НАИЛУЧШИЕ КОНСТАНТЫ ДЛЯ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ НЕКОТОРЫМИ СИНГУЛЯРНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ В ХАУСДОРФОВОЙ МЕТРИКЕ

Васил М. Веселинов, Ф. В. Буонг

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе найдены точные значения констант в главных членах оценок для приближения функций сингулярными интегралами Валле-Пуссена и Гаусса — Вейерштрасса в хаусдорфовой метрике. Оценки выражаются через модуля Н-непрерывности приближаемой функции. Для нахождения точных констант использован прием из [1], где решена аналогичная задача о полиномах Бернштейна. Отметим, что порядок приближения функций сингулярными интегралами Валле-Пуссена и Гаусса — Вейерштрасса в хаусдорфовой метрике изучался соответственно в [2] и [3], где получены оценки через модуля немонотонности. В [4] показано, что эти оценки неулучшаемы относительно порядка, однако этого нельзя сказать о константах в главных членах оценок.

В дальнейшем через C_i будем обозначать абсолютные положительные константы, а через $C_i(u, v, \ldots)$ — положительные константы, зависящие только от $u, v, \ldots$ $(i=1, 2, \ldots)$

Напомним некоторые определения, связанные с хаусдорфовой метрикой (более подробно об этом смотри в обзорной статье Бл. Сендова [5]).

Пусть R — множество ограниченных действительных функций $f(x)$, определенных для $x \in (-\infty, \infty)$ и $\bar{f}$ — дополненный график функции $f \in R$.

Хаусдорфово расстояние $r_\alpha(f, g)$ с параметром $\alpha>0$ между функциями $f, g \in R$ определяется следующим образом:

$$r_\alpha(f, g)=\max\{\max_{X\in f}\min_{Y\in \bar{g}} \rho(X, Y),\ \max_{X\in \bar{g}}\min_{Y\in \bar{f}} \rho(X, Y)\},$$

где $$\rho(X, Y)=\rho(X(x_1, y_1),\ Y(x_2, y_2))=\max\left\{\frac{|x_1-x_2|}{\alpha},\ |y_1-y_2|\right\}.$$

Положим $f_\delta^+(x) = \sup\limits_{|t-x|\leq\delta/2} f(t)$, $f_\delta^-(x) = \inf\limits_{|t-x|\leq\delta/2} f(t)$.

Величина $\omega_\alpha(f;\ \delta)=r_\alpha(f_\delta^+, f_\delta^-)$ называется **модулем Н-непрерывности** функции $f \in R$.

Пусть H — множество функций $f \in R$, таких что

$$\lim_{\delta \to 0} \omega_a(f;\ \delta) = 0 \tag{1}$$

и H^M — множество функций $f \in H$, для которых $\sup\limits_{-\infty<x<\infty} |f(x)| \leqq M$, $M \geqq 0$. Заметим, что если (1) выполнено для некоторого $\alpha = \alpha_0$, то оно выполняется и для любого фиксированного $\alpha > 0$. Через $H_{2\pi}$ и $H_{2\pi}^M$ будем обозначать множество 2π-периодических функций, принадлежащих соответственно H и H^M.

Пусть $\mu(f;\ \delta)$ — модуль немонотонности функции $f \in R$ (см. [5]) B — множество функций $f \in R$, таких что $\lim\limits_{\delta \to 0} \mu(f;\ \delta) = 0$; B^M — множество функций $f \in B$, для которых $\sup\limits_{-\infty<x<\infty} |f(x)| \leqq M$, $M \geqq 0$. Через $B_{2\pi}$ и $B_{2\pi}^M$ будем обозначать множество 2π-периодических функций, принадлежащих соответствено B и B^M.

§ 2. НАИЛУЧШАЯ КОНСТАНТА ДЛЯ СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛА ВАЛЛЕ-ПУССЕНА

Пусть $f \in H_{2\pi}$ и $L(f;\ x)$ — интегральный оператор типа $L(f;\ x) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)K(t)dt$. По предположении 2π-периодическое ядро $K(t)$ неотрицательно, четное и $\int\limits_{-\pi}^{\pi} K(t)dt = 1$. Будем пользоваться следующей теоремой, доказанной в более общей форме в [6].

Теорема А. Если $f \in H_{2\pi}^M$, то для любого $\delta > 0$ выполнено

$$r_a(f,\ L(f)) \leqq \omega_a(f;\ 2\delta) + 4M \int\limits_{\delta}^{\pi} K(t)dt. \tag{2}$$

Пусть $V_n(f;\ x)$ — сингулярный интеграл Валле-Пуссена для фукции $f \in H_{2\pi}$; $n = 1, 2, \ldots$ По определению

$$V_n(f;\ x) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)K_n(t)dt, \quad K_n(t) = \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \frac{1}{2\pi} \cos^{2n} \frac{t}{2}.$$

Теорема 1. Если $f \in H_{2\pi}^M$, то для любого натурального $n \geqq 2$ выполнено

$$r_a(f,\ V_n(f)) \leqq \omega_a\left(f;\ 2\sqrt{2}\sqrt{\frac{\ln n}{n}}\right) + \frac{5M}{\sqrt{n \ln n}}. \tag{3}$$

Константа $2\sqrt{2} = 2{,}828427\ldots$ является наилучшей на классе $H_{2\pi}^M$.

