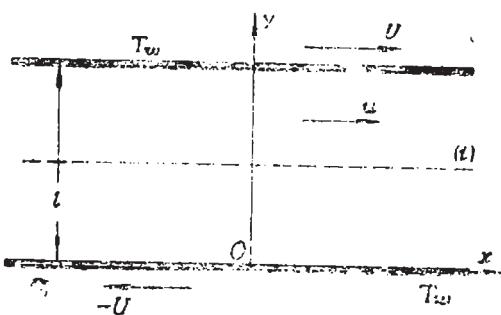


# ТЕЧЕНИЕ КУЭТТА В СЛАБО РАЗРЕЖЕННОМ ГАЗЕ

Стефан П. Радев

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим течение Куэтта в газе между двумя бесконечными параллельными пластинами, каждая из которых движется в своей плоскости со скоростью, соответственно,  $U_+$  и  $U_-$  и имеет температуру —  $T_+$  и  $T_-$  (фиг. 1). Для удобства можно принять  $U_+ = -U_- = U$ ,  $T_+ = T_- = T_w$  и рассмотреть таким образом течение только у



Фиг. 1

нижней пластины, ввиду симметрии относительно средней оси ( $i$ ). Средняя числовая плотность поперек течения считается равной  $N/l$ . В качестве безразмерных параметров задачи выбраны число Маха  $M = U/\sqrt{2RT_w}$  и число Кнудсена  $K_p = \epsilon = \lambda/l$ , где  $\lambda$  — средняя длина свободного пробега молекул. Рассматриваемый нами газ — Максвеллевский и слабо разреженный:  $\epsilon \ll 1$ .

Хорошо известно, что наиболее полную постановку задача Куэтта имеет на уровне функции распределения, отыскиваемой как решение соответствующего уравнения Больцмана при заданном законе отражения молекул от поверхности пластины.

В случае слабо разреженного газа приближенное решение задачи можно искать видоизмененным методом Чепмена — Энскога [2], разлагая функцию распределения в ряд по степеням  $\sqrt{\epsilon}$  и удовлетворяя в моментном (интегральном) смысле микроскопическое граничное условие на поверхности пластины.

Если ограничится вторым приближением метода Чепмена — Энскога и условиями сохранения тангенциального и нормального импульсов и энергии на поверхности стенки, то для задачи Куэтта получим уравнения Барнетта [3] и три граничных условия типа условий скольжения скорости и скачка температуры второго порядка. Как показано в [1] услов-

вие сохранения нормального импульса применительно к функции распределения, соответствующей уравнениям Навье — Стокса, приводит к противоречивым граничным условиям.

В безразмерных переменных уравнения Барнетта для задачи Куэтта имеют вид:

$$(1) \quad \begin{aligned} u'' &= 0, \\ T'' + \frac{8}{15} u'^2 &= 0, \\ \varepsilon^2 \frac{b_1^2}{6} \left[ \frac{T}{p} \left( \frac{p'}{p} \right)' + \frac{9}{5} \frac{1}{p} u'^2 \right]' - p' &= 0, \end{aligned}$$

где  $u$  — безразмерная продольная скорость газа,  $T$  — температура,  $p$  — давление, а поперечная координата  $y$  заменена новой независимой переменной (типа Дородницына)  $\eta$ , производные по которой обозначены штрихом:

$$(2) \quad \eta = \int_0^y T^{-1} dy.$$

В качестве масштабов выбраны следующие параметры: для поперечной координаты — расстояние  $l$  между пластинами; для плотности —  $N/l$ ; для температуры — температура  $T_w$  пластин; для скорости —  $\sqrt{2RT_w}$ , где  $R$  газовая постоянная.

Напомним, что для Максвелловского газа коэффициент вязкости пропорционален температуре, а число Прандтля  $Pr = 2/3$ ; константа  $b_1$ , учитывающая вклад выбранной молекулярной модели в коэффициент вязкости, равняется 0,4867.

