МОДЕЛ НА ДВУИЗМЕРИМАТА МЬОБИУСОВА ГЕОМЕТРИЯ ВЪРХУ ЕЛИПТИЧНА КОНГРУЕНЦИЯ ОТ ПРАВИ В P_3

Ананн Лангов

Двуизмерията Мьобиусова геометрия се изгражда аксиоматично на базата на основните обекти точка и окръжност и основните релации инцидентност на точка с окръжност разделяне в четворка точки, инцидентни с една окръжност и еднаквост. Аксиомите, свързващи основните обекти и релации, изразяват основните съотношения между точките и окръжностите на една евклидова равнина и отношението им към групата на трансформациите в същата равнина, които се представят като произведения от известен брой инверсии относно окръжности и симетрии относно прави. В настоящата работа ще бъде използувана аксиоматиката на Мьобиусовата геометрия, въведена в [1] от Б. Петканчин.

В разглеждания модел ролята на точки ще играят правите на една елиптична конгруенция K от прави в проективното тримерно пространство, а ролята на окръжности — праволинейните пръстеновидни повърхнини от втора степен, на които едната система праволинейни образуващи принадлежат на K. Тези повърхнини ще наричаме накратко K-повърхнини.

В докторската дисертация на Залцерт [2] чрез въвеждане на подходящи комплексни координати на правите от една елиптична конгруенция се установява взаимно-еднозначно съответствие на правите и квадратичните роеве от прави на конгруенцията с точките и окръжностите на една Мьобиусова равнина. В настоящата работа същият модел се изгражда без използуване на координати и се прави продължение на изследванията, свързани с наредбата и еднаквостите в модела. Въвежда се понятието инверсия в конгруенцията K относно една K-повърхнина и се изучават свойствата ѝ.

Пристъпваме към въвеждане в модела на основните релации и проверка на изпълнението на аксиомите.

Под инцидентност на точка с окръжност в модела ще разбираме проективната инцидентност на правата от K, изобразяваща точката, с K-повърхнината, изобразяваща окръжността.

Аксиомите на свързване са следните:

A1. Съществуват най-малко три различни точки.

A2. Ако A, B, C са три различни точки, то съществува, и то само една, окръжност, която е инцидентна с всяка от тия три точки.

A3. Ако k е окръжност, то съществуват най-малко три различни точки, инцидентни с нея.

A4. Ако k е окръжност, то съществува поне една точка, която не е инцидентна с нея.

Проверката на тези аксиоми е тривиална. Например А2 изразява, че през три прави от конгруенцията K минава, и то само една, повърхнина от втора степен и че всичките образователни на тази повърхнина, които са от системата на трите дадени образователни, принадлежат на K.

Под разделяне в четворка точки, принадлежащи на една окръжност, в модела ще разбираме проективното разделяне в четворката прави от конгруенцията K, принадлежащи на квадратичната повърхнина, изобразяваща окръжност.

Аксиомите за нареждане са следните:

А5. Нека A, B, C са три различни точки; съществува поне една такава точка X, че AB/CX.

А6. Нека A, B, C, D са четири точки, за които имаме AB/CD; тогава A, B, C, D са четири различни точки от една окръжност.

А7. Нека A, B, C, D са четири точки, за които имаме AB/CD; тогава имаме CD/AB, BA/CD.

А8. Нека A, B, C, D са четири различни точки от една окръжност; в сила е едно и само едно от съотношенията BC/AD, AB/CD, CA/BD.

А9. Нека A, B, C, D, E са четири различни точки от една окръжност и наредената двойка (D, E) разделя една от наредените двойки (B, C), (C, A), (A, B); тогава (D, E) разделя точно още една от тия двойки.

А10. Нека k е окръжност, A, B са две различни точки, k_1, k_2 — две различни окръжности през A и B. k_1 нека пресича k в точки A_1 и B_1 такива, че AB/A_1B_1, тогава и k_2 пресича K в точки A_2, B_2 такива, че AB/A_2B_2.