Доказательство. Положим $\delta_n=\sqrt{\frac{2\ln n}{n}}$, $\theta_n=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\ln n}{n}}$, $Q(\delta_n)=\int\limits_{\delta_n}^{\pi}K_n(t)dt$.

В [7, с. 258 — 259] доказаны следующие неравенства:

$$\sqrt{2n}<\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}<2\sqrt{n}. \tag{4}$$

Пользуясь (4), получим

$$Q(\delta_n)\leqq\frac{\sqrt{n}}{\pi}\int\limits_{\delta_n}^{\pi}\cos^{2n}\frac{t}{2}\,dt=Q_1+Q_2, \tag{5}$$

где

$$Q_1=\frac{\sqrt{n}}{\pi}\int\limits_{\delta_n}^{\theta_n}\cos^{2n}\frac{t}{2}\,dt,\ Q_2=\frac{\sqrt{n}}{\pi}\int\limits_{\theta_n}^{\pi}\cos^{2n}\frac{t}{2}\,dt.$$

Так как для $t\in[0,\pi]$ $\cos^2\frac{t}{2}\leqq1-\frac{t^2}{\pi^2}$ (см. [7, с. 114]), то

$$Q_2\leqq\frac{\sqrt{n}}{\pi}\int\limits_{\theta_n}^{\pi}\left(1-\frac{t^2}{\pi^2}\right)^n dt\leqq\frac{\sqrt{n}}{\pi}\int\limits_{\theta_n}^{\pi}\exp\left(-\frac{nt^2}{\pi^2}\right)dt$$

и, следовательно,

$$Q_2\leqq\int\limits_{\nu_n}^{\infty}\exp(-x^2)dx,\ \nu_n=\sqrt{\frac{\ln n}{2}}. \tag{6}$$

В [8, с. 183] показано, что для $z>0$

$$\int\limits_{z}^{\infty}\exp(-x^2)dx<\frac{1}{2z}\exp(-z^2). \tag{7}$$

Из (6) и (7) следует

$$Q_2\leqq\frac{1}{\sqrt{2n\ln n}}. \tag{8}$$

Оценим сверху Q_1. Развивая функцию $\cos\frac{t}{2}$ в ряд Тейлора, получим для $t\in[0,\theta_n]$

$$\cos\frac{t}{2}\leqq1-\left(\frac{t^2}{8}-\frac{t^4}{384}\right). \tag{9}$$

Из (9) следует

$$Q_1 \leqq \frac{\sqrt{n}}{\pi} \int_{\delta_n}^{\theta_n} \left\{1-\left(\frac{t^2}{8}-\frac{t^4}{384}\right)\right\}^{2n} dt \leqq \frac{\sqrt{n}}{\pi} \int_{\delta_n}^{\theta_n} \exp\left\{-2n\left(\frac{t^2}{8}-\frac{t^4}{384}\right)\right\} dt$$

$$\leqq \frac{\sqrt{n}}{\pi} \exp\left(\frac{n\theta_n^4}{192}\right) \int_{\delta_n}^{\infty} \exp\left(-\frac{nt^2}{4}\right) dt \leqq \frac{2e^{1/10}}{\pi} \int_{\nu_n}^{\infty} \exp(-x_2)\, dx.$$

Из последнего неравенства и (7) получаем

$$Q_1 \leqq \frac{\sqrt{2}e^{1/10}}{\pi} \frac{1}{\sqrt{n \ln n}}. \tag{10}$$

(5), (8) и (10) дают

$$Q(\delta_n) \leqq \frac{1{,}25}{\sqrt{n \ln n}}. \tag{11}$$

Положим в (2) $\delta=\delta_n$. Тогда из (11) следует (3).

Покажем, что константа $2\sqrt{2}$ нельзя заменить в (3) меньшей константой на классе $H_{2\pi}^M$. Допустим, что для любой функций $f \in H_{2\pi}^M$ и любого натурального $n \geqq 2$ выполнено

$$r_\alpha(f, V_n(f)) \leqq \omega_\alpha\left(f; (2\sqrt{2}-\varepsilon)\sqrt{\frac{\ln n}{n}}\right) + C_1(M)\sqrt{\frac{\ln n}{n}}, \tag{12}$$

где ε — некоторая константа, $0<\varepsilon<\frac{1}{100}$.

