ИНТЕГРАЛНИ ФОРМУЛИ ОТ КРОФТОНОВ ТИП ЗА КРИВА И СЪВКУПНОСТИ ОТ ПРАВИ, ПРЕСИЧАЩИ КРИВАТА. I

Адриян В. Борисов

В предлаганата работа са намерени в n-мерното евклидово пространство E_n интегрални формули от Крофтонов тип, които свързват интегрални инварианти на n-кратно гладка крива линия c и интегралните мерки на съвкупности K^m_{n-1} от прави, пресичащи кривата и лежащи в определени хиперравнини. При получаването на тези формули са използувани от [1] някои факти от диференциалната геометрия на c, които накратко привеждаме в § 1.

Настоящата работа е в известен смисъл обобщение на [2], където са направени подобни разглеждания в E_3.

§ 1. n-КРАТНО ГЛАДКА ПРАВИЛНА КРИВА c И СЪВКУПНОСТИ ОТ ПРАВИ K^m_{n-1}

Нека в реалното n-мерно евклидово пространство E_n е дадена една n-кратно гладка крива c с векторно параметрично уравнение

$$x=x(s),\ s\in J, \tag{1}$$

където s е дължината на дъгата на кривата c. С всяка точка $x\in c$ свързваме десен ортонормален репер $xt_1\ldots t_n$, определен по следния начин: векторът t_1 е избран върху тангентата в точка x; векторът t_v $(v=2,\ldots,n-1)$ е компланарен с оскулачната v-равнина в точка x и перпендикулярен на оскулачната $(v-1)$-равнина; векторът t_n е перпендикулярен на оскулачната хиперравнина в точка x. Трябва да отбележим, че при известни предположения за кривата c споменатите оскулачни равнини съществуват във всяка точка x и всяка $(v-1)$-оскулачна равнина се съдържа във v-оскулачната равнина [1].

Спрямо така построения репер $xt_1\ldots t_n$ за кривата c са в сила следните формули на Френе:

$$\frac{dt_1}{ds}=k_1\,t_2,$$

$$\frac{dt_2}{ds}=-k_1t_1+k_2t_3,$$

(2)
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{dt_p}{ds}=-k_{p-1}t_{p-1}+k_p t_{p+1},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{dt_{n-1}}{ds}=-k_{n-2}t_{n-2}+k_{n-1}t_n,$$
$$\frac{dt_n}{ds}=-k_{n-1}t_{n-1}.$$

Коефициентите $k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}$ се наричат съответно първа, втора,... $(n-1)$-ва кривина на кривата c в точка x.

Да фиксираме точка $x \in c$ и нека m да бъде кое да е от числата $1, 2, \ldots, n$. Хиперравнината α_{n-1}^m, която минава през точка x и има за нормален вектор t_m, е еднозначно определена. Правите, които лежат в α_{n-1}^m и пресичат кривата c в точка x, образуват сноп прави S_{n-2}^m с център x и носител α_{n-1}^m. Когато точката x описва кривата c, хиперравнините α_{n-1}^m образуват еднопараметрична съвкупност T_1^m. Да означим с K_{n-1}^m съвкупността от всички прави g на всички снопове S_{n-2}^m на T_1^m. Очевидно K_{n-1}^m зависи от $n-1$ параметъра. Нашата цел е да изразим интегралните мерки на някои от съвкупностите K_{n-1}^m $(m=1, n-1, n)$ посредством интегрални инварианти на кривата c.

С всяка права $g \in K_{n-1}^m$ свързваме семейство от ортонормални репери $ye_1 \ldots e_n$, определено по следния начин:

(3)
$$\text{а)}\quad g=[y;\ e_n];$$
$$\text{б)}\quad y=x,\ e_1=t_m.$$

Нека деривационните уравнения са

(4)
$$dy=\omega^i e_i,\ de_i=\omega_i^k e_k,$$

като пфафовите форми ω^i, ω_i^k удовлетворяват структурните уравнения

(5)
$$D\omega^i=\omega^k\wedge\omega_k^i,$$
$$D\omega_i^k=\omega_i^j\wedge\omega_j^k$$

и равенствата

(6)
$$\omega_i^i=0,\ \omega_i^k+\omega_k^i=0.$$

Тук и навсякъде по-нататък, където е възможно и това не води до неясноти, използуваме сумиране по Айнщайн, като индексите се менят по следната схема:

$$i, j, k=1, \ldots, n; \qquad v=2, \ldots, n-1;$$
$$q=1, \ldots, n-1; \quad \sigma=3, \ldots, n;$$
$$\alpha, \beta=2, \ldots, n; \qquad \tau=1, \ldots, n-2.$$

Непосредствено се проверява, че съвкупността K^m_{n-1} притежава инвариантна плътност dK^m_{n-1} и тя се задава с

(7) $$dK^m_{n-1}=\left|\bigwedge_q \omega^q_n\right|.$$

§ 2. ИНТЕГРАЛНИ ФОРМУЛИ

Ще намерим интегрални формули в случаите, когато $m=1, n-1, n$.

