БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ИЗГИБАНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ГАУССОВОЙ КРИВИЗНЫ

Стефана Т. Хинева

0. Пусть $\Phi \in C^3$ — односвязная поверхность отрицательной гауссовой кривизны, которая ограничена замкнутой, кусочно-гладкой кривой $C=\bigcup c_j$, $j=1, \ldots, m$. Асимптотическая сеть на поверхности правильная. Кривые c_j, $j=1, \ldots, m$ — простые, нигде не касающиеся друг друга и не содержат в себе асимптотических направлений.

В данной работе доказано, что если закрепить такую поверхность Ф вдоль ее границы C, то она становится жесткой. Условие закрепления поверхности Ф вдоль всей границы C очень сильное; для того чтобы такая поверхность Ф стала жесткой, достаточно ее закрепить только вдоль некоторых кривых $c_j (j=1, \ldots, m)$, которые имеют определенные свойства. Мы сформулируем эти свойства кривых c_j в процессе доказательства теорем 1, 2 и 3. В теоремах 1 и 2 доказываем жесткость поверхностей Ф, которые являются криволинейными четырехугольниками и трехугольниками. В теореме 3 доказываем жесткость поверхности Ф, которая является криволинейным многоугольником.

1. Пусть поверхность Ф задана векторным параметричным уравнением

$$\Phi: \vec{x}=\vec{x}(u, v), \ (u, v) \in D, \tag{1}$$

где векторная функция $\vec{x}(u, v)$ принадлежит классу C^3, а область D — замкнутая и односвязная и ее граница является кусочно гладкой, простой, замкнутой кривой Г.

Если через $\vec{z}=\vec{z}(u, v)$ — $(u, v) \in D$ и $\vec{z}(u, v) \in C^1$ — обозначим поле скоростей бесконечно малых изгибаний поверхности Ф, то основную систему бесконечно малых изгибаний запишем в виде

$$\vec{z}_u \vec{x}_u=0 \quad \vec{z}_u \vec{x}_v+\vec{z}_v \vec{x}_u=0 \quad \vec{z}_v \vec{x}_v=0. \tag{2}$$

Введем три вспомогательные функции $a(u, v)$, $b(u, v)$, $c(u, v)$ следующим образом:

$$a=\vec{z} \cdot \vec{x}_u, \ b=\vec{z} \cdot \vec{x}_v, \ c=\vec{z} \cdot l; \tag{3}$$

здесь через l обозначен единичный нормальный вектор поверхности Ф.

Так как $\vec{z}(u, v)$ принадлежит классу C^1, то функции $a(u, v)$, $b(u, v)$, $c(u, v)$ будут тоже принадлежать классу C^1.

Дифференцируя (3) и учитывая (2), получаем

$$
(4)\qquad
\begin{aligned}
a_u &= \Gamma^1_{11} a + \Gamma^2_{11} b + L \cdot c,\\
b_v &= \Gamma^1_{22} a + \Gamma^2_{22} b + N \cdot c,\\
a_v + b_u &= 2\Gamma^1_{12} a + 2\Gamma^2_{12} b + 2M \cdot c,
\end{aligned}
$$

где Γ^k_{ij} $(i, j, k=1, 2)$ — символы Кристоффеля, а L, M, N — коэффициенты второй основной формы поверхности. Если $a(u, v)\equiv 0$, $b(u, v)\equiv 0$, $c(u, v)\equiv 0$, $(u, v)\in D$, то из (3) получаем, что $\vec{z}(u, v)\equiv 0$ для $(u, v)\in D$. Отметим, что a, b, c зависят от параметризации поверхности Ф.

Отнесем поверхность Ф к линиям кривизны; тогда $F=0$, $M=0$ и система (4) примет вид:

$$
(5)\qquad
\begin{aligned}
a_u - \frac{L}{N}\cdot b_v &= a_{11} \cdot a + a_{12} \cdot b,\\
a_v + b_u &= a_{21} \cdot a + a_{22} \cdot b,
\end{aligned}
$$

где

$$
a_{11} = \Gamma^1_{11} - \frac{L}{N}\Gamma^1_{22},\quad a_{12} = \Gamma^2_{11} - \frac{L}{N}\Gamma^2_{22},
$$

$$
a_{21} = 2\Gamma^1_{12},\quad a_{22} = 2\Gamma^2_{12}.
$$

Поскольку Ф поверхность отрицательной гауссовой кривизны, то $\frac{L}{N}<0$. Следовательно, система (5) является системой гиперболического типа двумя независимыми переменными u, v и двумя неизвестными функциями a, b.