Положим $\beta_n=\left(\sqrt{2}-\frac{\varepsilon}{4}\right)\sqrt{\frac{\ln n}{n}}$. Определим функцию $\psi_n(x) \in H_{2\pi}^M$ следующим образом

$$\psi_n(x)=\begin{cases} M & \text{для } \beta_n \leqq x \leqq \pi-\beta_n, \\ 0 & \text{для } 0 \leqq x < \beta_n,\ \pi-\beta_n < x \leqq \pi, \end{cases}$$

$\psi_n(-x)=\psi_n(x)$.

Легко проверяется, что если $\sqrt{\frac{\ln n}{n}} \leqq \frac{\alpha M}{2\sqrt{2}-\varepsilon}$, то $\omega_\alpha\left(\psi_n; (2\sqrt{2}-\varepsilon)\sqrt{\frac{\ln n}{n}}\right)=\frac{2\sqrt{2}-\varepsilon}{\alpha}\sqrt{\frac{\ln n}{n}}$. Отсюда и из (12) следует

$$r_\alpha(\psi_n, V_n(\psi_n)) \leqq C_2(\alpha, \varepsilon, M)\sqrt{\frac{\ln n}{n}}. \tag{13}$$

Далее имеем

$$V_n(\psi_n; 0) \geqq 2M \int_{\beta_n}^{\pi/2} K_n(t)dt. \tag{14}$$

Из (4) и (14) получаем

$$V_n(\psi_n;0)\geqq\frac{M\sqrt{2n}}{\pi}\int\limits_{\beta_n}^{\pi/2}\left(1-\frac{t^2}{8}\right)^{2n}dt. \tag{15}$$

Положим $\varphi=1-\dfrac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{\varepsilon}{8}\right)^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{\varepsilon}{10}\right)^2}$. Ясно, что $0<\varphi\leqq 1/2$. Применяя теорему Лагранжа о конечных приращениях, получим для $|x|\leqq\varphi$

$$(1-x^2)^n\geqq\exp\left(-\frac{nx^2}{1-\varphi}\right). \tag{16}$$

(15) и (16) дают

$$V_n(\psi_n;0)\geqq\frac{M\sqrt{2n}}{\pi}\int\limits_{\beta_n}^{2\sqrt{2}\varphi}\exp\left(-\frac{nt^2}{4(1-\varphi)}\right)dt=C_3(\varepsilon,M)\int\limits_{\xi_n}^{\eta_n}\exp(-x^2)\,dx,$$

где $\xi_n=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{\varepsilon}{10}\right)\sqrt{\ln n}$, $\eta_n=\varphi\sqrt{\frac{2n}{1-\varphi}}$, $C_3(\varepsilon,M)=\frac{M2\sqrt{2(1-\varphi)}}{\pi}$

и, следовательно,

$$V_n(\psi_n;0)\geqq C_3(\varepsilon,M)(Q_3-Q_4), \tag{17}$$

где $Q_3=\int\limits_{\xi_n}^{\infty}\exp(-x^2)dx$, $Q_4=\int\limits_{\eta_n}^{\infty}\exp(-x^2)\,dx$.

Отметим следующее неравенство ([8, с. 183]):

$$\int\limits_{z}^{\infty}\exp(-x^2)dx\geqq\left(\frac{1}{2z}-\frac{1}{4z^3}\right)\exp(-z^2),\ z>0. \tag{18}$$

(18) и (7) дают соответственно

$$Q_3\geqq C_4 n^{-\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{100}}, \tag{19}$$

$$Q_4\leqq C_5(\varepsilon)\exp\left(-\frac{2\varphi^2 n}{1-\varphi}\right). \tag{20}$$

Из (17), (19) и (20) получаем для $x=0$

$$V_n(\psi_n;x)\geqq C_6(\varepsilon,M)n^{-\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{100}}. \tag{21}$$

Нетрудно показать, что (21) справедливо для всех x из некоторого отрезка $[-C_7(\varepsilon),\ C_7(\varepsilon)]$. Отсюда и из определения хаусдорфова расстояния следует, что

$$r_\alpha(\psi_n, V_n(\psi_n)) \geqq C_\theta(\varepsilon, M)\, n^{-\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{100}}. \tag{22}$$

Неравенство (22) для больших n противоречит (13). Этим показано, что константа $2\sqrt{2}$ в (3) является наилучшей на классе $H_{2\pi}^M$. Доказательство теоремы окончено.

