РАЗВИТИЕ НА АНАЛИТИЧНИ ФУНКЦИИ В РЕДОВЕ НА ЛАГЕР

Петър Русев

Полиномите на Лагер $\{L_n^{(\alpha)}(z)\}_{n=0}^{\infty}(\alpha>-1)$ се дефинират като система ортогонални полиноми върху интервала $[0,+\infty)$ с тегло функцията $t^{\alpha}e^{-t}$. По-точно $\{L_n^{(\alpha)}(z)\}_{n=0}^{\infty}$ е единствената система от полиноми, която удовлетворява изискването

$$(1)\qquad \int_0^{\infty} t^{\alpha} e^{-t} L_m^{(\alpha)}(t)\, L_n^{(\alpha)}(t)\, dt = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+1)}\,\delta_{mn},$$

където δ_{mn} е символът на Кронекер, при допълнителното предположение, че знакът на коефициента пред z^n в $L_n^{(\alpha)}(z)$ е $(-1)^n$ [1, с. 109]. Така дефинираната система от полиноми на Лагер с параметър α удовлетворява следното рекурентно уравнение [1, с. 110, (5.1.10)]:

$$(2)\qquad (n+1)\,y_{n+1}+(z-\alpha-2n-1)\,y_n+(n+\alpha)\,y_{n-1}=0.$$

Последното уравнение дава възможност да се дефинират полиномите на Лагер $L_n^{(\alpha)}(z)$ за произволни комплексни стойности на параметъра α.

Системата функции на Лагер от втори род $\{M_n^{(\alpha)}(z)\}_{n=0}^{\infty}(\alpha\neq 1,-2,\ldots)$ се дефинира като второ решение на рекурентното уравнение (2). Ако $\alpha>-1$ или по-общо ако $\mathrm{Re}\{\alpha\}>-1$, функциите $\{M_n^{(\alpha)}(z)\}_{n=0}^{\infty}$ се определят посредством равенството [1, с. 431, (IV. 1), с. 437, (V 6)]

$$(3)\qquad M_n^{(\alpha)}(z)=-\int_0^{\infty}\frac{t^{\alpha}e^{-t}L_n^{(\alpha)}(t)}{t-z}\,dt=-\int_0^{\infty}\frac{t^{n+\alpha}e^{-t}}{(t-z)^{n+1}}\,dt$$

при условие, че $z\in\mathbf{C}-[0,+\infty)$.

В настоящата работа се третират въпроси, свързани с проблема за представянето на аналитични функции чрез редове по полиномите на Лагер

$$(4)\qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n L_n^{(\alpha)}(z),$$

респективно по функциите на Лагер от втори род

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n M_n^{(\alpha)}(z). \tag{5}$$

Тя трябва да се разглежда като известно продължение или по-скоро приложение на резултатите, които се съдържат в публикациите ни [2] и [3]. В § 1 се спираме върху асимптотичните свойства на полиномите на Лагер и функциите на Лагер от втори род. В § 2 са дадени без доказателство резултатите, получени в работите [2] и [3], за характера на сходимост на ред по полиномите на Лагер, респективно за областта и характера на сходимост на ред по функциите на Лагер от втори род. В § 3 след кратък коментар на работата [4] на Полард, в която е решен проблемът за представянето на аналитични функции чрез редове по класическите полиноми на Лагер $\{L_n(z)\}_{n=0}^{\infty}=\{L_n^{(0)}(z)\}_{n=0}^{\infty}$, главното внимание е отделено на въпроса за изразяването на коефициентите в представянето на една аналитична функция $f(z)$ чрез ред по полиномите на Лагер посредством функциите на Лагер от втори род и разглежданата функция $f(z)$. Даден е критерий за представимост на аналитична функция чрез ред по полиномите на Лагер, който е илюстриран с подходящи примери. Следващият § 4 е посветен на проблема за представянето на аналитични функции чрез редове по функциите на Лагер от втори род. Установено е необходимо условие за представимост, а също така са дадени и достатъчни условия за развитие на аналитични функции, принадлежащи на определени класи, в редове по функциите $\{M_n^{(\alpha)}(z)\}_{n=0}^{\infty}$. В последния § 5 се разглежда въпросът за пълнотата на системата функции на Лагер от втори род.

§ 1. АСИМПТОТИЧНИ СВОЙСТВА НА ПОЛИНОМИТЕ НА ЛАГЕР И ФУНКЦИИТЕ НА ЛАГЕР ОТ ВТОРИ РОД

Асимптотичното поведение на полиномите на Лагер $\{L_n^{(\alpha)}(z)\}_{n=0}^{\infty}$ върху лъча $(0, +\infty)$ е изследвано най-напред от Фейер, който е получил следната формула [1, с. 206, (8.22.1)]:

$$L_n^{(\alpha)}(x)=\pi^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{x}{2}} x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} \cos\left\{2(nx)^{\frac{1}{2}}-\frac{\alpha\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right\}+l_n^{(\alpha)}(x), \tag{6}$$

където $l_n^{(\alpha)}(x)=O(n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}})$ равномерно върху всеки интервал от вида $[\varepsilon, \omega]$ $(0<\varepsilon<\omega<+\infty)$. Формулата (6) е валидна при произволно реално α.

Към формулата (6) трябва да прибавим още следното равенство [1, с. 110, (5.1.7)]:

$$L_n^{(\alpha)}(0)=\binom{n+\alpha}{n}, \tag{7}$$

което характеризира асимптотичното поведение на полиномите на Лагер в точката $z=0$.

Ако се интересуваме само от реда на $L_n^{(\alpha)}(x)$ при $n \to +\infty$, формулите (6) и (7) могат да бъдат заменени със следната O-асимптотична формула

$$L_n^{(\alpha)}(x) = O(n^a), \quad a = \max\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}, \alpha\right). \tag{8}$$

Последното равенство е валидно равномерно върху всеки интервал $[0, \omega]$ $(0 < \omega < +\infty)$; при това α е произволно реално число.

Асимптотична формула за полиномите на Лагер в областта $\mathbf{C} - [0, +\infty)$ е получена за пръв път от Перон [5], [1, с. 206, (8.22.3)]. Тя има следния вид:

$$L_n^{(\alpha)}(z) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{\frac{z}{2}} (-z)^{-\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}} n^{\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}} e^{2(-z)^{\frac{1}{2}}\sqrt{n}} \{1 + \lambda_n^{(\alpha)}(z)\}, \tag{9}$$

където $\{\lambda_n^{(\alpha)}(z)\}_{n=1}^{\infty}$ са комплексни функции, аналитични в областта $\mathbf{C} - [0, +\infty)$ и $\lim \lambda_n^{(\alpha)}(z) = 0$ равномерно върху всяко компактно подмножество на тази област. Формулата (9) е валидна при произволно реално α. Необходимо е обаче да отбележим, че работата [5] на Перон е посветена на асимптотичните свойства на изродените хипергеометрични функции $\Phi(a, c; z)$ като функции на параметрите a и c и в частност, като се има пред вид равенството [1, с. 112, (5.3.3)]

$$L_n^{(\alpha)}(z) = \binom{n+\alpha}{n} \Phi(-n, \alpha+1; z),$$

се получава асимптотичната формула (9) за полиномите на Лагер.

Асимптотичното поведение на функциите на Лагер от втори род $\{M_n^{(\alpha)}(z)\}_{n=0}^{\infty}$ при $n \to +\infty$ беше изследвано в нашата работа [3]. Съответната асимптотична формула е

$$M_n^{(\alpha)}(z) = -\sqrt{\pi}\, e^{-\frac{z}{2}} (-z)^{\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}} n^{\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}} e^{-2(-z)^{\frac{1}{2}}\sqrt{n}} \{1 + \mu_n^{(\alpha)}(z)\}, \tag{10}$$

където $\{M_n^{(\alpha)}(z)\}_{n=1}^{\infty}$ са комплексни функции, аналитични в областта $\mathbf{C} - [0, +\infty)$ и освен това $\lim \mu_n^{(\alpha)}(z) = 0$ равномерно върху всяко компактно подмножество на тази област.

За да изследваме с оглед на бъдещите нужди асимптотичното поведение на $M_n^{(\alpha)}(z)$ като функция на z при фиксирано n, а след това и като функция на z и n, ще получим друго интегрално представяне на функциите на Лагер от втори род, което се оказва по-удобно за целта. За удобство ще считаме, че параметърът $\alpha > -1$.

Нека z е такова, че $\operatorname{Im}\{z\} \neq 0$. Да означим с $l^*(z)$ лъча, който „излиза" от началото, лежи в полуравнината $\operatorname{Re}\{z\} > 0$ и е перпендикулярен на вектора $\overrightarrow{Oz}$. От интегралната теорема на Коши следва тогава, че

$$M_n^{(\alpha)}(z) = -\int_{l^*(z)} \frac{\zeta^{n+\alpha} e^{-\zeta}}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta.$$

Ако $\operatorname{Im}\{z\}>0$, лъчът $l^*(z)$ има параметрично уравнение $\zeta=-izt$ $(0\leqq t<+\infty)$. Следователно

$$M_n^{(\alpha)}(z)=-\int_0^\infty \frac{(-izt)^{n+\alpha}\,e^{izt}}{(-izt-z)^{n+1}}(-iz)\,dt,$$

откъдето след известни преобразувания намираме, че

$$M_n^{(\alpha)}(z)=\frac{(-1)^n(-iz)^{n+\alpha+1}}{z^{n+1}}\int_0^\infty \frac{t^{n+\alpha}\,e^{izt}}{(1+it)^{n+1}}\,dt. \tag{11}$$

Ако $\operatorname{Im}\{z\}<0$, лъчът $l^*(z)$ има параметрично уравнение $\zeta=izt$ $(0\leqq t<+\infty)$ и след аналогични пресмятания ще получим, че

$$M_n^{(\alpha)}(z)=\frac{(-1)^n(iz)^{n+\alpha+1}}{z^{n+1}}\int_0^\infty \frac{t^{n+\alpha}\,e^{-izt}}{(1-it)^{n+1}}\,dt. \tag{12}$$

Като имаме пред вид интегралните представяния (11) и (12), ще покажем, че каквито и да са $\alpha>-1$ и $n=0,1,2,\ldots$, за $M_n^{(\alpha)}(z)$ при $z\to\infty$ в областта $C-[0,+\infty)$ е в сила следната асимптотична формула:

$$M_n^{(\alpha)}(z)=O\left(\frac{1}{z^{n+1-(\alpha-[\alpha])}}\right). \tag{13}$$

1) Нека $\operatorname{Im}\{z\}>0$ и да положим по определение

$$T_n^{(\alpha)}(z)=\int_0^\infty \frac{t^{n+\alpha}\,e^{izt}}{(1+it)^{n+1}}\,dt.$$

Ще разгледаме отделно случаите, когато $-1<\alpha<0$ и когато $\alpha\geqq 0$.

а) $-1<\alpha<0$. В този случай след последователно интегриране по части получаваме, че

$$T_n^{(\alpha)}(z)=\frac{(-1)^n}{(iz)^n}\int_0^\infty \frac{d^n}{dt^n}\left\{\frac{t^{n+\alpha}}{(1+it)^{n+1}}\right\}e^{izt}\,dt.$$

От формулата на Лайбниц за n-тата производна на произведението на две функции лесно следва, че за $t\in(0,+\infty)$

$$\frac{d^n}{dt^n}\left\{\frac{t^{n+\alpha}}{(1+it)^{n+1}}\right\}=O\left(\frac{t^\alpha}{\sqrt{1+t^\alpha}}\right).$$

Като имаме пред вид, че при направените предположения за α

$$\int_0^\infty \frac{t^\alpha}{\sqrt{1+t^2}}\,dt < +\infty$$

и освен това, че $\operatorname{Im}\{z\} = \operatorname{Im}\{x+iy\} = y > 0$, намираме, че

$$T_n^{(\alpha)}(z) = O\left(\frac{1}{z^n}\right).$$

Следователно

$$M_n^{(\alpha)}(z) = O\left(\frac{1}{z^{n-\alpha}}\right) = O\left(\frac{1}{z^{n+1-(\alpha+1)}}\right) = O\left(\frac{1}{z^{n+1-(\{\alpha\}-\{\alpha\})}}\right).$$

б) $\alpha \geqq 0$. Ще разгледаме отделно случаите, когато α е цяло число и когато α не е цяло число.