Запишем упрощенные граничные условия для течения Куэтта применительно к нижней пластине (значения гидродинамических величин и их производных при  $\eta = 0$  будем обозначать нижним индексом  $0$ ):

$$(3) \quad \begin{aligned} \bar{N}u_0 &= -\bar{N}M + \varepsilon \left( \frac{2-\sigma}{\sigma} \right) \frac{b_1 \sqrt{\pi}}{4} \frac{\sqrt{T_0}}{p_0} \bar{K}_\sigma u_0', \\ \bar{M}T_0 &= \bar{N} + \varepsilon \left( \frac{2-\alpha}{\alpha} \right) \frac{15 \sqrt{\pi}}{32} b_1 \frac{\sqrt{T_0}}{p_0} T_0', \\ \bar{L}\sqrt{T_0} &= \bar{N} + \varepsilon \left( \frac{2-\nu}{\nu} \right) \frac{3b_1}{4\sqrt{\pi}} \frac{T_0'}{p_0}, \end{aligned}$$

где

$$\bar{K}_\sigma = 1 + \varepsilon O(1),$$

$$\bar{L} = \frac{p_i}{p_0},$$

$$(4) \quad \bar{M} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \frac{p_i}{p_0} + \varepsilon^2 O(1),$$

$$\bar{N} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{p_i}{p_0} + \varepsilon^2 O(1).$$

Круглые скобки в (3) содержат коэффициенты аккомодации тангенциального импульса  $\sigma$ , нормального импульса  $v$ , энергии  $\alpha$ . Кроме того в (4) уже учтены  $(1_1)$ , и  $(1_2)$  и проинтегрированное уравнение  $(1_3)$ , так что  $p_i$  — константа интегрирования, смысл которой уточним ниже.

На оси  $(i)$  гидродинамические величины должны удовлетворять условиям симметрии:

$$(5) \quad \eta = \delta, u(\delta) = 0, T'(\delta) = 0,$$

с  $\delta$  определяемой из равенства

$$(6) \quad \delta = \int_0^{1/2} T^{-1} dy.$$

К ним нужно добавить условие нормировки плотности поперек течения, которое при помощи уравнения состояния  $p = \frac{1}{2} nT$  и (2) принимает вид

$$(7) \quad \int_0^\delta p d\eta = \frac{1}{4}.$$

Окончательно, мы рассмотрим задачу Куэтта в следующей постановке:

- а) газ слабо разреженный:  $\varepsilon \ll 1$ ;
- б) течение газа подчиняется уравнениям Барнетта (1), с граничными условиями (3), (4) на поверхности пластины, граничными условиями (5), (6) на оси симметрии и условием нормировки плотности (7).

Хорошо известное решение [5] задачи Куэтта для уравнений Барнетта является по существу учет влияния эффектов скольжения второго порядка на решение уравнений Навье — Стокса, так как не учитывалось влияние члена со старшей производной от давления, входящей в  $(1_3)$ .

Заметим, что наряду с общепринятым условием скольжения  $(3_1)$  и условием скачка температуры  $(3_2)$  мы выставили дополнительное граничное условие  $(3_3)$  и таким образом получили возможность следить за сохранением нормального импульса на стенке. Условия (3) для задачи Куэтта применительно к уравнениям Навье — Стокса являются противоречивыми.

**2. Приближенное решение задачи Куэтта методом сращиваемых асимптотических разложений.** Сначала запишем уравнения Барнетта (1) в более удобном виде. Первые два уравнения (1) немедленно интегрируются:

$$(8) \quad u = u_0 + u'_0 \eta, \\ T = T_0 + T'_0 \eta - \frac{4}{15} u_0'^2 \eta^2.$$

Константы интегрирования  $u_0$ ,  $u'_0$ ,  $T_0$ ,  $T'_0$  в (8) — это неизвестные значения скорости и температуры на поверхности пластины и являются в общем случае искомыми функциями малого параметра  $\epsilon$ . После того как уравнение (1<sub>3</sub>) для давления решено, они находятся из условий симметрии и граничных условий для скорости скольжения и температурного скачка.

Уравнение (1<sub>3</sub>) можно также однократно проинтегрировать:

$$(9) \quad \epsilon^2 \frac{1}{p} \left( \frac{p'}{p} \right)' - \frac{6}{b_1^2 T} p - \epsilon^2 \frac{9u_0'^2}{5T} \frac{1}{p} = - \frac{6}{b_1^2 T} p_i.$$

Таким образом для определения давления мы имеем нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с малым параметром перед старшей производной. Функцию  $T$  можно рассматривать как известную функцию  $\eta$ , а  $p_i$  — это константа интегрирования, встречавшаяся уже в (4), которая, как будет показано ниже, имеет смысл величины давления на оси симметрии.

Теорию сращиваемых асимптотических разложений будем применять к (9).

