КОЭФФИЦИЕНТЫ ИНЦИДЕНТНОСТИ ВЕЩЕСТВЕННЫХ МНОГООБРАЗИЙ ГРАССМАНА

Кирил Банков

Гомологии и когомологии многообразий Грассмана были исследованы давно в связи с характеристическими классами. В 1937 г. Эресман [2] нашел метод вычисления коэффициентов инцидентности вещественных многообразий Грассмана. В ту пору еще не было известно понятие клеточного разбиения. Поэтому Эресман не пользуется характеристическими отображениями клеток. Вычисление коэффициентов инцидентности между клетками Шуберта в вещественных многообразиях Грассмана при помощи характеристических отображений сделано в настоящей работе.

Я благодарю Ивана Проданова за постановку задачи и за интерес, который он проявил к ней во время работы.

I

В этом пункте мы напомним некоторые определения и некоторые известные теоремы.

Множество n линейно независимых векторов в $\mathbf{R}^{n+k}$ обозначается через $W_{n,k}$. Это множество обычно рассматривается с топологией, индуцированной естественным вложением $W_{n,k} \subset \mathbf{R}^{n(n+k)}$. Если $(v_1, \ldots, v_n)$ элемент $W_{n,k}$, символ $<v_1, \ldots, v_n>$ означает линейную оболочку векторов $v_1, \ldots, v_n$. Через $G_{n,k}$ обозначается множество всех n-мерных подпространств пространства $\mathbf{R}^{n+k}$. Это множество называется **многообразием** Грассмана. Оно рассматривается как топологическое пространство с фактортопологией относительно отображения $p: W_{n,k} \to G_{n,k}$, определенного равенством $p(v_1, \ldots, v_n) = <v_1, \ldots, v_n>$.

Возьмем в $\mathbf{R}^{n+k}$ возрастающую последовательность линейных подпространств $\mathbf{R}^1 \subset \mathbf{R}^2 \subset \ldots \mathbf{R}^{n+k}$. Для данной плоскости $L \in G_{n,k}$ определяются числа $m_j(L) = \inf\{m \mid \dim(L \cap \mathbf{R}^m) \geqq j\}$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Легко проверяется, что $\dim(L \cap \mathbf{R}^{m_j(L)}) = j$, откуда непосредственно следует, что числа $m_j(L)$ удовлетворяют неравенствам $1 \leqq m_1(L) \leqq \ldots \leqq m_n(L) \leqq n+k$. Каждый мультииндекс $m = (m_1, \ldots, m_n)$, которой удовлетворяет условиям

1) m_j целые числа для каждого $j = 1, 2, \ldots, n$,

2) $1 \leqq m_1 \leqq \ldots \leqq m_n \leqq n+k$,

называется **допустимым**. Для каждого допустимого мультииндекса $m = (m_1, \ldots, m_n)$ рассматривается

$$C_m = C_{m_1, \ldots, m_n} = \{L \in G_{n,k} \mid m_j(L) = m_j,\ j = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Это множество называется клеткой Шуберта, соответствующей мульти индексу $m=(m_1,\ldots,m_n)$. Клетки Шуберта являются топологическими клетками с размерностью $\dim C_m = m_1+m_2+\ldots+m_n-\frac{n(n+1)}{2}$. Семейство всех клеток Шуберта является клеточным разбиением данного многообразия Грассмана. Доказательство этого факта можно найти в Дж. Шварц [1].

Теперь определим характеристические отображения клеток Шуберта. В качестве базиса в $\mathbf{R}^{n+k}$ возьмем векторы $e_i=(0,\ldots,\overset{(i)}{0},1,0,\ldots,0)$, $i=1,\ldots,n+k$. Единичный шар в $\mathbf{R}^k$ обозначается через $B^k=\{x\in\mathbf{R}^k \mid \|x\|\leqq 1\}$. Если $m=(m_1,\ldots,m_n)$ допустимый мультииндекс, обозначим через s_m сумму $s_m=m_1+m_2+\ldots+m_n-\frac{n(n+1)}{2}$. Определим гомеоморфизм $B^{s_m}\xrightarrow{f_m}B^{m_1-1}\times B^{m_2-2}\times\ldots\times B^{m_n-n}$ с помощью равенства:

$$f_m(x)=\frac{\|x\|}{\max(\|x^{(1)}\|,\|x^{(2)}\|,\ldots,\|x^{(n)}\|)}\,x,$$

где $x=(x^{(1)},\ldots,x^{(n)})$ точка B^{s_m}, $x^{(i)}\in\mathbf{R}^{m_i-i}$, $i=1,\ldots,n$.

Определим теперь множества

$$B_m^{m_1-1}=\{u_1\in\mathbf{R}^{m_1} \mid \|u_1\|=1,\ u_{1,m_1}\geqq 0\},$$

$$B_m^{m_2-2}=\{u_2\in\mathbf{R}^{m_2}\ominus\{e_{m_1}\} \mid \|u_2\|=1,\ u_{2,m_2}\geqq 0\},$$

$$B_m^{m_3-3}=\{u_3\in\mathbf{R}^{m_3}\ominus\{e_{m_1},\ e_{m_2}\} \mid \|u_3\|=1,\ u_{3,m_3}\geqq 0\},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$B_m^{m_n-n}=\{u_n\in\mathbf{R}^{m_n}\ominus\{e_{m_1},\ldots,e_{m_{n-1}}\} \mid \|u_n\|=1,\ u_{n,m_n}\geqq 0\}.$$

Очевидно множества $B_m^{m_i-i}$ гомеоморфны единичным шарам, причем гомеоморфизмами являются следующие отображения λ_i:

$$B^{m_1-1}\xrightarrow{\lambda_{m_1}}B_m^{m_1-1},\ \lambda_{m_1}(x_1,x_2,\ldots,x_{m_1-1})=\left(x_1,x_2,\ldots,x_{m_1-1},\sqrt{1-\sum_{i=1}^{m_1-1}x_i^2}\right),$$

$$B^{m_2-1}\xrightarrow{\lambda_{m_2}}B_m^{m_2-1},\ \lambda_{m_2}(x_1,x_2,\ldots,x_{m_2-2})=\left(x_1,x_2,\ldots,x_{m_1-1},0,x_{m_1},\ldots,x_{m_2-2},\right.$$
$$\left.\sqrt{1-\sum_{i=1}^{m_2-2}x_i^2}\right),$$

$$B^{m_3-3}\xrightarrow{\lambda_{m_3}}B_m^{m_3-3},\ \lambda_{m3}(x_1,\ldots,x_{m_3-3})$$
$$=\left(x_1,\ldots,x_{m_1-1},0,x_{m_1},\ldots,x_{m_2-2},0,x_{m_1-1},\ldots,x_{m_3-3},\sqrt{1-\sum_{i=1}^{m_3-3}x_i^2}\right),$$