б$_1$) α е цяло. Пак след последователно интегриране по части намираме, че

$$T_n^{(\alpha)}(z) = \frac{(-1)^{n+\alpha}}{(iz)^{n+\alpha}} \int_0^\infty \frac{d^{n+\alpha}}{dt^{n+\alpha}} \left\{ \frac{t^{n+\alpha}}{(1+it)^{n+1}} \right\} e^{izt}\,dt.$$

Формулата на Лайбниц дава

$$\frac{d^{n+\alpha}}{dt^{n+\alpha}} \left\{ \frac{t^{n+\alpha}}{(1+it)^{n+\alpha}} \right\} = \sum_{\nu=0}^{n+\alpha} A_\nu(n, \alpha) \frac{t_\nu}{(1+it)^{n+\nu+1}},$$

където $A_\nu(n, \alpha)$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots, n+\alpha)$ са константи, които зависят само от n и α. Тогава ще получим, че

$$T_n^{(\alpha)}(z) = \frac{(-1)^{n+\alpha}}{(iz)^{n+\alpha}} \left\{ A_0(n, \alpha) \int_0^\infty \frac{e^{izt}}{(1+it)^{n+1}}\,dt \right.$$

$$\left. + \sum_{\nu=1}^{n+\alpha} A_\nu(n, \alpha) \int_0^\infty \frac{t^\nu e^{izt}}{(1+it)^{n+\nu+1}}\,dt \right\}.$$

Но

$$\int_0^\infty \frac{e^{izt}}{(1+it)^{n+1}}\,dt = \frac{1}{iz} \left\{ -1 + (n+1)\,i \int_0^\infty \frac{e^{izt}}{(1+it)^{n+2}}\,dt \right\}$$

и

$$\int_0^\infty \frac{t^\nu e^{izt}}{(1+it)^{n+\nu+1}}\,dt = -\frac{1}{iz} \int_0^\infty \frac{d}{dt} \left\{ \frac{t^\nu}{(1+it)^{n+\nu+1}} \right\} e^{izt}\,dt.$$

Понеже $\operatorname{Im}\{z\}=\operatorname{Im}\{x+iy\}=y>0$,

$$\left|\int_0^\infty \frac{e^{izt}}{(1+it)^{n+2}}\,dt\right| \leqq \int_0^\infty \frac{e^{-yt}}{(1+t^2)^{\frac{n+2}{2}}}\,dt \leqq \int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} < +\infty$$

и аналогично за $\nu=1, 2, 3, \ldots, n+\alpha$ и $n=0, 1, 2, \ldots$

$$\left|\int_0^\infty \frac{d}{dt}\left\{\frac{t^\nu}{(1+it)^{n+\nu+1}}\right\}e^{izt}\,dt\right| = O\left(\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2}\right).$$

Следователно

$$T_n^{(\alpha)}(z) \cong O\left(\frac{1}{z^{n+\alpha+1}}\right)$$

и за $M_n^{(\alpha)}(z)$ намираме, че

$$M_n^{(\alpha)}(z) = O\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right) = O\left(\frac{1}{z^{n+1-(\alpha-[\alpha])}}\right).$$

б$_2$) α не е цяло число. След последователно интегриране по части намираме, че

$$T_n^{(\alpha)}(z) = \frac{(-1)^{n+[\alpha]+1}}{(iz)^{n+[\alpha]+1}} \int_0^\infty \frac{d^{n+[\alpha]+1}}{dt^{n+[\alpha]+1}}\left\{\frac{t^{n+\alpha}}{(1+it)^{n+1}}\right\}e^{izt}\,dt.$$

Съгласно формулата на Лайбниц

$$\frac{d^{n+[\alpha]+1}}{dt^{n+[\alpha]+1}}\left\{\frac{t^{n+\alpha}}{(1+it)^{n+1}}\right\} = \sum_{\nu=0}^{n+[\alpha]+1} B_\nu(n, \alpha)\frac{t^{\alpha-[\alpha]+\nu-1}}{(1+it)^{n+\nu+1}},$$

където $B_\nu(n, \alpha)$ зависят само от n и α. Като имаме пред вид, че $-1<\alpha-[\alpha]-1<0$ и че $\operatorname{Im}\{z\}>0$, намираме

$$\int_0^\infty \frac{t^{\alpha-[\alpha]+\nu-1}}{(1+it)^{n+\nu+1}}\,e^{izt}\,dt = O\left(\int_0^\infty \frac{t^{\alpha-[\alpha]-1}}{\sqrt{1+t^2}}\,dt\right)$$

за всяко $\nu=0, 1, 2, \ldots, n+[\alpha]+1$ и $n=0, 1, 2, \ldots$ Следователно в този случай

$$T_n^{(\alpha)}(z) = O\left(\frac{1}{z^{n+[\alpha]+1}}\right)$$

и за $M_n^{(\alpha)}(z)$ получаваме пак асимптотичната формула (13).

2) Случаят $\operatorname{Im}\{z\}<0$ се третира по аналогичен начин, като за целта се използва интегралното представяне (12).

3) $z=-x\,(0<x<+\infty)$. Тогава от (3) получаваме, че

$$M_n^{(\alpha)}(-x)=-\int_0^\infty \frac{t^{n+\alpha}e^{-t}}{(t+x)^{n+1}}\,dt,$$

откъдето след смяна на променливата намираме, че

$$M_n^{(\alpha)}(-x)=-x^\alpha\int_0^\infty \frac{t^{n+\alpha}e^{-xt}}{(1+t)^{n+1}}\,dt.$$

От последното представяне, като разгледаме пак случаите, когато $-1<\alpha\leqq 0$ и когато $\alpha\geqq 0$, ще получим, че

$$M_n^{(\alpha)}(-x)=O\left(\frac{1}{x^{n+1-(\alpha-[\alpha])}}\right).$$

Ще използваме интегралните представяния (11) и (12), за да получим асимптотичната формула за $M_n^{(\alpha)}(z)$ като функция на z и n. Ще покажем именно, че каквото и да е $\eta>0$,

$$M_n^{(\alpha)}(z)=O\left(\frac{z^\alpha}{\sqrt{n}}\right) \tag{14}$$

равномерно по $n\to+\infty$ и $z\to\infty$ при условие, че $|\operatorname{Im}\{z\}|\geqq\eta$.

Достатъчно е да разгледаме случая $\operatorname{Im}\{z\}\geqq\eta$. За да получим асимптотичната формула (14) в този случай, трябва да покажем, че

$$T_n^{(\alpha)}(z)=O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Преди всичко, понеже $\operatorname{Im}\{z\}=\operatorname{Im}\{x+iy\}=y\geqq\eta$,

$$|T_n^{(\alpha)}(z)|\leqq\int_0^\infty \frac{t^{n+\alpha}}{(\sqrt{1+t^2})^{n+1}}e^{-yt}\,dt$$

$$\leqq\int_0^\infty \frac{t^{n+\alpha}}{+(\sqrt{1+t^2})^{n+1}}e^{-\eta t}\,dt=\int_0^\infty \frac{t^\alpha}{\sqrt{1+t^2}}\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)^n e^{-\eta t}\,dt.$$

В интеграла

$$R_n^{(\alpha)}=\int_0^\infty \frac{t^\alpha}{\sqrt{1+t^2}}\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)^n e^{-\eta t}\,dt$$

да направим смяната $t=\operatorname{tg}\theta\,(0\leqq\theta<\pi/2)$. Ще получим, че

$$R_n^{(\alpha)}=\int_0^{\pi/2} e^{-\eta\operatorname{tg}\theta}\operatorname{tg}^{\alpha+1}\theta\sin^{n-1}\theta\,d\theta.$$

Функцията $e^{-\eta\operatorname{tg}\theta}\operatorname{tg}^{\alpha+1}\theta$ е ограничена в интервала $(0, \pi/2)$, следователно

$$R_n^{(\alpha)}=O\left(\int_0^{\pi/2}\sin^{n-1}\theta\,d\theta\right).$$

Но

$$\int_0^{\pi/2}\sin^{n-1}\theta\,d\theta=\begin{cases}\dfrac{(n-2)!!}{(n-1)!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & \text{ако } n \text{ е четно},\\[2ex] \dfrac{(n-2)!!}{(n-1)!!}, & \text{ако } n \text{ е нечетно},\end{cases}$$

а от формулата на Стирлинг следва, че

$$\frac{(n-2)!!}{(n-1)!!}=O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

§ 2. СХОДИМОСТ НА РЕДОВЕ ПО ПОЛИНОМИТЕ НА ЛАГЕР И ПО ФУНКЦИИТЕ НА ЛАГЕР ОТ ВТОРИ РОД

Асимптотичните формули (8) и (9) за полиномите на Лагер дават възможност да се определи областта на сходимост на ред по тези полиноми, т. е. ред от вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n L_n^{(\alpha)}(z). \tag{4}$$

По-точно, ако положим по определение

$$\lambda_0=-\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\ln|a_n|}{2\sqrt{n}},$$

не е трудно да бъде установено следното твърдение: а) ако $\lambda_0\leqq 0$, редът (4) е разходящ за всяко $z\in\mathbf{C}-[0, +\infty)$; б) ако $0<\lambda_0<+\infty$, редът (4) е абсолютно сходящ за всяко z от вътрешността $\Delta(\lambda_0)$ на параболата $p(\lambda_0)$ с уравнение $\operatorname{Re}\left\{(-z)^{\frac{1}{2}}\right\}=\lambda_0$ и е разходящ вън от тази парабола; в) ако $\lambda_0=+\infty$, редът (4) е абсолютно сходящ в цялата комплексна равнина.

Нещо повече, в случаите б), респ. в), може да бъде установено, че редът (4) е абсолютно равномерно сходящ върху всяко компактно подмножество на областта $\Delta(\lambda_0)-[0, +\infty)$, респ. $\mathbf{C}-[0, +\infty)$, и върху всяко компактно подмножество на лъча $[0, +\infty)$. Както беше обърнато внимание в нашата работа [2], асимптотичните формули за полиномите на

Лагер не дават възможност да се реши въпросът за характера на сходимост на ред от вида (4) върху произволно компактно подмножество на областта му на сходимост. Този последен проблем беше решен в [2] въз основа на установеното в последната публикация неравенство за полиномите на Лагер

$$L_n^{(\alpha)}(z) = O\left(e^z z^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} e^{2\lambda\sqrt{n}}\right), \tag{15}$$

валидно в областта $\Delta^*(\lambda, p) := \{z : \mathrm{Re}\{(-z)^{1/2}\} \leqq \lambda,\ |z| \geqq \rho\}$, където $0 < \lambda < +\infty$ и $\rho > \max(1, 2\lambda^2)$.

С помощта на неравенството (15) и на асимптотичната формула (9) за полиномите на Лагер в областта $\mathbf{C} - [0, +\infty)$ в [2] беше показано, че ред по полиномите на Лагер е абсолютно равномерно сходящ върху всяко компактно подмножество на областта му на сходимост.

Що се отнася до редове по функциите на Лагер от втори род, т. е. редове от вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n M_n^{(\alpha)}(z), \tag{5}$$

както беше установено в нашата работа [3], ако положим

$$\mu_0 := \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln |b_n|}{2\sqrt{n}},$$

в сила е следното твърдение: а) ако $\mu_0 = +\infty$, редът (5) е разходящ за всяко $z \in \mathbf{C} - [0, +\infty)$; б) ако $0 < \mu_0 < +\infty$, редът (5) е абсолютно равномерно сходящ върху всяко компактно подмножество на външността $\Delta_*(\mu_0)$ на параболата $p(\mu_0) := \{z : \mathrm{Re}\{(-z)^{1/2}\} = \mu_0\}$ и разходящ за всяко $z \in \Delta_*(\mu_0) - [0, +\infty)$; в) ако $\mu_0 \leqq 0$, редът (5) е абсолютно равномерно сходящ върху всяко компактно подмножество на областта $\mathbf{C} - [0, +\infty)$.

§ 3. РАЗВИТИЕ НА АНАЛИТИЧНИ ФУНКЦИИ В РЕДОВЕ ПО ПОЛИНОМИТЕ НА ЛАГЕР

Проблема за развитие на аналитични функции в редове по полиномите на Лагер в „класическия“ случай, т. е. когато параметърът $\alpha = 0$, е изчерпателно решен от Полард [4]. Да отбележим, че в изводите на Полард условието $\alpha = 0$ играе съществена роля и по-специално то се налага преди всичко при използването на формулата за ядрото на Абел [1, с. 111, (5, 1. 15)], която се прилага именно в случая $\alpha = 0$. Не по-малко съществена роля играе и връзката, която съществува между полиномите $L_n^{(0)}(z)$ и $L^{(1/2)}(z)$ [4, (3. 2)], която Полард установява и използва при доказателството на достатъчността на полученото от него условие за представимост на аналитична функция чрез ред по полиномите на Лагер $\{L_n^{(0)}(z)\}_{n=0}^{\infty}$.

В изводите на Полард важна роля играе и връзката между полиномите на Ермит [1, с. 114] и полиномите на Лагер и по-специално зависимостта [1, с. 115, (5.6.1)]

$$H_{2n+1}(z)=(-1)^n 2^{2n+1} n!\, z\, L_n^{(1/2)}(z^2),$$

която свързва ермитов полином от нечетна степен със съответен полином на Лагер с параметър $\alpha=1/2$.

Да отбележим най-сетне, че до голяма степен успехът, постигнат от Полард, се дължи на работата на Хил [6], в която е решен проблемът за условията, при които аналитична функция може да се представи чрез ред по полиномите на Ермит.

В работата [4] на Полард се разглеждат в същност редове от вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n L_n^{(0)}(\zeta^2). \tag{16}$$

Както не е трудно да се установи, областта на сходимост на ред от горния вид е ивица, успоредна на реалната ос и симетрична спрямо нея. Ако положим $\zeta=\xi+i\eta$, резултатът на Полард може да бъде формулиран, както следва: необходимото и достатъчно условие функцията $f(\zeta)$ да се представя чрез ред от вида (16) в ивицата $|\mathrm{Im}\{\zeta\}|<\tau$ $(0<\tau\leqq+\infty)$ е $f(\zeta)$ да е аналитична и четна в тази ивица и за всяко β, $0\leqq\beta<\tau$, да съществува положително $B(\beta)$, такова, че

$$|f(\zeta)|\leqq B(\beta)\, e^{\frac{\xi^2}{2}-|\xi|\,(\beta^2-\eta^2)^{1/2}}$$

за $-\infty<\xi<+\infty$ и $|\eta|\leqq\beta$.

