ОБ УНИВЕРСАЛЬНОСТИ ОТОБРАЖЕНИЯ КАНОНИЧЕСКИХ ГОМОЛОГИЙ В ГОМОЛОГИИ АЛЕКСАНДРОВА-ЧЕХА

Станислава В. Петкова

Пусть B_0 — категория компактных метризуемых пространств и их непрерывных отображений, H_* — теория канонических гомологий, $\check{H}_*$ — гомологии Александрова-Чеха, а H'_* — произвольная аксиоматическая теория гомологий в B_0 (см. [1]). Известно, что всякая аксиоматическая теория гомологий имеет естественное преобразование $\gamma': H'_* \to \check{H}_*$ в теорию гомологий Александрова-Чеха. Преобразование H_* в $\check{H}_*$ обозначим через γ (оно изучается в [2]).

В работе [3] Е. Г. Скляренко поставлен вопрос об универсальности отображения γ в категории B_0, т. е. о существовании для каждой теории H'_* естественного преобразования $\nu': H'_* \to H_*$, для которого $\gamma' = \gamma\nu'$.

В настоящей работе доказаны две теоремы в связи с этим вопросом. Обозначим через $\bar{A}$ подкатегорию в B_0, объектами которой являются компакты, в которых дополнения к некоторой точке — локально конечные счетные полиэдры, а отображения сохраняют эти точки и переводят дополнения в дополнения. В доказанной ниже теореме 1 показывается что из существования $\nu': H'_* \to H_*$ с требуемыми свойствами в подкатегории $\bar{A}$ следует существование естественного преобразования H'_* в H_*, согласующегося с γ и во всей категории B_0. В теореме 2 для каждой пары из $\bar{A}$ выделяется естественным образом подгруппа группы гомологий этой пары (для каждого натурального числа n), которая отображается, в группу канонических гомологий пары. Отображение согласуется с γ. С использованием этих двух теорем дан утвердительный ответ на поставленый в [3] вопрос для некоторых теорий гомологий.

Из определения подкатегории $\bar{A}$ видно, что она изоморфна категории A локально конечных счетных полиэдров и их собственных отображений и получается из нее следующим образом: каждому полиэдру $P \in A$ сопоставляем его одноточечную компактификацию $\bar{P}$, а каждому собственному отображению $f: P \to Q$ — отображение $\bar{f}: \bar{P} \to \bar{Q}$, где $\bar{f}$ продолжение f, сопоставляющее точке компактификации $\bar{P}$ точку компактификации $\bar{Q}$. Компакту P сопоставляем дискретное объединение P и $*$ (см. [3]).

Теорема 1. Существование в категории A естественного преобразования $\nu': H'_* \to H_*$ некоторой теории гомологий в канонические гомологии, для которого $\gamma' = \gamma_{\nu'}$, есть необходимое и достаточное условие для существования такого преобразования во всей категории B_0.

Доказательство. Необходимость очевидна. Остановимся на достаточность. Итак, пусть $(X, A) \in B_0$. По теореме Фрейденталя пару (X, A) можно представить как обратный предел счетного обратного спектра компактных полиэдров, первый из которых — одноточечное пространство. Для каждого такого спектра поступаем следующим образом. Берем фундаментальные комплексы Стинрода пары (X, A), определенные при помощи данного спектра, и приклеиваем к ним известным образом пространства X и A (см. напр. [2]). Получаем пару $(K, L) \supset (X, A)$, которая стягивается в точку и для которой $K \setminus X$ и $L \setminus A$ — локально конечные полиэдры. Обозначим через M_τ и M_i цилиндры тождественных отображений $\tau: X \to X$ и $i: A \to A$. Пусть $K \cup M_\tau = K \cup_\tau M_\tau$, $L \cup M_i = L \cup_i M_i$. Рассмотрим триаду $(K \cup M_\tau, X \times 1, L \cup M_i)$, где $X \times 1$ — верхнее основание цилиндра M_τ (X — его нижнее основание). Эта триада собственна. Действительно, вложение $i_1: (X \times 1, A \times 1) \to (X \times 1 \cup L \cup M_i, L \cup M_i)$ индуцирует (по обычной аксиоме вырезания) изоморфизм групп гомологий. Для доказательства изоморфности $i_{2*}: H'_*(L \cup M_i, A \times 1) \to H'_*(X \times 1 \cup L \cup M_i, X \times 1)$, где $i_2: (L \cup M_i, A \times 1) \to (X \times 1 \cup L \cup M_i, X \times 1)$ — вложение, сначала заменяем пару $(X \times 1 \cup L \cup M_i, X \times 1)$ на гомотопически эквивалентную ей пару $(X \times 1 \cup L \cup M_i, X \times 1 \cup M_i')$, где M_i' замкнутый подцилиндр с основанием $A \times 1$, а высота его меньше высоты цилиндра M_i. Потом вырезаем из этой пары пространство $X \times 1 \cup M_i''$, где M_i'' — открытый подцилиндр цилиндра M_i', тоже с основанием $A \times 1$. Получаем пару, гомотопически эквивалентную паре $(L \cup M_i, A \times 1)$.

Из точной последовательности собственной триады $(K \cup M_\tau, X \times 1, L \cup M_i)$

$$\cdots \to H'_{n+1}(K \cup M_\tau, X \times 1 \cup L \cup M_i) \xrightarrow{\Delta} H_n'(X \times 1, A \times 1)$$
$$\to H_n'(K \cup M_\tau, L \cup M_i) \to \cdots$$

видно, что $\Delta: (H'_{n+1}(K \cup M_\tau, X \times 1 \cup L \cup M_i) \to H_n'(X \times 1, A \times 1)$ изоморфизм, так как $(K \cup M_\tau, L \cup M_i)$ стягивается в точку и, следовательно, $H_n'(K \cup M_\tau, L \cup M_i) = 0$ (при $n = 0$ — приведенные гомологии).