I. $m=1$.

С точката $x=y$ свързахме два ортонормални репера: $xt_1 \ldots t_n$ и $ye_1 \ldots e_n$. Нека трансформационните формули са съответно

(8) $$e_1=t_1,$$
$$e_\alpha=a^\beta_\alpha t_\beta,$$

(9) $$t_1=e_1,$$
$$t_\alpha=\sum_\beta a^\alpha_\beta e_\beta.$$

Трансформационната матрица $\|a^\beta_\alpha\|$ предполагаме ортогонална. Диференцираме последното равенство на системата (8). Получаваме равенството

(10) $$de_n=da^\beta_n t_\beta+a^\beta_n dt_\beta;$$

поради формулите на Френе (2) то приема вида

(11) $$de_n=da^\beta_n t_\beta-a^n_n k_{n-1} ds.t_{n-1}+\sum_v a^v_n(-k_{v-1}t_{v-1}+k_v t_{v+1})ds.$$

Заместваме (9) в (11) и като подредим по e_j, получаваме

(12) $$de_n=-a^2_n k_1 ds.e_1+\sum_\alpha\Big(\sum_\beta a^\beta_\alpha da^\beta_n+f_\alpha(k_2, \ldots, k_{n-1})ds\Big)e_\alpha.$$

В горния израз се срещат функциите f_α, чийто явен вид не ни интересува, защото при външно умножение с ds външните форми, в които тези функции са коефициенти, се анулират.

За de_n имаме още и израза

(13) $$de_n=\omega^q_n e_q.$$

От сравняването на (12) и (13) получаваме

(14) $$\omega^1_n=-a^2_n k_1 . ds,$$
$$\omega^v_n=\sum_\beta a^\beta_v da^v_n+f_v(k_2, \ldots, k_{n-1})ds.$$

Като използуваме (14), за (7) намираме

(15) $$dK^1_{n-1} = \left| a^2_n k_1 ds \wedge \bigwedge_v (\sum_\beta a^\beta_v da^\beta_n) \right|.$$

Но матрицата $\| a^\beta_\alpha \|$ е ортогонална, от което следва, че

(16) $$\sum_\beta a^\beta_n da^\beta_n = 0,$$

и затова

(17) $$da^2_n = -\frac{1}{a^2_n} \sum_\sigma a^\sigma_n da^\sigma_n.$$

Преработваме

$$\bigwedge_v (\sum_\beta a^\beta_v da^\beta_n) = \bigwedge_v (\sum_\sigma (a^\sigma_v - \frac{a^\sigma_n}{a^2_n} a^2_v) da^\sigma_n)$$

$$= \det\left(a^\sigma_v - \frac{a^\sigma_n}{a^2_n} a^2_v\right) \bigwedge_\sigma da^\sigma_n = \frac{1}{a^2_n} \bigwedge_\sigma da^\sigma_n.$$

Тогава

(18) $$dK^1_{n-1} = k_1 . \left| ds \wedge \bigwedge_\sigma da^\sigma_n \right|.$$

Въвеждаме сферични координати:

(19) $$\begin{aligned} a^2_n &= \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \ldots \cos\varphi_{n-2}, \\ a^3_n &= \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 \ldots \cos\varphi_{n-2}, \\ a^4_n &= \sin\varphi_2 \ldots \cos\varphi_{n-2}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a^{n-1}_n &= \sin\varphi_{n-3} \cos\varphi_{n-2}, \\ a^n_n &= \sin\varphi_{n-2}. \end{aligned}$$

Понеже K^1_{n-1} се състои от неориентирани прави, то

(20) $$0 \leqq \varphi_1 < \pi, \quad -\frac{\pi}{2} < \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-2} < \frac{\pi}{2}.$$

Пресмятаме

$$\bigwedge_\sigma da^\sigma_n = \prod_\tau (\cos\varphi_\tau)^\tau \bigwedge_\tau d\varphi_\tau$$

и заместваме в (18). Получаваме

(21) $$dK^1_{n-1} = k_1 \prod_\tau |\cos\varphi_\tau|^\tau \left| ds \wedge \bigwedge_\tau d\varphi_\tau \right|.$$

За да получим интегралната мярка на K_{n-1}^{1}, интегрираме (21), като се съобразяваме с (20). При това всяка права g трябва да бъде взета толкова пъти, колкото пъти принадлежи на K_{n-1}^{1}. Да означим това число с $N_1(g)$. Тогава

$$\int_{(G)} N_1(g) dK_{n-1}^{1} = \frac{\pi^{\frac{n-2}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_{(c)} k_1 \, ds. \tag{22}$$

Вляво можем да приемем, че интегрирането се извършва върху съвкупността G на всички прави в E_n, защото ако една права g не принадлежи на K_{n-1}^{1}, то $N_1(g)=0$.