и т. д. Теперь определим гомеоморфизм $B^{s_m} \xrightarrow{f_m} B_m^{m_1-1} \times B_m^{m_2-2} \times \ldots \times B_m^{m_n-n}$ следующим образом:

$$\begin{array}{ccc} B^{s_m} & \xrightarrow{f_m} & B_m^{m_1-1} \times B_m^{m_2-2} \times \ldots \times B_m^{m_n-n} \\ & \searrow^{\lambda_m} & \downarrow \lambda_{m_1} \times \lambda_{m_2} \times \ldots \times \lambda_{m_n} \\ & & B_m^{m_1-1} \times B_m^{m_2-2} \times \ldots \times B_m^{m_n-n} \end{array} \qquad \lambda_m = (\lambda_{m_1} \times \ldots \times \lambda_{m_n}) \circ f_m$$

Чтобы написать характеристические отображения клеток Шуберта, нам нужно следующее предложение, доказательство которого тривиально, имея в виду что множества $B_m^{m_i-i}$ гомотопически тривиальны для каждого $i=1, 2, \ldots, n$.

Предложение 1. В $\mathbf{R}^{n+k}$ существует вращение $R_{u_i}^{(m_1, m_2, \ldots, m_i)}$, гладко зависящее от $u_i \in B^{m_i-i}$, которое имеет следующие свойства:

$$R_{u_i}^{(m_1, m_2, \ldots, m_i)}(e_{m_i}) = u_i;$$

$$R_{u_i}^{(m_1, m_2, \ldots, m_i)} \mid \mathbf{R}^{n+k} \ominus [\mathbf{R}^{m_i} \ominus \{e_{m_1}, e_{m_2}, \ldots, e_{m_{i-1}}\}] = \mathrm{id};$$

$$\det R_{u_i}^{(m_1, m_2, \ldots, m_i)} = 1.$$

Предложение 1 верно для каждого $i=1, 2, \ldots, n$.

Пусть C_m клетка Шуберта, соответствующая допустимому мультииндексу $m=(m_1, \ldots, m_n)$. Рассмотрим отображение $B_m^{m_1-1} \times B_m^{m_2-2} \times \ldots \times B_m^{m_n-n} \xrightarrow{\psi_m} G_{n,k}$, определенное равенством $\psi_m(u_1, \ldots, u_n) = \langle u_1, R_{u_1}^{(m_1)}(u_2), R_{u_1}^{(m_1)} \circ R_{u_2}^{(m_1, m_2)}(u_3), \ldots, R_{u_1}^{(m_1)} \circ \ldots \circ R_{u_{n-1}}^{(m_1, \ldots, m_{n-1})}(u_n) \rangle L$. Можно проверить, что векторы, определяющие L, ортонормальны и отображение $\varphi_m = \psi_m \circ \lambda_m$ является характеристическим отображением клетки C_m (см. [1]).

II

В связи с вычислением коэффициентов инцидентности между клетками Шуберта нам нужны некоторые свойства построенных выше характеристических отображений. Мы интересуемся прежде всего этими отображениями на границах клеток Шуберта. Нужные свойства содержатся в нескольких леммах. Их доказательства получаются, пользуясь одной и той же техникой, поэтому достаточно доказать только одну из них.

Пусть $m=(m_1, \ldots, m_n)$ такой допустимый мультииндекс, что мультииндекс $m^t=(m_1, \ldots, m_{t-1}, m_t-1, m_{t+1}, \ldots, m_n)$ тоже допустим. Клетка C_m имеет характеристическое отображение $\varphi_m: B^{s_m} \to G_{m,k}$. Обозначим через S^{s_m-1} границу шара B^{s_m}, а через $S_1^{s_m-1}$ то подмножество S^{s_m-1}, точки которого посредством φ_m отображаются в клетки Шуберта размерности ровно s_m-1. Очевидно $\dim C_{m^t} = s_m - 1$.

Лемма 1. Если $x \in S_1^{s_m-1}$, то $\varphi_m(x)$ содержится в клетке вида C_{m^t}.

Чтобы доказать лемму, используем факт, что L принадлежит C_{m^t} тогда и только тогда, когда удовлетворяет условиям:

$$\dim(L\cap \mathbf{R}^{m_t})=t,\ \dim(L\cap \mathbf{R}^{m_t-2})<t.$$

Лемма 2. Пусть $x\in S_1^{s_m-1})$ и $(u_1, u_2, \ldots, u_n)=\lambda_m(x)$. Тогда на границах соответствующих полусфер $B_m^{m_1-1}, B_m^{m_2-2}, \ldots, B_m^{m_n-n}$ лежит не более чем один из векторов $u_1, u_2, \ldots, u_n$.

Доказательство. Допустим, что лемма неверна, т. е. два из векторов $u_1, u_2, \ldots, u_n$ лежат на границах соответствующих полусфер. Без ограничения общности можно допустить, что $u_1\in \mathrm{Fr}B_m^{m_1-1}$ и $u_2\in \mathrm{Fr}B_m^{m_2-2}$. Пусть $L=\varphi_m(x)$. По предложению m_1-ая координата вектора u_1 равна нулю, т. е. $u_{1,m_1}=0$. По аналогии $u_{2,m_2}=0$. Тогда $(R_{u_1}^{(m_1)}(u_2))_{m_2}=0$, которое показывает, что $\dim(L\cap \mathbf{R}^{m_1-1})\geqq 1$ и $\dim(L\cap \mathbf{R}^{m_2-1})\geqq 2$. Следовательно $m_1(L)<m_1$ и $m_2(L)<m_2$. Тогда L принадлежит семейству клеток Шуберта размерности $\leqq s_m-2$. Это противоречит выбору $x\in S_1^{s_m-2}$.