Из вида уравнения (9) и классического решения задачи Куэтта на уровне уравнений Навье — Стокса следует, что прямое разложение для  $p$  можно искать в виде ряда по целым степеням  $\epsilon$ . Ограничимся двумя членами этого ряда:

$$p = p^{(0)} + \epsilon p^{(1)}.$$

Подставляя в (9), с учетом очевидных асимптотических выражений для  $u_0$  и  $T_0$ :

$$(10) \quad u = (u_0^{(0)} + u_0'^{(0)} \eta) + \epsilon(u_0^{(1)} + u_0'^{(1)} \eta) + o(\epsilon), \\ T = \left[ T_0^{(0)} + T_0'^{(0)} \eta - \frac{4}{15} (u_0'^{(0)} \eta)^2 \right] + \epsilon \left( T_0^{(1)} + T_0'^{(1)} \eta - \frac{8}{15} u_0'^{(0)} u_0'^{(1)} \eta^2 \right) + o(\epsilon),$$

имеем:

$$(11) \quad p^{(0)} = p_i^{(0)}, \quad p^{(1)} = p_i^{(1)},$$

Неизвестные коэффициенты разложений (10) и (11) нужно находить из граничных условий на стенке и оси симметрии. Ниже будет видно, что нулевое приближение для скорости и температуры — это классическое решение задачи Куэтта с прилипанием и постоянным давлением поперек течения. Попыка найти следующий член прямого разложения приводит

нас к противоречивым условиям для искомых величин, как следствие отмеченной выше противоречивости граничных условий (4) для уравнений Навье — Стокса.

Эта ситуация, часто встречающаяся для задач с малым параметром перед старшей производной, в нашем случае является следствием необоснованной потери члена Барнетта в уравнении (9). Следует предположить, что вблизи стенки имеется тонкий пристеночный слой [3], в котором влияние барнетовской добавки существенно. Из (9) легко находим, что толщина пристеночного слоя имеет порядок  $O(\epsilon)$ .

Стандартным образом, заменяя независимую переменную в (9) новой переменной  $z$  и обозначая дифференцирование по  $z$  точкой, получим

$$(12) \quad \frac{1}{p} \left( \frac{\dot{p}}{p} \right)' - \frac{6}{b_1^2 T} p = \epsilon^2 \frac{9}{5} \frac{u_0'^2}{T} \frac{1}{p} - \frac{\epsilon}{b_1^2 T} p_i.$$

Связь между старой и новой („растянутой“) переменной дается равенством

$$(13) \quad z = \epsilon \eta.$$

Внутреннее решение для давления представим в виде:

$$(14) \quad p = P^{(0)}(z) + \epsilon P^{(1)}(z) + o(\epsilon).$$

Для соответствующих внутренних разложений скорости и температуры (10) имеем

$$(15) \quad \begin{aligned} u &= u_0^{(0)} + \epsilon(u_0^{(1)} + u_0'^{(0)}(z) + o(\epsilon)), \\ T &= T_0^{(0)} + \epsilon(T_0^{(1)} + T_0'^{(0)}z) + o(\epsilon). \end{aligned}$$

Найдем сначала нулевое приближение для давления  $P^{(0)}$ . Из (12) для него получим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$(16) \quad \frac{1}{P^{(0)}} \left( \frac{\dot{P}^{(0)}}{P^{(0)}} \right)' - \frac{6}{b_1^2 T_0^{(0)}} P^{(0)} = - \frac{6}{b_1^2 T_0^{(0)}} P_i^{(0)},$$

а из (3), (4) — соответствующие граничные условия на стенке:

$$(17) \quad \begin{aligned} \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{p_i^{(0)}}{P_0^{(0)}} \right) u_0^{(0)} &= -M, \\ \frac{1}{4} \left( 1 + 3 \frac{p_i^{(0)}}{P_0^{(0)}} \right) T_0^{(0)} &= \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{p_i^{(0)}}{P_0^{(0)}} \right), \\ \frac{p_i^{(0)}}{P_0^{(0)}} \sqrt{T_0^{(0)}} &= \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{p_i^{(0)}}{P_0^{(0)}} \right). \end{aligned}$$

Со своей стороны принцип асимптотического сращивания накладывает условие на  $P^{(0)}(z)$  на бесконечности:

$$(18) \quad P^{(0)}(z \rightarrow \infty) = p_i^{(0)}.$$

Условия (17<sub>1</sub>) и (17<sub>2</sub>) являются согласованными только, если

$$(19) \quad P_0^{(0)} = P^{(0)}(0) = p_i^{(0)},$$

а (17<sub>1</sub>) и (17<sub>2</sub>) приводят к обычным условиям прилипания для скорости и температуры:

$$(20) \quad u_0^{(0)} = u^{(0)}(0) = -M, \quad T_0^{(0)} = T^{(0)}(0) = 1.$$

Единственное решение (16) при граничных условиях (18), (19)

$$(21) \quad P^{(0)}(z) = p_i^{(0)}$$

указывает на постоянство давления поперек газа с точностью до членов порядка  $O(\epsilon)$ .