Обозначим через $\varkappa: (K \cup M_\tau, X \times 1 \cup L \cup M_i) \to (K \cup M_\tau, L \cup M_\tau$ вложение, а через $\eta: (K \cup M_\tau, L \cup M_\tau) \to (K \cup M_\tau / M_\tau, L \cup M_\tau / M_\tau) = (K/X, L/A)$ — проекция. Заметим, что пара $(K/X, L/A) \in A$ (K/X является одноточечной компактификацией локально конечного счетного полиэдра $K \setminus X$, L/A — полиэдра $L \setminus A$).

Положим $\sigma'_{(K, L)}: H_n'(X, A) \to H'_{n+1}(K/X, L/A)$, где $\sigma'_{(K, L)} = \eta_* \varkappa_* \Delta^{-1}$. (Точнее $\sigma'_{(K, L)} = r_*^{-1} \eta_* \varkappa_* \Delta^{-1}$, где $r: (X \times 1, A \times 1) \to (X, A)$ — гомеоморфизм, определенный очевидным образом.) Так для каждой пары (K, L), соответствующей паре (X, A), построен гомоморфизм $\sigma'_{(K, L)}: H_n'(X, A) \to H_{n+1}'(K/X, L/A)$.

Докажем естественность этого гомоморфизма.

Пусть $f: (X, A) \to (Y, B)$, а (K, L) и (K', L') — пары рассматриваемого типа соответственного для (X, A) и (Y, B). Известно, что отображение f можно продолжить до отображения $f: (K, L) \to (K', L')$, так что $f: (K \setminus X, L \setminus A) \to (K' \setminus Y, L' \setminus B)$, а, следовательно, и до отображения тех пар,

которые участвуют в определении $\sigma'_{(K,L)}$. Из согласованости f_* с Δ, $\varkappa_*$ и η_* получаем, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H_n'(X, A) & \xrightarrow{\sigma'(K,L)} & H'_{n+1}(K/X, L/A) \\ \downarrow f_* & & \downarrow f_* \\ H_n'(Y, B) & \xrightarrow{\sigma'(K',L')} & H'_{n+1}(K'/Y, L'/B) \end{array}$$

коммутативна. В частности, если (K, L) и (K', L') — две пары съответствующие паре (X, A), а $s:(K, L)\to(K', L')$ — продолжение тождественного отображения (X, A) в (X, A), то $\sigma'_{(K',L')}=s_*\sigma'_{(K,L)}$.

Рассмотрим теперь связь σ' с дифференциалом. Пусть (K, L) соответствует паре (X, A). В диаграмме

$$(1)\qquad \begin{array}{ccc} H'_{n+1}(K\cup M_\tau, X\times 1\cup L\cup M_i) & \xrightarrow{\Delta_1} & H_n'(X, A) \\ \downarrow \partial_1 & & \downarrow \partial_2 \\ H_n'(L\cup M_i, A\times 1) & \xrightarrow{\Delta_2} & H'_{n-1}(A) \end{array}$$

$\partial_2\Delta_1=-\Delta_2\partial_1$. Здесь Δ_1 — дифференциал точной последовательности собственной триады $(K\cup M_\tau, X\times 1, L\cup M_i)$, ∂_1 — собственной триады $(K\cup M_\tau, L\cup M_i, X\times 1)$, а Δ_2 и ∂_2 — дифференциалы из точных последовательностей пар $(L\cup M_i, A\times 1)$ и (X, A) (см. [1]). Кроме этого, $\varkappa$ отображает $(L\cup M_\tau, L\cup M_i, X\times 1)$ в $(K\cup M_\tau, L\cup M_\tau, M_\tau)$, а $\eta:(K\cup M_\tau, L\cup M_\tau, M_\tau)\to(K/X, L/A, *)$. Следовательно, $\varkappa$ и η индуцируют гомоморфизмы точных последовательностей соответственных триад. В частности, коммутативны диаграммы

$$(2)\qquad \begin{array}{ccc} H'_{n+1}(K\cup M_\tau, X\times 1\cup L\cup M_i) & \xrightarrow{\varkappa_*} & H'_{n+1}(K\cup M_\tau, L\cup M_\tau) \\ \downarrow \partial_1 & & \downarrow \partial_1 \\ H_n'(L\cup M_i, A\times 1) & \xrightarrow{\varkappa_*} & H_n'(L\cup M_\tau, M_\tau) \end{array}$$

и

$$(3)\qquad \begin{array}{ccc} H'_{n+1}(K\cup M_\tau, L\cup M_\tau) & \xrightarrow{\eta_*} & H'_{n+1}(K/X, L/A) \\ \downarrow D_1 & & \downarrow \delta_1 \\ H_n'(L\cup M_\tau, M_\tau) & \xrightarrow{\eta_*} & H_n'(L/A), \end{array}$$

где D_1 и δ_1 — дифференциалы этих триад. Коммутативна еще и диаграмма

$$(4)\qquad \begin{array}{ccccc} H'_{n+1}(L\cup M_i, A\times 1) & \xrightarrow{\varkappa_*} & H'_{n+1}(L\cup M_\tau, M_\tau) & \xrightarrow{\eta_*} & H'_{n+1}(L/A) \\ & p_*\searrow & H'_{n+1}(L\cup M_i, M_i) & \nearrow l_* & \end{array}$$

(p — вложение, l — проектирование). Из коммутативности (1), (2), (3) и (4) следует, что $\delta_1\sigma'_{(K,L)}=-\sigma'_L\partial_2$.