Из теоремы 1 и свойств модуля Н-непрерывности (см. напр. [1]) следуют

Теорема 2. Если $f \in H_{2\pi}$, $f \neq \text{const}$ и модуль $\omega_\alpha(f; \delta)$ выпуклый сверху, то

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{r_\alpha(f, V_n(f))}{\omega_\alpha\left(f; 2\sqrt{2}\sqrt{\frac{\ln n}{n}}\right)} \leqq 1.$$

Теорема 3. Если $f \in H_{2\pi}$ и $f \neq \text{const}$, то существует последовательность натуральных чисел $\{n_k\}_{k=1}^\infty$, $n_k < n_{k+1}$, такая что

$$\varlimsup_{k\to\infty} \frac{r_\alpha(f, V_{n_k}(f))}{\omega_\alpha\left(f; 2\sqrt{2}\sqrt{\frac{\ln n_k}{n_k}}\right)} \leqq 1.$$

Из (11) и [2] получаем

Теорема 4. Если $f \in B_{2\pi}^M$, то для любого натурального $n \geqq 2$ выполнено

$$r_1(f, V_n(f)) \leqq \max\left\{\sqrt{2}\sqrt{\frac{\ln n}{n}},\ \mu\left(4\sqrt{2}\sqrt{\frac{\ln n}{n}}\right) + \frac{5M}{\sqrt{n}\ln n}\right\}. \tag{23}$$

Константы в главных членах (23) лучше чем в [2], однако неизвестно окончательны ли они или нет.

§ 3. НАИЛУЧШАЯ КОНСТАНТА ДЛЯ СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛА ГАУССА — ВЕЙЕРШТРАССА

Подобным образом можно исследовать и сингулярный интеграл Гаусса — Вейерштрасса

$$W_\lambda(f; x) = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x+t) \exp(-\lambda t^2)\, dt, \quad \lambda > 1.$$

Сформулируем полученные результаты (доказательства не будем приводить, так как они существенно проще чем в случае интеграла Валле-Пуссена).

Теорема 5. Если $f \in H^M$, то для любого $\lambda > 1$ выполнено

$$r_a(f, W_\lambda(f)) \leqq \omega_a\left(f; \sqrt{2}\sqrt{\frac{\ln\lambda}{\lambda}}\right) + \sqrt{\frac{8}{\pi}}\frac{M}{\sqrt{\lambda\ln\lambda}}.$$

Константа $\sqrt{2} = 1{,}414213\ldots$ является наилучшей на классе H^M.

Теорема 6. Если $f \in H$, $f \not\equiv \text{const}$ и модуль $\omega_a(f;\delta)$ выпуклый сверху, то

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{r_a(f, W_{n_k}(f))}{\omega_a\left(f; \sqrt{2}\sqrt{\frac{\ln n}{n}}\right)} \leqq 1; \quad n = 1, 2, \ldots$$

Теорема 7. Если $f \in H$ и $f \not\equiv \text{const}$, то существует последовательность натуральных чисел $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$, $n_k < n_{k+1}$, такая что

$$\lim_{k\to\infty} \frac{r_a(f, W_{n_k}(f))}{\omega_a\left(f; \sqrt{2}\sqrt{\frac{\ln n_k}{n_k}}\right)} \leqq 1.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Veselinov, V. M.: The exacts constants in the theory of approximation by the Bernstein polynomials in the Hausdorff metric. Compt. Rend. de l'Acad. Bulg. des Sci., 27 (1974), 9, 1183 — 1186.
2. Сендов, Бл.: Върху някои линейни методи за апроксимиране на периодични функции относно хаусдорфово разстояние. Год. Соф. унив., Мат. фак., 58 (1965), 107 — 140.
3. Веселинов, В. М.: О расширении модуля немонотонности на бесконечном интервале и аппроксимации неограниченных функций в метрике Хаусдорфа. Докл. БАН, 24 (1971), 9, 1153 — 1156.
4. Веселинов, В. М.: Некоторые новые оценки для полиномов Бернштейна и интегралов Валле-Пуссена. Докл. БАН, 27 (1974), 6, 747 — 750.
5. Сендов, Бл.: Некоторые вопросы теории приближении функций и множеств в хаусдорфовой метрике. Усп. мат. наук, 24 (1969), 5 (149), 141 — 178.
6. Веселинов, В. М.: О точном порядке приближения функций полиномами С. Н. Бернштейна в метрике Хаусдорфа. Матем. заметки, 12 (1972), № 5, 501 — 510.
7. Натансон, И. П.: Конструктивная теория функций. М.-Л., 1949.
8. Феллер, В.: Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1. М., 1967.

Постъпила на 14. XII. 1974 г.

THE BEST CONSTANTS FOR THE APPROXIMATION OF FUNCTIONS BY CERTAIN SINGULAR INTEGRALS IN THE HAUSDORFF METRIC

V. M. Veselinov, F. V. Buong

(SUMMARY)

In the paper we have obtained the exact values of the constants in the principal terms of the estimates for the approximation of functions by the singular integrals of de La Vallée Poussin and Gauss — Weierstrass in the Hausdorff metric.