За да модифицираме условието на Полард за редове по класическите полиноми на Лагер, достатъчно е да извършим трансформацията $z=\zeta^2$. При тази трансформация функцията $\frac{\xi^2}{2}-|\xi|\,(\lambda^2-\eta^2)^{1/2}$ $(0\leqq\lambda<+\infty)$ ще се преобразува в следната функция:

$$\varphi(\lambda;\, x,\, y)=\frac{\sqrt{x^2+y^2}+x}{4}-\left\{\frac{\sqrt{x^2+y^2}+x}{2}\left(\lambda^2-\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{2}\right)\right\}^{1/2}. \tag{17}$$

Дефиниционното множество на последната функция е определено чрез неравенствата $x\geqq-\lambda^2$ и $y^2\leqq4\lambda^2(x+\lambda^2)$, т. е. това е затворената област $\overline{\Delta(\lambda)}=\Delta(\lambda)\cup p(\lambda)$. Този извод, разбира се, може да се направи и непосредствено, като се има пред вид, че ивицата $|\mathrm{Im}\{\zeta\}|\leqq\lambda$ при трансформацията $z=\zeta^2$ се преобразува в областта $\overline{\Delta(\lambda)}$.

При така въведените означения можем да формулираме следната

Теорема 1 (Полард). Необходимото и достатъчно условие комплексната функция $f(z)$ да се представя чрез ред от вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n L_n^{(0)}(z) \tag{18}$$

в областта $\Delta(\lambda_0)(0<\lambda_0\leqq+\infty)$ е $f(z)$ да е аналитична в $\Delta(\lambda_0)$ и за всяко λ, $0\leqq\lambda<\lambda_0$, да съществува положително $A(\lambda)$, такова, че

$$|f(z)|\leqq A(\lambda)\,e^{\varphi(\lambda;\,x,\,y)}$$

за всяко $z=x+iy\in\overline{\Delta(\lambda)}$.

Както беше споменато вече, горният резултат решава окончателно проблема за условията за представяне на функция, аналитична в област от вида $\Delta(\lambda_0)$, чрез ред от класическите полиноми на Лагер $\{L_n^{(0)}(z)\}_{n=0}^{\infty}$. Доколкото успяхме да проследим, аналогичен проблем в случая, когато параметърът $\alpha\neq0$, не е разглеждан. Възможно е дори условията за представимост на аналитична функция чрез ред по полиномите на Лагер $\{L_n^{(\alpha)}(z)_{n=0}^{\infty}$ да не зависят от параметъра α. Това е така, когато параметърът α е цяло неотрицателно число в смисъл, че ако една аналитична функция удовлетворява условието на Полард (18) в областта $\Delta(\lambda_0)(0<\lambda_0\leqq+\infty)$, тя се представя в тази област чрез ред по полиномите на Лагер $\{L_n^{(k)}(z)\,{}_{n=0}^{\infty}$ каквото и да е $k=0, 1, 2, \ldots$ Във верността на последното твърдение се убеждаваме чрез индукция, като имаме пред вид зависимостта [1, с. 111, (5.1.14)]

$$L_n^{(\alpha)}(z)=L_n^{(\alpha+1)}(z)-L_{n-1}^{(\alpha+1)}(z)$$

и освен това, че $L_0^{(\alpha+1)}(z)=L_0^{(\alpha)}(z)=1$.

Нашата цел в този параграф не е да дискутираме проблема за представяне на аналитични функции чрез редове по полиномите на Лагер, а да привлечем функциите на Лагер от втори род. По-конкретно ще дадем достатъчни условия, при които коефициентите на развитието на една аналитична функция в ред по полиномите на Лагер могат да се изразят чрез функциите на Лагер от втори род и дадената функция. Преди да формулираме съответния резултат, ще установим две помощни твърдения.

Лема 1. Нека $\alpha>-1$ е произволно и $f(z)$ е комплексна функция, която удовлетворява следните изисквания:

а) $f(z)$ е аналитична в областта $\Delta(\lambda_0)(0<\lambda_0\leqq+\infty)$;

б) $f(z)$ се представя чрез ред по полиномите на Лагер с параметър α в областта $\Delta(\lambda_0)$, т. е.

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\,L_n^{(\alpha)}(z) \tag{19}$$

за всяко $z\in\Delta(\lambda_0)$.

Тогава за всяко $n=0, 1, 2, \ldots$ е в сила равенството

$$a_n=\frac{1}{I_n^{(\alpha)}}\int_0^{\infty}t^{\alpha}e^{-t}\,L_n^{(\alpha)}(t)\,f(t)\,dt, \tag{20}$$

където

$$I_n^{(\alpha)}=\int_0^{\infty}t^{\alpha}e^{-t}\,\{L_n^{(\alpha)}(t)\}^2\,dt=\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}. \tag{21}$$

Доказателство. Понеже редът (19) е сходящ в областта $\Delta(\lambda_0)$, от бележките, които направихме в предишния § 2, следва, че

$$-\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\ln|a_n|}{2\sqrt{n}}\geqq\lambda_0.$$

Следователно, каквото и да е λ, $0<\lambda<\lambda_0$,

$$a_n=O(e^{-2\lambda\sqrt{n}}). \tag{22}$$

Нека $\omega\geqq1$ е произволно. От [1, с. 248, (8 91.1)] следва, че при $n\to+\infty$

$$L_n^{(\alpha)}(t)=O(e^{\frac{t}{2}}t^{\frac{\alpha+1}{2}}n^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{6}}) \tag{23}$$

равномерно по $t\in[\omega,+\infty)$. Ако k е произволно цяло неотрицателно число, от горното неравенство и от неравенството (22) следва, че при $n\to+\infty$

$$a_n t^\alpha e^{-t}L_n^{(\alpha)}(t)L_k^{(\alpha)}(t)=O(t^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}}e^{-\frac{t}{2}}L_k^{(\alpha)}(t)n^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{6}}e^{-2\lambda\sqrt{n}})$$

$$=O(e^{-\frac{t}{2}}L_k^{(\alpha)}(t)n^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{6}}e^{-2\lambda\sqrt{n}})$$

равномерно за $t\in[\omega,+\infty)$. Като имаме пред вид последното равенство и освен това, че редът

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{6}}e^{-2\lambda\sqrt{n}}$$

е сходящ, заключаваме, че редът

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n t^\alpha e^{-t}L_n^{(\alpha)}(t)L_k^{(\alpha)}(t) \tag{24}$$

може да бъде почленно интегриран върху интервала $[\omega,+\infty)$.

Ако $t\in[0,\omega]$, от (8) следва, че

$$a_n t^\alpha e^{-t}L_n^{(\alpha)}(t)L_k^{(\alpha)}(t)=O(t^\alpha n^a e^{-2\lambda\sqrt{n}}),$$

където $a=\max\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4},\alpha\right)$. От горното неравенство, като вземем пред вид $\alpha>-1$, заключаваме, че редът (24) е почленно интегрируем и върху интервала $[0,\omega]$. И така редът (24) може да бъде почленно интегриран върху интервала $[0,+\infty)$ и понеже сумата му е функцията

$$t^\alpha e^{-t}L_k^{(\alpha)}(t)f(t),$$

като вземем пред вид, че полиномите на Лагер $\{L_n^{(\alpha)}(t)\}_{n=0}^{\infty}$ $(\alpha > -1)$ са ортогонални върху интервала $[0, +\infty)$ с тегло функцията $t^{\alpha}e^{-t}$, получаваме равенствата (20).

Лема 2. Нека $0<\lambda_0 \leqq +\infty$ и $f(z)$ е комплексна функция, която удовлетворява следните изисквания:

а) $f(z)$ е аналитична в областта $\Delta(\lambda_0)$;

б) за всяко λ, $0<\lambda<\lambda_0$, съществува $\omega(\lambda)<1/2$, такова, че

$$f(z)=O(z^{\omega(\lambda)})$$

при $z\to\infty$ и $z\in\overline{\Delta(\lambda)}$.

Тогава, каквото и да е компактното множество $K\subset\Delta(\lambda_0)$, равномерно по $z\in K$

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{p(\lambda)}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta \tag{25}$$

за всяко $n=0, 1, 2, \ldots$ и всяко λ, такова, че $0<\lambda<\lambda_0$ и $K\subset\Delta\ \lambda)$.

Доказателство. Нека λ е така избрано, че $0<\lambda<\lambda_0$ и $K\subset\Delta(\lambda)$. За всички достатъчно големи $\rho>0$ множеството K се съдържа в кръга $K_\rho=\{z\in\mathbf{C}: z<\rho\}$. Да означим с $\Gamma(\lambda, \rho)$ дъгата от параболата $p(\lambda)$, която лежи в кръга K_ρ, а с $\gamma(\lambda, \rho)$ да означим дъгата от окръжността $\{z\in\mathbf{C}: |z|=\rho\}$, която принадлежи на областта $\Delta(\lambda)$, т. е. на вътрешността на параболата $p(\lambda)$. Тогава от интегралните формули за производните получаваме, че за всяко $z\in K$ и $n=0, 1, 2, \ldots$ е в сила равенството

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma(\lambda,\rho)}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta+\frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\gamma(\lambda,\rho)}\frac{f(z)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta. \tag{26}$$

Ако означим с $l(\lambda, \rho)$ дължината на дъгата $\gamma(\lambda, \rho)$ и вземем пред вид, че $l(\lambda, \rho)=O(\sqrt{\rho})$ при $\rho\to+\infty$, от условието б) на лемата получаваме, че при $\rho\to+\infty$

$$\frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\gamma(\lambda,\rho)}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta=O(\rho^{\omega(\lambda)-n-\frac{1}{2}})$$

равномерно по $z\in K$. Тогава от (26), като извършим граничния преход $\rho\to+\infty$, получаваме (25), накратко казано.

Основният резултат в този параграф е следната

Теорема 2. Нека $0<\lambda_0\leqq+\infty$ и $\alpha>-1$ са произволни и $f(z)$ е комплексна функция, която удовлетворява следните изисквания:

а) $f(z)$ е аналитична в областта $\Delta(\lambda_0)$;

б) за всяко λ, $0<\lambda<\lambda_0$, съществува $\delta(\lambda)>0$, такова, че

$$f(z)=O(z^{-\frac{1}{2}-\delta(\lambda)}) \tag{27}$$

при $z\to\infty$ и $z\in\overline{\Delta(\lambda)}$;

в) $f(z)$ се представя чрез ред от вида (19) по полиномите на Лагер с параметър α в областта $\Delta(\lambda_0)$.

Тогава за всяко $n=0, 1, 2, \ldots$ и всяко λ, $0<\lambda<\lambda_0$, е в сила равенството

$$a_n=\frac{1}{2\pi i\, I_n^{(\alpha)}}\int\limits_{p(\lambda)} M_n^{(\alpha)}(\zeta)\, f(\zeta)\, d\zeta .$$

Доказателство. От формулата на Родриг [1, с. 110, (5.1.5)]

$$L_n^{(\alpha)}(z)=\frac{1}{n!}\, z^{-\alpha} e^{z} \frac{d^n}{dz^n}\{z^{n+\alpha} e^{-z}\}$$

и от лема 1 получаваме, че за $n=0, 1, 2, \ldots$

$$a_n=\frac{1}{n!\, I_n^{(\alpha)}}\int\limits_0^{\infty} \frac{d^n}{dt^n}\{t^{n+\alpha} e^{-t}\}\, f(t)\, dt . \tag{28}$$

Ще покажем, че каквото и да е $n=0, 1, 2, \ldots$ функцията $f^{(n)}(t)$ е ограничена в интервала $[0, +\infty)$. Преди всичко върху параболата $p(\lambda)$ чието декартово уравнение е $\eta^2=4\lambda^2(\xi+\lambda^2)$, получаваме, че

$$ds=\sqrt{1+\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2}\, d\xi=\sqrt{\frac{\xi+2\lambda^2}{\xi+\lambda^2}}\, d\xi .$$

Тогава от (26) следва, че съществува положително D, такова, че

$$\int\limits_{p(\lambda)} |f(\zeta)|^2 ds \leqq D \int\limits_{-\lambda^2}^{\infty} \frac{\sqrt{\dfrac{\xi+2\lambda^2}{\xi+\lambda^2}}}{(1+2\lambda^2+\xi)^{1+\delta(\lambda)}}\, ds < +\infty . \tag{29}$$

Нека $\zeta=\xi+i\eta\in p(\lambda)$. Не е трудно да се убедим, че най-малката стойност на квадратния тричлен $|\zeta-t|^2=(\xi-t)^2+\eta^2$ в интервала $0\leqq t<+\infty$ е равна на $\xi^2+\eta^2=(\xi+2\lambda^2)^2$, ако $\xi\leqq 0$, и на $\eta^2=4\lambda^2(\xi+\lambda^2)$, ако $\xi\geqq 0$. Следователно за $n=1, 2, 3, \ldots$ и всяко t от интервала $[0, +\infty)$

$$\int\limits_{p(\lambda)} \frac{ds}{(\zeta-t)^{2n+2}} \leqq 2\int\limits_{-\lambda^2}^{0} \frac{\sqrt{\dfrac{\xi+2\lambda^2}{\xi+\lambda^2}}}{(\xi+2\lambda^2)^{n+1}}\, d\xi \tag{30}$$

$$+2\int\limits_0^{\infty} \frac{\sqrt{\dfrac{\xi+2\lambda^2}{\xi+\lambda^2}}}{\{4\lambda^2(\xi+\lambda^2)\}^{n+1}}\, d\xi < +\infty .$$

