ОБРАТНА ТЕОРЕМА НА ФОРМУЛАТА НА ТЕЙЛОР В R^n

Адриана Мадгерова

Обратната теорема на формулата на Тейлор, която е доказана от Г. Е. Шилов [1], може да се получи при по-слаби предположения. Доказателство в случая на линейни нормирани пространства е изложено в [2]. Тук се предлага пряко доказателство за R^n.

Използуваме означенията: $k=(k_1, k_2, \ldots, k_n)$, където $k_i (i=1, 2, \ldots, n)$ са цели неотрицателни числа: $O=(0, 0, \ldots, 0)$; $k!=k_1+k_2+\ldots+k_n$; $k! =k_1!\, k_2! \ldots k_n!$; $k \leqq l$, когато $k_i \leqq l_i$ за всяко $i=1, 2, \ldots, n$; ако $x \in R^n$, то с x^k означаваме

$$x^k = x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n},$$

ако $f: G \subset R^n \to R$, то

$$D^k f = \frac{\partial^{|k|}}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_n^{k_n}} f.$$

Нека $F=(\overset{k}{f})_{|k| \leqq m}$ е комплекс от функции $\overset{k}{f}: G \subset R^n \to R$, за $x, y \in G$ полагаме

$$[R_x^m F(y)]^k = \overset{k}{f}(y) - \sum_{\substack{s \geqq k \\ |s| \leqq m}} \frac{(y-x)^{s-k}}{(s-k)!} \overset{k}{f}(x).$$

(Например, ако $G \subset R$, тогава

$$[R_x^m F(y)]^k = \overset{k}{f}(y) - \frac{(y-x)}{1!} \overset{k+1}{f}(x) - \frac{(y-x)^2}{2!} \overset{k+2}{f}(x) - \ldots - \frac{(y-x)^{m-k}}{(m-k)!} \overset{m}{f}(x)$$

и ако при това F е комплекс от функцията $\overset{0}{f}$ и нейните производни, то $[R_x^m F(y)]^k$ е остатъчният член на Тейлоровото развитие на функцията $\overset{k}{f}(x)$ в точката y около точката x.)

Теорема. Нека $F=(\overset{k}{f})_{|k| \leqq m}$, където $\overset{k}{f}: G \subset R^n \to R$. Ако G е отворено и $[R_x^m F(y)]^0 = O(|x-y|^m)$ равномерно на G, то тогава всички функции $\overset{k}{f}(x)$, $|k| \leqq m$, са непрекъснати; функцията $\overset{0}{f}(x)$ е диференцируема до m-ти ред включително и

$$D^k \overset{0}{f}(x) = \overset{k}{f}(x), \quad |k| \leqq m.$$

Доказателство. При x, $x+h$, $x+h+l \in G$ можем да напишем равенствата

$$(1)\qquad [R_x^m F(x+h)]^0 = \overset{0}{f}(x+h) - \sum_{|k|\leq m} \frac{h^k}{k!} \overset{k}{f}(x),$$

$$(2)\qquad [R_x^m F(x+h+l)]^0 = \overset{0}{f}(x+h+l) - \sum_{|k|\leq m} \frac{(h+l)^k}{k!} \overset{k}{f}(x),$$

$$(3)\qquad [R_{x+h}^m F(x+h+l)]^0 = \overset{0}{f}(x+h+l) - \sum_{|k|\leq m} \frac{l}{k!} \overset{k}{f}(x+h).$$

От равенството (2) изваждаме (1) и (3) и получаваме

$$-[R_x^m F(x+h)]^0 + [R_x^m F(x+h+l)]^0 - [R_{x+h}^m F(x+h+l)]^0$$

$$= \sum_{1\leq |k|\leq m} \frac{l^k}{k!} \overset{k}{f}(x+h) - \sum_{1\leq |\nu|\leq m} \frac{\overset{\nu}{f}(x)}{\nu!} [(h+l)^\nu - h^\nu]$$

$$= \sum_{1\leq |k|\leq m} \frac{l^k}{k!} \overset{k}{f}(x+h) - \sum_{1\leq |\nu|\leq m} \frac{1}{\nu!} \overset{\nu}{f}(x) \sum_{0<p\leq \nu} \binom{\nu}{p} l^p h^{\nu-p}$$

$$= \sum \frac{l^k}{k!} \left[\overset{k}{f}(x+h) - \sum_{\substack{k\leq \nu \\ \nu\leq m}} \frac{h^{\nu-k}}{(\nu-k)!} \overset{\nu}{f}(x) \right] = \sum_{1\leq |k|\leq m} \frac{l^k}{k!} [R_x^m F(x+h)]^k .$$

За удобство ще означим получения резултат с $y(l)$, а $a_k = [R_x^m F(x+h)]^k$. Нашата цел е да намерим подходяща оценка на a_k. За да я получим, разглеждаме системата

$$\sum_{1\leq |k|\leq m} \frac{l^k}{k!} a_k = y(l),$$

$$\sum_{1\leq |k|\leq m} \frac{(2l)^k}{k!} a_k = y(2l),$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\sum_{1\leq |k|\leq m} \frac{(Nl)^k}{k!} a_k = y(Nl)$$