Първите пет аксиоми за наредбата в модела изразяват проективната наредба на правите в квадратичните роеве и са очевидно изпълнени. Тези свойства на окръжностите и квадратичните роеве стоят в основата на теорията за посока върху окръжност и квадратичен рой, така че понятието посока в квадратичен рой от прави на K моделира понятието посока върху окръжност.

Ще докажем сега и изпълнението в модела на А10. Тази аксиома на езика на модела изразява следното: дадени са три K-повърхнини H_1, H_2, H; a и b са прави от K, които са образуващи на H_1 и H_2, а H_1 и H се пресичат в правите a_1 и b_1, принадлежащи на K, така че ab/a_1b_1. Тогава и H_2 и H се пресичат в прави a_2 и b_2, принадлежащи на K, така че ab/a_2b_2.

Доказателство. Нека β е произволна реална равнина, минаваща през правата b и $A=a\cap\beta$. Тъй като правата b е праволинейна образуваща на K-повърхнината H_1, то β пресича H_1 освен в правата b още в права p, пресекателна с b, която очевидно минава и през точката A. Аналогично получаваме, че β пресича H_2 в права q, пресекателна с b и минаваща през A. Означаваме $P=p\cap b$ и $Q=q\cap b$. През всяка точка на правата p минава точно една праволинейна образуваща на повърхнината H_1, която е от системата образуващи, съдържаща правата a и следователно права от конгруенцията K. Аналогични свойства притежава и правата q за повърхнината H_2.

Нека с h означим пресечната крива на повърхнината H с равнината β. През всяка точка на h минава точно една права от конгруенцията K, която лежи на H. От условието, че H_1 и H се пресичат в прави a_1 и b_1 така, че имаме ab/a_1b_1, следва, че правата p пресича кривата h в точки A_1, B_1 така, че AP/A_1B_1.

Правата b принадлежи на конгруенцията K и следователно пресича комплексно спрегнатите оси f и g на конгруенцията в две комплексно спрегнати точки B и $\bar{B}$. Но повърхнината H не съдържа правата b и минава през правите f и g и следователно b пробожда H в точките B и $\bar{B}$. От това следва, че правата b пресича кривата h в комплексно спрегнатите точки B и $\bar{B}$ или че правата b е външна за кривата h. От последното и получения по-горе резултат AP/A_1B_1 получаваме, че точката A е външна за кривата h. Тогава правата q, която минава през A, пресича h в точки A_2 и B_2, такива, че AQ/A_2B_2. Правите a_2 и b_2 от конгруенцията K, които минават през A_2 и B_2, принадлежат на повърхните H_2 и H и ab/a_2b_2. С това верността на A10. в модела е установена.

Дефиниция 1. Нека H е пръстеновидна повърхнина от втора степен. За две точки A и B, неинцидентни с H, ще казваме, че са от една и съща страна на H, ако или 1) $A \equiv B$, или 2) $A \not\equiv B$, но правата AB или не пробожда H в две реални точки, или за реалните ѝ прободи A_1 и B_1 е изпълнено AB/A_1B_1. Ако не са изпълнени тези условия, ще казваме, че A и B са от различни страни на H.

От дефиниция 1 следва, че точките A и B са от различни страни на H тогава и само тогава, когато правата AB пробожда H в две реални точки A_1 и B_1 и AB/A_1B_1.

Теорема 1. Релацията „две точки са от една и съща страна на H" е релация на еквивалентност, т. е. изпълнени са условията: 1) M и M са от една и съща страна на H, 2) ако M и N са от една и съща страна на H, то и N и M са такива и 3) ако M и N са от една и съща страна на H и M и L са такива, то и N и L са от една и съща страна на H.

Доказателство. Свойствата 1) и 2) следват непосредствено от дефиниция 1 поради симетричността на релацията следване в четворка точки. Ако $M \equiv N$, то свойството 3) е очевидно изпълнено и затова нека M, N, L са три различни точки. Нека с α означим равнината, която минава през точките M, N, L. Тази равнина пресича H в реалната неособена крива от втора степен h. Условието две точки да са от една и съща страна на H е еквивалентно с условието тези точки да са едновременно вътрешни или външни за h. Следователно 3) е изпълнено.

