О НЕРАСТЯГИВАЮЩИХ ОТОБРАЖЕНИЯХ

Владимир Т. Тодоров

В 1936 г. в работе [1] Фрейденталя и Гуревича доказано, что любое многозначное нерастягивающее[1] отображение метрического компакта на себя является изометрией.

Значительно позже, в 1950 г., в своей работе [2] М. Бродский другим способом получил тот же самый результат. На самом деле он рассматривает ε-нерастягивающие отображения: отображение $f: X \to X$ называется ε-нерастягивающим, если неравенство $\rho(x, y) < \varepsilon$ влечет $\rho(f(x), f(y)) \leqq \rho(x, y)$. Бродский утверждает, что любое ε-нерастягивающее отображение является ε-изометрией, т. е. $\rho(x, y) < \varepsilon$ влечет $\rho(f(x), f(y)) = \rho(x, y)$. В сущности, однако, этот результат не является более общим по сравнению с вышеупомянутой теоремой. Действительно, применяя теорему Фрейденталя и Гуревича к метрическому пространству $(X, \bar{\rho})$ и к отображению $f: X \to X$, где $\bar{\rho}(x, y) = \min\{\varepsilon, \rho(x, y)\}$, получаем, что f-изометрия относительно $\bar{\rho}$ и, значит, очевидно будет ε-изометрией.

В 1969 г. М. Марианович [3] при помощи теоремы Фрейденталя и Гуревича доказал, что если $f: X \to X$ гомеоморфизм метрического компакта (X, ρ) на себя, то f будет изометрией относительно эквивалентной метрики тогда и только тогда, когда семейство $\{f^n \mid n = 1, 2, \ldots\}$, где $f^1 = f$; $f^n = f \circ f^{n-1}$, равностепенно непрерывно (см. определение 3).

В 1971 г. К. Боргес [4] доказал, что отображение $f: X \to X$ бикомпакта X на себя является изометрией относительно любой псевдометрики некоторого семейства псевдометрик, порождающих топологию пространства X, тогда и только тогда, когда семейство итераций $\{f^n \mid n = 1, 2, \ldots\}$ равностепенно непрерывно.

Теорема 1 настоящей работы является обобщением всех только что упомянутых результатов.

Пусть X — множество и $\mathbf{P} = \{p_\alpha \mid \alpha \in \mathbf{A}\}$ — семейство псевдометрик в X. На протяжение всей этой работы будем считать, что семейство $\mathbf{P}$ направленно в следующем смысле: для каждого числа $\varepsilon > 0$ и для каждых двух элементов α_1 и α_2 из $\mathbf{A}$ существует элемент α_0 из $\mathbf{A}$ и число $\delta > 0$, такие, что $O_{p_{\alpha_0}}(x, \delta) \subset O_{p_{\alpha_1}}(x, \varepsilon) \cap O_{p_{\alpha_2}}(x, \varepsilon)$ для каждой точки x из X, где через $O_{p_\alpha}(x, \varepsilon)$ обозначено множество $\{y \mid p_\alpha(x, y) < \varepsilon\}$. Из этих условий сразу следует, что семейство $\{O_{p_\alpha}(x, \varepsilon) \mid \alpha \in \mathbf{A}, x \in X, \varepsilon > 0\}$ является

---

[1] Многозначное отображение $f: X \to X$ называют нерастягивающим, если $\rho(a, b) \leqq \rho(x, y)$ для любых $a \in f(x)$, $b \in f(y)$.

базой топологии в X. Будем считать, что множество X, наделенное топологией, соответствующей $\mathbf{P}$, является бикомпактом.

Рассмотрим множество $\mathbf{F}(X)$, состоящее из всех замкнутых подмножеств пространства X. Для каждого α из $\mathbf{A}$ через r_α будем обозначать хаусдорфовую псевдометрику в $\mathbf{F}(X)$, определенную равенством:

$$r_\alpha(F, G)=\max\{\sup\{p_\alpha(x, G) \mid x \in F\}, \sup\{p_\alpha(F, y) \mid y \in G\},$$

где $F, G \in \mathbf{F}(X)$.

Известно, что семейство $\mathbf{R} = (r_\alpha \mid \alpha \in \mathbf{A}\}$ направлено в вышеуказанном смысле и порождает в $\mathbf{F}(X)$ хаусдорфовую бикомпактную топологию. Ниже всегда будем рассматривать $\mathbf{F}(X)$ с указанной топологией.