при условие, че всички точки $x+h+ql \in G (q=1, 2, \ldots, N)$. Тук N е броят на всички a_k, $|k| \leq m$.*

От формулите на Крамер получаваме, че

---

* $N = \binom{m+n}{n} - 1$.

$$l^k a_k = \sum_{q=1}^{N} C_{kq}(m, n)\, y(ql),$$

са константи, зависещи само от m и n. Да оценим $y(ql)$:

$$|y(ql)| = -[R_x^m F(x+h)]^0 + [R_x^m F(x+h+ql)]^0$$
$$-[R_{x+h}^m F(x+h+ql)]^0 \leqq \varepsilon(|h|)\,|h|^m + \varepsilon(|h+ql|)\,|h+ql|^m$$
$$+\varepsilon(|ql|)\,|ql|^m.*$$

Функцията $\varepsilon(t)$ е ограничена в някоя δ-полуоколност на нулата, тъй като $\varepsilon(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$. При $0 \leqq t \leqq \delta$ съществува

$$\bar{\varepsilon}(t) = \sup_{\tau \leqq t} \varepsilon(\tau).$$

$\bar{\varepsilon}(t)$ е дефинирана и растяща в интервала $0 \leqq t \leqq \delta$ и при това $\bar{\varepsilon}(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$. И така можем да считаме функцията $\varepsilon(t)$ растяща в $0 \leqq t \leqq \delta$. Избираме $l = \frac{|h|}{N\sqrt{n}} e$, където $e = (1, 1, \ldots, 1)$. Тъй като x принадлежи на отвореното множество G, то G съдържа някоя сферична околност на x. Нека радиусът ѝ е δ_1. Когато $|h| < \delta_0/2$, където $\delta_0 = \min(\delta, \delta_1)$, намираме, че

$$|h+ql| \leqq |h| \left(1 + \frac{q\,|e|}{N\sqrt{n}}\right) \leqq 2\,|h| < \delta_0,$$
$$|ql| \leqq |h| < \delta_0 \quad (q = 1, 2, \ldots, N).$$

Оттук при $|h| < \delta_0/2$

$$|y(ql)| \leqq \varepsilon(|h|)\,|h|^m + \varepsilon(2\,|h|)\,|2h|^m + \varepsilon(|h|)\,|h|^m$$
$$\leqq \varepsilon(2\,|h|)\,|h|^m (2 + 2^m).$$

В резултат получаваме, че при $|h| < \delta_0/2$

$$|a_k| \leqq \frac{1}{|l^k|} \sum_{q=1}^{N} |G_{kq}(m, n)|\,|y(ql)|$$
$$\leqq \frac{(N\sqrt{n})^{|k|}}{|h|^{|k|}}\, \varepsilon(2\,|h|)\,|h|^m \sum_{q=1}^{N} |C_{kq}|\,(2+2^m) \leqq C'(m, n)\,\varepsilon(2\,|h|)\,|h|^{m-|k|}.$$

---

* $[R_x^m F(y)]^0 = O(|x-y|^m)$, равномерно на G означава, че съществува функция $\varepsilon(t)$, дефинирана и неотрицателна при $t \geqq 0$, за която

$$1)\ \varepsilon(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0, \quad 2)\ |[R_x^m F(y)]^0| \leqq \varepsilon(|x-y|)\,|x-y|^m.$$

И така уверихме се в неравенствата

$$|[R_x^m F(x+h)]^k| \leq C(m, n)\,\varepsilon(2|h|)\,|h|^{m-|k|}, \quad |k| \leq m,$$

при $|h| < \delta_0/2$. Константата $C(m, n)$ зависи само от m и n. Но тъй като

$$[R_x^m F(x+h)]^k = \overset{k}{f}(x+h) - \overset{k}{f}(x) - \sum_{\substack{k<s \\ |s| \leq m}} \frac{h^{s-k}}{(s-k)!} \overset{s}{f}(x),$$

получените неравенства означават, че функцията $\overset{k}{f}(x)$ са непрекъснати. Нещо повече, от дефиницията на диференцируемост следва, че фунциите $\overset{k}{f}(x)$, $|k| < m$, са диференцируеми и

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \overset{k}{f}(x) = \overset{k+(j)}{f}(x)$$

при $(j) = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) - 1$ на j-то място.

Следователно функцията $\overset{0}{f}(x)$ е диференцируема до m-ти ред включително и

$$D^k \overset{0}{f}(x) = \overset{k}{f}(x), \quad |k| \leq m.$$

Забележка. Ясно е, че доказателството може да се проведе и когато $G \subset R^n$ е затворен интервал.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шилов, Г. Е.: Математический анализ, функции нескольких вещественных переменных. Т. 1—2. М., 1971, с. 161.
2. Мадгерова, А.: Обратная теорема формулы Тейлора. Вестник Моск. у-та (под печат).

Постъпила на 30. XI. 1974 г.

ON THE INVERSE OF TAYLOR'S FORMULA IN R^n

A. Madgerova

(SUMMARY)

If the function $\overset{0}{f}: G \subset R^n \to R$ (G is open) is approximate by a Taylor's polynom and this approximation satisfies certain conditions, then $\overset{0}{f}$ is differentiable and the coefficients of the polynom are proportional to the derivatives of $\overset{0}{f}$.