От теорема 1 следва, че съвкупността от точките на пространството, които са неинцидентни с H, се разделя на класове, като две точки A и B са от един и същи клас тогава и само тогава, когато те са от една и съща страна на H, а са от различни класове, когато са от различни страни на H.

Прилагайка разсъждения, подобни на приложените за доказване на теорема 1, следват и твърденията: 1) ако M и N са от една и съща страна на H, а M и L — от различни страни, то N и L са от различни страни на H, и 2) ако точките M и N са от различни страни и точ-

ките M и L са също от различни страни на H, то точките N и L са от една и съща страна на H.

От тези твърдения получаваме, че класовете, на които се разлага P_3 с помощта на горната релация на еквивалентност, са точно два. Всеки един от тези класове ще наричаме полупространство с контур H.

Ако a е права, нележаща на повърхнината H и непресичаща H в реални точки, то очевидно точките на правата a са в едно и също полупространство с граница H.

В геометрията на окръжностите се въвеждат релациите: 1) две точки A и B са от различни страни на окръжността k, когато всяка окръжност, минаваща през A и B, пресича k в точки A_1 и B_1, така че AB/A_1B_1 и 2) точките A и B са от една и съща страна на k, ако или $A \equiv B$, или произволна окръжност, минаваща през точките A и B, или не пресича k, или я пресича в точките A_1 и B_1, така че AB не разделя A_1B_1. Тези релации, преведени на езика на модела, означават следното: 1) правите a и b от конгруенцията K са от различни страни на K-повърхнината H, ако всяка K-повърхнина, минаваща през a и b, пресича H в прави a_1 и b_1 от K, такива, че ab/a_1b_1, 2) правите a и b от конгруенцията K са от една и съща страна на K-повърхнината H, ако или $a \equiv b$, или когато $a \neq b$, но произволна K повърхнина, минаваща през a и b, или не пресича H в две реални прави, или когато имаме такова пресичане в правите a_1 и b_1, но ab не разделя a_1b_1.

Теорема 2. Условието правите a и b от конгруенцията K да са от различни страни на K-повърхнината H е еквивалентно с условието тези прави да лежат в различни полупространства с граница H.

Доказателство. Необходимост. Нека a и b от K са от различни страни на K-повърхнината H. Тогава K-повърхнината H_1, минаваща през a и b, пресича H в правите a_1 и b_1 от K, така че ab/a_1b_1. Да вземем една праволинейна образуваща на H, непринадлежаща на конгруенцията K, и нека тя пресича правите a, b, a_1, b_1 съответно в точките A, B, A_1, B_1. От ab/a_1b_1 следва и AB/A_1B_1. Но A_1 и B_1 са точки на H и следователно A и B са в различни полупространства с граница H, а от това следва, че и правите a и b са такива.

Достатъчност. Нека a и b са в различни полупространства с граница H; A и B са точки съответно от правите a и b и $c=AB$. Правите от конгруенцията K, които пресичат c, определят K-повърхнина H_1, съдържаща a и b. От това, че a и b са в различни полупространства с граница H, следва, че правата $AB=c$ пресича H в две точки A_1 и B_1, такива, че AB/A_1B_1. Тогава правите a_1 и b_1, принадлежащи на K и минаващи съответно през A_1 и B_1, принадлежат на H и H_1 и е изпълнено ab/a_1b_1, от което следва, че a и b са от различни страни на H. Със същите средства се доказва и следващата

Теорема 3. Правите a и b от конгруенцията K са от една и съща страна на K-повърхнината H тогава и само тогава, когато принадлежат на едно и също полупространство с контур H.

От теоремите 2 и 3 следва, че съвкупността от правите на конгруенцията K, които лежат в едно и също полупространство с контур K-

повърхнината H моделира понятието полусфера от геометрията на окръжностите.

Следва интерпретация в модела на еднаквостите от геометрията на окръжностите.

Аксиомите за еднаквостите са следните:

A11. Всяка еднаквост е еднозначно-обратимо съответствие на съвкупността на всички точки в себе си.

A12. Ако φ е еднаквост, такава е и φ^{-1}.

A13. Ако φ_1 и φ_2 са еднаквости, такава е и $\varphi_1\varphi_2$.

A14. Еднаквостите запазват релацията разделяне в четворка точки.