Для всех подмножеств M в N пространства X число $\sup\{p_\alpha(x, y) \mid x \in M, y \in N\}$ будем обозначать через $\tilde{p}_\alpha(M. N)$.

Определение 1. Пусть дана последовательность $\{\varphi_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ (где Γ — направленное множество) отображений из X в $\mathbf{F}(X)$. Будем говорить, что отображение $\varphi: X \to \mathbf{F}(X)$ предел последовательности $\{\varphi_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ и будем писать $\varphi=\lim \varphi_\gamma$ или $\{\varphi_\gamma\} \to \varphi$, если для каждой точки x из X выполнено $\{\varphi_\gamma(x)\} \to \varphi(x)$ в $\mathbf{F}(X)$.

Определение 2. Пусть даны две многозначные отображения f и g из X в X. Будем говорить, что f более нерастягивающее, чем g, если для каждого α из $\mathbf{A}$ выполнено: $\tilde{p}_\alpha(f(x), f(y)) \leq \tilde{p}_\alpha(g(x), g(y))$ для любых x и y из X.

Будем называть отображение f нерастягивающим, если f более нерастягивающее, чем тождественное отображение пространства X на себя. Очевидно каждое нерастягивающее отображение однозначно в каждой неизолированной точке из X.

Лемма 1. Если $\mathbf{M}$ подмножество $\mathbf{F}(X)$, то

$$[\bigcup\{F \mid F \in \mathbf{M}\}]_X=\bigcup\{F \mid F \in [\mathbf{M}]_{\mathbf{F}(X)}\}.$$

Доказательство. Пусть $x_0 \in [U\{F \mid F \in \mathbf{M}\}]_X$. Тогда существует последовательность точек $\{x_\nu\}$ из $\bigcup\{F \mid F \in \mathbf{M}\}$ такая, что $\{x_\nu\} \to x_0$. Будем считать, что $x_\nu \in F_\nu \in \mathbf{M}$. Так как $[\mathbf{M}]_{\mathbf{F}(X)}$ биокомпактное подмножество $\mathbf{F}(X)$, можно считать, что последовательность $\{F_\nu\}$ сходится к некоторому элементу F_0 из $[\mathbf{M}]_{\mathbf{F}(X)}$. Очевидно $x_0 \in F_0$, так как $x_\nu \in F_\nu$ и $\{x_\nu\} \to x_0$. Следотельно, $x_0 \in \bigcup\{F \mid F \in [\mathbf{M}]_{\mathbf{F}(X)}\}$.

Пусть теперь $x_0 \in \bigcup\{F \mid F \in [\mathbf{M}]_{\mathbf{F}(X)}\}$. Тогда $x_0 \in F_0$ для некоторого F_0 из $[\mathbf{M}]_{\mathbf{F}(X)}$. Существует последовательность $\{F_\nu\}$ в $\mathbf{M}$, которая сходится к F_0. Очевидно существуют точки $x_\nu \in F_\nu$, для которых $x_0=\lim x_\nu$. Следовательно $x_0 \in [\bigcup\{F \mid F \in \mathbf{M}\}]_X$, чем лемма доказана.

Пусть заданы две непрерывные отображения f и g пространства X в $\mathbf{F}(X)$. Отображение $h: X \to \mathbf{F}(X)$, задаваемое равенством $h(x)=\bigcup\{f(y) \mid y \in g(x)\}$, будем обозначать через $f \circ g$. Через $\Phi(f)$, где $f: X \to \mathbf{F}(X)$ непрерывное отображение, будем обозначать замыкание множества $\{f^n \mid n=1, 2, \ldots\}$, где $f^1=f$, $f^n=f \circ f^{n-1}$ в $(\mathbf{F}(X))^X$ относительно топологией поточковой сходимости. Очевидно, что каждое g из $\Phi(f)$ более нерастягивающее, чем f, и что при этом условии $\Phi(g) \subset \Phi(f)$.

Лемма 2. Пусть $f: X \to \mathrm{F}(X)$ нерастягивающее отображение пространства X на себя. Существует отображение φ из $\Phi(f)$, точка x_0 из X такие, что $x_0 \in \varphi(x_0)$.

