СУЩЕСТВОВАНИЕ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ ИЗОТОННОГО ОТОБРАЖЕНИЯ ПОЛНОЙ ПСЕВДОСТРУКТУРЫ В СЕБЯ

Атанас А. Раденски

ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОЗНАЧЕНИЯ

Рефлексивное антисимметричное бинарное отношение $\leftarrows$ на произвольном множестве P называется **псевдопорядком**, а множество P — псевдоупорядоченным. Псевдоупорядоченное множество P называется **полной псевдоструктурой**, если всякое его непустое подмножество имеет точную верхнюю и точную нижнюю грань. Если P — псевдоупорядоченное множество и $\inf\{x \mid x \in P\}$ существует, то будем обозначать $0 = \inf\{x \mid x \in P\}$. Мощность произвольного множества P будем обозначать как $\overline{\overline{P}}$, а мощность произвольного порядкого числа α — как $\overline{\alpha}$. Если α — порядковое число, то $W(\alpha) = \{\beta \mid \beta < \alpha\}$. Определения остальных использованных понятий и обозначений можно найти в [1] и [2].

Пусть у множества P не менее пяти различных элементов x_i, $1 \leqq i \leqq 5$. Если псевдопорядок $\leftarrows$ определить следующим способом: для каждого x, $x \in P: x \leftarrows x$, $x \leftarrows x_5$, $x_1 \leftarrows x$, $x_2 \leftarrows x_3$, $x_3 \leftarrows x_4$, $x_4 \leftarrows x_2$, то нетрудно показать, что P является полной псевдоструктурой, но не является полной структурой. Другой пример полной псевдоструктуры — это интервал $[0, 1]$, у которого псевдопорядок задается следующим способом:

1) для всех x, $x \in [0, 1]: 0 \leftarrows x$, $x \leftarrows 1$;

2) если $x, y \in (0, 1)$, то $y \leftarrows x$ тогда и только тогда, когда $0 \leqq x - y < 1/2$ или $0 < 1 + x - y < 1/2$ (здесь $<$ — обычный порядок реальных чисел).

Отношение $\leftarrows$ не является порядком, так как $1/8 \leftarrows 3/8$, $3/8 \leftarrows 3/4$ и $3/4 \leftarrows 1/8$.

СУЩЕСТВОВАНИЕ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ

Теорема 1. Пусть φ — изотонное отображение псевдоупорядоченного множества P в себя и пусть P удовлетворяет следующими условиями:

1) существует 0, $0 \in P$.

2) для каждого Q, $Q \subseteq P$, такого, что для всех $x, y, z \in Q: x, y, z$ — сравнимы и из $x \leftarrows y$, $y \leftarrows z$ следует $x \leftarrows z$, существует $\sup\{u \mid u \in Q\}$.

Тогда можно утверждать, что $\varphi(a) = a$ для некоторого a, $a \in P$.

Доказательство. Допустим, что $\varphi(x) \neq x$ для каждого x, $x \in P$. Пусть θ — такое порядковое число, что $\overline{\theta} \geqq \overline{\overline{P}}$ (существование θ показано в [1]).

Лемма 1. Для всех порядковых чисел α, $\alpha \leqq \theta$, существуют элементы x_α, $x_\alpha \in P$, для которых:

(i) если $\beta \leqq \alpha$, $\gamma \leqq \alpha$, то $\beta < \gamma$ тогда и только тогда, когда $x_\beta \preceq x_\gamma$, $x_\beta \neq x_\gamma$;

(ii) если порядковое число β, $\beta \leqq \alpha$ не является предельным, то $\varphi(x_{\beta-1}) = x_\beta$;

(iii) если β, $\beta \leqq \alpha$ — предельное порядковое число, то либо $x_\beta = 0$, либо $x_\beta = 0$, либо $x_\beta = \sup\{x_\delta \mid \delta < \beta\}$.

(iv) если $S_\alpha = \{x_\beta \mid \beta < \alpha\}$, то $x_\alpha = \sup S_\alpha$.