A15. Съществува, и то само една, еднаквост, която трансформира три различни точки A, B, C съответно в три различни точки A', B', C' и определена полусфера с контур окръжността ABC в определена полусфера с контур окръжността $A'B'C'$.

A16. Ако при едно обръщане три различни точки остават в покой, то трансформира в себе си всяка точка от окръжността, определена от тези три точки.

Дефиниция 2. Нека Φ е реална колинеация (в смисъл, че матрицата ѝ спрямо реална координатна система е съставена от реални числа), която трансформира или 1) f в f, g в g, или 2) f в g, g в f (f и g са осите на конгруенцията K). Рестрикцията на Φ върху множеството от правите от конгруенцията K наричаме еднаквост в модела.

Доказателството на изпълнението в модела на A11.—A13. е почти, тривиално. Ето например как се доказва A13. Нека φ_1 и φ_2 са еднаквости в модела. Това означава, че $\varphi_1=\Phi_1|K$, $\varphi_2=\Phi_2|K$. Понеже Φ_1 и Φ_2 трансформират или 1) f в f, g в g, или 2) f в g, g в f, то и $\Phi_2\Phi_1$ има тези свойства. Тогава, ако a е произволна права от K, то $\Phi_2\Phi_1(a)=\Phi_2[\Phi_1(a)]=\varphi_2\varphi_1(a)$, а това означава, че $\varphi_2\varphi_1=\Phi_2\Phi_1|K$, т. е. $\varphi_2\varphi_1$ е еднаквост в модела.

От това, че еднаквостите са съответствия, които са индуцирани от колинеации, а колинеациите запазват проективната наредба в четворка прави от един квадратичен рой прави, следва, че еднаквостите в модела запазват наредбата в квадратичните роеве. Това доказва изпълнението на A14. в модела.

Изпълнението на A14. в модела влече след себе си изпълнението и на твърденията: 1) еднаквостите запазват инцидентностите и 2) при еднаквостите две прави от K, които са от различни (една и съща) страни на K-повърхнината H, се трансформират в две прави, които са също от различни (една и съща) страни на образа на H, т. е. полусфера с контур H се трансформира при еднаквост в полусфера с контур образа на H.

Теорема 4. Ако при една еднаквост в модела три прави a, b, c остават в покой, то и всяка права от квадратичния рой, съдържащ тези прави, остава в покой при тази еднаквост.

Доказателство. Нека еднаквостта φ е индуцирана от колинеацията Φ. Роят, определен от a, b, c, при Φ, а следователно и при φ, се трансформира в роя, определен от образите на тези прави, т. е. в същия рой. В този рой Φ индуцира проективност, която оставя в покой трите прави a, b, c и следователно тази проективност е идентитет. Следователно при

тази проективност, а с това и при Ф и φ всяка права от този рой остава в покой.

Тъй като терминът обръщане от геометрията на окръжностите означава вид еднаквост, то последната теорема в частност доказва изпълнението на модела на А.16.

Дефиниция 3. Ако в модела еднаквостта φ е индуцирана от колинеация Ф в P_3, която трансформира f в f и g в g, то φ ще наричаме еднаквост от тип 1. Ако φ е индуцирана от колинеация, която трансформира f в g и g в f, то φ ще наричаме еднаквост от тип 2.

Теорема 5. Нека a, b, c са три различни прави от конгруенцията K и a', b', c' — други три такива прави. Съществуват в модела точно една еднаквост от тип 1 и точно една еднаквост от тип 2, които трансформират a, b, c съответно в a', b', c'.