Доказательство. Предположим, что это не так. Обозначим через $\Phi(f)(x)$ множество $\bigcup\{\varphi(x) \mid \varphi \in \Phi(f)\}$. Тогда выполняется

(1) $$x \overline{\in} \Phi(f)(x) \text{ для каждого } x \text{ из } X.$$

Из леммы 1 вытекает корректность следующих равенств:

$$\Phi(f)(x) = \bigcup\{F \mid F \in [\{f^n(x) \mid n = 1, 2, \ldots\}]_{\mathrm{F}(X)}\} = [\bigcup_{n=1}^{\infty} f^n(x)]_X.$$

$\Phi(f)(x)$ замкнутое подмножество бикомпакта X для каждого x из X, и поэтому можно подобрать такой элемент α из $\mathbf{A}$, что условие $\inf\{p_\alpha(x, \Phi(f)(x)) \mid x \in X\} > 0$ будет выполнено. Обозначим число $\inf\{p_\alpha(x, \Phi(f)(x)) \mid x \in X\}$ через 2ε. Пусть $U_x = O_{p_\alpha}(x, \varepsilon)$ для каждого x из X. Тогда верно

(2) $$\Phi(f)(y) \cap U_x = \varnothing \text{ для каждого } y \text{ из } U_x.$$

В самом деле, если существует точка z_1 из $\Phi(f)(y) \cap U_x$, то $z_1 \in \varphi(y)$ для некоторого $\varphi \in \Phi(f)$. Пусть z_2 элемент из $\varphi(x)$. Тогда $p_\alpha(z_1, z_2) \leqq \tilde{p}_\alpha(\varphi(y), \varphi(x)) \leqq p_\alpha(x, y) < \varepsilon$.

Следовательно, $z_1 \in \{u \mid p_\alpha(u, \Phi(f)(x)) < \varepsilon\}$, что противоречит определению числа ε.

Выберем из открытого покрытия $\{U_x \mid x \in X\}$ пространства X конечное подпокрытие $\{U_{x_1}, \ldots, u_{x_p}\}$. Рассмотрим теперь такие точки пространства X — $y_1, \ldots, y_p$, что для них выполнены включения $y_1 \in U_{x_1}$; $y_i \in f(y_{i-1})$ для $i = 2, 3, \ldots, p$. Из (2) следует, что если $y_j \in U_{x_i}$, то $y_k \overline{\in} U_{x_i}$ для $k > j$. Следовательно, можно подобрать индексы множеств $U_{x_2}, \ldots, U_{x_p}$ так, что будет выполнено $y_i \in U_{x_i}$ для $i = 1, 2, \ldots, p$. Опять же из (2) следует, что $f(y_i) \cap U_{x_k} = \varnothing$ для $i \geqq k$. Другими словами, для y_p выполняется $f(y_p) \cap X = f(y_p) \cap \bigcup_{k=1}^{p} U_{x_k} = \bigcup_{k=1}^{p} (f(y_p) \cap U_{x_k}) = \varnothing$, что является невозможным.

Лемма 3. Пусть K замкнутое множество X и $f: X \to \mathrm{F}(X)$ нерастягивающее отображение пространства X на себя и такое, что $f(K) \supset K$. Существуют отображение φ из $\Phi(f)$ и точка x_0 из K, для которых $x_0 \in \varphi(x_0)$.

Доказательство. Если $f(K) = K$, утверждение следует тривиальным образом из леммы 2. Допустим, что существует точка y из $f(K) \setminus K$. Тогда можно подобрать такой элемент α из $\mathbf{A}$, что $p_\alpha(y, K) > 0$. Обозначим через 2ε число $p_\alpha(y, K)$. Выберем такие точки $x_1, x_2, \ldots$ из K, что $y \in f(x_1)$ и $x_i \in f(x_{i+1})$ для $i = 1, 2, \ldots$ Тогда $O_{p_\alpha}(x_i, \varepsilon) \cap O_{p_\alpha}(x_j, \varepsilon) = \varnothing$, если $i \neq j$. Действительно, заметим, что отображение f^n нерастягивающее для каждого

$n=1, 2, \ldots$ Предположим теперь, что существует точка z_1 из $O_{p_\alpha}(x_i, \varepsilon) \bigcap O_{p_\alpha}(x_j, \varepsilon)$. Пусть, например, $i>j$. Выберем точку z_2 из $f^j(z_1)$. Тогда

$$p_\alpha(z_2, x_{i-j}) \leqq \tilde{p}_\alpha(f^j(z_1), f^j(x_i)) \leqq p_\alpha(z_1, x_i) < \varepsilon,$$

$$p_\alpha(z_2, y) \leqq \tilde{p}_\alpha(f^j(z_1), f^j(x_j)) \leqq p_\alpha(z_1, x_j) < \varepsilon,$$

откуда вытекает неравенство $p_\alpha(y, x_{i-j}) < 2\varepsilon$, которое противоречит равенству $p_\alpha(y, K) = 2\varepsilon$.