Следващите два случая, които ще разгледаме, не се отличават принципно от разгледания вече случай. Поради това ще дадем само някои резултати.

II. $m=n-1$.

Нека трансформационните формули са

$$\begin{aligned} e_1 &= t_{n-1}, \\ e_\alpha &= a_\alpha^\tau t_\tau + a_\alpha^n t_n \end{aligned} \tag{23}$$

и

$$\begin{aligned} t_\tau &= \sum_\alpha a_\alpha^\tau e_\alpha, \\ t_{n-1} &= e_1, \\ t_n &= \sum_\alpha a_\alpha^n e_\alpha. \end{aligned} \tag{24}$$

Диференцираме израза за e_n от (23) и като използуваме (24), сравняваме полученото равенство с (13). Получаваме

$$\begin{aligned} \omega_n^1 &= (a_n^{n-2} k_{n-2} - a_n^n k_{n-1}) ds, \\ \omega_n^v &= \sum_\tau a_v^\tau da_n^\tau + a_v^n da_n^n + f_v(k_1, \ldots, k_{n-1}) ds. \end{aligned} \tag{25}$$

Тогава

$$dK_{n-1}^{n-1} = (a_n^{n-2} k_{n-2} - a_n^n k_{n-1}) ds \wedge \bigwedge_v \Big(\sum_\tau a_v^\tau da_n^\tau + a_v^n da_n^n\Big). \tag{26}$$

Като използуваме, че трансформационната матрица е ортогонална, намираме

$$\bigwedge_v \Big(\sum_\tau a_v^\tau da_n^\tau + a_v^n da_n^n\Big) = \frac{1}{a_n^n} \bigwedge_\tau da_n^\tau. \tag{27}$$

Следователно

$$d K_{n-1}^{n-1} = \left| \frac{a_n^{n-2} k_{n-2} - a_n^n k_{n-1}}{a_n^n} \right| \cdot \left| ds \wedge \bigwedge_\tau da_n^\tau \right|. \tag{28}$$

Въвеждаме сферични координати:

$$
(29)\qquad
\begin{aligned}
a_n^1 &= \cos\varphi_1,\\
a_n^2 &= \sin\varphi_1\cos\varphi_2,\\
a_n^3 &= \sin\varphi_1\sin\varphi_2\cos\varphi_3,\\
&\dots\dots\dots\dots\\
a_n^{n-2} &= \sin\varphi_1\sin\varphi_2\sin\varphi_3\dots\sin\varphi_{n-3}\cos\varphi_{n-2},\\
a_n^n &= \sin\varphi_1\sin\varphi_2\sin\varphi_3\dots\sin\varphi_{n-3}\sin\varphi_{n-2}.
\end{aligned}
$$

$$0<\varphi_1,\dots,\varphi_{n-3}<\pi,\quad 0\leqq\varphi_{n-2}<\pi.$$

Заместването на (29) в (28) води до

$$
(30)\qquad dK_{n-1}^{n-1} = \left|\frac{k_{n-2}\cos\varphi_{n-2}-k_{n-1}\sin\varphi_{n-2}}{\sin\varphi_{n-2}}\right| \prod_{\tau}(\sin\varphi_\tau)^{n-\tau-1}
$$

$$\times\left|ds\wedge\bigwedge_{\tau}d\varphi_\tau\right|.$$

Интегрираме двете страни на (30). Получаваме

$$
(31)\qquad \int_{(G)} N_{n-1}(g)dK_{n-1}^{n-1} = \frac{\pi^{\frac{n-2}{2}}}{2\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_{(c)}\left[\int_0^\pi |k_{n-2}\cos\varphi_{n-2}-k_{n-1}\sin\varphi_{n-2}|d\varphi_{n-2}\right]ds.
$$