Лемма 3. Пусть $(u_1, u_2, \ldots, u_n)\in \mathrm{Fr}(B_m^{m_1-1}\times B_m^{m_2-2}\times \ldots \times B_m^{m_n-n})$, причем $u_t\in B_m^{m_t-t}$, $u_i\in \mathrm{Int}\, B_m^{m_t-i}$ для каждого $i\neq t$. Тогда $\psi_m(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ является элементом C_{m^t} в том и только в том случае, когда выполнено неравенство $u_{t,m_t-1}\neq 0$.

Обозначим через D_{m_t+} (соответственно D_{m_t-}) то подмножество $\mathrm{Fr}(B_m^{m_1-1}\times B_m^{m_2-2}\times \ldots \times B_m^{m_n-n})$, которое содержит точки вида $(u_1, u_2, \ldots, u_n)\in \mathrm{Int}\, B_m^{m_1-1}\times \ldots \times \mathrm{Int}\, B_m^{m_{t-1}-(t-1)}\times \mathrm{Fr}\, B_m^{m_t-t}\times \mathrm{Int}\, B_m^{m_{t+1}-(t+1)}\times \ldots \times \mathrm{Int}\, B_m^{m_n-n}$, $u_{t,m_t-1}>0$ (соответственно $u_{t,m_t-1}<0$). Другими словами, $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ является элемент $D_{m_t}^+$ (соответственно $D_{m_t}^-$) в том и в только в том случае, когда выполнены реляции: $u_{i,m_i}\neq 0$ для каждого $i\neq t$, $u_{t,m_t}=0$ $u_{t,m_t-1}>0$ (соответственно $u_{t,m_t-1}<0$). Лемма 3 утверждает, что $\psi_m(D_{m_t}+)\subset C_{m^t}$ и $\psi_m(D_{m_t}-)\subset C_{m^t}$.

Рассмотрим отображение $D_{m_t}^+ \xrightarrow{\lambda_{m_t}} D_{m_t}^-$, определенное равенством $\Lambda_{m_t}(u_1, \ldots, u_n)=(u_1, \ldots, u_{t-1}, -u_t, v_{t+1}, \ldots, v_n)$, где

$$v_{t+1}=(R_{-u_t}^{(m_1,\ldots,m_t)})^{-1}\circ R_{u_t}^{(m_1,\ldots,m_t)}(u_{t+1}),$$

$$v_{t+2}=(R_{v_{t+1}}^{(m_1,\ldots,m_{t+1})})^{-1}\circ (R_{-u_t}^{(m_1,\ldots,m_t)})^{-1}\circ R_{u_t}^{(m_1,\ldots,m_t)}\circ R_{u_{t+1}}^{(m_1,\ldots,m_{t+1})}(u_{t+2}),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$v_n=(R_{v_{n-1}}^{(m_1,\ldots,m_{n-1})})^{-1}\circ\ldots\circ (R_{-u_t}^{(m_1,\ldots,m_t)})^{-1}\circ R_{u_t}^{(m_1,\ldots,m_t)}\circ\ldots\circ R_{u_{n-1}}^{(m_1,\ldots,m_{n-1})}(u_n).$$

Очевидно Λ_{m_t} гомеоморфизм и диаграмма

$$\begin{tikzcd} D_{m_t}^+ \arrow[dr, "\psi_m"] \arrow[d, "\Lambda_{m_t}"'] & \\ D_{m_t}^- \arrow[r, "\psi_m"'] & C_{m^t} \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Лемма 4. Отображения $\psi_m\ D^+_{m_t}: D^+_{m_t} \to C_{m^t}$ и $\psi_m\ D^-_{m_t}: D^-_{m_t} \to C_{m^t}$ инъективны.

Как следствие выше указанных лемм, можно сделать следующий вывод. В точках пространства $\lambda_m(S^{s_m-1}_1)$ отображение ψ_m двулистно; в каждом из множеств $D^+_{m_t}$ и $D^-_{m_t}$ оно однолистно.

III

Как известно, коэффициенты инцидентности между клетками в данном клеточном разбиении являются степенями отображения сферы в сферу. Чтобы вычислить эти степени, нам нужны координатные окрестности на сфере S^n. Рассмотрим пару координатных окрестностей на S^n, а именно $\omega^+_n: \mathring{B}^n \to u^+_n$ и $\omega^-_n: \mathring{B}^n \to u^-_n$, где

$$u^+_n = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in S^n\ x_1 > 0\},\ \omega^+_n(x_1, \ldots, x_n) = \left(\sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2},\ x_1, \ldots, x_n\right);$$

$$u^-_n = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in S^n\ x_1 < 0\},\ \omega^-_n(x_1, \ldots, x_n) = \left(-\sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2},\ x_1, \ldots, x_n\right).$$

Очевидно, что эти координатные окрестности отрицательно связаны, (т. е. якобиан преобразования координат от u^+_n к u^-_n отрицателен). Рассмотрим теперь отображения $h_n: B^n \to S^n$, являющееся композицией следующих двух отображений:

1. $(x_1, \ldots, x_n) \xrightarrow{\varphi} \left(\sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2},\ x_1, \ldots, x_n\right);$

2. Обвертывание сферы S^n при помощи ее верхней полусферы: $x \xrightarrow{\psi} s^{-1}(s(x)(\|s(x)\| - 2))$ для $x \neq (0, \ldots, 0, 1)$ и $\psi(0, \ldots, 0, 1) = (0, \ldots, 0, 1)$, где s — стереографическая проекция из точки $(0, \ldots, 0, 1)$.
Очевидно $h_n(\mathrm{Fr}\, B^n) = \{(-1, 0, \ldots, 0)\}$. Если смотрим на h_n как на координатную окрестность, легко видеть, что ω^+_n и h_n положительно связаны.

IV

Вычисление степени отображения связано с вычислением знака якобиана некоторых отображений. В связи с этим мы формулируем три леммы. Доказательства этих лемм очевидны, если написать подробно соответствующий якобиан.