Доказательство. Пусть $x_0 = 0$. Допустим, что для всех β, $\beta < \alpha \leqq \theta$ существуют x_β, $x_\beta \in P$, для которых выполнены условия (i), (ii), (iii), (iv). Покажем существование элемента x_α, $x_\alpha \in P$, для которого четыре условия тоже выполнены.

Лемма 1. 1. Если α не является предельным порядковым числом, то для всех β, $\beta \preceq \alpha - 1$ выполняется $x_\beta \preceq \varphi(x_{\alpha-1})$.

Доказательство. Так как $\varphi(x_{\alpha-1}) \in P$, то $x_0 = 0 \preceq \varphi(x_{\alpha-1})$. Пусть для всех δ, $\delta < \beta \leqq \alpha - 1$ выполняется $x_\delta \preceq \varphi(x_{\alpha-1})$. Если β не является предельным порядковым числом, так как $\beta - 1 < \alpha - 1$, то $x_{\beta-1} \in S_{\alpha-1}$ и из условия (iv) следует $x_{\beta-1} \preceq x_{\alpha-1}$, $\varphi(x_{\beta-1}) \preceq \varphi(x_{\alpha-1})$. Из последнего неравенства применением условия (ii) получается $x_\beta \preceq \varphi(x_{\alpha-1})$. Если β — предельное порядковое число и $\beta = 0$, то $x_\beta = 0 \preceq \varphi(x_{\alpha-1})$. Если $\beta \neq 0$, то из (iii): $x_\beta = \sup\{x_\delta \mid \delta < \beta\}$. Но $x_\delta \preceq \varphi(x_{\alpha-1})$ для всех $\delta < \beta$ и, следовательно, $x_\beta \preceq \varphi(x_{\alpha-1})$. Из принципа математической индукции следует, что утверждение леммы 1.1 выполняется.

Лемма 1. 2. Если α не является предельным порядковым числом, то элемент $x_\alpha = \varphi(x_{\alpha-1})$ удовлетворяет условиям (i), (ii), (iii), (iv).

Доказательство. В силу предположения, сделанного в начале доказательства лемы 1, условия (i), (ii), (iii), (iv) выполняются для всех β, $\beta \leqq \alpha - 1$. Допустим, что для некоторого γ, $\gamma \leqq \alpha - 1 : \varphi(x_{\alpha-1}) = x_\gamma$. Но $x_{\alpha-1} = \sup S_{\alpha-1} \preceq x_\gamma = \varphi(x_{\alpha-1})$, а из леммы 1. 1 следует, что $x_{\alpha-1} \preceq \varphi(x_{\alpha-1})$. Из двух неравенств следует $\varphi(x_{\alpha-1}) = x_{\alpha-1}$, что противоречит сделанному в начале доказательства теоремы 1 допущению. Следовательно, $x_\gamma \preceq \varphi(x_{\alpha-1})$, $x_\gamma \neq \varphi(x_{\alpha-1})$ для всех γ, $\gamma \leqq \alpha - 1$, и выполнение условия (i) следует из равенства $S_\alpha = S_{\alpha-1} \cup \{\varphi(x_{\alpha-1})\}$. Выполнение условий (ii), (iii), (iv) очевидно.

Лемма 1. 3. Если α — предельное порядковое число, то $x_\alpha = \sup\{x_\beta \mid \beta < \alpha\}$ существует и удовлетворяет условиям (i), (ii), (iii) (iv).

Доказательство. В силу предположения, сделанного в начале доказательства леммы 1, условия (i), (ii), (iii), (iv) выполняются для всех β, $\beta < \alpha$. Отображением $g(x_\beta) = \beta$ каждому x_β ставится в соответствии порядковое число β, $\beta < \alpha$. Из выполнения (i) следует, что псевдоупорядоченное множество $Q = \{x_\beta \mid \beta < \alpha\}$ изоморфно вполне упорядоченному множеству $W(\alpha)$ и, следовательно, удовлетворяет условию 2) теоремы 1. Из этого следует, что существует $\sup\{x_\beta \mid \beta < \alpha\} = x_\alpha \in P$. Допустим, что для некоторого γ, $\gamma < \alpha$ выполняется $x_\alpha = x_\gamma$. Так как α — предельное порядковое число, то $\gamma + 1 < \alpha$, следовательно, $x_\alpha = x_\gamma \preceq x_{\gamma+1}$, $x_\alpha \neq x_{\gamma+1}$. Но $x_{\gamma+1} \preceq x_\alpha$ — противоречие, которое показывает, что $x_\gamma \preceq x_\alpha$, $x_\gamma \neq x_\alpha$ для всех $\gamma < \alpha$ — выполняется