В настоящей работе мы будем пользоваться системой (5).

Приведем систему (5) к каноническому виду. Для этого достаточно сделать следующую замену неизвестных функций $a(u, v)$, $b(u, v)$ на $z_1(u, v)$, $z_2(u, v)$

$$
(6)\qquad
z_1 = \frac{a - \sqrt{\left|\frac{L}{N}\right|}\, b}{\sqrt{1+\frac{L}{N}}},\quad
z_2 = \frac{a + \sqrt{\left|\frac{L}{N}\right|}\, b}{\sqrt{1+\left|\frac{L}{N}\right|}},
$$

где величины $\sqrt{\left|\frac{L}{N}\right|}$, $-\sqrt{\left|\frac{L}{N}\right|}$ — являются корнями характеристического уравнения системы (5). Характеристиками системы (5) являются линии, заданые уравнениями $\frac{dv}{du} = \pm\sqrt{\left|\frac{L}{N}\right|}$. На поверхности Ф им соответствуют асимптотические линии.

Выражая из равенств (6) функции $a(u, v)$, $b(u, v)$ через $z_1(u, v)$, $z_2(u, v)$ и подставляя их в (5), получаем систему

$$
(7)\qquad
\begin{aligned}
z_{1u} - \sqrt{\left|\frac{L}{N}\right|}\,.\,z_{1v} &= A_1 z_1 + B_1 z_2,\\
z_{2u} + \sqrt{\left|\frac{L}{N}\right|}\,.\,z_{2v} &= A_2 z_1 + B_2 z_2,
\end{aligned}
$$

где через A_1, B_1, A_2, B_2 обозначено

$$
A_1 = \frac{1}{2}\left\{ -\frac{\left(\sqrt{1+\left|\frac{L}{N}\right|}\right)_u}{\sqrt{1+\left|\frac{L}{N}\right|}} + \frac{\left(\sqrt{1+\left|\frac{L}{N}\right|}\right)_v \sqrt{\left|\frac{L}{N}\right|} - \left(\sqrt{\left|\frac{L}{N}\right|}\right)_v \sqrt{1+\left|\frac{L}{N}\right|}}{\sqrt{1+\left|\frac{L}{N}\right|}} \right.
$$

$$
+ a_{11} - \frac{a_{12}}{\sqrt{\left|\frac{L}{N}\right|}} + \frac{\left(\sqrt{1+\left|\frac{L}{N}\right|}\right)_v \sqrt{\left|\frac{L}{N}\right|}}{\sqrt{1+\left|\frac{L}{N}\right|}} - \left(\frac{\sqrt{1+\left|\frac{L}{N}\right|}}{\sqrt{\left|\frac{L}{N}\right|}}\right)_u \cdot \frac{\sqrt{\left|\frac{L}{N}\right|}}{\sqrt{1+\left|\frac{L}{N}\right|}}
$$

$$
\left. - a_{21}\sqrt{\left|\frac{L}{N}\right|} + a_{22} \right\},
$$

$$
B_1 = \frac{1}{2}\left\{ -\frac{\left(\sqrt{1+\left|\frac{L}{N}\right|}\right)_u}{\sqrt{1+\left|\frac{L}{N}\right|}} \frac{\left(\sqrt{1+\left|\frac{L}{N}\right|}\right)_v \sqrt{\left|\frac{L}{N}\right|} - \left(\sqrt{\left|\frac{L}{N}\right|}\right)_v \sqrt{1+\left|\frac{L}{N}\right|}}{\sqrt{1+\left|\frac{L}{N}\right|}} \right.
$$