До этого вспомним некоторые обозначения. Пусть $\mathbf{R}^n \xrightarrow{\varphi} \mathbf{R}^n$ дифференцируемое отображение $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$. Якобиан φ в точке x_0 обозна-

чается через $\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}(x_0) = \frac{D(\varphi)}{D(x)}(x_0)$. Знак якобиана φ в точке x_0 обозначается через $\operatorname{sgn}\frac{D(\varphi)}{D(x)}(x_0)$.

Лемма 1. Пусть $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi^n): \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ и $\psi: \mathbf{R}^n \to R$ дифференцируемые отображения. Рассмотрим отображение $\psi\varphi = (\psi\varphi_1, \ldots, \psi\varphi_n)$: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, которое является произведением φ с ψ. Пусть $x_0 \in \mathbf{R}^n$ удовлетворяет условиям: $\psi(x_0) > 0$, $\varphi(x_0) = (0, 0, \ldots, 0)$. Тогда $\operatorname{sgn}\frac{D(\psi\varphi)}{D(x)}(x_0) = \operatorname{sgn}\frac{D(\varphi)}{D(x)}(x_0)$.

Лемма 2. Пусть $\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p \xrightarrow{f} \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p$ отображение, определено формулой

$$f(x, y, z) = \left(\sqrt{1 - \sum_{i=1}^{m} x_i^2 - \sum_{j=1}^{n} y_j^2 - \sum_{k=1}^{p} z_k^2}, x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, L_{x,y,z}(y), Q_{x,y,z}(z)\right),$$

где $L_{x,y,z}$ и $Q_{x,y,z}$ ортогональные линейные операторы в $\mathbf{R}^n$ и $\mathbf{R}^p$ соответственно, гладко зависящие от x, y, z. Обозначим через A точку с координатами $x(0, \ldots, 0, 1)$, $y = (0, \ldots, 0)$, $z = (0, \ldots, 0)$. Тогда существует окрестность U точки A такая, что если $(x_0, y_0, z_0) \in U$, $(x_0, y_0, z_0) \neq A$, то выполнено равенство

$$\operatorname{sgn}\frac{D(f)}{D(x, y, z)}(x_0, y_0, z_0) = (-1)^m \operatorname{sgn}\det L_{x_0, y_0, z_0} \cdot \operatorname{sgn}\det Q_{x_0, y_0, z_0}.$$

Лемма 3. Пусть $\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^q \xrightarrow{f} \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^q$ отображение, определено формулой

$$f(x, y, z, t) = (x, -y, L_{x,y,z,t}(z), Q_{x,y,z,t}(t)),$$

где $L_{x,y,z,t}$ и $Q_{x,y,z,t}$ ортогональные линейные операторы в $\mathbf{R}^p$ и $\mathbf{R}^q$ соответственно, гладко зависящие от x, y, z, t. Обозначим через A точку с координатами $x = (0, \ldots, 0)$, $y = (0, \ldots, 0, 1)$, $z = (0, \ldots, 0)$, $t = (0, \ldots, 0)$. Тогда существует окрестность U точки A такая, что если $(x_0, y_0, z_0, t_0) \in U$, то выполнено равенство

$$\operatorname{sgn}\frac{D(f)}{D(x, y, z, t)}(x_0, y_0, z_0, t_0) = (-1)^n \cdot \operatorname{sgn}\det L_{x_0, y_0, z_0, t_0} \cdot \operatorname{sgn}\det Q_{x_0, y_0, z_0, t_0}.$$

V

Теперь можно приступить к вычислению коэффициентов инцидентности между клетками Шуберта в клеточном разбиении вещественных многообразий Грассмана.

Пусть $m=(m_1, \ldots, m_n)$ такой допустимый мультииндекс, что мультииндекс $m^t=(m_1, \ldots, m_t-1, m_t-1, m_{t+1}, \ldots, m_n)$ тоже допустим. Как известно, C_m и C_{m^t} клетки Шуберта с размерностью $s_m=m_1+\ldots+m_n-\frac{n(n+1)}{2}$ и s_m-1, соответственно. Наша задача состоит в вычислении коэффициента инцидентности $[C_m; C_{m^t}]$.

Пусть $x=(x^{(1)}, \ldots, x^{(n)})$, $x^{(t)} \in \mathbf{R}^{m_t-1}$ точка в $\mathrm{Fr}\, B^{s_m}=S^{s_m-1}$ и пусть $(u_1, \ldots, u_n)=\lambda(x)$. Выберем точку x так, чтобы выполнялись соотношения $x \in S_1^{s_m-1}$ и $\lambda_m(x) \in D_{m_t}^+$ или $(\lambda_m(x) \in D_{m_t}^-)$, которые означают, что $u_{t,m_t}=0$ и $u_{t,m_t-1}>0$ (или $u_{t,m_t-1}<0$).

Если имеем в виду определение λ_m, ясно, что равенство $u_{t,m_t}=0$ выполнено тогда и только тогда, когда $\max(|x^{(1)}|, \ldots, |x^{(n)}|)=|x^{(t)}|$, а неравенство $u_{t,m_t-1}>0$ (соответственно $u_{t,m_t-1}<0$) выполнено тогда и только тогда, когда $(x^{(t)})_{m_t-t-1}>0$ (соответственно $(x^{(t)})_{m_t-(t+1)}<0$).

Рассмотрим диаграмму

$$S^{s_m-1} \xrightarrow{\varphi_m} C_{m^t} \xrightarrow{\varphi_{m^t}^{-1}} B^{s_m-1} \xrightarrow{h_{s_m-1}} S^{s_m-1}, \tag{1}$$

где h_{s_m-1} определено в III (верхняя диаграмма не совсем точна, так как не все точки из S^{s_m-1} отображаются посредством φ_m в C_{m^t}, но для нас интересны только те точки, для которых $\varphi_m(x) \in C_{m^t}$. Точки, которые не удовлетворяют этому условию, отображаются посредством композиции (1) в точку $(-1, 0, \ldots, 0) \in S^{s_m-1}$.