От условието б) на теоремата следва, че лема 2 е приложима и тогава от (25) съгласно неравенството на Коши — Буняковски намираме, че за $t \in [0, +\infty)$

$$|f^{(n)}(t)|^2 \leqq \left(\frac{n!}{2\pi}\right)^2 \int\limits_{\rho(\lambda)} |f(\zeta)|^2 ds \int\limits_{\rho(\lambda)} \frac{ds}{|\zeta - t|^{2n+2}}.$$

От (29) и (30) получаваме, че $f^{(n)}(t)$ е ограничена функция на $t \in [0, +\infty)$ за всяко $n = 0, 1, 2, \ldots$. По-нататък от (28) след последователно интегриране по части ще получим, че за $n = 0, 1, 2 \ldots$

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n!\, I_n^{(\alpha)}} \int\limits_0^\infty t^{n+\alpha} e^{-t} f^{(n)}(t)\, dt.$$

Съгласно лема 2

$$f^{(n)}(t) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{p(\lambda)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - t)^{n+1}} d\zeta = \frac{(-1)^{n+1} n!}{2\pi i} \int\limits_{p(\lambda)} \frac{f(\zeta)}{(t - \zeta)^{n+1}} d\zeta.$$

Следователно

$$a_n = -\frac{1}{2\pi i\, I_n^{(\alpha)}} \int\limits_0^\infty t^{n+\alpha} e^{-t} \left\{ \int\limits_{p(\lambda)} \frac{f(\zeta)}{(t-\zeta)^{n+1}} d\zeta \right\} dt. \tag{31}$$

Да разгледаме двойния интеграл

$$\int\limits_0^\infty \int\limits_{p(\lambda)} \frac{t^{n+\alpha} e^{-t} f(\zeta)}{(t-\zeta)^{n+1}} dt\, d\zeta. \tag{32}$$

Ще покажем, че той е абсолютно сходящ. За целта е достатъчно да установим, че интегралът

$$\int\limits_0^\infty \int\limits_{p(\lambda)} \frac{t^{n+\alpha} e^{-t}}{(t-\zeta)^{n+1}} dt ds$$

е сходящ. От условието б) на теоремата следва, че има положително D, такова, че

$$\int\limits_0^\infty \int\limits_{p(\lambda)} \frac{t^{n+\alpha} e^{-t} |f(\zeta)|}{|t-\zeta|^{n+1}} dt ds$$

$$\leqq D \int\limits_0^\infty \int\limits_{-\lambda^2}^\infty \frac{t^{n+1} e^{-t} \sqrt{\dfrac{\xi^2 + 2\lambda^2}{\xi + \lambda^2}}}{|t-\zeta|^{n+1} (\xi + 2\lambda^2)^{\frac{1}{2} + \delta(\lambda)}} dt d\xi.$$

По-нататък е достатъчно да разгледаме интеграла

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{t^{n+\alpha} e^{-t}}{|t-\zeta|^{n+1} (\xi+2\lambda^2)^{\frac{1}{2}+\delta(\lambda)}} dt d\xi.$$

Но както видяхме, щом $\xi \geqq 0$, квадратният тричлен $|t-\zeta^2$ става минимум при $t=\xi$ и този минимум е $\eta^2=4\lambda^2(\xi+\lambda^2)$. Следователно

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{t^{n+\alpha} e^{-t}}{|t-\zeta|^{n+1} (\zeta+2\lambda^2)^{\frac{1}{2}+\delta(\lambda)}} dt d\xi$$

$$\leqq \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{t^{n+\alpha} e^{-t}}{2^{n+1} \lambda^{n+1} (\xi+\lambda^2)^{\frac{n+1}{2}} (\xi+2\lambda^2)^{\frac{1}{2}+\delta(\lambda)}} dt d\zeta$$

$$= \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{2^{n+1} \lambda^{n+1}} \int_0^\infty \frac{d\xi}{(\xi+\lambda^2)^{\frac{n+1}{2}} (\xi+2\lambda^2)^{\frac{1}{2}+\delta(\lambda)}}$$

$$\leqq \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{2^{n+1} \lambda^{n+1}} \int_0^\infty \frac{d\xi}{(\xi+\lambda^2)^{1+\delta(\lambda)}} < +\infty.$$

И така двойният интеграл (32) е абсолютно сходящ. Следователно в двукратния интеграл (31) можем да разменим реда на интегрираниятa и ще получим, че

$$a_n = -\frac{1}{2\pi i I_n^{(\alpha)}} \int_{p(\lambda)} \left\{ \int_0^\infty \frac{t^{n+\alpha} e^{-t}}{(t-\zeta)^{n+1}} dt \right\} f(\zeta) d\zeta$$

$$= \frac{1}{2\pi i I_n^{(\alpha)}} \int_{p(\lambda)} M_n^{(\alpha)}(\zeta) f(\zeta) d\zeta.$$

Следствие. Нека $0<\lambda_0 \leqq +\infty$ и $f(z)$ е комплексна функция, която удовлетворява следните условия:

а) $f(z)$ е аналитична в областта $\Delta(\lambda_0)$;

б) каквото и да е λ, $0<\lambda<\lambda_0$, съществува положително $\delta(\lambda)$, такова, че

$$f(z) = O(|z|^{\frac{1}{2}-\delta(\lambda)}) \tag{27}$$

при $z \to \infty$ и $z \in \overline{\Delta(\lambda)}$.

Тогава $f(z)$ се развива в областта $\Delta(\lambda_0)$ в ред по класическите полиноми на Лагер:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n L_n^{(0)}(z),$$

и за всяко $n=0, 1, 2, \ldots$ и $0<\lambda<\lambda_0$,

$$a_n=\frac{1}{2\pi i I_n^{(\alpha)}}\int_{p(\lambda)} M_n^{(0)}(\zeta) f(\zeta)\, d\zeta.$$

Във валидността на горното следствие се убеждаваме, като имаме пред вид, че от условието б) следва, че е удовлетворено условието на Полард (19). Наистина, като имаме пред вид, че за функцията (17) в областта $\overline{\Delta(\lambda)}$ е в сила неравенството $\varphi(\lambda; x, y)\geqq-\lambda^2$, от (26) получаваме, че

$$e^{-\varphi(\lambda; x, y)} f(z)=O(1)$$

при $z\to\infty$ и $z\in\overline{\Delta(\lambda)}$.

Съгласно теоремата на Тейлор, ако $f(z)$ е комплексна функция, аналитична в околността на точката a, тя се представя чрез степенен ред в околността на тази точка. Ако положим по определение

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\, d\zeta \qquad (n=0, 1, 2, \ldots),$$

където γ е окръжност с център точката a и достатъчно малък радиус, твърдението на теоремата на Тейлор може да бъде изказано в следната по-прецизна форма: за да се представя $f(z)$ чрез степенен ред в кръга $\{z\in C: |z-a|<\rho\}$, е необходимо и достатъчно да бъде удовлетворено следното неравенство:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}\leqq\frac{1}{\rho}.$$

Оказва се, че при известни условия последното твърдение има аналог и за редове по полиномите на Лагер, а именно в сила е следната

Теорема 3. Нека $0<\lambda_0\leqq+\infty$ и $\alpha>1/2$ са произволни и $f(z)$ е комплексна функция, която удовлетворява следните изисквания:

а) $f(z)$ е аналитична в областта $\Delta(\lambda_0)$;

б) за всяко λ, $0<\lambda<\lambda_0$, съществува $\delta(\lambda)>\alpha-1/2$, такова, че

$$f(z)=O\left(z^{-\frac{1}{2}-\delta(\lambda)}\right)$$

при $z\to\infty$ и $z\in\overline{\Delta(\lambda)}$.

Да положим

$$a_n=\frac{1}{2\pi i I_n^{(\alpha)}}\int_{p(\lambda)} M_n^{(\alpha)}(\zeta) f(\zeta)\, d\zeta. \tag{33}$$

Тогава, за да се представя $f(z)$ чрез ред по полиномите на Лагер $\{L_n^{(\alpha)}(z)\}_{n=0}^{\infty}$ в областта $\Delta(\lambda_0)$, е необходимо и достатъчно да е изпълнено неравенството

$$-\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\ln|a_n|}{2\sqrt{n}}\geqq\lambda_0. \tag{34}$$

Доказателство. Преди всичко да обърнем внимание, че от условието б) на теоремата и от асимптотичната формула (13) за $M_n^{(\alpha)}(z)$ като функция на z следва, че за всяко $n=0, 1, 2, \ldots$ интегралът в дясната страна на (33) е даже абсолютно сходящ. Наистина каквото и да е $n=0, 1, 2, \ldots$ за $\zeta\to\infty$ и $\zeta\in p(\lambda)$

$$M_n^{(\alpha)}(\zeta)f(\zeta)=O(|\zeta|^{-\omega(\lambda, n, \alpha)}),$$

където $\omega(\lambda, n, \alpha)=n+1-(\alpha-[\alpha])+\frac{1}{2}+\delta(\lambda)\geqq 1-(\alpha-[\alpha])+\frac{1}{2}+\delta(\lambda)>1+[\alpha]$.

Необходимостта на условието (34) следва от бележките, които направихме в предишния § 2 относно областта на сходимост на ред по полиномите на Лагер, като се има пред вид, че съгласно теорема 2 коефициентите в развитието на $f(z)$ в ред по полиномите на Лагер $\{L_n^{(\alpha)}(z)\}_{n=0}^{\infty}$ са точно числата a_n $(n=0, 1, 2, \ldots)$, дефинирани с (33).

При доказателството на достатъчността ще ангажираме формулата на Кристофел — Дарбу, която в разглеждания конкретен случай има вида

$$\frac{1}{\zeta-z}=\sum_{n=0}^{\nu}\frac{1}{I_n^{(\alpha)}}L_n^{(\alpha)}(z)M_n^{(\alpha)}(\zeta)+\frac{\Delta_{\nu+1}^{(\alpha)}(z, \zeta)}{\zeta-z}, \tag{35}$$

където

$$\Delta_{\nu+1}^{(\alpha)}(z, \zeta)=\frac{\nu+1}{I_\nu^{(\alpha)}}\{L_\nu^{(\alpha)}(z)M_{\nu+1}^{(\alpha)}(\zeta)-L_{\nu+1}^{(\alpha)}(z)M_\nu^{(\alpha)}(\zeta)\}.$$

Формулата (35) се получава по обичайния начин, като се има пред вид, че системата полиноми на Лагер $\{L_n^{(\alpha)}(z)\}_{n=0}^{\infty}$, респ. системата функции на Лагер от втори род $\{M_n^{(\alpha)}(z)\}_{n=0}^{\infty}$, са решения на рекурентното уравнение (2). По-точно има се пред вид, че ако последното уравнение разделим с $I_n^{(n)}$, дефинирано с (21), то ще добие вида

$$\frac{n+1}{I_n^{(\alpha)}}y_{n+1}+\frac{1}{I_n^{(\alpha)}}(z-\alpha-2n-1)y_n+\frac{n}{I_{n-1}^{(\alpha)}}y_{n-1}=0.$$

Да отбележим преди всичко, че ако е изпълнено неравенството (34), редът

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n L_n^{(\alpha)}(z)$$

е абсолютно равномерно сходящ вътре в областта $\Delta(\lambda_0)$ и трябва да установим, че сумата му е $f(z)$. За целта е достатъчно да покажем, че сумата на горния ред съвпада с функцията $f(z)$ върху лъча $(0, +\infty)$. Нека $z=x\in(0, +\infty)$ е произволно. Като имаме пред вид лема 2, ще получим, че

$$(36)\qquad f(x)-\sum_{n=0}^{\nu}{}' a_n L_n^{(\alpha)}(x)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{p(\lambda)}\frac{f(\zeta)}{\zeta-x}\,d\zeta$$

$$-\sum_{n=0}^{\nu}\left\{\frac{1}{2\pi i\, I_n^{(\alpha)}}\int\limits_{p(\lambda)} M_n^{(\alpha)}(\zeta)f(\zeta)\,d(\zeta)\right\}L_n^{(\alpha)}(x)$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{p(\lambda)}\left\{\frac{1}{\zeta-x}-\sum_{n=0}^{\nu}\frac{M_n^{(\alpha)}(\zeta)\,L_n^{(\alpha)}(x)}{I_n^{(\alpha)}}\right\}f(\zeta)\,d\zeta$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{p(\lambda)}\frac{\Delta_{\nu+1}^{(\alpha)}(x,\zeta)}{\zeta-x}f(\zeta)\,d\zeta=\frac{(\nu+1)\,L_\nu^{(\alpha)}(x)}{2\pi i\, I_\nu^{(\alpha)}}\int\limits_{p(\lambda)}\frac{M_{n+1}^{(\alpha)}(\zeta)f(\zeta)}{\zeta-x}\,d\zeta$$

$$-\frac{(\nu+1)\,L_{\nu+1}^{(\alpha)}(x)}{2\pi i\, I_\nu^{(\alpha)}}\int\limits_{p(\lambda)}\frac{M_\nu^{(\alpha)}(\zeta)f(\zeta)}{\zeta-x}\,d\zeta.$$