Для относительно инвариантных теорий гомологий все триады собственные, поэтому конструкцию σ' можно упростить. Именно, из точной последовательности триады (K, X, L) получаем, что $D: H_n'(X, A) \leftarrow H_{n+1}'(K, X \cup L)$ — изоморфизм. Определяем $\sigma_1': H_n'(X, A) \to H_{n+1}'(K/X, L/A)$, $\sigma_1' = \eta_* D^{-1}$, где $\eta: (K, X \cup L) \to (K/X, L/A)$ — проекция (см. [3]). Очевидно σ_1' — изоморфизм. Покажем что $\sigma' = \sigma_1'$. Для этой цели обозначим через $r: K \cup M_\tau \to K$ — ретракцию $K \cup M_\tau$ в K. Очевидно $r: (K \cup M_\tau, X \times 1, L \cup M_i) \to (K, X, L)$ и, следовательно, определяет гомоморфизм последовательностей этих триад. Отсюда диаграмма

$$
(5) \qquad \begin{array}{ccc}
H_n'(X \times 1, A \times 1) & \xleftarrow{\Delta} & H_{n+1}'(K \cup M_\tau, L \cup M_i \cup X \times 1) \\
\downarrow r_* & & \downarrow r_* \\
H_n'(X, A) & \xleftarrow{D} & H_{n+1}'(K, X \cup L)
\end{array}
$$

коммутативна (в нее все гомоморфизмы — изоморфизмы). Равенство $\sigma' = \sigma_1'$ следует из коммутативности диаграммы (5) и диаграммы

$$
\begin{array}{ccc}
H_{n+1}'(K \cup M_\tau, L \cup M_i \cup X \times 1) & \xrightarrow{\varkappa_*} & H_{n+1}'(K \cup M_\tau, L \cup M_\tau) \\
\downarrow r_* & & \downarrow \eta_* \\
H_{n+1}'(K, L \cup X) & \xrightarrow{\eta_*} & H_{n+1}'(K/X, L/A).
\end{array}
$$

Заметим, что из изоморфности σ' следует независимость σ' от выбора пары (K, L) для (X, A), если теория гомологий H_*' — относительно инвариантная теория гомологий.

Отметим еще, что гомоморфизм σ_1', можно построить и для гомологий Александрова-Чеха, хотя они и неточны. Для этих гомологий изоморфность $D: \check{H}_n(X, A) \leftarrow \check{H}_{n+1}(K, L \cup X)$ следует из их непрерывности (см. [2]). Опять полагаем $\sigma_1' = \eta_* D^{-1}$. Гомоморфизм σ_1' — изоморфизм ($\check{H}_*$ — относительно инвариантные).

Теперь, пользуясь отображением σ' покажем, что из универсальности γ в A следует универсальность γ в $\mathbf{B}_0$. Итак, предположим что существует естественное преобразование $\bar{\nu}: H_*' \to H_*$, определенное в $\bar{A}$ и согласующееся с γ. Пусть (K, L) — пара вышеуказанного типа для $(X, A) \in \mathbf{B}_0$. Гомоморфизм $\nu'_{(K, L)}$ определяем равенством $\nu'_{(K, L)} = \sigma^{-1}, \bar{\nu} \sigma'_{(K, L)}$, т. е. так, чтобы диаграмма

$$
\begin{array}{ccc}
H_n'(X, A) & \xrightarrow{\sigma'_{(K, L)}} & H_{n+1}'(K/X, L/A) \\
\downarrow \nu'_{(K, L)} & & \downarrow \bar{\nu} \\
H_n(X, A) & \xrightarrow{\sigma} & H_{n+1}(K/X, L/A)
\end{array}
$$

была коммутативна. Покажем, что $\nu'_{(K, L)}$ не зависит от выбора (K, L). Действительно, пусть (K', L') другая пара, соответствующая паре (X, A), $s: (K, L) \to (K', L')$ — продолжение тождественного отображения (X, A) в

(X, A) на (K, L), а $s_*': H_*'(K/X, L/A) \to H_*'(K'/X, L'/A)$ и $s_*: H_*(K/X, L/A \to H_*(K'/X, L'/A)$ — гомоморфизмы, индуцированные отображением s. Из естественности $\bar{\nu}$ следует, что $s_* \bar{\nu} = \bar{\nu} s_*'$. Кроме этого, $\sigma'_{(K', L')} = s_*' \sigma'_{(K, L)}$ и в равенстве $\sigma_{(K', L')} = s_* \sigma_{(K, L)}$ для канонических гомологий все гомоморфизмы — изоморфизмы. Получаем, что $\nu'_{(K', L')} = \nu'_{(K, L)}$.

Естественность ν' следует из естественности σ, $\bar{\nu}$ и $\sigma'_{(K, L)}$. Заметим, что из участия обоих гомоморфизмов $\sigma'_{(K, L)}$ и σ в определении ν', следует равенство $\nu' \partial' = \partial \nu'$, хотя и при фиксированной паре (K, L) $(\delta_1 \sigma'_{(K, L)} = -\sigma'_L \partial_2)$.

Остается показать, что ν' согласуется с γ. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
H_n'(X, A) \arrow[rr, dashed, "\sigma'"] \arrow[d, "\gamma'"'] \arrow[dr, "\nu'"] & & H'_{n+1}(K/X, L/A) \arrow[d, "\bar{\gamma}'"] \arrow[dl, "\bar{\nu}"'] \\
H_n(X, A) \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[dr, "\gamma"] & & H_{n+1}(K/X, L/A) \arrow[dl, "\bar{\gamma}"] \\
\check{H}_n(X, A) \arrow[rr, "\check{\sigma}"] & & \check{H}_{n+1}(K/X, L/A)
\end{tikzcd}$$

В ней верхняя клетка коммутативна по определению ν', нижняя — по естественности γ, а σ и $\check{\sigma}$ — изоморфизмы (H_* и $\check{H}_*$ — относительно инвариантные). Отсюда, если $\bar{\gamma}' = \bar{\gamma} \nu$, то и $\gamma' = \gamma \nu$. Теорема доказана.