Доказателство. 1. Съществуване. Означаваме с $A=a\bigcap f$, $B=b\bigcap f$, $A'=a'\bigcap f$, $B'=b'\bigcap f$. Нека P е произволна реална точка от c, а P' — произволна реална точка от c'. Точките A, B, A', B' като пресечни точки на реалните прави a и b със силно имагинерната права f са нереални. Съществува точно една реална колинеация Ф в P_3, която трансформира точките P, A, B съответно в P', A', B'. Колинеацията Ф трансформира A и B в A' и B' и следователно f в f. От това, че Ф е реална колинеация, следва, че точките $\bar{A}=a\bigcap g$ и $\bar{B}=b\bigcap g$, които са комплексно спрегнати на A и B, се трансформират при Ф в точките $\bar{A}'=a'\bigcap g$ и $\bar{B}'=b'\bigcap g$, които са комплексно спрегнати на A' и B'. Следователно имаме и $g\Phi=g$, $a\Phi=a'$, $b\Phi=b'$. От $P\Phi=P'$ и $f\Phi=f'$, $g\Phi=g'$ следва, че трансверзалата c на правите f и g, която минава през точката P, ще се трансформира при Ф в трансверзалата на f и g, която минава през P', т. е. в правата c'. Съответствието $\varphi=\Phi K$ е еднаквост в модела, при която $(abc)\varphi=a'b'c'$.

За да построим еднаквост в модела от тип 2, изпълняваща условието на теоремата, в горните разсъждения правим само изменение при определянето на Ф. Именно Ф задаваме като реална колинеация в P_3, която трансформира A, B, P съответно в $\bar{A}'$, $\bar{B}'$, P'.

2. Единственост. Нека и φ^* е еднаквост в модела, която е индуцирана от колинеацията Φ^* в P_3, изпълняваща условието на теоремата. Образуваме си еднаквостта $\psi=\varphi^*\varphi^{-1}$, която е индуцирана от колинеацията $\Psi=\Phi^*\Phi^{-1}$. Понеже Φ^{-1} и Φ^* едновременно трансформират или 1) f в f, g в g, или 2) f в g, g в f, то и Ψ трансформира f в f и g в g.

Положението на произволна точка от силно имагинерната права f се задава с помощта на комплексния параметър λ. Параметърът λ може да се третира като нехомогенна координата на разглежданата точка от f. Реалната колинеация Ф индуцира върху правата f съответствие, което се изразява като дробно линейна трансформация $\lambda'=\frac{\alpha\lambda+\beta}{\gamma\lambda+\delta}$ за нехомогенните координати на съответните точки. Тук параметрите α, β, γ, δ са комплексни числа. Но при Ф точките A, B и $C=c\bigcap f$ са двойни. Значи получената дробно линейна трансформация има три двойни елемента. От това следва, че индуцираното от Ф съответствие върху f е идентитет.

По същия начин се установява, че индуцираното съответствие от Φ върху g е идентитет, а от това получаваме $\psi=1$ или че $\varphi=\varphi^*$.

Теорема 6. Идентитетът в конгруенцията K е единствената еднаквост от тип 1 в модела, която оставя в покой три различни прави от K.

Доказателство. Това доказателство се основава на разсъждения, подобни на разсъжденията, използувани за доказването на единствеността в предишната теорема. Нека Φ е колинеацията от тип 1 в P_3, която индуцира еднаквостта $\varphi(abc)=abc$. Индуцираното съответствие от Φ върху правата f оставя в покой точките $A=a\cap f$, $B=b\cap f$, $C=c\cap f$ и следователно е идентитет. По същия начин получаваме, че и индуцираното от Φ съответствие върху правата g е идентитет. От това следва, че $\varphi=\lambda$.

Дефиниция 4. Нека φ е еднаквост от тип 2 в модела, която оставя в покой три различни прави от K. Тогава φ се нарича инверсия, относно K-повърхнината H, съдържаща тези три прави.

От теорема 1 непосредствено следва, че при инверсията φ, която оставя в покой правите a, b, c, и също оставя в покой всяка K-образуваща на K-повърхнината H, съдържаща a, b, c.

Теорема 7. Две прави l и l' от конгруенцията K са съответни при инверсията φ относно K-повърхнината H тогава и само тогава, когато l и l' са спрегнати поляри в полярността относно H.

Доказателство. Ако l е образуваща на H, то $l=l'$ и твърдението очевидно е изпълнено.

Нека сега l не лежи на H. Тогава l пробожда H в комплексно спрегнатите точки A и $\bar{A}$, в която l пресича съответно правите f и g. Образуващите a и $\bar{a}$ на H от системата на K-образуващите, които минават съответно през точките A и $\bar{A}$, са комплексно спрегнати прави Следователно точките $B=f\cap\bar{a}$ и $\bar{B}=g\cap a$, които са комплексно спрегнати, са допирните точки на двете допирателни равнини към H, минаващи през правата l, и правата $l'=B\bar{B}$ е спрегнатата поляра на l относно H.