Нека $\eta>0$ е произволно и да означим с $\pi(\lambda, \eta)$ дъгата от параболата $p(\lambda)$, която лежи в областта $\{z\in\mathbf{C}:|\mathrm{Im}\{z\}|<\eta\}$. Тогава от асимптотичните формули (8) и (10) и формулата на Стирлинг следва, че

$$\frac{(\nu+1)\,L_\nu^{(\alpha)}(x)}{2\pi i\, I_\nu^{(\alpha)}}\int\limits_{\pi(\lambda,\eta)}\frac{M_{\nu+1}^{(\alpha)}(\zeta)f(\zeta)}{\zeta-x}\,d\zeta=O(\nu^{1/2}e^{-2\lambda\sqrt{\nu}})$$

и аналогично

$$\frac{(\nu+1)\,L_{\nu+1}^{(\alpha)}(x)}{2\pi i\, I_\nu^{(\alpha)}}\int\limits_{\pi(\lambda,\eta)}\frac{M_\nu^{(\alpha)}(\zeta)f(\zeta)}{\zeta-x}\,d\zeta=O(\nu^{1/2}e^{-2\lambda\sqrt{\nu}}).$$

Като имаме пред вид асимптотичната формула (14), а също така и условията $\alpha>\frac{1}{2}$ и $\delta(\lambda)>\alpha-\frac{1}{2}$, получаваме, че

$$\frac{(\nu+1)\,L_\nu^{(\alpha)}(x)}{2\pi i\, I_\nu^{(\alpha)}}\int\limits_{p(\lambda)-\pi(\lambda,\eta)}\frac{M_{\nu+1}^{(\alpha)}(\zeta)f(\zeta)}{\zeta-x}\,d\zeta=O\left(\nu^{\frac{\alpha}{2}\pm\frac{1}{4}}\int\limits_{p(\lambda)-\pi(\lambda,\eta)}\frac{d\zeta}{\zeta^{1+\alpha}}\right)$$

и аналогично

$$\frac{(\nu+1)\,L_{\nu+1}^{(\alpha)}(x)}{2\pi i\, I_{\nu}^{(\alpha)}} \int\limits_{p(\lambda)-\pi(\lambda,\eta)} \frac{M_{\nu}^{(\alpha)}(\zeta)\,f(\zeta)}{\zeta-x}\,d\zeta = O\left(\nu^{-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}} \int\limits_{p(\lambda)-\pi(\lambda,\eta)} \frac{ds}{\zeta^{1+\alpha}}\right).$$

От (36) следва тогава, че

$$\lim_{\nu\to+\infty}\left\{f(x)-\sum_{n=0}^{\nu} a_n\,L_n^{(\alpha)}(x)\right\}=0$$

и с това теорема 3 е установена.

Следствие. Нека $0<\lambda_0\leqq+\infty$ и $\alpha>1/2$ са произволни и $f(z)$ е комплексна функция, която удовлетворява условията а) и б) на теорема 3. Да положим

$$a_n=\frac{1}{I_n^{(\alpha)}}\int\limits_0^{\infty} t^{\alpha}e^{-t}\,L_n^{(\alpha)}(t)\,f(t)\,dt \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Тогава, за да се представя $f(z)$ чрез ред по полиномите на Лагер $\{L_n^{(\alpha)}(z)\}_{n=0}^{\infty}$ в областта $\Delta(\lambda_0)$, е необходимо и достатъчно да е изпълнено неравенството

$$-\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\ln|a_n|}{2\sqrt{n}}\geqq\lambda_0.$$

Ще илюстрираме теорема 3 или по-точно горното следствие с помощта на два примера

1) Нека $s>1$ е произволно и да положим

$$f(z)=e^{-(s-1)z}. \tag{37}$$

Очевидно така дефинираната функция удовлетворява условията а) и б) на теорема 3 в цялата комплексна равнина ($\lambda_0=+\infty$). Като имаме пред вид, че [8, с. 859, 7.416, 8]

$$\int\limits_2^{\infty} t^{\alpha}e^{-t}\,L_n^{(\alpha)}(t)\,e^{-(s-1)t}\,dt=\int\limits_0^{\infty} t^{\alpha}e^{-st}\,L_n^{(\alpha)}(t)\,dt=\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}\,\frac{(s-1)^n}{s^{n+\alpha+1}},$$

получаваме, че в този случай

$$a_n=\frac{(s-1)^n}{s^{n+\alpha+1}}=\frac{1}{s^{\alpha+1}}\left(1-\frac{1}{s}\right)^n,$$

откъдето намираме, че

$$-\overline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{\ln|a_n|}{2\sqrt{n}}=-\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}\,\ln\left(1-\frac{1}{s}\right)=+\infty.$$

Следователно, ако $\alpha > 1/2$, в цялата комплексна равнина е в сила развитието

$$e^{-(s-1)z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(s-1)^n}{s^{n+\alpha+1}} L_n^{(\alpha)}(z). \tag{38}$$

Не е трудно да се покаже, че горното равенство запазва валидността си и когато s е комплексно, но $\left|1-\frac{1}{s}\right| = \left|\frac{s-1}{s}\right| < 1$, което е еквивалентно с неравенството $\mathrm{Re}\{s\} > \frac{1}{2}$. Ако положим $w = \frac{s-1}{s}$, от (38) получаваме познатото равенство [1, с. 110 (5.1.9)]

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(\alpha)}(z) . w^n = (1-w)^{-\alpha-1} e^{-\frac{zw}{1-w}}.$$

Да отбележим, че развитието (38) може да бъде установено, като се използват критерии за представяне на функции върху интервала $[0, +\infty)$ чрез редове по полиномите на Лагер и по-специално критерият, даден от Ричард [7, с. 243—244].

2) На второ място да разгледаме функцията

$$f(z) = \frac{1}{(z+\lambda_0^2)^{1+s}},$$

където $\lambda_0 > 0$, $s \geqq \max(0, \alpha-1)$ и $\alpha > 1/2$. Така определената функция при ограниченията, които направихме за параметъра s, удовлетворява условията на теорема 3 в областта $\Delta(\lambda_0)$. Като имаме пред вид формулата на Родриг за полиномите на Лагер, получаваме след последователно интегриране по части

$$a_n = \frac{1}{I_n^{(\alpha)}} \int_0^{\infty} \frac{t^\alpha e^{-t} L_n^{(\alpha)}(t)}{(t+\lambda_0^2)^{1+s}} dt = \frac{1}{n!\, I_n^{(\alpha)}} \int_0^{\infty} \frac{\frac{d^n}{dt^n}\{t^{n+\alpha} e^{-t}\}}{(t+\lambda_0^2)^{1+s}} dt \tag{39}$$

$$= \frac{(-1)^n}{n!\, I_n^{(\alpha)}} \int_0^{\infty} t^{n+\alpha} e^{-t} \frac{d^n}{dt^n} \left\{\frac{1}{(t+\lambda_0^2)^{1+s}}\right\} dt$$

$$= \frac{(s+1)(s+2)\ldots(s+n)}{n!\, I_n^{(\alpha)}} \int_0^{\infty} \frac{t^{n+\alpha} e^{-t}}{(t+\lambda_0^2)^{n+s+1}} dt$$

$$= \frac{\Gamma(n+s+1)}{\Gamma(s+1)\Gamma(n+\alpha+1)} \int_0^{\infty} \frac{t^{n+\alpha} e^{-t}}{(t+\lambda_0^2)^{n+s+1}}.$$

Понеже $s \geqq 0$, получаваме, че

$$a_n \leqq \frac{\Gamma(n+s+1)}{\Gamma(s+1)\Gamma(n+\alpha+1)} \int_0^\infty \frac{t^{n+\alpha} e^{-t}}{(t+\lambda_0^2)^{n+1}} dt,$$

т. е.

$$a_n \leqq -\frac{\Gamma(n+s+1)}{\Gamma(s+1)\Gamma(n+\alpha+1)} M_n^{(\alpha)}(-\lambda_0^2).$$

Като имаме пред вид, че $a_n \geqq 0$, и използваме асимптотичната формула (10) за функциите на Лагер от втори род, получаваме, че

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{\ln|a_n|}{2\sqrt{n}} \leqq -\lambda_0.$$

Следователно

$$-\overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{\ln|a_n|}{2\sqrt{n}} \geqq \lambda_0$$

и от теорема 3 следва, че за всяко $z \in \Delta(\lambda_0)$ е в сила равенството

$$\frac{1}{(z+\lambda_0^2)^{1+s}} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n L_n^{(\alpha)}(z),$$

където коефициентите $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ се дават от (39).

§ 4. РАЗВИТИЕ НА АНАЛИТИЧНИ ФУНКЦИИ В РЕДОВЕ ПО ФУНКЦИИТЕ НА ЛАГЕР ОТ ВТОРИ РОД

В този параграф се разглежда въпросът за развитие на аналитични функции в редове по функциите на Лагер от втори род. Проблемът за намирането на необходими и достатъчни условия за представимост на комплексна функция, аналитична в област от вида $\Delta_*(\mu_0)$ $(0 \leqq \mu_0 < +\infty)$, чрез ред по функциите $\{M_n^{(\alpha)}(z)\}_{n=0}^{\infty}$ изглежда труден, даже ако се ограничим на случая $\alpha=0$. Но както ще видим, асимтотичната формула (10) за тези функции, формулата на Кристофел — Дарбу (35), а също така неравенството (15) и асимтотичната формула (9) за полиномите на Лагер дават възможност преди всичко да бъде установено едно необходимо условие за представяне на аналитична функция чрез ред по функциите на Лагер от втори род, а също така да бъдат указани и достатъчни условия за развитие на аналитични функции, принадлежащи на определени класи чрез редове по функциите $\{M_n^{(\alpha)}(z)\}$.

Теорема 4. Нека $0 \leqq \mu_0 < +\infty$ и $\alpha > -1$ са произволни и $f(z)$ е комплексна функция, която е дефинирана в областта $\Delta_*(\mu_0)$ и се представя в тази област чрез ред по функциите на Лагер от втори род $\{M_n^{(\alpha)}(z)\}_{n=0}^{\infty}$, т. е. за всяко $z \in \Delta_*(\mu_0)$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n M_n^{(a)}(z). \tag{40}$$

Тогава каквото и да е $\tau>0$, $f(z)=O(1)$ в полуравнината $\mathrm{Re}\{z\} \leqq -(\mu_0+\tau)^2$.

Доказателство. От бележките, които направихме в § 2, следва, че

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{\ln|b_n|}{2\sqrt{n}} \leqq \mu_0 .$$

Следователно съществува положително B, такова, че

$$|b_n| \leqq B e^{2\left(\mu_0+\frac{\tau}{2}\right)\sqrt{n}}$$

за всяко $n=0, 1, 2, \ldots$.

За всяко $z=x+iy$, такова, че $\mathrm{Re}\{z\} \leqq -(\mu_0+\tau)^2$, получаваме, че

$$|M_n^{(a)}(z)| = \left| \int_0^\infty \frac{t^{n+a} e^{-t}}{(t-z)^{n+1}} dt \right| \leqq \int_0^\infty \frac{t^{n+a} e^{-t}}{|t-z|^{n+1}} dt$$

$$= \int_0^\infty \frac{t^{n+a} e^{-t}}{\{(t-x)^2+y^2\}^{\frac{n+1}{2}}} dt \leqq \int_0^\infty \frac{t^{n+a} e^{-t}}{(t-x)^{n+1}} dt$$

$$\leqq \int_0^\infty \frac{t^{n+a} e^{-t}}{\{t+(\mu_0+\tau)^2\}^{n+1}} dt = -M_n^{(a)}\{-(\mu_0+\tau)^2\} .$$

От асимптотичната формула (10) следва тогава, че съществува константа $M>0$, такава, че за всяко z от полуравнината $\mathrm{Re}\{z\} \leqq -(\mu_0+\tau)^2$ и за всяко $n=1, 2, 3, \ldots$ е в сила неравенството

$$|M_n^{(a)}(z)| \leqq M n^{\frac{a}{2}-\frac{1}{4}} e^{-2(\mu_0+\tau)\sqrt{n}} .$$

Тогава от (40) получаваме, че

$$|f(z)| \leqq |b_0|\,|M_0^{(a)}(z)| + \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|\,|M_n^{(a)}(z)|$$

$$\leqq |b_0|\,|M_0^{(a)}(z)| + \sum_{n=1}^{\infty} B M n^{\frac{a}{2}-\frac{1}{4}} e^{-\tau\sqrt{n}}$$

и като имаме пред вид, че съгласно асимптотичната формула (13)

$$M_0^{(a)}(z) = O\left(\frac{1}{z^{1-(a-[a])}}\right)$$

при $z \to \infty$ в областта $C-[0, +\infty)$ и освен това, че редът

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} e^{-\tau\sqrt{n}}$$

е сходящ, получаваме твърдението на теоремата.

Теорема 5. Нека α е произволно реално число, отлично от -1, $-2, \ldots$, и $F(t)$ е комплексна функция, дефинирана и измерима върху интервала $[0, +\infty)$, която удовлетворява следните условия:

а) $\int_0^{\omega} F(t)\, dt < +\infty \quad (0<\omega<+\infty)$;

б) $F(t) = O(e^{-\frac{t}{2}} t^{\beta})$ при $t \to +\infty$ за някое $\beta < \frac{\alpha-1}{2}$.