По дефиниции $[C_m, C_{m^t}]=\deg F$, где $F: S^{s_m-1} \to S^{s_m-1}$ определено равенством

$$F(x)=\begin{cases} h_{s_m-1} \circ \varphi_{m^t}^{-1} \circ \varphi_m(x), & \text{если } \varphi_m(x) \in C_{m_t}, \\ (-1, 0, \ldots, 0), & \text{если } \varphi_m(x) \overline{\in} C_{m^t}. \end{cases}$$

Так как отображение φ_m двулистно и является композицией двух отображений, то (1) можно представить в виде

$$\begin{tikzcd} S^{s_m-1} \arrow[r, "\lambda_m"] & D_{m_t}^+ \arrow[dr, "\psi_m"] & & \\ & & C_{m^t} \arrow[r, "\psi_{m_t}^{-1}"] & B_{m^t}^{m_t-1} \times \ldots \times B_{m^t}^{m_t-t-1} \times \ldots \\ S^{s_m-1} \arrow[r, "\lambda_m"] & D_{m_t}^- \arrow[ur, "\psi_m"'] & & \\ & & \times B_{m^t}^{m_n-n} \arrow[r, "\lambda_{m^t}^{-1}"] & B^{s_m-1} \arrow[r, "h_{s_m-1}"] & S^{s_m-1}. \end{tikzcd} \tag{2}$$

В диаграмме (2) отображение ψ_m однолистно на каждой ветви.

Рассмотрим теперь верхнюю ветвь диаграммы (2):

$$S^{s_m-1} \xrightarrow{\lambda_m} D^+_{m_t} \xrightarrow{\psi_m} C_{m^t} \xrightarrow{\psi^{-1}_{m^t}} B^{m_1-1}_{m^t} \times \ldots \times B^{m_t-t-1}_{m^t} \times \ldots$$

$$\times B^{m_n-n}_{m^t} \xrightarrow{\lambda^{-1}_{m_t}} B^{s_m-1} \xrightarrow{h_{s_m-1}} S^{s_m-1}.$$

В соответствии с сделанными выше рассуждениями, если мы хотим двигаться по этой ветви, нужно выбрать такую точку $x=(x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}) \in S^{s_m-1}$, чтобы для нее имели место соотношения $x \in S^{s_m-1}_1$, $\max(|x^{(1)}|, \ldots, |x^{(n)}|) = |x^{(t)}|$, $(x^{(t)})_{m_t-t-1}>0$. Пусть $(u_1, u_2, \ldots, u_n)=\lambda(x)$.

Если мы вспомним определение ψ_m и ψ_{m^t}, то становится ясным, что $\psi^{-1}_{m_t} \circ \psi_m(u_1, \ldots, u_n)=(u_1, \ldots, u_t, v_{t+1}, \ldots, v_n)$, где

$$v_{t+1}=(R^{(m_1,\ldots,m_t-1)}_{u_t})^{-1} \circ R^{(m_1,\ldots,m_t)}_{u_t}(u_{t+1}),$$

$$v_{t+2}=(R^{(m_1,\ldots,m_t-1)}_{u_t} \circ R^{(m_1,\ldots,m_t-1,m_{t+1})}_{v_{t+1}})^{-1} \circ R^{(m_1,\ldots,m_t)}_{u_t} \circ R^{(m_1,\ldots,m_{t+1})}_{u_{t+1}}(u_{t+2}),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$v_n=(R^{(m_1,\ldots,m_t-1)}_{u_t} \circ \ldots \circ R^{(m_1,\ldots,m_t-1,\ldots,m_{n-1})}_{v_{n-1}})^{-1} \circ R^{(m_1,\ldots,m_t)}_{u_t} \circ \ldots \circ R^{(m_1,\ldots,m_{n-1})}_{u_{n-1}}(u_n).$$

Обозначим через $L_{u_t, u_{t+1}, \ldots, u_{t+s-1}}$, $s=1, 2, \ldots, n-t$, вращение

$$(R^{(m_1,\ldots,m_t-1)}_{u_t} \circ \ldots \circ R^{(m_1,\ldots,m_t-1,\ldots,m_{t+s-1})}_{v_{t+s-1}})^{-1} \circ R^{(m_1,\ldots,m_t)}_{u_t} \circ \ldots \circ R^{(m_1,\ldots,m_{t+s-1})}_{u_{t+s-1}}.$$

Известно, что $u_{t+s} \in \mathbf{R}^{m_{t+s}} \ominus \{e_{m_1}, \ldots, e_{m_t-1}, \ldots, e_{m_{t+s-1}}\}$. В соответствие с определением вращений мы получаем, что вектор $v_{t+s} = L_{u_t, \ldots, u_{t+s-1}}(u_{t+s})$ лежит в пространстве $\mathbf{R}^{m_{t+s}} \ominus \{e_{m_1}, \ldots, e_{m_t-1}, \ldots, e_{m_{t+s-1}}\}$. Тогда векторы u_{t+s} и v_{t+s} находятся в пространстве с размерностью $m_{t+s}-(t+s-1)$. Вращение $L_{u_t, \ldots, u_{t+s-1}}$ действует в $\mathbf{R}^{n+k}$, причем его существенное действие в $\mathbf{R}^{m_{t+s-1}} \ominus \{e_{m_1}, \ldots, e_{m_{t+s-2}}\}$, т. е. в пространстве с размерностью $m_{t+s-1}-(t+s-2)$. Обозначим через $l_{u_t, \ldots, u_{t+s-1}}$ вращение в пространстве с размерностью $m_{t+s}-(t+s-1)$, которое является ограничением $L_{u_t, \ldots, u_{t+s-1}}$ до пространства, в котором находится вектор u_{t+s} (как уже отметили, это пространство имеет размерность ровно $m_{t+s}-(t+s-1)$). Так как $m_{t+s-1}<m_{t+s}$, очевидно $\det l_{u_t, \ldots, u_{t+s-1}} = \det L_{u_t, \ldots, u_{t+s-1}} = 1$. Кроме того, ясно, что $L_{u_t, \ldots, u_{t+s-1}}(e_{m_{t+s}})=e_{m_{t+s}}$, которое показывает, что последняя ненулевая координата вектора v_{t+s} совпадает с последней ненулевой координатой вектора u_{t+s}, и эти координаты положительны для каждого $s=1, 2, \ldots, n-t$. ○

Вспомним теперь действие $\lambda^{-1}_{m^t}$. Грубо говоря, $\lambda^{-1}_{m^t}$ „отрезает" все последние положительные координаты векторов $u_1, u_2, \ldots, u_t, v_{t+1}, \ldots, v_n$ (заметим, что последняя положительная координата u_t имеет номер m_t-1), и устраняет все нули в координатах этих векторов, которые находятся на местах $m_1, \ldots, m_{t-1}, m_t-1, m_{t+1}, \ldots, m_{n-1}$.