$$
+ a_{11} + \frac{a_{12}}{\sqrt{\left|\frac{L}{N}\right|}} + \frac{\left(\sqrt{1+\left|\frac{L}{N}\right|}\right)_v \sqrt{\left|\frac{L}{N}\right|}}{\sqrt{1+\left|\frac{L}{N}\right|}} + \left(\frac{\sqrt{1+\left|\frac{L}{N}\right|}}{\sqrt{\left|\frac{L}{N}\right|}}\right)_u \cdot \frac{\sqrt{\left|\frac{L}{N}\right|}}{\sqrt{1+\left|\frac{L}{N}\right|}}
$$

$$
\left. - a_{21}\sqrt{\left|\frac{L}{N}\right|} - a_{22} \right\},
$$

$$
A_2 = \frac{1}{2}\left\{ -\frac{\left(\sqrt{1+\left|\frac{L}{N}\right|}\right)_u}{\sqrt{1+\left|\frac{L}{N}\right|}} + \frac{\left(\sqrt{1+\left|\frac{L}{N}\right|}\right)_v \sqrt{\left|\frac{L}{N}\right|} - \left(\sqrt{\left|\frac{L}{N}\right|}\right)_v \sqrt{1+\left|\frac{L}{N}\right|}}{\sqrt{1+\left|\frac{L}{N}\right|}} + a_{11} + \frac{a_{12}}{\sqrt{\left|\frac{L}{N}\right|}} \right.
$$

$$-\frac{\left(\sqrt{1+\left|\frac{L}{N}\right|}\right)_v\sqrt{\left|\frac{L}{N}\right|}}{\sqrt{1+\left|\frac{L}{N}\right|}}+\left(\frac{\sqrt{1+\left|\frac{L}{N}\right|}}{\sqrt{\left|\frac{L}{N}\right|}}\right)_u\frac{\sqrt{\left|\frac{L}{N}\right|}}{\sqrt{1+\left|\frac{L}{N}\right|}}+a_{21}\sqrt{\left|\frac{L}{N}\right|}-a_{22}\Bigg\},$$

$$B_2=\frac{1}{2}\Bigg\{-\frac{\left(\sqrt{1+\left|\frac{L}{N}\right|}\right)_u}{\sqrt{1+\left|\frac{L}{N}\right|}}\frac{\left(\sqrt{1+\left|\frac{L}{N}\right|}\right)_v\sqrt{\left|\frac{L}{N}\right|}-\left(\sqrt{\left|\frac{L}{N}\right|}\right)_v\sqrt{1+\left|\frac{L}{N}\right|}}{\sqrt{1+\left|\frac{L}{N}\right|}}$$

$$+a_{11}+\frac{a_{12}}{\sqrt{\left|\frac{L}{N}\right|}}\frac{\left(\sqrt{1+\left|\frac{L}{N}\right|}\right)_v\sqrt{\left|\frac{L}{N}\right|}}{\sqrt{1+\left|\frac{L}{N}\right|}}-\left(\frac{\sqrt{1+\left|\frac{L}{N}\right|}}{\sqrt{\left|\frac{L}{N}\right|}}\right)_u\cdot\frac{\sqrt{\left|\frac{L}{N}\right|}}{\sqrt{1+\left|\frac{L}{N}\right|}}$$

$$+a_{21}\sqrt{\left|\frac{L}{N}\right|}+a_{22}\Bigg\}.$$

2. Рассмотрим поверхность **Ф** отрицательной гауссовой кривизны, которая ограничена замкнутой кусочно-гладкой кривой.

Мы требуем, чтобы поверхность Ф: $\vec{x}=\vec{x}(u, v)$ *, $(u, v)\in D$, удовлетворяла следующим условиям:

а) Вектор-функция $\vec{x}(u, v)\in C^3$, область D — односвязная и замкнутая;

б) c_1: $u=\varphi_1(v)$, c_2: $u=\varphi_2(v)$, $\tilde{c}$: $u=\varphi(v)$ $(v\in J)$ — простые, гладкие кривые;

в) c_1, c_2 нигде не касаются друг друга, нигде не касаются к асимптотическим направлениям и имеют одну общую точку, в которой гладкость кривой C нарушена;

г) Асимптотические линии поверхности **Ф** образуют правильую сеть. Следуя Н. В. Ефимову [1], это означает, что асимптотическая сеть поверхности **Ф** топологически эквивалентна декартовой сети на плоскости (u, v) в области D.