Подобным образом первое приближение для давления находится из линейного дифференциального уравнения

$$(22) \quad \dot{P}^{(1)} - ap_i^{(0)} P^{(1)} = -ap_i^{(0)} p_t^{(1)}$$

и граничных условий

$$(23) \quad P_0^{(1)} - p_i^{(1)} = \gamma_p T_0^{(0)\prime}, \quad P^{(1)}(\infty) = p_i^{(1)},$$

где

$$\gamma_p = b_1 \left[ \left( \frac{2-\alpha}{\alpha} \right) \frac{5\sqrt{\pi}}{8} - \left( \frac{2-\nu}{\nu} \right) \frac{2}{\sqrt{\pi}} \right], \quad a^2 = \frac{6}{b_1^2}.$$

Решение (22), (23) запишем в виде:

$$(24) \quad P^{(1)}(z) = \gamma_p T_0^{(0)\prime} e^{-\frac{1}{a} p_i^{(0)} z} + p_i^{(1)}.$$

Заметим, что входящий в (24) градиент температуры на стенке  $T_0^{(0)\prime}$  определяется из классического решения задачи Куэтта без учета кинетических эффектов скольжения и скачка температуры.

После того как распределение давления найдено, из (3<sub>1</sub>) и (3<sub>2</sub>) получаем условие для скорости скольжения первого порядка

$$(25) \quad u_0^{(1)} = \gamma_\sigma \frac{u_0^{(0)}}{p_i^{(0)}}, \quad \gamma_\sigma = b_1 \left( \frac{2-\sigma}{\sigma} \right) \frac{\sqrt{\pi}}{4}$$

и условие для скачка температуры:

$$(26) \quad T_0^{(1)} = \gamma_\tau \frac{T_0^{(0)}}{p_i^{(0)}}, \quad \gamma_\tau = b_1 \left[ \left( \frac{2-\alpha}{\alpha} \right) \frac{5\sqrt{\pi}}{8} - \left( \frac{2-\nu}{\nu} \right) \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \right].$$

Подставляя (25) и, (26) в (8) и удовлетворяя после этого на оси симметрии условиям (5), для скорости и температуры получим выражения:

$$u = M \left[ -1 + \frac{\eta}{\delta^{(0)}} + \epsilon \frac{\gamma_0}{p_i^{(0)} \delta^{(0)}} \left( 1 - \frac{\eta}{\delta^{(0)}} \right) - \epsilon \frac{\delta^{(1)}}{\delta^{(0)}} \frac{\eta}{\delta^{(0)}} \right],$$

$$(27) \quad T = 1 + \frac{8}{15} M^2 \frac{\eta}{\delta^{(0)}} - \frac{4}{15} M^2 \left( \frac{\eta}{\delta^{(0)}} \right)^2 + \epsilon \frac{8}{15} \frac{M^2}{p_i^{(0)} \delta^{(0)}} \left[ \gamma_t - 2\gamma_\sigma \frac{\eta}{\delta^{(0)}} + \gamma_\sigma \left( \frac{\eta}{\delta^{(0)}} \right)^2 \right] \\ + \epsilon \frac{8}{15} M^2 \frac{\delta^{(1)}}{\delta^{(0)}} \left( -1 + \frac{\eta}{\delta^{(0)}} \right) \frac{\eta}{\delta^{(0)}},$$

где  $\delta^{(0)}$  и  $\delta^{(1)}$  найдены из (6):

$$(28) \quad \delta^{(0)} = \frac{1}{2 \left( 1 + \frac{8}{45} M^2 \right)}, \\ \delta^{(1)} = \frac{64}{15} M^2 \delta^{(0)2} \left( \frac{2}{3} \gamma_\sigma - \gamma_t \right).$$