Чтобы окончить рассмотрение верхней ветви диаграммы (2), надо ввести координатные окрестности на сфере S^{s_m-1}. Так получаем следующую диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
S^{s_m-1} \arrow[r, "\lambda_m"] & D^+_{m_t} \arrow[r, "\psi_m"] & C_{m_t} \arrow[r, "\psi^{-1}_{m^t}"] & B^{m_1-1}_{m^t} \times \ldots \times B^{m_t-t-1}_{m^t} \times \ldots \\
\mathring{B}^{s_m-1} \arrow[u, "\omega^+_{s_m-1}"] & & & \\
& & \times B^{m_n-n}_{m^t} \arrow[r, "\lambda^{-1}_{m^t}"] & B^{s_m-1} \arrow[r, "h_{s_m-1}"] & S^{s_m-1} \\
& & & & \mathring{B}^{s_m-1} \arrow[u, "\omega^+_{s_m-1}"]
\end{tikzcd}$$

Так как кооординатные окрестности $\omega^+_{s_m-1}$ и h_{s_m-1} положительно связаны, то для вычисления знака якобиана верхней композицией достаточно вычислить знак якобиана отображения

$$f = \lambda^{-1}_{m^t} \circ \psi^{-1}_{m^t} \circ \psi_m \circ \lambda_m \circ \omega^+_{s_m-1} : \mathring{B}^{s_m-1} \longrightarrow B^{s_m-1}.$$

Пусть $x=(x_1, \ldots, x_{s_m-1})$ точка в B^{s_m-1}. Группируем координаты точки x следующим образом:

$$X_1 = (x_1, \ldots, x_{m_1-2}),$$

$$X_p = (x_{m_1+\ldots+m_{p-1}-\frac{p(p-1)}{2}}, \ldots, x_{m_1+\ldots+m_p-\frac{p(p+1)}{2}-1}),$$

для $p=2, 3, \ldots, t-1, t+1, \ldots, n$

$$X_t = (x_{m_1+\ldots+m_t-1-\frac{t(t-1)}{2}}, \ldots, x_{m_1+\ldots+m_t-\frac{t(t+1)}{2}-2}).$$

Имея в виду уже сделанные рассуждения, получаем, что

$$f(x) = (\sqrt{1-\sum_{i=1}^{s_m-1} x_i^2}, X_1, \ldots, X_{t-1}, X_t, l_{u_t}(X_{t+1}), l_{u_t, u_{t+1}}(X_{t+2}), \ldots,$$

$$l_{u_t}, \ldots, u_{n-1}(X_n))\varphi(X),$$

где $\varphi(x)>0$, потому что $\varphi(x)$ выражается произведением норм некоторых векторов. Обозначим через $0=(0, \ldots, 0)$ начало в B^{s_m-1}. Очевидно $f^{-1}(0)=A$, где A точка с координатами $x_i=0$ для $i \neq m_1 + \ldots + m_t - \frac{t(t+1)}{2} - 1$, $x_{m_1+\ldots+m_t-\frac{t(t+1)}{2}-1} = 1$.

Пусть U такая окрестность точки A, существование которой утверждает лемма 2, IV. Пусть V такая окрестность точки $0 \in B^{s_m-1}$, что $f^{-1}(V) \subset U$.

Тогда, если $y^0 \in V$, то $x^0 = f^{-1}(y^0)$ будет элементом U и в соответствии с леммой 2. IV имеем

$$\text{(I)} \qquad \operatorname{sgn} \frac{D(f)}{D(x)}(x^0) = (-1)^{m_1 + \ldots + m_t - \frac{t(t+1)}{2} - 1}.$$

Теперь надо искать прообраз точки y^0, двигаясь по нижней ветви диаграммы (2). Точнее, если введем координатные окрестности на $S^{s_m - 1}$ и имеем в виду, что $\omega^+_{s_m - 1}$ и $h_{s_m - 1}$ положительно связаны, надо искать прообраз точки y^0 в следующей диаграмме:

$$\text{(3)} \qquad \mathring{B}^{s_m - 1} \xrightarrow{\omega^+_{s_m - 1}} S^{s_m - 1} \xrightarrow{\lambda_m} D^-_{m_t} \xrightarrow{\psi_m} C_{m^t} \xrightarrow{\psi^{-1}_{m^t}} B^{m_1 - 1}_{m^t} \times$$

$$\ldots \times B^{m_{t-t-1}}_{m^t} \times \ldots \times B^{m_n - n}_{m^t} \xrightarrow{\lambda^{-1}_{m^t}} B^{s_m - 1}.$$

Здесь начальное отображение $\omega^+_{s_m - 1}$ (соответственно $\omega^-_{s_m - 1}$), если $\lambda^{-1}_m \circ \psi^{-1}_m \circ \psi_{m^t} \circ \lambda_m{}^+(y^0)$ находится в координатной окрестности $U^+_{s_m - 1}$ (соответственно $U^-_{s_m - 1}$). Обозначим через $f_1 : \mathring{B}^{s_m - 1} \to B^{s_m - 1}$ композицию из диаграммы (3). Нас интересует $\operatorname{sgn} \frac{D(f_1)}{D(x)}(f_1^{-1}(y^0))$.