Замечание 1. Мы показали, что для относительно инвариантных теорий гомологий гомоморфизм σ' можно определить двумя способами. Из второго определения было сразу видно, что σ'-изоморфизм. Нетрудно доказать изоморфность σ', исходя и из первого определения. Доказательством нуждается тот факт, что $\varkappa_*: H'_{n+1}(K \cup M_\tau, L \cup M_i \cup X \times 1) \to H'_{n+1}(K \cup M_\tau, L \cup M_\tau)$ — изоморфизм, или все равно, что $\varkappa_*: H'_{n+1}(L \cup M_i \cup X \times 1) \to H'_{n+1}(L \cup M_\tau)$ — изоморфизм. Разбиваем пространство $L \cup M_i \cup X \times 1$ на его замкнутые подпространства L и $M_i \cup X \times 1$, а $L \cup M_\tau$ — на L и M_τ. Очевидно $L \cap (M_i \cap X \times 1) = L \cap M_\tau$. Тогда из аддиционных последовательностей пространств для этих разбиений видно, что изоморфность $\varkappa_*: H'_{n+1}(L \cup M_i \cup X \times 1) \to H'_{n+1}(L \cup M_\tau)$ сводится к изоморфности $\varkappa_*: H'_{n+1}(M_i \cup X \times 1) \to H'_{n+1}(M_\tau)$. Но из стягивания этих пространств в пространство $X \times 1$ видно, что $\varkappa_*$ — изоморфизм.

Теорема 1 дает возможность при рассматривание вопроса об универсальности γ ограничиваться на подкатегорию $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}_0$.

В связи с доказательством теоремы 2 сделаем следующие замечания.

Замечание 2. Пусть $(X, A) \in \mathbf{B}_0$, x_0 — некоторая точка пространства $X \times 1 \subset X \times [0, 1]$, а $CA \subset X \times [0, 1]$ — конус над A с вершиной x_0. Тогда, по обычной аксиоме вырезания, вложение $p: (X, A) \to (X \cup CA, CA)$ индуцирует изоморфизм групп гомологий для произвольной теории гомологий H_*' (пара $(X \cup CA, CA) \in \mathbf{B}_0$). Обозначим через $s: X \cup CA \to (X \cup CA, CA)$ вложение, а через $t: H_*'(X \cup CA) \to H_*'(X, A)$ гомоморфизм $t = p_*^{-1} s_*$, определенный и для неточных теорий гомологий. С пространством $X \cup CA$ свяжем последовательность

$$\cdots \to H_n'(A) \xrightarrow{i_*'} H_n'(X) \xrightarrow{j_*'} H_n'(X \cup CA) \xrightarrow{\Delta'} H_{n-1}'(A) \to \cdots,$$

где $\Delta' = \partial' t$, а $\partial' : H_n'(X, A) \to H_{n-1}'(A)$. Очевидно t определяет гомоморфизм этой последовательности в последовательность пары (X, A). Гомоморфизм t, а вместе с ним и Δ', согласуются с гомоморфизмами f_*, где $f:(X, A) \to (Y, B)$ и с преобразованием $\gamma' : H_*' \to \check{H}_*$. Если H_*' — точная теория гомологий, то t — изоморфизм и последовательность пары (X, A) можно заменить на последовательность пространства $X \cup CA$. Если H_*' — полуточна, то и последовательность пространства $X \cup CA$ полуточна.

Замечание 3. Пусть $f:(\bar{P}, \bar{Q}) \to (\bar{P}_1, \bar{Q}_1)$. Напомним, что f является продолжением некоторого собственного отображения $f:(P, Q) \to (P_1, Q_1)$. Но каждое такое отображение гомотопно клеточному собственному отображению посредством гомотопии f_t, составленной из собственных отображений. Продолжая эту гомотопию до $\bar{f}_t, (\bar{P}, \bar{Q}) \to (\bar{P}_1, \bar{Q}_1)$, отображение $\bar{f}$ можем заменить на такое отображение $\bar{f}_1$, что $f_1(P^k) \subset P_1^k$, $k=0, 1, 2, \ldots$ Дальше мы будем рассматривать только такие отображения.

Определение. Пусть H_*' — произвольная теория гомологий (не обязательно точная), $(P, \bar{Q}) \in \bar{A}$, а $i:(\bar{P}^n, \bar{Q}^{n-1}) \to (\bar{P}, \bar{Q})$ — вложение. Обозначим через $\mathbf{H}_n'(P, \bar{Q})$ группу $H_n'(\bar{P}^n, \bar{Q}^{n-1})/_{\mathrm{Ker}\, i_*}$. Очевидно $\mathbf{H}_n'(\bar{P}, \bar{Q}) \subset H_n'(\bar{P}, \bar{Q})$. Кроме этого, группа $\mathbf{H}_n'(\bar{P}, \bar{Q})$ согласуется с дифференциалом $\partial' : H_n'(\bar{P}, Q) \to H_{n-1}'(\bar{Q})$, с гомоморфизмами $\bar{f}_*: H_n'(\bar{P}, \bar{Q}) \to H_n'(\bar{P}_1, \bar{Q}_1)$, где $\bar{f}:(P, \bar{Q}) \to (P_1, \bar{Q}_1)$ и с преобразованием $\gamma' : H_n'(P, \bar{Q}) \to \check{H}_n(\bar{P}, \bar{Q})$.

Предложение 1. Для канонических гомологий и гомологий Александрова-Чеха $\mathbf{H}_n(\bar{P}, \bar{Q}) = H_n(\bar{P}, \bar{Q})$, $\check{H}_n(\bar{P}, \bar{Q}) = \check{H}_n(\bar{P}, \bar{Q})$.

Доказательство. Рассмотрим сначала канонические гомологии. Вложение $i:(\bar{P}^n, \bar{Q}^{n-1}) \to (\bar{P}, \bar{Q})$ представим как суперпозицию двух вложений $i_1 : (\bar{P}^n, \bar{Q}^{n-1}) \to (\bar{P}^n, \bar{Q}^n)$ и $i_2:(P^n, \bar{Q}^n) \to (\bar{P}, \bar{Q})$. Но для каждой пары $(P, Q) \in \mathbf{A}$, $H_k(P, \bar{P}^n \cup \bar{Q}) = 0$ при $k \leqq n$. Поэтому i_1 и i_2 индуцируют эпиморфизм групп гомологий. Тогда и i_* — эпиморфизм. Равенство $\mathbf{H}_n(\bar{P}, \bar{Q}) = H_n(\bar{P}, \bar{Q})$ доказано. Для гомологий Александрова-Чеха аналогичное утверждение следует из коммутативности диаграммы

$$\begin{array}{ccc} H_n(\bar{P}^n, \bar{Q}^{n-1}) & \xrightarrow{\check{i}_*} & H_n(\bar{P}, \bar{Q}) \\ \downarrow \gamma & & \downarrow \gamma \\ \check{H}_n(\bar{P}^n, \bar{Q}^{n-1}) & \xrightarrow{\check{i}_*} & \check{H}_n(\bar{P}, \bar{Q}) \end{array}$$

и из эпиморфности γ и i_*.