Так как $O_{p_\alpha}(x_i, \varepsilon) \bigcap O_{p_\alpha}(x_j, \varepsilon) = \emptyset$ для $i \neq j$, то $\{x_1, x_2, \ldots\}$ дискретное подмножество бикомпакта X. Следовательно, $\{x_1, x_2, \ldots\}$ конечное множество. Тем более существуют такие целые числа n и m, что $n>m$ и $x_n = x_m$. Положим $\varphi = f^{n-m}$. Очевидно, $x_n \in f^{n-m}(x_n)$.

Теорема 1. Пусть $f: X \to \mathbf{F}(X)$ нерастягивающее отображение бикомпакта X на себя. Существует отображение φ_0 из $\Phi(f)$, такое, что $x \in \varphi_0(x)$ для каждого x из X.

Доказательство. Для каждого элемента φ из $\Phi(f)$ определим множество $H_\varphi = \{x \mid x \in \varphi(x)\}$. Заметим, что если $\varphi \in \Phi(\psi)$, то $H_\varphi \supset H_\psi$. Очевидно H_φ замкнутое подмножество пространства X. Упорядочим элементы из $\Phi(f)$: скажем, что $\varphi_1 < \varphi_2$ тогда и только тогда, когда $H_{\varphi_2} \supset H_{\varphi_1}$. Покажем, что любое линейно упорядоченное подмножество $\Phi(f)$ имеет верхнюю грань в $\Phi(f)$. В самом деле, пусть $\{\varphi_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ линейно упорядоченное подмножество $\Phi(f)$. Так как $\Phi(f)$ бикомпактное пространство, то существует сходящаяся подпоследовательность $\{\varphi^\beta \mid \beta \in B\}$ последовательности $\{\varphi_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$. Пусть $\varphi = \lim \varphi_\beta$ Тогда, очевидно, $H_\varphi \supset H_{\varphi_\gamma}$ для каждого элемента γ из Γ. Из леммы Цорна следует, что в $\Phi(f)$ существует максимальный элемент φ_0. Покажем, что $H_{\varphi_0} = X$, чем теорема 1 будет доказана.

Предположим, что существует точка y из X/H_{φ_0}. Возьмем такую псевдометрику p_α из $\mathbf{P}$, что $p_\alpha(y, H_{\varphi_0}) > 0$. Рассмотрим непрерывное отображение $g: X \to \mathbf{R}^1$, определенное равенством $g(x) = p_\alpha(x, H_{\varphi_0})$. Пусть $a = \max\{g(x) \mid x \in X\}$. Множество $K = g^{-1}(a)$ не пустое, замкнутое и $K \bigcap H_{\varphi_0} = \Phi$, так как $g(y) > 0$ и X бикомпакт. Легко показать, что $\varphi_0(K) \supset K$. Из леммы 3 следует, что существуют отображение φ' из $\Phi(\varphi_0)$ и точка x_0 из K, такие, что $x_0 \in \varphi'(x_0)$. Тогда $H_{\varphi'} \underset{\neq}{\supset} H_{\varphi_0}$, что противоречит максимальности φ_0. Этим теорема 1 доказана.

Определение 3. Пусть $\mathbf{H}$ семейство многозначных отображений пространства X на себя. Будем говорить, что $\mathbf{H}$ равностепенно непрерывное семейство, если для каждого элемента α из $\mathbf{A}$ и число $\varepsilon > 0$ существуют элемент α' из $\mathbf{A}$ и число $\delta > 0$ такие, что из $p_{\alpha'}(x, y) < \delta$ следует $\tilde{p}_\alpha(h(x), h(y)) < \varepsilon$ для любого отображения h из $\mathbf{H}$.

Заметим, что определение 3 не отличается от общепринятого определения равностепенной непрерывности, когда $\mathbf{H}$ состоит из однозначных отображений, определенных на бикомпактном пространстве.

Следствие 1. Если $f: X \to \mathbf{F}(X)$ отображение пространства на себя и семейство $\{f^n \mid n = 1, 2, \ldots\}$ равностепенно непрерывное, то существует такой элемент φ_0 из $\Phi(f)$, что выполнено $x \in \varphi_0(x)$ для каждого x из X.