Дальше, чтобы сформулировать условие д), мы введем положительные направления на асимптотических линиях относительно кривой c_2. Проведем через произвольную точку $P(u, v)$ поверхности Ф линию $\bar{c}$, принадлежащую той фамилии кривых на поверхности, которой принадлежит кривая c_2. Кривая $\bar{c}$ разбивает поверхность Ф на два куска Φ_1 и Φ_2.

* Здесь и в дальнейшем, когда поверхность Ф задана уравнением $\vec{x}=\vec{x}(u, v)$, мы будем предполагать, что она отнесена к линиям кривизны.

Пусть через Φ_2 обозначен тот кусок поверхности Φ, которой содержит кривую c_2. Будем говорить, что асимптотическая линия через P проведена в положительном направлении относительно кривой c_2, если она идет в области Φ_1; аналогично в отрицательном направлении — если она идет в область Φ_2.

д) Каждая из двух асимптотических линий в любой точки поверхности Φ, проведенная в отрицательном направлении относительно кривой C, пересекает либо c_1, либо c_2.

Такие поверхности существуют. Рассмотрим, например, односвязную регулярную поверхность $\Phi \in C^3$, ограниченную двумя линиями кривизны c_1, и c_2, исходящими из одной точки и произвольной асимптотической линией $\bar{c}$, пересекающей c_1 и c_2. Такая поверхность Φ удовлетворяет всем условиям а, б, в, г, д.

Для поверхности Φ, удовлетворяющей перечисленным выше условиям а, б, в, г, д, докажем следующую теорему.

Теорема 1. Поверхность Φ закрепленная вдоль кривых c_1 и c_2 жестка.

Доказательство. Условие, что поверхность Φ закреплена вдоль кривых c_1 и c_2, обозначает, что поле скоростей $\vec{z}(u, v)$ бесконечно малых изгибаний поверхности вдоль кривых c_1 и c_2 равно нулю

$$\vec{z}(\varphi_1(v), v) = 0, \ \vec{z}) \text{ и } \varphi_2(v), v) = 0, v \in J. \tag{8}$$

Учитывая это, из равенств (3) получаем, что и

$$a(\varphi_1(v), v) = 0, \ a(\varphi_2(v), v) = 0, \ b(\varphi_1(v), v) = 0, \ b(\varphi_2(v), v) = 0. \tag{9}$$

Но тогда из равенств (6) имеем

$$\vec{z}_1(\varphi_1(v), v) = 0, \ \vec{z}_1(\varphi_2(v), v) = 0, \ \vec{z}_2(\varphi_1(v), v) = 0, \ \vec{z}_2(\varphi_2(v), v) = 0. \tag{10}$$

Мы покажем, что система (5) при краевых условиях (10) имеет решение

$$z_1(u, v) \equiv 0, \ z_2(u, v) \equiv 0, \ (u, v) \in D. \tag{11}$$

Тогда из (6) и (4) получаем, что

$$a(u, v) \equiv 0, \ b(u, v) \equiv 0, \ c(u, v) \equiv 0, \ (u, v) \in D, \tag{12}$$

которое, в силу (3), означает, что $\vec{z}(u, v) \equiv 0$ во всей области D.

Рассмотрим систему (5):

$$a_u - \frac{L}{N} b_v = a_{11} \cdot a + a_{12} \cdot b,$$

$$a_v + b_u = a_{21} \cdot a + a_{22} \cdot b.$$

Введем новые независимые переменные ξ, η следующим образом:

$$(13)\qquad \begin{aligned}\xi&=u-\varphi_2(v),\\ \eta&=u-\varphi_1(v),\end{aligned}\quad (\xi,\eta)\in D_1,\ \Delta=-\varphi_1'(v)+\varphi_2'(v)\neq 0.$$

Так как кривые c_1 и c_2 нигде не касаются друг друга, то $\Delta\neq 0$. В новых переменных ξ, η кривые c_1 и c_2 имеют соответственно уравнения

$$(14)\qquad c_1:\ \eta=0\ \ 0\leqq\xi\leqq p;\ c_2:\ \xi=0,\ 0\leqq\eta\leqq q.$$

Обозначим интервал $[0, q]$ оси η через I, а интервал $[0, p]$ оси ξ через B. Тогда область D, которая замкнута, будет ограничена интервалами I, B и кривой $\tilde{c}$.

