorem. Let M be a 4-dimensional riemannian space. The following two assertions are equivalent:

1. M is a conform flat space;

2. the sum of the curvatures of every pair of orthogonal 2-planes is constant.

In addition there are given some characterizations for 4-dimensional einsteinian riemannian manifolds and for 4-dimensional riemannian manifolds of constant sectional curvature.