Теорема 2. Существует естественное преобразование $\gamma' : \mathbf{H}_n'(\bar{P}, \bar{Q}) \supset H_n'(\bar{P}, \bar{Q}) \to H_n(\bar{P}, \bar{Q})$, для которого $\gamma' = \gamma\gamma'$.

Доказательство. Для точных теорий гомологий H_*' изоморфизм $t: H_n'(\bar{P}^n \cup C\bar{Q}^{n-1}) \to H_n'(\bar{P}^n, \bar{Q}^{n-1})$ (см. замечание 2) дает возможность заменить группу $H_n'(\bar{P}, \bar{Q})$ на группу $H_n'(\bar{P}^n \cup C\bar{Q}^{n-1})/\mathrm{Ker}\, j_*' \subset H_n'(\bar{P} \cup C\bar{Q})$, где $j': \bar{P}^n \cup C\bar{Q}^{n-1} \to \bar{P} \cup C\bar{Q}$ — вложение ($C\bar{Q}$ конус над $\bar{Q}$). Предположим, что построен гомоморфизм $\bar{\nu}': H_n'(\bar{P}^n \cup C\bar{Q}^{n-1})/\mathrm{Ker}\, j_*' \to H_n(\bar{P}^n \cup C\bar{Q}^{n-1})/\mathrm{Ker}\, j_*'$, согласующийся с дифференциалом $\Delta': H_n'(\bar{P} \cup C\bar{Q}) \to H_{n-1}'(\bar{Q})$, с гомоморфизмами f_*, индуцированными непрерывными отображениями $f: (\bar{P}, \bar{Q}) \to (\bar{P}_1, \bar{Q}_1)$ и с преобразованием $\gamma': H_n'(\bar{P} \cup C\bar{Q}) \to \check{H}_n(\bar{P} \cup C\bar{Q})$. Легко проверить, что тогда гомоморфизм $\nu' = t\bar{\nu}' t^{-1}$ будет иметь все требуемые в теореме 2 свойства. Итак, остановимся на вложении $j': \bar{P}^n \cup C\bar{Q}^{n-1} \to \bar{P} \cup C\bar{Q}$. Рассмотрим точную последовательность пространства $\bar{P} \cup C\bar{Q} \cup C_1(\bar{P}^n \cup C\bar{Q}^{n-1})$, где $C_1(\bar{P}^n \cup C\bar{Q}^{n-1})$ — конус над $\bar{P}^n \cup C\bar{Q}^{n-1}$,

$$\ldots \to H_{n+1}'(\bar{P} \cup C\bar{Q} \cup C_1(\bar{P}^n \cup C\bar{Q}^{n-1}) \xrightarrow{\partial'} H_n'(\bar{P}^n \cup C\bar{Q}^{n-1}) \to$$
$$\xrightarrow{j_*'} H_n'(\bar{P} \cup C\bar{Q}) \to \ldots$$

Из точности в члене $H_n'(\bar{P}^n \cup C\bar{Q}^{n-1})$ следует, что $H_n'(\bar{P}^n \cup C\bar{Q}^{n-1})/\mathrm{Ker}\, j_*' = H_n'(\bar{P}^n \cup C\bar{Q}^{n-1})/\mathrm{Im}\, \partial'$, а из естественности $\gamma': H_*' \to \check{H}_*$ и $\gamma: H_* \to \check{H}_*$, что $\gamma': H_n'(\bar{P}^n \cup C\bar{Q}^{n-1})/\mathrm{Im}\, \partial' \to \check{H}_n(\bar{P}^n \cup C\bar{Q}^{n-1})/\mathrm{Im}\, \check{\partial}$ и $\gamma: H_n(\bar{P}^n \cup C\bar{Q}^{n-1})/\mathrm{Im}\, \partial \to \check{H}_n(\bar{P}^n \cup C\bar{Q}^{n-1})/\mathrm{Im}\, \check{\partial}$. Покажем, что γ — изоморфизм. Это видно из диаграммы

$$\begin{array}{ccc} H_{n+1}(\bar{P} \cup C\bar{Q} \cup C_1(\bar{P}^n \cup C\bar{Q}^{n-1}) & \xrightarrow{\partial} & H_n(\bar{P}^n \cup C\bar{Q}^{n-1}) \\ \downarrow \gamma_{n+1} & & \downarrow \gamma_n \\ \check{H}_{n+1}(\bar{P} \cup C\bar{Q} \cup C_1(\bar{P}^n \cup C\bar{Q}^{n-1}) & \xrightarrow{\check{\partial}} & H_n(\bar{P}^n \cup C\bar{Q}^{n-1}), \end{array}$$

где γ_{n+1} — эпиморфизм, а γ_n — изоморфизм. (Напомним, что $\gamma: H_n(X, A) \to \check{H}_n(X, A)$ — изоморфизм, если $\dim X = n$, см. теорему 4 в работе [2].)

Определим $\bar{\nu}': H_n'(\bar{P}^n \cup C\bar{Q}^{n-1})/\mathrm{Ker}\, j_*' \to H_n(\bar{P}^n \cup C\bar{Q}^{n-1})/\mathrm{Ker}\, j_*$ равенством $\bar{\nu}' = \gamma^{-1}\gamma'$.

Согласованность $\bar{\nu}'$ с гомоморфизмами f_*, где $f: (P, Q) \to (P_1, Q_1)$, получается из естественности γ' и f_*.