Если положим

$$(15)\qquad \begin{aligned}\bar{z}_1(u, v)&=\bar{z}_1(\xi,\eta),\\ z_2(u, v)&=\bar{z}_2(\xi,\eta),\end{aligned}$$

то рассматриваемая система (5) перейдет в систему

$$(16)\qquad \begin{aligned}\bar{z}_{1\xi}-\bar{\lambda}_1\bar{z}_{1\eta}&=C_1\bar{z}_1+E_1\bar{z}_2,\\ \bar{z}_{2\xi}-\bar{\lambda}_1\bar{z}_{2\eta}&=C_2\bar{z}_1+E_2\bar{z}_2,\end{aligned}$$

где $(\xi,\eta)\in D_1$, а через $\bar{\lambda}_1$, $\bar{\lambda}_2$, C_1, E_1, C_2, E_2 обозначено

$$\bar{\lambda}_1(\xi,\eta)=\frac{1+\varphi_1'(v)\sqrt{\left|\frac{L(u,v)}{N(u,v)}\right|}}{1+\varphi_2'(v)\sqrt{\left|\frac{L(u,v)}{N(u,v)}\right|}},\quad \bar{\lambda}_2(\xi,\eta)=\frac{1-\varphi_1'(v)\sqrt{\left|\frac{L(u,v)}{N(u,v)}\right|}}{1-\varphi_2'(v)\sqrt{\left|\frac{L(u,v)}{N(u,v)}\right|}},$$

$$(17)\qquad C_1(\xi,\eta)=\frac{A_1(u,v)}{1+\varphi_2'(v)\sqrt{\left|\frac{L(u,v)}{N(u,v)}\right|}},\quad E_1(\xi,\eta)=\frac{B_1(u,v)}{1+\varphi_2'(v)\sqrt{\left|\frac{L(u,v)}{N(u,v)}\right|}},$$

$$C_2(\xi,\eta)=\frac{A_2(u,v)}{1-\varphi_1'(v)\sqrt{\left|\frac{L(u,v)}{N(u,v)}\right|}},\quad E_2(\xi,\eta)=\frac{B_2(u,v)}{1-\varphi_2'(v)\sqrt{\left|\frac{L(u,v)}{N(u,v)}\right|}},$$

$$u=u(\xi,\eta),\quad v=v(\xi,\eta).$$

Поскольку кривые c_1 и c_2 нигде не касаются асимптотических направлений, то

$$(18)\qquad 1\pm\varphi_1'(v)\sqrt{\left|\frac{L(u,v)}{N(u,v)}\right|}\neq 0,\quad 1\pm\varphi_2'(v)\sqrt{\left|\frac{L(u,v)}{N(u,v)}\right|}\neq 0.$$

Учитывая (13) и (10), из равенств (15) получаем, что вдоль кривых $c_1: \xi=0$ и $\bar{c}_2: \eta=0$ в области D_1 плоскости (ξ, η) функции $\bar{z}_1(\xi, \eta)$ и $\bar{z}_2(\xi, \eta)$ принимают соответственно следующие значения:

$$\bar{z}_1(0, \eta)=0, \quad \bar{z}_2(0, \eta)=0, \quad \eta \in I, \tag{19}$$

$$\bar{z}_1(\xi, 0)=0, \quad \bar{z}_2(\xi, 0)=0, \quad \xi \in B. \tag{20}$$

Итак, мы ищем решения системы (16), которое при $\xi=0$, $\eta \in I$ удовлетворяет условиям (19), а при $\eta=0$, $\xi \in B$ — условиям (20).