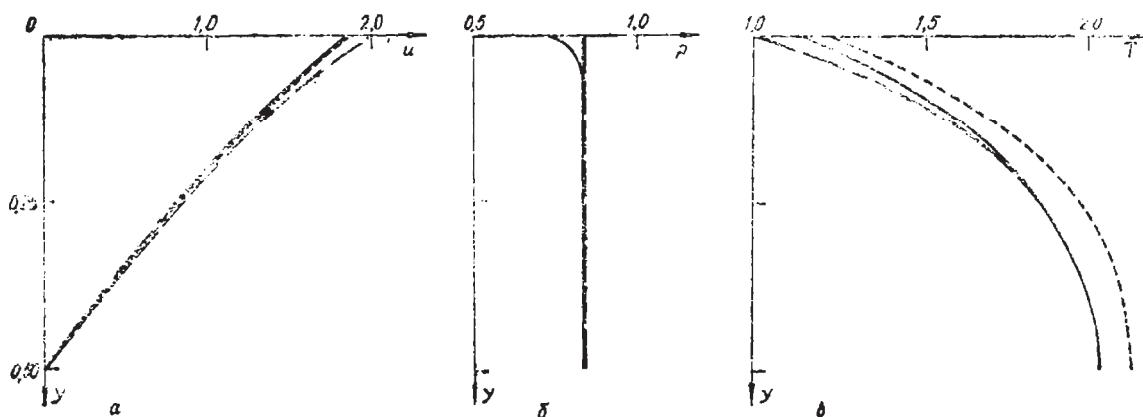
Условие нормировки плотности дает связь между  $\delta^{(0)}$ ,  $\delta^{(1)}$  и  $p_t^{(0)}$ ,  $p_t^{(1)}$ :

$$(29) \quad p_t^{(0)} = \frac{1}{4\delta^{(0)}}, \quad p_t^{(1)} = -p_t^{(0)} \frac{\delta^{(1)}}{\epsilon^{(0)}}.$$

Формулы (21), (24), (27), (28), (29) выражают окончательное решение задачи Куэтта для уравнений Барнетта. Введение  $\eta$  в качестве независимой переменной позволило записать решение в аналитическом виде. Переход к физической переменной  $u$  производится при помощи (2).

Классическое решение задачи Куэтта без учета эффектов скольжения получается из приведенного здесь решения при  $\epsilon=0$ . Заменяя  $\gamma_t$  его классическим значением и полагая  $\gamma_p=0$ , получим течение Куэтта с учетом эффектов скольжения первого порядка. Вышеупомянутое решение [5] отличается от последнего членами порядка  $O(\epsilon^2)$ . Предложенное нами решение в отличие от [5] содержит добавки порядка  $O(\epsilon)$ , т. е. того же порядка, что и скорость скольжения и температурный скачок.

**3. Численный пример.** Задача о сравнении полученного здесь решения задачи Куэтта с ее многочисленными (моментными, интегральными,



Фиг. 3.  $M=2,0$ ;  $\epsilon=0,05$ ;  $\sigma=0,8$ ;  $a=1,0$ ;  $v=0,8$ ; — Барнетт; — — Навье — Стокс; ··· Навье — Стокс со скольжением

численными и др.) кинетическими решениями представляет самостоятельный интерес. В работах, где такие сравнения проводятся, как правило, приводится решение [5]. В данной работе показано, что уравнения Барнетта допускают отличную от [5] постановку задачи о течении Куэтта.

На фиг. 2 а, б, в, для иллюстрации показаны профили скорости, давления и температуры для трех режимов течения: течение сплошной среды, течение со скольжением первого порядка для уравнений Навье—Стокса, течение со скольжением второго порядка для уравнений Барнетта.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Баранцев, Р. Г.: Об одном принципе сочетания физической и математической замкнутости постановки задачи для моментных уравнений. Вестник ЛГУ, 1 (1969), вып. 1, 92.
2. Радев, С. П.: Видоизменение метода Чепмена—Эйснера применительно к построению решений уравнения Больцмана типа пограничного слоя. Докл. ДАН СССР, 200 (1971), № 4, 801.
3. Радев, С. П.: Обтекание пластины потоком слабо разреженного газа при больших числах Рейнольдса. Докл. на II конгрессе по теор. и прил. механике, Барнаул, 1973, С., БАН, 1976.
4. Чепмен, С., Каулинг, Т.: Математическая теория неоднородных газов. М., 1960.
5. Schamberger, R.: The fundamental differential equations and the boundary conditions for high-speed slip flow. Thesis, 1947.

Поступила на 14. XII. 1974 г.

#### COUETTE FLOW IN RAREFIED GAS

S. P. Radev

(SUMMARY)

A symmetrical Couette flow in rarefied gas between two flat plates is considered by means of the method of matched asymptotic expansions.

Slip-boundary conditions are imposed for velocity, temperature and pressure at the wall, following from the usual conditions of conservation of the tangential momentum and energy as well as from an additional condition of conservation of the normal momentum in the gas flow near the wall.

Because of the contradictoriness of these conditions for Stokes equations only Burnett equations can be used. A boundary sublayer with non-zero pressure gradient is found near the wall. Let us note for comparison that the well-known solution of Burnett equations for the Couette flow [5] is found supposing the pressure to be constant.