Согласованность $\bar{\nu}'$ с $\Delta': H_n'(\bar{P}^n \cup C\bar{Q}^{n-1})/\mathrm{Ker}\, j_*' \to H_{n-1}'(\bar{Q}^{n-1})/\mathrm{Ker}\, j_*'$ доказывается следующим образом. Нужно доказать коммутативность диаграммы

$$(6) \qquad \begin{array}{ccc} H_n'(\bar{P}^n \cup C\bar{Q}^{n-1})/\mathrm{Ker}\, j_*' & \xrightarrow{\Delta'} & H_{n-1}'(\bar{Q}^{n-1})/\mathrm{Ker}\, j_*' \\ \downarrow \bar{\nu}' & & \downarrow \bar{\nu}' \\ H_n(\bar{P}^n \cup C\bar{Q}^{n-1})/\mathrm{Ker}\, j_* & \xrightarrow{\Delta} & H_{n-1}'(\bar{Q}^{n-1})/\mathrm{Ker}\, j_*. \end{array}$$

Сначала отметим следующее. Для точных теорий гомологий H_*' группа $H_n'(\bar{P}^n \cup C\bar{Q}^{n-1})/\operatorname{Im}\partial' = H_n'(\bar{P}^n \cup C\bar{Q}^{n-1})/\operatorname{Ker} j_*$ и, следовательно, Δ' отображает группу $H_n'(\bar{P}^n \cup C\bar{Q}^{n-1})/\operatorname{Im}\partial'$ в группу $H_{n-1}'(\bar{Q}^{n-1})/\operatorname{Im}\partial'$. Аналогичное утверждение для гомологий Александрова-Чеха, из-за их неточности, докажем другим путем. Воспользуемся эпиморфностями преобразования $\gamma: H_* \to \check{H}_*$. Рассмотрим схему

$$\begin{tikzcd}
\check{H}_{n+1}(\bar{P} \cup C\bar{Q} \cup C_1(\bar{P}^n \cup C\bar{Q}^{n-1}) \arrow[dr, "\check{\partial}_1"] & & \check{H}_n(\bar{Q} \cup C\bar{Q}^{n-1}) \arrow[dl, "\check{\partial}_2"'] \\
& \check{H}_n(\bar{P}^n \cup C\bar{Q}^{n-1}) \arrow[r, "\check{\Delta}"] & \check{H}_{n-1}(\bar{Q}^{n-1}) \\
& H_n(\bar{P}^n \cup C\bar{Q}^{n-1}) \arrow[r, "\Delta"] \arrow[u, "\gamma"] & H_{n-1}(\bar{Q}^{n-1}) \arrow[u, "\gamma"] \\
H_{n+1}(\bar{P} \cup C\bar{Q} \cup C_1(\bar{P}^n \cup C\bar{Q}^{n-1}) \arrow[uu, "\gamma_1"] \arrow[u, "\partial_1"] & & H_n(\bar{Q} \cup C\bar{Q}^{n-1}) \arrow[uu, "\gamma_2"'] \arrow[u, "\partial_2"]
\end{tikzcd}$$

Как отмечено в замечании 1, в схеме все диаграммы коммутативны. Нам нужно показать, что если $\check{h} \in \check{H}_{n+1}(\bar{P} \cup C\bar{Q} \cup C_1(\bar{P}^n \cup C\bar{Q}^{n-1})$, то существует $\check{g} \in \check{H}_n(\bar{Q} \cup C\bar{Q}^{n-1})$ такое, что $\check{\Delta}\,\check{\partial}_1\,\check{h} = \partial_2\,\check{g}$. Элемент $\check{g}$ определим так: Из эпиморфности γ следует, что существует $h \in H_{n+1}(\bar{P} \cup C\bar{Q} \cup C_1(\bar{P}^n \cup C\bar{Q}^{n-1})$, для которого $\gamma h = \check{h}$. Очевидно $\check{\Delta}\,\check{\partial}_1\,\check{h} = \gamma\Delta\partial_1 h$. Но H_* — точная теория гомологий и, как отмечено выше, для нее $\Delta: \operatorname{Im}\partial_1 \to \operatorname{Im}\partial_2$. Поэтому существует $g \in H_n(\bar{Q} \cup C\bar{Q}^{n-1})$ такое, что $\Delta\partial_1 h = \partial_2 g$. Положим $\check{g} = \gamma_2 g$. Тогда $\check{\Delta}\,\check{\partial}_1\,\check{h} = \partial_2\check{g}$. Коммутативность диаграммы (6) следует из доказанного выше и из согласованности γ с дифференциалом $\Delta': H_n'(\bar{P}^n \cup C\bar{Q}^{n-1}) \to H_{n-1}'(\bar{Q}^{n-1})$.

Осталось показать, что $\bar{\gamma}\,\bar{\gamma}' = \bar{\gamma}$ (здесь $\bar{\gamma}': H_n'(\bar{P}^n \cup C\bar{Q}^{n-1})/\operatorname{Ker} j_* \to \check{H}_n(\bar{P}^n \cup C\bar{Q}^{n-1})/\operatorname{Ker}\check{j}_*$, а $\bar{\gamma}$ — тот же гомоморфизм для H_*. По определению $\bar{\gamma}' = \gamma^{-1}\gamma'$. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
H_n'(\bar{P}^n \cup C\bar{Q}^{n-1})/\operatorname{Ker} j_*' \arrow[rr] \arrow[dr, "\gamma'"'] & & \check{H}_n(\bar{P}^n \cup C\bar{Q}^{n-1})/\operatorname{Ker}\check{j}_* \\
& \check{H}_n(\bar{P}^n \cup C\bar{Q}^{n-1})/\operatorname{Im}\check{\partial}, \arrow[ur, "\eta"'] &
\end{tikzcd}$$

где $\eta: \check{H}_n(\bar{P}^n \cup C\bar{Q}^{n-1})/\operatorname{Im}\check{\partial} \to \check{H}_n(\bar{P}^n \cup C\bar{Q}^{n-1})/\operatorname{Ker}\check{j}_*$ — проектирование, индуцированное вложением $\operatorname{Im}\check{\partial}$ в $\operatorname{Ker}\check{j}_*$ (напомним, что для $\check{H}_*$ последовательность пространств вида $X \cup CA$ — полуточна). Очевидно диаграмма коммутативна, т. е. $\bar{\gamma}' = \eta\gamma'$. Аналогично для H_*, $\bar{\gamma} = \eta\gamma$. Но тогда $\bar{\gamma}\,\bar{\gamma}' = \bar{\gamma}'$, что и требовалось показать. Этим теорема 2 доказана.