Тогава функцията

$$f(z) = \int_0^{\infty} \frac{F(t)}{z-t}\, dt \tag{41}$$

се развива в ред по функциите на Лагер от втори род $\{M_n^{(\alpha)}(z)\}_{n=0}^{\infty}$ в областта $C-[0, +\infty)$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n M_n^{(\alpha)}(z) \tag{42}$$

с коефициенти

$$b_n = \frac{1}{I_n^{(\alpha)}} \int_0^{\infty} L_n^{(\alpha)}(t) F(t)\, dt. \tag{43}$$

Доказателство. От [1, с. 248, (8.91.1)] и от условието б) на теоремата следва, че

$$L_n^{(\alpha)}(t) F(t) = O(n^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{6}} t^{\beta-\frac{\alpha+1}{2}})$$

равномерно по $t \in [\omega, +\infty)$ (ω е фиксирано положително число). Понеже $\beta - \frac{\alpha+1}{2} < -1$, поради условието $\beta < \frac{\alpha-1}{2}$ преди всичко следва, че интегралът от дясната страна на (43) е абсолютно сходящ за всяко $n=0, 1, 2, \ldots$ и освен това, че

$$\int_{\omega}^{\infty} |L_n^{(\alpha)}(t) F(t)|\, dt = O(n^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{6}}).$$

Ако $0 \leqq t \leqq \omega$, от (8), като вземем пред вид условието а) на теоремата, получаваме, че

$$\int_0^{\omega} |L_n^{(\alpha)}(t) F(t)|\, dt = O(n^a),$$

където $a = \max\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}, \alpha\right)$. Следователно

$$\int_0^{\infty} |L_n^{(\alpha)}(t) F(t)|\, dt = O(n^b), \tag{44}$$

където $b = \max\left(a, \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{6}\right)$.

От формулата на Кристофел — Дарбу (35), като заменим ζ със z, z с t, умножим с $F(t)$ и интегрираме върху интервала $[0, +\infty)$, получаваме, че за всяко $z \in \mathbf{C} - [0, +\infty)$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\nu} \frac{M_n^{(\alpha)}(z)}{I_n^{(\alpha)}} \int_0^{\infty} L_n^{(\alpha)}(t) F(t)\, dt + \int_0^{\infty} \frac{\Delta_{\nu+1}^{(\alpha)}(t, z) F(t)}{z-t}\, dt \tag{45}$$

$$= \sum_{n=0}^{\nu} b_n M_n^{(\alpha)}(z) + \int_0^{\infty} \frac{\Delta_{\nu+1}^{(\alpha)}(t, z) F(t)}{z-t}\, dt.$$

Като вземем пред вид формулата на Стирлинг, асимптотичната формула (10) за функциите на Лагер от втори род, а също така и неравенството (44), получаваме, че

$$\int_0^{\infty} \frac{\Delta_{\nu+1}^{(\alpha)}(t, z) F(t)}{z-t}\, dt = \frac{\nu+1}{I_\nu^{(\alpha)}} \left\{ M_{\nu+1}^{(\alpha)}(z) \int_0^{\infty} \frac{L_\nu^{(\alpha)}(t) F(t)}{z-t}\, dt \right.$$

$$\left. - M_\nu^{(\alpha)}(z) \int_0^{\infty} \frac{L_{\nu+1}^{(\alpha)}(t) F(t)}{z-t}\, dt \right\} = O\left(\nu^{b - \frac{\alpha}{2} + \frac{3}{4}} e^{-2(-z)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\nu}}\right).$$

Тогава от (45) следва, че редът от дясната страна на (42) е сходящ за всяко $z \in \mathbf{C} - [0, +\infty)$ и сумата му е функцията (41).

Възможен е и друг вариант на доказателство на предложение от разгледания по-горе тип. Да положим именно $F(t) = t^\alpha e^{-t} \varphi(t)$ и да развием функцията $\varphi(t)$ в ред по полиномите на Лагер $\{L_n^{(\alpha)}(t)\}_{n=0}^{\infty}$ върху интервала $(0, +\infty)$, т. е.

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n L_n^{(\alpha)}(t), \tag{46}$$

където

$$b_n=\frac{1}{I_n^{(\alpha)}}\int_0^\infty t^\alpha e^{-t} L_n^{(\alpha)}(t)\varphi(t)\,dt=\frac{1}{I_n^{(\alpha)}}\int_0^\infty L_n^{(\alpha)}(t)F(t)\,dt.$$

Ако умножим развитието (46) с функцията $t^\alpha e^{-t}(z-t)^{-1}$, интегрираме върху интервала $(0, +\infty)$ и вземем пред вид дефиницията (3) на функциите на Лагер от втори род, получаваме представянето (42) с коефициенти, които се дават от (43).

Ще се убедим обаче, че по този път не е възможно да се постигне по-голяма общност и нещо повече, ще посочим случаи, когато описаният метод е неприложим, а в същото време условията на теорема 5 са удовлетворени.

Нека $\alpha>1/2$ и да положим

$$\varphi(t)=e^{t/2}t^\gamma, \tag{47}$$

където параметърът γ удовлетворява условието

$$-1-\alpha<\gamma<-\frac{\alpha}{2}-\frac{5}{4}. \tag{48}$$

Да обърнем внимание, че това условие е реализуемо, т. е. че е в сила неравенството $-1-\alpha<-\alpha/2-5/4$ поради условието $\alpha>1/2$.

Както е установено в [1, с. 278, (9.5.21)] за коефициентите b_n, в случая е валидна следната асимптотична формула:

$$b_n=\{An^{-\alpha-\gamma-1}+B(-1)^n n^\gamma\{1+\beta_n\}, \tag{49}$$

където $\beta_n\to 0$ при $n\to\infty$, при това $A\neq 0$. От (49) получаваме по-нататък, че

$$n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}b_n=\{An^{-\frac{\alpha}{2}-\gamma-\frac{5}{4}}+B(-1)^n n^{\frac{\alpha}{2}+\gamma-\frac{1}{4}}\}\{1+\beta_n\}.$$

От (48) следва, че $-\frac{\alpha}{2}-\gamma-\frac{5}{4}>0$ и $\frac{\alpha}{2}+\gamma-\frac{1}{4}<0$. Тогава от асимптотичната формула (5) веднага следва, че редът (46) е разходящ за всяко $t>0$, понеже общият му член не клони към нула.

Да обърнем внимание, че функцията

$$F(t)=t^\alpha e^{-t}\varphi(t)=e^{-t/2}t^{\alpha+\gamma}$$

удовлетворява изискванията на теорема 5, понеже $\alpha+\gamma>-1$ и $\alpha+\gamma<\frac{\alpha}{2}-\frac{5}{4}<\frac{\alpha-1}{2}$.

Нека $0<\mu_0<+\infty$ и $\rho>\max(1, 2\mu_0^2)$. Да означим с $\Gamma(\mu_0, \rho)$ дъгата от параболата $p(\mu_0)$, която принадлежи на кръга $K_\rho=\{z\in\mathbf{C}: |z|\leq\rho\}$.

Теорема 6. Нека α е произволно реално число, отлично от -1, $-2,\ldots$, $0<\mu_0<+\infty$, и $F(\zeta)$ е комплексна функция, дефинирана и измерима върху параболата $p(\mu_0)$ и удовлетворяваща следните условия:

а) $\int\limits_{\Gamma(\mu_0,\rho)} |F(\zeta)|\,ds < +\infty,\ \rho > (1,\ 2\mu_0^2)$;

б) $F(\zeta) = O(e^{-\xi}\zeta^{\beta})$ при $\zeta \to \infty$ и $\zeta \in p(\mu_0)$ за някое $\beta < \frac{\alpha}{2} - \frac{3}{4}$.

Тогава функцията

$$f(z) = \int\limits_{p(\mu_0)} \frac{F(\zeta)}{z-\zeta}\,d\zeta \tag{50}$$

се развива в ред по функциите на Лагер от втори род $\{M_n^{(\alpha)}(z)\}_{n=0}^{\infty}$ в областта $\Delta_*(\mu_0)$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n M_n^{(\alpha)}(z) \tag{51}$$

с коефициенти

$$b_n = \frac{1}{I_n^{(\alpha)}} \int\limits_{p(\mu_0)} L_n^{(\alpha)}(\zeta)\,F(\zeta)\,d\zeta. \tag{52}$$

Доказателство. От неравенството (15) и от условието б) на теоремата следва, че

$$L_n^{(\alpha)}(\zeta)\,F(\zeta) = O\left(n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} e^{2\mu_0\sqrt{n}}\,\zeta^{\beta-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\right)$$

равномерно върху $p(\mu_0) - \Gamma(\mu_0,\ \rho)$. Понеже $\beta - \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4} < -1$ и освен това

$$\int\limits_{p(\mu_0)} \frac{ds}{|\zeta|^{\sigma}} < +\infty,$$

щом $\sigma > 1$, преди всичко заключаваме, че интегралът от дясната страна на (52) е абсолютно сходящ. Освен това получаваме, че

$$\int\limits_{p(\mu_0)-\Gamma(\mu_0,\rho)} |L_n^{(\alpha)}(\zeta)\,F(\zeta)|\,ds = O\left(n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} e^{2\mu_0\sqrt{n}}\right). \tag{53}$$

От условието а) на теоремата и от асимптотичната формула (9) за полиномите на Лагер следва, че

$$\int\limits_{\Gamma(\mu_0,\rho)} |L_n^{(\alpha)}(\zeta)\,F(\zeta)|\,ds = O\left(n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} e^{2\mu_0\sqrt{n}}\right). \tag{54}$$

От (53) и (54) получаваме

$$\int\limits_{p(\mu_0)} |L_n^{(\alpha)}(\zeta)\,F(\zeta)|\,ds = O\left(n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} e^{2\mu_0\sqrt{n}}\right). \tag{55}$$

Тогава от (52) и (55) намираме, че

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{\ln|b_n|}{2\sqrt{n}} \leqq \mu_0 .$$

Следователно редът от дясната страна на (51) е сходящ в областта $\Delta_*(\mu_0)$ и остава да покажем, че сумата му е функцията $f(z)$. За целта ще постъпим, както в доказателството на теорема 5. Във формулата на Кристофел — Дарбу (35) да заместим ζ със z, z с ζ, да умножим с $F(\zeta)$ и да интегрираме върху параболата $p(\mu_0)$. Ще получим, че за всяко $z \in \Delta_*(\mu_0)$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\nu} b_n M_n^{(\alpha)}(z) + \int\limits_{p(\mu_0)} \frac{\Delta_{\nu+1}^{(\alpha)}(\zeta, z) F(\zeta)}{z-\zeta} d\zeta .$$

От асимптотичната формула (10) за функциите на Лагер от втори род и неравенството (55) получаваме, че

$$\int\limits_{p(\mu_0)} \frac{\Delta_{\nu+1}^{(\alpha)}(\zeta, z) F(\zeta)}{z-\zeta} d\zeta$$

$$= O\left(\nu^{\frac{1}{2}} e^{2\mu_0\sqrt{n} - 2\,\mathrm{Re}\left\{(-z)^{1/2}\right\}\sqrt{\nu}}\right) = O(1)$$

при $\nu \to +\infty$, понеже $\mathrm{Re}\{(-z)\}^{1/2}\} > \mu_0$, с което теорема 6 е установена.

Да определим по-нататък областта

$$\Delta^*(\mu_0, \rho) = \{z \in \mathbf{C} : \mathrm{Re}\{(-z)^{1/2}\} \leqq \mu_0,\ |z| \geqq \rho\}$$

и да положим освен това $\Delta_*(\mu_0, \rho) := \Delta(\mu_0) - \Delta^*(\mu_0, \rho)$.

Теорема 7. Нека α е произволно реално число, отлично от -1 $-2, \ldots$, $0 < \mu_0 < +\infty$, и $F(w)$ е комплексна функция, дефинирана и измерима в областта $\Delta(\mu_0)$ и удовлетворяваща следните условия:

а) $\int\limits_{\Delta^*(\mu_0, \rho)} \int |F(w)|\, du dv < +\infty$, $\rho > \max(1, 2\mu_0^2)$;

б) $F(w) = O(e^{-w} w^{\beta})$ при $w \to \infty$ в областта $\Delta(\mu_0)$ за някое $\beta < \frac{\alpha}{2} - \frac{5}{4}$.

Тогава функцията

$$f(z) = \int\limits_{\Delta(\mu_0)} \int \frac{F(w)}{z-w} du dv$$

се развива в ред по функциите на Лагер от втори род $\{M_n^{(\alpha)}(z)\}_{n=0}^{\infty}$ в областта $\Delta_*(\mu_0)$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n M_n^{(\alpha)}(z)$$

с коефициенти

$$(56)\qquad b_n = \frac{1}{J_n^{(\alpha)}} \iint\limits_{\Delta(\mu_0)} L_n^{(\alpha)}(w)\, F(w)\, du dv \qquad (n=0,\ 1,\ 2, \ldots).$$

Доказателство. От неравенството (15) и от условието б) на теоремата следва, че

$$L_n^{(\alpha)}(w)\, F(w) = O\left(n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} e^{2\mu_0\sqrt{n}}\, w^{\beta-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\right)$$

равномерно във вътрешността на областта $\Delta^*(\mu_0, \rho)$. Понеже $\beta - \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4} < -\frac{3}{2}$ и освен това, както не е трудно да се убедим,

$$\iint\limits_{\Delta^*(\mu_0,\ \rho)} \frac{du dv}{|w|^{\sigma}} < +\infty,$$

щом $\sigma > 3/2$, преди всичко заключаваме, че интегралът от дясната страна на (56) е абсолютно сходящ. Освен това получаваме, че

$$(57)\qquad \iint\limits_{\Delta^*(\mu_0,\ \rho)} |L_n^{(\alpha)}(w)\, F(w)|\, du dv = O\left(n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} e^{2\mu_0\sqrt{n}}\right).$$

От условието а) на теоремата и принципа за максимума на модула следва, че

$$\iint\limits_{\Delta_*(\mu_0,\ \rho)} |L_n^{(\alpha)}(w)\, F(w)|\, du dv \leq \left\{\iint\limits_{\Delta_*(\mu_0,\ \rho)} |F(w)|\, du dv\right\} \sup_{w \in \Delta_*(\mu_0,\ \rho)} |L_n^{(\alpha)}(w)|$$

$$= \left\{\iint\limits_{\Delta_*(\mu_0,\ \rho)} |F(w)|\, du dv\right\} \max_{w \in \partial\Delta_*(\mu_0,\ \rho)} |L_n^{(\alpha)}(w)|,$$

където $\partial\Delta_*(\mu_0, \rho)$ е контурът на областта $\Delta_*(\mu_0, \rho)$. От асимптотичната формула (9) за полиномите на Лагер и неравенството (15) следва обаче, че

$$\max_{w \in \partial\Delta_*(\mu_0,\ \rho)} |L_n^{(\alpha)}(z)| = O\left(n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} e^{2\mu_0\sqrt{n}}\right).$$

Следователно

$$\iint\limits_{\Delta_*(\mu_0,\ \rho)} |L_n^{(\alpha)}(w)\, F(w)|\, du dv = O\left(n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} e^{2\mu_0\sqrt{n}}\right).$$

От (57) и от последното неравенство получаваме, че

$$\iint\limits_{\Delta(\mu_0)} |L_n^{(\alpha)}(w)F(w)|\,dudv = O\left(n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} e^{2\mu_0\sqrt{n}}\right)$$

и по-нататък доказателството продължава така, както на теорема 5.