Доказательство. Для псевдометрики p_α из P определим псевдометрику q_α следующим образом:

$$q_\alpha(x, y)=\max\{p_\alpha(x, y), \sup\{\tilde{p}_\alpha(f^n(x), f^n(y)) \mid n=1, 2, \ldots\}\}.$$

Семейство псевдометрик $Q=q_\alpha \mid \alpha \in A\}$ направленное и определяет в X ту же самую топологию, что и P. Относительно Q отображение f нерастягивающее и, следовательно, можно применить теорему 1.

Определение 4. Пусть $f: X \to X$ многозначное отображение. Будем называть f изометрией, если f и f^{-1} нерастягивающие отображения.

Очевидно, вышеопределенное понятие совпадает с общепринятым, когда X — метрическое пространство и f — однозначное отображение.

Следствие 2. Пусть f многозначное нерастягивающее отображение пространства X на себя. Тогда f изометрия.

Доказательство. Определим отображение $\tilde{f}: X \to F(X)$ формулой $\tilde{f}(x)=[f(x)]$. Очевидно, для каждого α из A выполнено $\tilde{p}_\alpha(\tilde{f}(x), \tilde{f}(y)) =\tilde{p}_\alpha(f(x), f(y))$. Следовательно, $\tilde{f}$ нерастягивающее отображение. Из теоремы 1 следует, что существует отображение φ_0 из $\Phi(\tilde{f})$ такое, что $x \in \varphi_0(x)$ для каждого x из X. Так как φ_0 более нерастягивающее, чем $\tilde{f}$, то для каждых x и y из X и α из A выполнено

$$p_\alpha(x, y) \leqq \tilde{p}_\alpha(\varphi_0(x), \varphi_0(y)) \leqq \tilde{p}_\alpha(\tilde{f}(x), \tilde{f}(y))=\tilde{p}_\alpha(f(x), f(y)) \leqq p_\alpha(x, y).$$

Следовательно, $\tilde{p}_\alpha(f(x), f(y))=p_\alpha(x, y)$ для каждых x и y из X. Из этого вытекает, что выполнено и $\tilde{p}_\alpha(f^{-1}(x), f^{-1}(y)) \leqq p_\alpha(x, y)$.

Следствие 3. Если f растягивающее ($\inf\{p_\alpha(u, v) \mid u \in f(x), v \in f(y)\} \geqq p_\alpha(x, y)$ для каждого α из A) отображение пространства X на себя, то f изометрия.

Доказательство. Отображение $F: X \to X$, определенное равенством $F(x)=f^{-1}(x)$, нерастягивающее.

В случае, когда $f: X \to X$ однозначное отображение из условий теоремы 1 или из следствий 1, 3, очевидным образом получается, что $\Phi(f)$ состоит из геоморфизмов и что постоянное отображение пространства X на себя является элементом $\Phi(f)$. В работе [4] показано, что в этом случае $\Phi(f)$ является абелевой группой относительно суперпозиции. Если X метрическое пространство, то $\Phi(f)$ состоит из изометрий.

В заключение хочу поблагодарить своего научного руководителя Н. Хаджииванова за постановку задач и оказанную помощь.

ЛИТЕРАТУРА

1. Freudental, H., Hurewicz, W.: Dehnungen, Verkürzungen, Isometrien. Fund. Math., 26 (1936), 120 — 122.
2. Бродский, М. С.: О специальных ε-сетях. Усп. мат. наук, 1950, вып. 3, 191—196.

3. Marjanović, M.: On topological isometries. Rep. from Poc., Series A, 72 № 2 and Indag. Math., 31 (1969), No 2.
4. Borges, C.: How to recognize homeomorphisms and isometries. P. J. of Math., 37, No 3, 1971.

Постъпила на 14. XII. 1974 г.

ON NONEXPANDING MAPPINGS

V. Todorov

(SUMMARY)

Let X be a set and $\mathbf{P}$ a family of pseudometrics, which generates a compact and Hausdorff topology in X.

In this paper we consider set-valued mappings f (onto X) nonexpansive with respect to the family $\mathbf{P}$, where $f(x)$ is a closed subset of X for every $x \in X$.

It is proved that the sequence $\{f^n \mid n=1, 2, \ldots\}$, where $f^1=f$; $f^n=f \circ f^{n-1}$ approximates a mapping $\varphi: X \to X$ such that $x \in \varphi(x)$ whenever $x \in X$.

As a corollary we get that such a mapping has to be an isometry (i. e. for every $p \in \mathbf{P}$, f is an isometry).

As an application the results from [1], [2] and [4] are obtained.