Непосредственным следствием теоремы 1 и 2 является

Утверждение 1. Для каждой теории гомологий в категории $\mathbf{B}_0$, для которой вложение $i: (\bar{P}^n, \bar{Q}^{n-1}) \to (\bar{P}, \bar{Q})$ индуцирует эпиморфизм групп гомологий при $(\bar{P}, \bar{Q}) \in \bar{\mathbf{A}}$, существует естественное преобразование $\nu': H'_* \to H'_*$ такое, что $\gamma' = \gamma\nu'$.

Замечание 4. Утверждение 1 не относится к гомологиям Александрова-Чеха, хотя для них требование из этого утверждения выполнено во всей категории $\mathbf{B}_0$. Действительно, рассуждения из теоремы 2 нельзя применить к $\check{H}_*$ из-за неточности последовательности пространства $\bar{P} \cup C\bar{Q} \cup C_1(\bar{P}^n \cup C\bar{Q}^{n-1})$ в члене $\check{H}_*(\bar{P}^{-n} \cup C\bar{Q}^{n-1})$. Изэпиморфности $\gamma: H_* \to \check{H}_*$ следует, что и $t: \check{H}_*(X \cup CA) \to \check{H}_*(X, A)$ — эпиморфизм. Тогда из точности в члене $\check{H}_*(\bar{P}^n \cup C\bar{Q}^{n-1})$ вытекла бы точность в члене $\check{H}_n(\bar{P}^n \cup C\bar{Q}^{n-1})$ последовательности пары $(\bar{P} \cup C\bar{Q}, \bar{P}^n \cup C\bar{Q}^{n-1})$, что не всегда верно Но если существовало бы для гомологий Александрова-Чеха естественное преобразование $\check{\nu}: \check{H}_* \to H_*$, согласующееся с γ, т. е. для которого $1 = \gamma\check{\nu}$, то гомологии $\check{H}_*$ выделялись бы естественным образом как прямое собираемое в H_*. Но это означало бы, что $\check{H}_*$ точны. Кроме этого, $\check{H}_*$ — относительно инвариантные и Π_c-аддитивные. Отсюда следовало бы, что $H_* = \check{H}_*$ (см. [4]). Это, как известно, неверно (см. [2]).

Покажем несколько применений утверждения 1.

Напомним определение условия Π_c-аддитивности. Пусть компактное пространство X есть объединение своих компактных подпространств X_k, $k = 1, 2, 3, \ldots$, где $X_i \cap X_j = *$ при $i \neq j$ ($*$ — некоторая точка из X). Рассмотрим непрерывное отображение $g_k: (X, *) \to (X_k, *)$, где $g_k(x) = x$, если $x \in X_k$ и $g_k(x) = *$ при $x \bar{\in} X_k$.

Условие Π_c-аддитивности: Гомоморфизмы $g_k{}_*: H_n'(X, *) \to H_n'(X_k, *)$ определяют для каждого целого n проективное представление группы $H_n'(X, *)$ в виде прямого произведения групп $H_n'(X_k, *)$.

Предложение 2. Если относительно инвариантная в $\bar{\mathbf{A}}$ теория гомологий H_*' удовлетворяет и условию Π_c-аддитивности в $\bar{\mathbf{A}}$, то для нее существует естественное преобразование $\nu': H_*' \to H_*$, $\gamma' = \gamma\nu'$ во всей $\mathbf{B}_0$.

Действительно, как показано в [4], из Π_c-аддитивности и относительной инвариантности в $\bar{\mathbf{A}}$ следует, что $i_*': H_n'(\bar{P}^n, \bar{Q}^{n-1}) \to H_n'(\bar{P}, Q)$ — эпиморфизм. Это дает право применить утверждение 1. Заметим, что условия Π_c-аддитивности и относительная инвариантность определяют в $\bar{\mathbf{A}}$ теорию гомологий H_*' однозначно, т. е. в $\bar{\mathbf{A}}$, $H_*' = H_*$ (см. [4]).

Сформулируем еще одно условие в $\bar{\mathbf{A}}$.

$\bar{\mathbf{C}}$: если P_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$, — последовательность вложенных друг в друга подполиэдров $P \in \bar{\mathbf{A}}$ с пустым пересечением и с компактными замыканиями дополнений $P \backslash P_i$, то для всех $n \geqq 0$, $\varprojlim_i H_n'(\bar{P}_i) = 0$.

Предложение 3. Для относительно инвариантных в $\bar{\mathbf{A}}$ теорий гомологий, удовлетворяющих условию $\bar{\mathbf{C}}$, существует естественное преобразование $\nu' : H_*' \to H_*$ в $\mathbf{B}_0$ такое, что $\gamma' = \gamma\nu'$.

Для таких гомологий, как показано в [3], $H_k'(\bar{P}, \bar{P}^n \cup \bar{Q}) = 0$ при $k \leqq n$. Отсюда вложения $i_1 : (\bar{P}^n, \bar{Q}^{n-1}) \to (\bar{P}^n, \bar{Q}^n)$ и $i_2 : (\bar{P}^n, \bar{Q}^n) \to (\bar{P}, \bar{Q})$ индуцируют эпиморфизм групп гомологий. Поэтому и $i_* : H_n'(\bar{P}^n, \bar{Q}^{n-1}) \to H_n'(\bar{P}, \bar{Q})$ — эпиморфизм.

Дадим еще один пример гомологий, удовлетворяющих условию утверждения 1.

$\bar{\mathbf{D}}$: Пусть $X_1 \leftarrow X_2 \leftarrow X_3 \leftarrow \ldots$ — обратный спектр пространств из $\bar{\mathbf{A}}$ и $X = \varprojlim_s X_s$, $X \in \bar{\mathbf{A}}$. Тогда естественное отображение $H_*'(X) \to \varprojlim_s H_*'(X_s)$ — эпиморфизм.