Представлява несъмнен интерес да се намерят условията, при които коефициентите в развитието на една аналитична функция $f(z)$ в ред по функциите на Лагер от втори род ще се изразяват чрез функцията $f(z)$ и полиномите на Лагер. Че по принцип такива резултати трябва да се очакват, следва от формулата на Кристофел — Дарбу (35), накратко казано. Но в това можем да се убедим и непосредствено. Нека $f(z)$ е функцията, дефинирана чрез (41), и $0<\mu<+\infty$ е произволно. Да пресметнем, макар и съвършено формално, интеграла

$$\frac{1}{2\pi i\, I_n^{(\alpha)}} \int\limits_{p(\mu)} L_n^{(\alpha)}(\zeta)\, F(\zeta)\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i\, I_n^{(\alpha)}} \int\limits_{p(\mu)} (\zeta) \left\{ \int\limits_0^\infty \frac{F(t)}{\zeta - t}\, dt \right\}$$

$$= \frac{1}{I_n^{(\alpha)}} \int\limits_0^\infty \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{p(\mu)} \frac{L_n^{(\alpha)}(\zeta)}{\zeta - t}\, d\zeta \right\} F(t)\, dt = \frac{1}{I_n^{(\alpha)}} \int\limits_0^\infty L_n^{(\alpha)}(t)\, F(t)\, dt,$$

т. е. получихме точно коефициентите на развитието на функцията (41) в ред по функциите на Лагер от втори род $\{M_n^{(\alpha)}(z)\}_{n=0}^{\infty}$, дадена с равенства (43).

Не представлява особено затруднение да бъдат указани достатъчни условия, при които изводи от горния вид са напълно „законни". Преди да формулираме съответното твърдение, ще изкажем следната

Лема 3. Нека $0 \leqq \mu_0 < +\infty$ е произволно и $f(z)$ е комплексна функция, която удовлетворява следните изисквания:

а) $f(z)$ е аналитична в областта $\Delta_*(\mu_0)$;

б) за всяко μ, $\mu_0<\mu<+\infty$, съществува положително $\delta(\mu)$, такова, че

$$f(z) = O\left(|z|^{-\delta(\mu)}\right)$$

при $z \to \infty$ и $z \in \overline{\Delta_*(\mu)}$.

Тогава каквото и да е компактното множество $K \subset \Delta_*(\mu_0)$ и каквото и да е μ, $\mu_0<\mu<+\infty$, такова, че $K \subset \Delta_*(\mu)$, равномерно по $z \in K$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{p(\mu)} \frac{f(\zeta)}{z-\zeta}\, d\zeta.$$

Доказателството на горната лема е напълно аналогично на това на лема 2 в случая $n=0$ и затова излишно е да го извършваме.

Теорема 8. Нека $0 \leqq \mu_0 < +\infty$ и $\alpha > -1$ са произволни и $f(z)$ е комплексна функция, която удовлетворява следните изисквания:

а) $f(z)$ е аналитична в областта $\Delta_*(\mu_0)$;

б) за всяко μ, $\mu_0<\mu<+\infty$, съществува положително $\delta(\mu)$, такова, че

$$f(z) = O\left(|z|^{-\delta(\mu)}\right)$$

при $z \to \infty$ и $z \in \overline{\Delta_*(\mu)}$;

в) за всяко μ, $\mu_0<\mu<+\infty$, съществува положително $\varepsilon(\mu)$, такова, че

$$e^z(-z)^{-\frac{a}{2}-\frac{1}{4}}f(z)=O(z^{-\varepsilon(\mu)})$$

при $z\to\infty$ и $z\in p(\mu)$.

Тогава $f(z)$ се представя чрез ред по функциите на Лагер от втори род $\{M_n^{(a)}(z)\}_{n=0}^{\infty}$ в областта $\Delta_*(\mu_0)$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n M_n^{(a)}(z)$$

с коефициенти, които се дават от равенствата

$$b_n=\frac{1}{2\pi i I_n^{(a)}}\int\limits_{p(\mu)}L_n^{(a)}(\zeta)f(\zeta)d\zeta \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ldots).$$

Доказателство. Нека $z\in\Delta_*(\mu_0)$ е произволно и μ, $\mu_0<\mu<+\infty$, е така избрано, че $z\in\Delta_*(\mu)$, т. е. $\mu<\mathrm{Re}\{(-z)^{1/2}\}$. От формулата на Кристофел — Дарбу (35), като имаме пред вид лема 3, получаваме, че

$$(58)\qquad f(z)-\sum_{n=0}^{\nu}b_\nu M_\nu^{(a)}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{p(\mu)}\frac{f(\zeta)}{z-\zeta}d\zeta$$

$$-\sum_{n=0}^{\nu}\frac{M_n^{(a)}(z)}{2\pi i I_n^{(a)}}\int\limits_{p(\mu)}L_n^{(a)}(\zeta)f(\zeta)d\zeta$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{p(\mu)}\left\{\frac{1}{z-\zeta}-\sum_{n=0}^{\nu}\frac{L_n^{(a)}(\zeta)M_n^{(a)}(z)}{I_n^{(a)}}\right\}f(\zeta)d\zeta$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{p(\mu)}\frac{\Delta_{\nu+1}^{(a)}(\zeta,z)}{z-\zeta}f(\zeta)d\zeta.$$

Нека $\rho>\max(1,2\mu^2)$. Тогава, като имаме пред вид асимптотичната формула (10) за функциите на Лагер от втори род, неравенството (15) и условието в) на теоремата, намираме, че

$$\int\limits_{p(\mu)-\Gamma(\mu,\rho)}\frac{\Delta_{\nu+1}^{(a)}(\zeta,z)}{z-\zeta}f(\zeta)d\zeta$$

$$=O\left(\frac{\nu+1}{I_\nu^{(a)}}\nu^{a-\frac{1}{2}}e^{-2\,\mathrm{Re}\{(-z)\}^{1/2}\sqrt{\nu}+2\mu\sqrt{\nu}}\int\limits_{\theta(\mu,\rho)}\frac{d\xi}{(\xi+2\mu^2)^{1+\varepsilon(\mu)}}\right),$$

където $\theta(\mu, \rho)$ е положителна величина, зависеща само от μ и ρ ($\theta(\mu, \rho)$, е абсцисата на пресечните точки на окръжността $\xi^2+\eta^2=\rho^2$ и параболата $\eta^2=4\mu^2(\xi+\mu^2)$).

Понеже $\varepsilon(\mu)>0$, получаваме, че

$$(59)\qquad \int\limits_{p(\mu)-\Gamma(\mu,\rho)} \frac{\Delta_{\nu+1}^{(a)}(\zeta, z)}{(z-\zeta)} f(\zeta)\, d\zeta = O\left(\sqrt{\nu}\, e^{-2\,\mathrm{Re}\{(-z)^{1/2}\}\sqrt{\nu}+2\mu\sqrt{\nu}}\right).$$

По аналогичен начин, като използваме асимптотичните формули за полиномите на Лагер и за функциите на Лагер от втори род, а също така и условието в) на теоремата, намираме, че

$$(60)\qquad \int\limits_{\Gamma(\mu,\rho)} \frac{\Delta_{\nu+1}^{(a)}(\zeta, z)}{z-\zeta} f(\zeta)\, d\zeta = O\left(\sqrt{\nu}\, e^{-2\,\mathrm{Re}\{(-z)^{1/2}\}+2\mu\sqrt{\nu}}\right).$$

От (59), (60) и (58) следва, като се има пред вид неравенството $\mu<\mathrm{Re}\{(-z)^{1/2}\}$, че

$$\lim_{\nu\to+\infty}\left\{f(z)-\sum_{n=0}^{\nu} b_n M_n^{(a)}(z)\right\}=0,$$

и теорема 8 е установена.

Нека $f(z)$ е комплексна функция, която удовлетворява следните изисквания:

(1) $f(z)$ е аналитична в областта $\Delta_*(\mu_0)$;

(2) $f(z)$ е ограничена в областта $\Delta_*(\mu)$, каквото и да е μ, $\mu_0<\mu<+\infty$;

(3) $e^z f(z)=O(1)$ при $z\to\infty$ и $z\in p(\mu)$, каквото и да е μ, $\mu_0<\mu<+\infty$.

Ясно е, че ако горните изисквания за функцията $f(z)$ са изпълнени, функция от вида $(-z)^\beta f(z)$ ще удовлетворява условията на теоремата 8 при подходящ избор на реалния параметър β.

§ 5. ПЪЛНОТА НА СИСТЕМАТА ФУНКЦИИ НА ЛАГЕР ОТ ВТОРИ РОД

В този параграф се разглежда въпросът за пълнотата на системата функции на Лагер от втори род $\{M_n^{(a)}(z)\}_{n=0}^{\infty}$. По-точно ще бъде установено, че каквото и да е $0\leq\mu_0<+\infty$ тази система е пълна в пространството на комплексните функции, аналитични в областта $\Delta_*(\mu_0)$. Доказателството се опира на теоремата на Рунге и на следната

Лема 4. Каквито и да са комплексното число z_0 и цялото положително k, в сила е равенството

$$(61)\qquad \frac{1}{(\zeta-z_0)^k}=\sum_{n=k-1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}L_{n-k+1}^{(a+k-1)}(z_0)}{(k-1)!\,I_n^{(a)}}M_n^{(a)}(\zeta)$$

за всяко $\zeta\in\Delta_*(\mu_0)$, където $\mu_0=\mathrm{Re}\{(-z_0)^{1/2}\}$.

Доказателство. От формулата на Кристофел — Дарбу (35) чрез последователно диференциране по z, като вземем пред вид равенството [1, с. 111, (5.1.14)]

$$\frac{d}{dz} L_n^{(\alpha)}(z) = -L_{n-1}^{(\alpha+1)}(z),$$

намираме, че

$$(62) \qquad \frac{1}{(\zeta-z)^k} = \sum_{n=k-1}^{\nu} \frac{(-1)^{k-1} L_{n-k+1}^{(\alpha+k-1)}(z)}{(k-1)!\, I_n^{(\alpha)}} M_n^{(\alpha)}(\zeta)$$

$$+\frac{1}{(k-1)!} \frac{\partial^{k-1}}{\partial z^{k-1}} \left\{ \frac{\Delta_{k+1}^{(\alpha)}(z, \zeta)}{\zeta - z} \right\} = \sum_{n=k-1}^{\nu} \frac{(-1)^{k-1} L_{n-k+1}^{(\alpha+k-1)}(z)}{(k-1)!\, I_n^{(\alpha)}} M_n^{(\alpha)}(\zeta)$$

$$+\sum_{s=0}^{k-1} \binom{k-1}{s} \frac{(k-s-1)!\,(-1)^s}{(k-1)!\,(\zeta-z)^{k-s}} \frac{\nu+1}{I_\nu^{(\alpha)}} \{L_{\nu-s}^{(\alpha+s)}(z) M_{\nu+1}^{(\alpha)}(\zeta) - L_{\nu-s+1}^{(\alpha+s)}(z) M_\nu^{(\alpha)}(\zeta)\}.$$

Ако поставим в горното равенство $z=z_0$ и считаме, че $\zeta \in \Delta_*(\mu_0)$, т. е. $\mathrm{Re}\{(-\zeta)^{1/2}\} > \mathrm{Re}\{(-z)^{1/2}\}$, от асимптотичните формули за полиномите на Лагер и за функциите на Лагер от втори род получаваме, че

$$\frac{\nu+1}{I_\nu^{(\alpha)}} L_{\nu-s}^{(\alpha+s)}(z_0) M_{\nu+1}^{(\alpha)}(\zeta) = O\left(\nu^\sigma e^{-2\,\mathrm{Re}\{(-\zeta)^{1/2}\}\sqrt{\nu} + 2\,\mathrm{Re}\{(-z)^{1/2}\}\sqrt{\nu}}\right)$$

и аналогично

$$\frac{\nu+1}{I_\nu^{(\alpha)}} L_{\nu-s+1}^{(\alpha+s)}(z_0) M_\nu^{(\alpha)}(\zeta) = O\left(\nu^\sigma e^{-2\,\mathrm{Re}\{(-\zeta)^{1/2}\}\sqrt{\nu} + 2\,\mathrm{Re}\{(-z)^{1/2}\}\sqrt{\nu}}\right),$$

където $\sigma = \max\left(\frac{s+1}{2}, \frac{\alpha}{2} + \frac{3}{4} + s\right)$.