Рассмотрим следующую композицию:

$$\text{(4)} \qquad \mathring{B}^{s_m - 1} \xrightarrow{\omega^+_{s_m - 1}} S^{s_m - 1} \xrightarrow{\lambda_m} D^+_{m_t} \xrightarrow{\Lambda_{m_t}} D^-_{m_t} \xrightarrow{\lambda^{-1}_m} S^{s_m - 1} \xleftarrow{\omega^+_{s_m - 1}} \mathring{B}^{s_m - 1},$$

где отображение Λ_{m_t} определено в II, а последнее отображение есть $\omega^+_{s_m - 1}$ (соответственно $\omega^-_{s_m - 1}$), если $\lambda^{-1}_m \circ \lambda_{m_t} \circ \lambda_m \circ \omega^+_{s_m - 1}(x^0)$ находится в координатной окрестности $U^+_{s_m - 1}$ (соответственно $U^-_{s_m - 1}$). Обозначим через $\theta : \mathring{B}^{s_m - 1} \to \mathring{B}^{s_m - 1}$ композицию из диаграммы (4). Таким образом получаем следующую диаграмму, коммутативность которой следует из свойств Λ_{m_t}.

$$\begin{tikzcd} \mathring{B}^{s_m - 1} \arrow[d, "\theta"'] \arrow[dr, "f"] & \\ \mathring{B}^{s_m - 1} \arrow[r, "f_1"'] & B^{s_m - 1}, \end{tikzcd} \qquad f = f_1 \circ \theta.$$

Тогда выполнено равенство $\frac{D(f)}{D(x)}(x^0) = \frac{D(f_1)}{D(x)}(f_1^{-1}(y^0)) \frac{D(\theta)}{D(x)}(x^0)$.

Оно показывает, что если известны $\operatorname{sgn} \frac{D(f_1)}{D(x)}(x^0)$ и $\operatorname{sgn} \frac{D(\theta)}{D(x)}(x^0)$, то мож-

но найти искомый нами $\operatorname{sgn} \frac{D(f_1)}{D(x)} (f_1^{-1}(y^0))$. Так как $\operatorname{sgn} \frac{D(f_1)}{D(x)} (x^0)$ мы уже нашли, то остается найти $\operatorname{sgn} \frac{D(\theta)}{D(x)} (x^0)$.

Чтобы написать отображение θ, вспомним определение Λ_{m_t}. Если обозначим через $Q_{u_t, u_{t+1}, \ldots, u_{t+s-1}}$, $s=1, 2, \ldots, n-t$, вращение $(R^{(m_1, \ldots, m_{t+s-1})}_{v_{t+s-1}})^{-1} \circ \ldots \circ (R^{(m_1, \ldots, m_t)}_{-u_t})^{-1} \circ R^{(m_1, \ldots, m_t)}_{u_t} \circ \ldots \circ R^{(m_1, \ldots, m_{t+s-1})}_{u_{t+s-1}}$, тогда $\Lambda_{m_t}(u_1, u_2, \ldots, u_n) = (u_1, \ldots u_{t-1}, -u_t, v_{t+1}, \ldots, v_n)$, где

$$v_{t+1} = Q_{u_t}(u_{t+1}),$$
$$v_{t+2} = Q_{u_t, u_{t+1}}(u_{t+2}),$$
$$\vdots$$
$$v_n = Q_{u_t, \ldots, u_{n-1}}(u_n).$$

Известно, что $u_{t+1} \in \mathbf{R}^{m_t+1} \ominus \{e_{m_1}, \ldots, e_{m_t}\}$. Кроме того, имеем

$$Q_{u_t}(e_{m_1}) = (R^{(m_1, \ldots, m_t)}_{-u_t})^{-1} \circ R^{(m_1, \ldots, m_t)}_{u_t}(e_{m_1}) = e_{m_1},$$

$$Q_{u_t}(e_{m_2}) = e_{m_2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$Q_{u_t}(e_{m_{t-1}}) = e_{m_{t-1}},$$

$$Q_{u_t}(e_{m_t}) = (R^{(m_1, \ldots, m_t)}_{-u_t})^{-1} \circ R^{(m_1, \ldots, m_t)}_{u_t}(e_{m_t}) = (R^{(m_1, \ldots, m_t)}_{-u_t})^{-1}(u_t) = -e_{m_t},$$

$$Q_{u_t}(e_{m_i}) = e_{m_i} \text{ для } i > t.$$

Следовательно, определитель вращения Q_{u_t} в подпространстве, в котором находится вектор u_{t+1}, равен (-1), потому что $\det Q_{u_t} = -1$ в $\mathbf{R}^{n+k}$, а в ортогональном дополнении вращение Q_{u_t} имеет определитель (-1).

По определению имеем, что $u_{t+2} \in \mathbf{R}^{m_t+2} \ominus \{e_{m_1}, \ldots, e_{m_{t+1}}\}$. Кроме того, выполнены равенства $Q_{u_t, u_{t+1}}(e_{m_i}) = e_{m_i}$ для $i = 1, 2, \ldots, t-1$.

$$Q_{u_t, u_{t+1}}(e_{m_t}) = (R^{(m_1, \ldots, m_{t+1})}_{v_{t+1}})^{-1} \circ Q_{u_t} \circ R^{(m_1, \ldots, m_{t+1})}_{u_{t+1}}(e_{m_t}) = -e_{m_t},$$

потому что $R^{(m_1, \ldots, m_{t+1})}_{u_{t+1}}$ и $R^{(m_1, \ldots, m_{t+1})}_{v_{t+1}}$ не действуют на e_{m_t}.

$$Q_{u_t, u_{t+1}}(e_{m_{t+1}}) = (R^{(m_1, \ldots, m_{t+1})}_{v_{t+1}})^{-1} \circ Q_{u_t}(u_{t+1}) = (R^{(m_1, \ldots, m_{t+1})}_{v_{t+1}})^{-1}(v_{t+1}) = e_{m_{t+1}},$$

$Q_{u_t, u_{t+1}}(e_{m_j}) = e_{m_j}$ для $j > t+1$.

Предыдущие равенства показывают, что определитель вращения $Q_{u_t, u_{t+1}}$ в подпространстве, в котором находится u_{t+2}, равен (-1).

По аналогии можно доказать что определитель $Q_{u_t, \ldots, u_{t+s-1}}$ в подпространстве, в котором находится u_{t+s}, равен (-1).