Предложение 4. Если относительно инвариантная в $\bar{\mathbf{A}}$ теория гомологий H_*' удовлетворяет условию $\bar{\mathbf{D}}$, то для нее существует естественное преобразование $\nu' : H_*' \to H_*$, для которого $\gamma' = \gamma\nu'$ во всей $\mathbf{B}_0$[1].

Очевидно, из условия $\bar{\mathbf{D}}$ следует условие $\bar{\mathbf{C}}$. Поэтому предложение 4 следует из предложения 3.

Наконец остановимся на подкатегории $\mathbf{B}_0 \subset \mathbf{B}_0$, которая состоит из конечномерных компактов.

Предложение 5. Для относительно инвариантных в $\bar{\mathbf{A}} \cap \bar{\mathbf{B}}_0$ теорий гомологий H_*' существует естественное преобразование $\nu' : H_*' \to H_*$ в $\bar{\mathbf{B}}_0$ такое, что $\gamma' = \gamma\nu'$.

Доказательство. Докажем что $i_*' : H_n'(\bar{P}^n, \bar{Q}^{n-1}) \to H_n'(\bar{P}, \bar{Q})$ — эпиморфизм, если $\dim P < \infty$. Покажем сначала, что $H_k'(\bar{P}^n, \bar{P}^{n-1}) = 0$, если $k \neq n$. Действительно, пусть $P^n = \bigcup_{i=1}^{\infty} \sigma_i^n \cup P^{n-1}$. Относительная инвариантность дает возможность, рассуждая стандартным образом, доказать, что $H_k'(\bar{P}^n, \bar{P}^{n-1}) = H_{k-n}'(\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} d_i})$, где d_i — центр симплекса σ_i^n из P^n. Следовательно, $H_k'(\bar{P}^n, \bar{P}^{n-1}) = 0$ при $k \neq n$. Отсюда следует, что и $H_k'(\bar{P}, \bar{Q} \cup \bar{P}^n) = 0$ при $k \leqq n$ и $\dim P < \infty$. Рассуждения, аналогичные сделанным в предложении 1, показывают, что тогда $i_*' : H_n'(\bar{P}^n, \bar{Q}^{n-1}) \to H_n'(\bar{P}, \bar{Q})$ — эпиморфизм.

Замечание 5. На примере сингулярных гомологий H_*^s можно убедится, что не все гомологии относительно инвариантные в $\bar{\mathbf{A}}$. Действительно, если $H_*^s(\bar{P}, \bar{Q}) = H_*^s(\bar{P}/\bar{Q})$ в $\bar{\mathbf{A}}$, то, с одной стороны, группа $H_k^s(\bar{P}^n, \bar{P}^{n-1})$, где $k \neq n$, равнялась бы нулю, а с другой — группе $H_k^s(\bigvee_{i=1}^{\infty} S_i^n)$, где $\bigvee_{i=1}^{\infty} S_i^n$ — компактный букет n-мерных сфер. Но, как показано в работе Баррата и

[1] Для H_*' будем еще предполагать, что если $k \neq 0$ и $\bigvee_{i=1}^{\infty} d_i$ — счетное дискретное множество точек, то $H_k'(\overline{\bigvee_{i=1}^{\infty} d_i}) = 0$.

Милнора, $H_k^s(\bigvee_{i=1}^{\infty} S_i^n, Q) \neq 0$, если $k \equiv 1 \pmod{n-1}$, $k>1$ (Q — группа рациональных чисел).

ЛИТЕРАТУРА

1. Стинрод, Н., Эйленберг, С.: Основания алгебраической топологии. М., ИЛ, 1958.
2. Скляренко, Е. Г.: Теория гомологии и аксиома точности. Усп. мат. наук, XXIV, вып. 5 (149), (1969), 87—140.
3. Скляренко, Е. Г.: Теоремы единственности в теории гомологий. Мат. сб., 85 (127), 2 (1971), 201 — 222.
4. Петкова, Ст. В.: Об аксиомах теории гомологий. Мат. сб., 90 (132), 4 (1973), 607 — 624.
5. Barrat, G. M., Milnor, J.: An example of anomalous singular homology. Proc. Amer. Math Soc., 13, No. 2 (1962), 293 — 297.

Постъпила на 14. XII. 1974 г.

ON THE UNIVERSALITY OF THE MAPPING OF CANONICAL HOMOLOGIES IN THE ALEKSANDROV-ČECH HOMOLOGY THEORY

S. V. Petkova

(SUMMARY)

Let B_0 be the category of compact metrizable spaces and continuous mappings, H_* — the canonical homology theory, $\check{H}_*$ — the Aleksandrov-Čech homology theory and $\gamma' : H_*' \to \check{H}_*$ — the natural homomorphism of arbitrary homology theory H_*' in $\check{H}_*(\gamma : H_* \to \check{H}_*)$.

The following question has been put by E. G. Skljarenko in his paper [3]: is there for every homology theory H_*' in category B_0 a natural mapping $\nu' : H_*' \to H_*$ with $\gamma' = \gamma\nu'$.

In connection with this question the following two theorems are proved in the present paper. Let $\bar{A}$ be the subcategory in B_0 consisting of compacta for which the complement of a certain point is a locally compact countable polyhedron, and for which the mappings preserve this point and transform complements into complements.

Theorem 1. There is a natural mapping $\nu' : H_*' \to H_*$ with $\gamma' = \gamma\nu'$ in the category B_0 iff there is a such mapping in the subcategory $\bar{A} \subset B_0$.

Theorem 2. For every pair $(X, A) \in \bar{A}$ there is a natural subgroup $H_n'(X, A) \subset H_n'(X, A)$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$ and a mapping $\nu' : H_n'(X, A) \to H_n(X, A)$ with $\gamma' = \gamma\nu'$.

It follows from these two theorems that the above question has an affirmative answer for certain homology theories in B_0.

For the Aleksandrov-Čech homology theory this question is equivalent to the exact axiom for $\check{H}_*$, i. e. to the equality $\check{H}_* = H_*$.