Тогава от (62) и от последните две равенства следва (61). Да отбележим, че съгласно изводите от нашата публикация [2] редът от дясната страна на (61) е абсолютно равномерно сходящ върху всяко компактно подмножество на областта $\Delta_*(\mu_0)$.

Лема 5. Нека $0 \leq \mu_0 < +\infty$ и $\alpha \neq -1, -2, \ldots$ са произволни. Каквито и да са комплексната функция $f(z)$, аналитична в областта $\Delta_*(\mu_0)$, компактното множество $K \subset \Delta_*(\mu_0)$ и положителното число ε, съществуват цяло неотрицателно число ν и комплексни числа $\{b_n\}_{n=0}^{\nu}$, такива, че

$$(63) \qquad \left| f(z) - \sum_{n=0}^{\nu} b_n M_n^{(\alpha)}(z) \right| < \varepsilon$$

за всяко $z \in K$.

Доказателство. Съгласно теоремата на Рунге съществува рационална функция $R(z)$, чиито полюси са в допълнението $\mathbf{C} - \Delta_*(\mu_0)$ на $\Delta_*(\mu_0)$ и такава, че

(64) $$|f(z)-R(z)|<\varepsilon/2$$

за всяко $z \in K$. Можем да считаме дори, че $R(\infty)=0$. С други думи, $R(z)$ има вида

$$R(z)=\sum_{s=1}^{m}\sum_{k=1}^{l_s}\frac{c_{m,\,k}}{(z-z_s)^k},$$

където $z_s \in \mathbf{C}-\Delta_*(\mu_0)$. Съгласно лема 4 обаче съществуват цяло неотрицателно число ν и комплексни числа $\{b_n\}_{n=0}^{\nu}$, такива, че

(65) $$\left|R(z)-\sum_{n=0}^{\nu}b_n M_n^{(\alpha)}(z)\right|<\varepsilon/2$$

за всяко $z \in K$. Тогава от (64) и (65) получаваме (63), с което лемата е установена.

Теорема 9. Каквито и да са $0\leqq\mu_0<+\infty$ и $\alpha\neq-1, -2, \ldots$, системата функции на Лагер от втори род $\{M_n^{(\alpha)}(z)\}_{n=0}^{\infty}$ е пълна в пространството на комплексните функции, аналитични в областта $\Delta_*(\mu_0)$, относно топологията на равномерната сходимост върху всяко компактно подмножество на тази област.

Доказателство. Нека $\{K_m\}_{m=1}^{\infty}$ са непразни компактни подмножества на $\Delta_*(\mu_0)$, такива, че $K_m\subset K_{m+1}$ $(m=1, 2, 3, \ldots)$ и $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}K_m=\Delta_*(\mu_0)$. Ако $f(z)$ е произволна функция, аналитична в областта $\Delta_*(\mu_0)$, съгласно лема 5 каквото и да е m съществуват цяло неотрицателно число ν_m и комплексни константи $\{b_{m,\,n}\}_{n=0}^{\nu_m}$, такива, че

$$\left|f(z)-\sum_{\nu=0}^{\nu_m}b_{m,\,n}M_n^{(\alpha)}(z)\right|<\frac{1}{2^m}$$

за всяко $z \in K_m$. Тогава редицата

$$\left\{\sum_{n=0}^{\nu_m}b_{m,\,n}M_n^{(\alpha)}(z)\right\}_{m=1}^{\infty}$$

е равномерно сходяща върху всяко компактно подмножество на областта $\Delta_*(\mu_0)$ към функцията $f(z)$. Наистина, ако K е такова подмножество и $\varepsilon>0$ е произволно, съществува $N=N(\varepsilon, K)$, такова, че $K\subset K_m$ и $\frac{1}{2^m}<\varepsilon$ за всяко $m>N$. Тогава за всяко $z \in K$ ще бъде изпълнено неравенството

$$\left|f(z)-\sum_{n=0}^{\nu_m}b_{m,\,n}M_n^{(\alpha)}(z)\right|<\varepsilon,$$

щом $m>N$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сегё, Г.: Ортогональные многочлены. М., 1962.
2. Русев, П.: Сходимост на редове по полиномите на Лагер. Год. Соф. унив., Мат. фак., 67 (1972/73).
3. Русев, П.: Функции на Лагер от втори род. Год. Соф. унив., Мат. фак., 67 (1972/73).
4. Pollard, H.: Representation of an analytic function by a Laguerre series. Ann. of Math. (2), 48 (1947), 358—365.
5. Perron, O.: Über das Verhalten einer ausgearteten hypergeometrischen Reihe bei unbegrenztem Wachstum eines Parameters. Journ. r. a. Math., 151 (1921), 63—78.
6. Hille, E.: Contribution to the theory of Hermitian series. II. The representation problem. Trans. Amer. Math. Soc., 47 (1940), 80—94.
7. Tricomi, F. G.: Vorlesungen über Orthogonalreihen. Grundlehren der Math. Wiss., Bd. 76, 1955.
8. Градштейн, И. С., Рыжик, И. М.: Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., 1962.

Постъпила на 14. XII. 1974 г.

EXPANSION OF ANALYTIC FUNCTION IN LAGUERRE SERIES

P. Russev

(SUMMARY)

The system of Laguerre polynomials $\{L_n^{(\alpha)}(z)\}_{n=0}^{\infty}$ $(\alpha>-1)$ is uniquely determined by the conditions

$$(1)\qquad \int_0^{\infty} t^{\alpha} e^{-t} L_m^{(\alpha)}(t) L_n^{(\alpha)}(t)\, dt = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+1)} \delta_{mn} \qquad (m,\ n=0,\ 1,\ 2, \ldots)$$

provided that the coefficient of z^n in $(-1)^n L_n^{(\alpha)}(z)$ is positive. It is well known that the system $\{L_n^{(\alpha)}(z)\}_{n=0}^{\infty}$ is a solution of the difference equation

$$(2)\qquad (n+1)\, y_{n+1} + (z-\alpha-2n-1)\, y_n + (n+\alpha)\, y_{n-1} = 0.$$

We define the system of Laguerre functions of second kind $\{M_n^{(\alpha)}(z)\}_{n=0}^{\infty}$ as a second solution of the equation (2). If $\alpha>-1$,

$$(3)\qquad M_n^{(\alpha)}(z) = -\int_0^{\infty} \frac{t^{\alpha} e^{-t} L_n^{(\alpha)}(t)}{t-z}\, dt \qquad (n=0,\ 1,\ 2, \ldots),$$

where $z \in \mathbf{C}-[0,\ +\infty)$ and $\mathbf{C}$ is the complex plane.

The solution of the problem of expansion of analytic functions in a Laguerre series in the "classical" case $\alpha=0$ was first given by H. Pollard [4]. In § 3 we consider the problem of representation of the coefficients of a series in Laguerre polynomials

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n L_n^{(\alpha)}(z) \tag{4}$$

in terms of Laguerre functions of second kind $\{M_n^{(\alpha)}(z)\}_{n=0}^{\infty}$ and the given complex function $f(z)$. The corresponding result is

Theorem 2. Let $0<\lambda_0\leqq+\infty$, $\alpha>-1$, and $f(z)$ be a complex function satisfying the following conditions:

(a) $f(z)$ is analytic in the region $\Delta(\lambda_0)=[z\in \mathbf{C}:\mathrm{Re}\{(-z)^{1/2}\}<\lambda_0]$;

(b) for every λ, $0<\lambda<\lambda_0$, there exists $\delta(\lambda)>0$ such that

$$f(z)=O(|z|^{-1/2-\delta(\lambda)}) \tag{5}$$

if $z\to\infty$ and $z\in\overline{\Delta(\lambda)}$.

(c) $f(z)$ can be represented by a series of the kind (4) in the region $\Delta(\lambda_0)$.

Then, for every $n=0, 1, 2, \ldots$, and every λ, $0<\lambda<\lambda_0$,

$$a_n=\frac{1}{2\pi i\, I_n^{(\alpha)}}\int_{p(\lambda)} M_n^{(\alpha)}(\zeta) f(\zeta)\, d\zeta, \tag{6}$$

where $p(\lambda)=[z\in \mathbf{C}:\mathrm{Re}\{(-z)^{1/2}\}=\lambda]$ and

$$I_n^{(\alpha)}=\int_0^{\infty} t^{\alpha} e^{-t}\{L_n^{(\alpha)}(t)\}^2\, dt=\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+1)}.$$

In the same § 3 is proved also a statement which can be regarded as a converse of Theorem 2 namely

Theorem 3. Let $0<\lambda_0\leqq+\infty$, $\alpha>1/2$, and $f(z)$ be a complex function satisfying the following conditions:

(a) $f(z)$ is analytic in the region $\Delta(\lambda_0)$;

(b) for every λ, $0<\lambda<\lambda_0$, there exists $\delta(\lambda)>\alpha-1/2$ such that (5) holds if $z\to\infty$ and $z\in\overline{\Delta(\lambda)}$.

Then, the function $f(z)$ can be represented by a series in Laguerre polynomials $\{L_n^{(\alpha)}(z)\}_{n=0}^{\infty}$ in the region $\Delta(\lambda_0)$ if and only if

$$-\overline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{\ln|a_n|}{2\sqrt{n}}\geqq\lambda_0,$$

where $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ are determined by the equalities (6).

In § 4 we treat the problem of expansion of analytic functions in series of Laguerre functions of second kind $\{M_n^{(\alpha)}(z)\}_{n=0}^{\infty}$. First of all we point out that the system $\{M_n^{(\alpha)}(z)\}_{n=0}^{\infty}$ is not a basis in the space of the complex functions analytic in a region of the kind $\Delta_*(\mu_0)=[z\in \mathbf{C}:\mathrm{Re}\{(-z)^{1/2}\}>\mu_0]$ $(0\leqq\mu_0<+\infty)$. Namely, the following result holds

Theorem 4. Let $0 \leqq \mu_0 < +\infty$, $\alpha > -1$ and $f(z)$ be a complex function such that

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n M_n^{(\alpha)}(z) \tag{7}$$

in the region $\Delta_*(\mu_0)$. Then, for every $\tau > 0$, $f(z)$ is bounded in the half-plane $\mathrm{Re}\{z\} \leqq -(\mu_0 + \tau)^2$.

Further we give some results about analytic functions defined by integrals of Cauchy type.

Theorem 5. Let α be a real number different from $-1, -2, \ldots$ and $f(z)$ be a complex function measurable on the interval $[0, +\infty)$ and satisfying the following conditions:

(a) $\int_0^{\omega} |F(t)|\, dt < +\infty \qquad (0 < \omega < +\infty)$;

(b) $F(t) = O(e^{-t/2} t^{\beta})$ if $t \to +\infty$ for some $\beta < (\alpha - 1)/2$.

Then, the function

$$f(z) = \int_0^{\infty} \frac{F(t)}{z-t}\, dt$$

can be represented in the region $C - [0, +\infty)$ by a series of the kind (7) with coefficients

$$b_n = \frac{1}{I_n^{(\alpha)}} \int_0^{\infty} L_n^{(\alpha)}(t) F(t)\, dt \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Similar results are obtained for analytic functions $f(z)$ defined by integrals of the kind

$$f(z) = \int_{p(\mu_0)} \frac{F(\zeta)}{z-\zeta}\, d\zeta,$$

respectively

$$f(z) = \iint_{\Delta(\mu_0)} \frac{F(w)}{z-w}\, du\, dv.$$

At the end of § 4 we prove the following

Theorem 8. Let $0 \leqq \mu_0 < +\infty$, $\alpha > -1$, and $f(z)$ be a complex function satisfying the following conditions:

(a) $f(z)$ is analytic in the region $\Delta_*(\mu_0)$;

(b) for every μ, $\mu_0 < \mu < +\infty$, there exists $\delta(\mu) > 0$ such that

$$f(z) = O(z^{-\delta(\mu)})$$

if $z \to \infty$ and $z \in \overline{\Delta_*(\mu)}$.

(c) for every μ, $\mu_0 < \mu < +\infty$, there exists $\varepsilon(\mu) > 0$ such that

$$e^z(-z)^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} f(z) = O(|z|^{-\varepsilon(\mu)})$$

if $z \to \infty$ and $z \in p(\mu)$.

Then $f(z)$ can be represented in the region $\Delta(\mu_0)$ by a series of the kind (7) with coefficients

$$b_n = \frac{1}{2\pi i I_n^{(\alpha)}} \int_{p(\mu)} L_n^{(\alpha)}(\zeta) f(\zeta)\, d\zeta \qquad (n=0, 1, 2, \ldots)$$

The last § 5 is concerned with the problem of completeness of the system $\{M_n^{(\alpha)}(z)\}_{n=0}^{\infty}$. It is proved that for every $0 \leqq \mu_0 < +\infty$ the system of Laguerre functions of second kind $\{M_n^{(\alpha)}(z)\}_{n=0}^{\infty}$ is complete in the space of complex functions analytic in the region $\Delta(\mu_0)$.