условие (i). Выполнение условий (ii), (iii), (iv) очевидно, так как они выполнены для всех γ, $\gamma<\alpha$ и $x_\alpha=\sup\{x_\beta \mid \beta<\alpha\}$.

Вернемся к доказательству леммы 1. Так как леммами 1.2 и 1.3 показано, что если существуют x_β, удовлетворяющие условиям (i), (ii), (iii), (iv) для всех β, $\beta<\alpha\leqq\theta$, то существует и x_α, удовлетворяющее этим условиям, из принципа математической индукции следует утверждение леммы 1.

Лемма 2. Существует Q, $Q\subset P$, для которого $\overline{\overline{Q}}=\overline{\theta}+1$.

Доказательство. Из леммы 1 следует, что для каждого α, $\alpha\leqq\theta$, существует x_α, $x_\alpha\in P$. Для этих элементов выполняется условие (i). Отображением $g(x_\alpha)=\alpha$ каждому x_α ставим в соответствии $\alpha\in w(\theta)\bigcup\{\theta\}$. Из выполнения условия (i) леммы 1 для произвольных α, $\beta\in w(\theta)\bigcup\{\theta\}$ следует, что множество S_θ изоморфно множеству $w(\theta)\bigcup\{\theta\}$. Пусть $Q=S_\theta\subseteqq P$, тогда

$$\overline{\overline{Q}}=\overline{\overline{S_\theta}}=\overline{\overline{W(\theta)\bigcup\{\theta\}}}=\overline{\overline{W\{\theta\}}}+1=\overline{\theta}+1\,.$$

После доказательства леммы 2 немедленно следует доказательство теоремы 1. Порядковое число θ выбрано так, что $\overline{P}\leqq\overline{\theta}$. Но из $Q\subseteqq P$ и $\overline{\theta}+1=\overline{\overline{Q}}$ следует $\overline{\theta}+1\leqq\overline{\theta}$ — противоречие.

Теорема 2. Если φ — изотонное отображение полной псевдоструктурой в себя, то $\varphi(a)=a$ для некоторого a, $a\in P$.

Доказательство. Так как каждая полная псевдоструктура удовлетворяет условиям теоремы 1, то теорема 2 следует из теоремы 1.

Примером бесконечного псевдоупорядоченного множества, удовлетворяющего условиям теоремы 1, но не являющегося полной псевдоструктурой, служит множество $P=\{x_i, y, z \mid i=1, 2,\ldots\}$, для которого псевдопорядок задан следующим образом: $x_1\preceq y$, $x_i\preceq z$, $i=1, 2, 3,\ldots$, $x_i\preceq x_j$ тогда и только тогда, когда $i<j$; $x\preceq x$ для всех x, $x\in P$. Псевдоупорядоченное множество P удовлетворяет условиям теоремы 1, но не является полной псевдоструктурой, так как у множества $\{y, z\}$ нет точной верхней границы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Куратовский, К., Мостовский, А.: Теория множеств. Мир, М., 1970.
2. Скорняков, Л.: Элементы теории структур. Наука, М., 1970.
3. Skala, H.: Treillis Theory. Memoires of the AMS, No 121, 1972.

Постъпила на 14. XII. 1974 г.

EXISTENCE OF A FIXED POINT FOR EVERY ISOTONE MAPPING OF A COMPLETE PSEUDOTREILLIS INTO ITSELF

A. A. Radenski

(SUMMARY)

The following theorem (H. Skala, 1972) is known: any isotone mapping of a complete treillis into itself has a fixed point. In the present paper such a theorem is proved for one class of pseudo-ordered sets, which is containing all complete treillis. It is demonstrated, that this class contains sets which are not complete treillis.