В инверсията относно H правите a и $\bar{a}$ са двойни прави. Нека Φ е колинеация в P_3, която индуцира инверсията φ. При Φ точките A и $\bar{A}$ се трансформират съответно в точките $\bar{B}$ и B. Следователно при инверсията правата $l=AA$ се трансформира в правата $l'=\bar{B}B$. С това теоремата е установена.

Непосредствено следствие от тази теорема е следното твърдение: ако l и l' са прави от K, които са съответни при инверсията относно K-повърхнината H, то l и l' са от различни страни относно H.

Действително, ако α е произволна реална равнина, минаваща през l, и α пресича H в реалната крива h, то l е външна права за h. Полюс на правата l относно h е точката $L=l'\cap\alpha$ и следователно е вътрешна точка за h. Получихме, че точката L от l' и произволна точка от правата l са от различни страни на h и следователно правите l и l' са от различни страни на H.

Теорема 8. В модела е изпълнена A15.

Доказателство. Нека a, b, c и a', b', c' са две тройки различни прави от K и S и S' са две полусфери съответно с граници K-повърхнините H и H', съдържащи съответно a, b, c и a', b', c'. Съгласно теорема 5 съществуват точно две еднаквости в модела: φ_1 от тип 1 и φ_2 от тип 2, които трансформират a, b, c съответно в a', b', c'. Нека l е произволна права от K, която принадлежи на S, и $l\varphi_1=l_1$, $l\varphi_2=l_2$. Образуваме еднаквостта $\varphi_1^{-1}\varphi_2=\psi$. Еднаквостта ψ оставя на място правите a', b', c' и е еднаквост от тип 2. От това следва, че ψ е инверсия относно H'. Следователно едната от правите l_1 и l_2 принадлежи на полусферата S', а другата на $\bar{S}'$. Понеже при еднаквостите в модела полусфера се трансформира в полусфера, то получаваме, че едната от еднаквостите φ_1 и φ_2 трансформира a, b, c и S в a', b', c' и S', а другата a, b, c и S в a', b', c' и $\bar{S}'$. С това теоремата е доказана.

Накрая ще отбележим, че в геометрията на окръжностите се въвежда непрекъснатост с аксиома, която в модела изразява непрекъснатостта в квадратичен рой прави и следователно и тази аксиома е изпълнена в модела.

ЛИТЕРАТУРА

1. Петканчин, Б.: Аксиоматика на комплексната двумерна Мьобиусова геометрия. Год. Соф. унив., Физ.-мат. фак., 56 (1963), кн. 1, 85—126.
2. Salzert, M.: Die Eigenschaften derjenigen Kollineationen, die zwei konjugiert imaginäre windschiefe Geraden im Raume festlassen. Schriften des Math. Inst. u. des Inst. für angew. Math. der Univ. Berlin, 5, H 2, 133—177.

Постъпила на 11. XII. 1974 г.

EIN MODELL DER ZWEIDIMENSIONALEN MÖBIUSSCHEN GEOMETRIE IN EINER ELLIPTISCHEN GERADENKONGRUENZ IN P_3

A. Langow

(ZUSAMMENFASSUNG)

In der Arbeit ist ein Modell der Möbiusschen Geometrie aufgebaut. In diesem Modell werden die Punkte auf die Geraden einer elliptischen linearen Kongruenz K abgebildet; die Kreise werden dargestellt durch die reellen Flächen zweiter Ordnung, welche durch die Achsen von K gehen. Die Kollineationen, die K festlassen, sind die Kongruenzen im Modell. Es wird die Erfüllung im Modell der Axiomen der Möbiusschen Geometrie festgestellt.

Es wird gezeigt, dass zwei Geraden aus K in der Inversion bezüglich einer Fläche zweiter Ordnung dann und nur dann entsprechend sind, wenn sie konjugierte Polaren bezüglich dieser Fläche sind.