Обозначим через $q_{u_t,\ldots,u_{t+s-1}}$ вращение, которое является ограничением $Q_{u_t,\ldots,u_{t+s-1}}$ до подпространства, в котором находится вектор u_{t+s}. Как и выше, можно установить, что это подпространство имеет размерность $m_{t+s}-(t+s-1)$. Мы только что показали, что $\det q_{u_t,\ldots,u_{t+s-1}}=(-1)$ для $s=1,2,\ldots,n-t$.

Пусть теперь $t\neq 1$. Тогда в диаграммме (4) последнее отображение есть $\omega^{+}_{s_m-1}$, и оно положительно связано с последним отображением в диаграмме (2). Пусть $x=(x_1,\ldots,x_{s_m-1})$ точка в B^{s_m-1}. Группируем координаты точки x следующим способом:

$$X_1=(x_1,\ldots,x_{m_t-1}),$$

$$X_p=\left(x_{m_1+\ldots+m_{p-1}-\frac{p(p-1)}{2}+1},\ldots,x_{m_1+\ldots+m_p-\frac{p(p+1)}{2}}\right)$$

для $p=2,3,\ldots,t-1$,

$$X_t=\left(x_{m_1+\ldots+m_{t-1}-\frac{t(t-1)}{2}+1},\ldots,x_{m_1+\ldots+x_{m_t}-\frac{t(t+1)}{2}-1}\right),$$

$$X_r=\left(x_{m_1+\ldots+m_{r-1}-\frac{r(r-1)}{2}},\ldots,x_{m_1+\ldots+x_r-\frac{r(r+1)}{2}-1}\right)$$

для $r=t+1,\ldots,n$.

Если имеем в виду уже сделанные выше рассуждения, получаем, что для $t\neq 1$

$$Q(x)=(X_1,\ldots,X_{t-1},-X_t,q_{u_t}(X_{t+1}),q_{u_t,u_{t+1}}(X_{t+2}),\ldots,$$
$$q_{u_t,\ldots,u_{n-1}}(X_n)).$$

Пусть U_1 такая окрестность точки $A=f^{-1}(0)$, существование которой утверждает лемма 3, IV. Если необходимо, мы уменьшаем окрестность V точки $0\in B^{s_m-1}$ так, что если $y_0\in V$, то $x^0=f^{-1}(y^0)\in U\cap U_1$. Тогда в соответствие с леммой 3, IV имеем

$$\operatorname{sgn}\frac{D(\theta)}{D(x)}(x^0)=(-1)^{m_t+n}\quad\text{для } t\neq 1.$$

Для $t=1$ последнее отображение в диаграмме (4) $\omega^{-}_{s_m-1}$, которое отрицательно связано с последним отображением в диаграмме (2). Поэтому $\operatorname{sgn}\frac{D(f_1)}{D(x)}(f_1^{-1}(y^0))$ надо брать с обратным знаком. Пусть $x=(x_1,\ldots,x_{s_m-1})$ точка в B^{s_m-1}. Группируем координаты точки x следующим способом:

$$X_1=(x_1,\ldots,x_{m_1-2}),$$

$$X_p=(x_{m_1+\ldots+m_{p-1}-\frac{p(p-1)}{2}},\ldots,x_{m_1+\ldots+m_p-\frac{p(p+1)}{2}-1})$$

для $p=2, 3, \ldots, n$.

Тогда для $t=1$ получаем, что

$$\theta(x)=(-X_1, q_{u_1}(X_2), q_{u_1,u_2}(X_3), \ldots, q_{u_1,\ldots,u_{n-1}}(X_n).$$

Как и раньше, находим, что $\operatorname{sgn}\frac{D(\theta)}{D(x)}(x^0)=(-1)^{m_1+n-1}$ для $t=1$.

Мы уже показали, что выполнено равенство

$$\operatorname{sgn}\frac{D(f)}{D(x)}(x^0)=\operatorname{sgn}\frac{D(f_1)}{D(x)}(f_1^{-1}(y^0)).\operatorname{sgn}\frac{D(\theta)}{D(x)}(x^0).$$

Отсюда получаем, что

$$\text{(II)}\qquad \operatorname{sgn}\frac{D(f_1)}{D(x)}(f_1^{-1}(y^0))=(-1)^{m_1+\ldots+m_t-\frac{t(t+1)}{2}-1}(-1)^{m_t+n} \text{ для } t\neq 1.$$

Учитывая, что $\omega_{s_m^+-1}$ и $\omega_{s_m^--1}$ отрицательно связаны, получаем равенство

$$\text{(III)}\qquad \operatorname{sgn}\frac{D(f_1)}{D(x)}(f_1^{-1}(y^0))=(-1)^{m_1}.(-1)^{m_1+n} \text{ для } t=1.$$

Формулы (I), (II), (III) доказывают следующую теорему:

Теорема 1. Коэффициент инцидентности между клетками Шуберта C_m и C_{m^t} равен следующему числу:

$$[C_m; C_{m^t}]=(-1)^{m_1+\ldots+m_t-\frac{t(t+1)}{2}-1}(1+(-1)^{m_t+n}).$$

Замечание. Если клетка C_{m^t} не существует (т. е. если m^t не является допустимым мультииндексом), то $[C_m, C_{m^t}]=0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шварц, Дж.: Дифференциальная геометрия и топология. М., Мир, 1970.
2. Ehresman, C.: Sur la topologie de certaines variétés algébriques réelles. J. Math. Pures Appl., 1937, 69 — 100.
3. Hu Sze-Tsen: Homology theory. San Francisco, London, Amsterdam, 1966.

Постъпила на 14. XII. 1976 г.

INCIDENCE NUMBERS OF REAL GRASSMAN MANIFOLDS

K. Bankov

(SUMMARY)

Homology and cohomology of Grassman manifolds have been studied long ago in connection with characteristic classes. In 1937 Ehresman has found a method for the computing of the incidence numbers of real Grassman manifolds. At that time the notion of the cell complex had not been known. That is why Ehresman made no use of characteristic cell mappings.

In this paper we compute the incidence numbers between the Schubert cells in the real Grassman manifolds using the characteristic mappings.

The following formulas for the incidence numbers between the Schubert cells C_m and C_{m^t} are obtained:

$$[C_m, C_{m^t}] = (-1)^{m_1+\dots+m_t-\frac{t(t+1)}{2}-1}\,(1+(-1)^{m_t+n}).$$