Ще пресметнем интеграла в средните скоби. Интересен е случаят, когато кривините k_{n-2} и k_{n-1} не се анулират. Възможни са следните случаи:

$$\text{а)}\qquad \frac{k_{n-2}}{k_{n-1}}>0.$$

В този случай функцията $k_{n-2}\cos\varphi_{n-2}-k_{n-1}\sin\varphi_{n-2}$ се анулира за една стойност $\varphi_{n-2}'\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Тогава

$$\int_0^\pi |k_{n-2}\cos\varphi_{n-2}-k_{n-1}\sin\varphi_{n-2}|d\varphi_{n-2}$$

$$=\eta\left[\int_0^{\varphi'_{n-2}}(k_{n-2}\cos\varphi_{n-2}-k_{n-1}\sin\varphi_{n-2})d\varphi_{n-2}\right.$$

$$-\int_{\varphi'_{n-2}}^{\frac{\pi}{2}}(k_{n-2}\cos\varphi_{n-2}-k_{n-1}\sin\varphi_{n-2})d\varphi_{n-2}$$

$$-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}[k_{n-2}\cos\varphi_{n-2}-k_{n-1}\sin\varphi_{n-2})d\varphi_{n-2}]=2\eta\sqrt{k_{n-2}^2+k_{n-1}^2},$$

където $\eta=\operatorname{sgn}k_{n-1}$.

$$\text{б)}\quad \frac{k_{n-2}}{k_{n-1}}<0.$$

В този случай функцията $k_{n-2}\cos\varphi_{n-2}-k_{n-1}\sin\varphi_{n-2}$ се анулира за $\varphi''_{n-2}\in\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$. Следователно

$$\int_0^{\pi}k_{n-2}\cos\varphi_{n-2}-k_{n-1}\sin\varphi_{n-2}|d\varphi_{n-2}$$

$$=\eta[-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(k_{n-2}\cos\varphi_{n-2}-k_{n-1}\sin\varphi_{n-2})d\varphi_{n-2}$$

$$-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi''_{n-2}}(k_{n-2}\cos\varphi_{n-2}-k_{n-1}\sin\varphi_{n-2})d\varphi_{n-2}$$

$$+\int_{\varphi''_{n-2}}^{\pi}(k_{n-2}\cos\varphi_{n-2}-k_{n-1}\sin\varphi_{n-2})d\varphi_{n-2}]=2\eta\sqrt{k_{n-2}^2+k_{n-1}^2}.$$

Получихме, че и в двата случая разглежданият интеграл има една и съща стойност. Като имаме пред вид, че плътностите и мерките вземат само положителни стойности, можем да твърдим, че

$$\int_{(G)}N_{n-1}(g)dK_{n-1}^{n-1}=\frac{\pi^{\frac{n-2}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_{(c)}\sqrt{k_{n-2}^2+k_{n-1}^2}\,ds. \tag{32}$$

III. $m=n$.

В този случай трансформационните формули са

$$\begin{aligned} e_1&=t_n,\\ e_\alpha&=a_\alpha^q t_q \end{aligned} \tag{33}$$

и

$$\begin{aligned} t_q&=\sum_\alpha a_\alpha^q e_\alpha,\\ t_n&=e_1. \end{aligned} \tag{34}$$

След пресмятания, аналогични на тези от първия случай, достигаме до формулата

$$dK^n_{n-1} = |k_{n-1}| \cdot |ds \wedge \bigwedge_\tau da^\tau_n|. \tag{35}$$

Въвеждаме подходящи сферични координати от типа на тези от (29) и интегрираме. Получаваме

$$\int_{(G)} N_n(g) dK^n_{n-1} = \frac{\pi^{\frac{n-2}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_{(c)} |k_{n-1}| ds. \tag{36}$$

Интегралите в десните страни на получените интегрални формули (22), (32) и (36) имат проста геометрична интерпретация. Те са равни на дължините на дъгите на сферичните индикатриси на векторите t_1, t_{n-1} и t_n за дадената крива c.

ЛИТЕРАТУРА

1. Розенфельд, Б. А.: Многомерные пространства. М., 1966.
2. Станилова, Л. Р.: Изразяване на някои интегрални инварианти на крива чрез двойни интеграли върху сфера. Год. ВТУЗ, Математика, 5, № 3 (1968/69), 93 — 99.
3. Chern, C.: On integral geometry in Klein spaces. Ann. Math., 43 (1942), 178 — 189.

Постъпила на 26. XI. 1974 г.

INTEGRAL FORMULAE OF CROFTON TYPE FOR CURVE AND SETS OF LINES INTERSECTING THE CURVE

A. V. Borisov

(SUMMARY)

In the paper the integral formulae of the Crofton type (22), (32), (36) have been found in the n-dimensional Euclidean space E_n for a curve c and the sets K^1_{n-1}, K^{n-1}_{n-1} and K^n_{n-1} of lines intersecting it, which lie in certain hyperplanes.

In these formulae dK^1_{n-1}, dK^{n-1}_{n-1} and dK^n_{n-1} are the densities of the above sets, while k_1, k_{n-2}, k_{n-1} are respectively the first, $(n-2)^{nd}$ and $(n-1)^{st}$ curvature of the curve c.