Мы докажем более общее утверждение, а именно, покажем, что для системы (16) существует только нулевое решение $\bar{z}_1(\xi, \eta) \equiv 0$, $\bar{z}_2(\xi, \eta) \equiv 0$ в замкнутой области D_1, которое удовлетворяет начальным условиям (19) и граничным условиям $\bar{z}_j(\xi, 0)=0$. На отрезе B оси $\eta=0$ мы задаем столько условий j, сколько характеристик входят в область D_1 в направлении растящих ξ, иными словами, сколько чисел, $\bar{\lambda}_i(\xi, 0)$ отрицательные $\left(\frac{d\eta_i}{d\xi}=-\lambda_i\right)$. Тогда из факта, что $\bar{z}_1(\xi, \eta) \equiv 0$, $\bar{z}_2(\xi, \eta) \equiv 0$ в D_1, будет следовать, что $\bar{z}_1(\xi, 0)=0$, $\bar{z}_2(\xi, 0)=0$.

Для доказательства вышесказанного утверждения воспользуемся следующим результатом L. L. Campbell и A. Robinson [4], который сформулируем в виде леммы:

Лемма. Система (16) имеет единственное решение $\bar{z}(\xi, \eta)=\{\bar{z}_1(\xi, \eta), \bar{z}_2(\xi, \eta)\}$ в области R, удовлетворяющее $\bar{z}_i(0, \eta)=0$, $i=1, 2$, $\eta \in I$ и $\bar{z}_j(\xi, 0)=0$, $\xi \in B$, при следующих условиях:

1. R есть дефиниционная область для $I+B$, в которой характеристики системы (16) имеют уравнения $\frac{d\eta}{d\xi}=-\lambda_i$, $i=1, 2$. Это означает, что R замкнутая область в первом квадранте плоскости (ξ, η) со следующим свойством — характеристики системы (16), проведенные через каждую точку области R в направлении убывающих ξ, лежат в R и пересекают либо I, либо B, при этом пересекают B только один раз.

2. $\bar{\lambda}_j(\xi, 0)<0$, $j=0, \ldots, k_0$, $\bar{\lambda}_j(\xi, 0)>0$, $j=k_0+1, \ldots, 2$, k_0 — число отрицательных $\bar{\lambda}_j(\xi, 0)$.

3. $\bar{\lambda}_i(\xi, \eta)$, $i=1, 2$, — ограниченные и непрерывные функции в области R.

4. Если обе характеристики, подходящие через точку (ξ_0, η_0), имеют уравнения $\eta=\Phi_i(x_0, y_0; \xi)$, где $\frac{d\eta}{d\xi}=-\bar{\lambda}_i(\xi, \eta)$, $i=1, 2$, то функции Φ_i имеют непрерывные первые частные производные относительно x_0 и y_0 в R.

5. Начальные и граничные условия согласованы в начале (0, 0).

Для системы (16) и области D_1 все условия 1.—5. в лемме выполнены. Действительно, условие 1. следует из условий г) и д), наложенных на поверхности Φ, и из того, что D замкнутая и замена независимых пере-

менных (13) однолистная; условие 3. следует из представления функций $\bar{\lambda}_i$ $(i=1,2)$ через равенств (17), которые в силу (18) и непрерывности функций $\varphi_i'(i=1, 2)$, $\sqrt{\frac{L}{N}}$ — тоже непрерывные в замкнутой области D_1, а, следовательно, и ограничены в D_1; условие 2. — функции $\bar{\lambda}_i$ из (17), в силу равенств (18), нигде не равны нулю в D_1, следовательно, они не меняют своего знака в D_1; условие 4. следует из гладкости асимптотических линий на поверхности Ф, которым на плоскости (u, v) соответствуют характеристики системы (5), а этим характеристикам на плоскости (ξ, η) соответствуют характеристики системы (16); так как имеем нулевые начальные и граничные условия, то они согласованы в начале.

Тогда из леммы следует, что система (16) при начальных условиях (19) и граничном условии

$$\bar{z}_j(\xi, 0)=0, \ \xi \in B, \ j=0, \ldots, k_0, \ k_0=0, 1, 2, \tag{21}$$

имеет единственное решение в области D_1. Покажем, что это решение тождественно равно нулю в области D_1.

Перепишем систему (16) в виде

$$\bar{z}_{i\xi}-\bar{\lambda}_i \bar{z}_{i\eta}=C_i \bar{z}_1+D_i \bar{z}_2, \qquad i=1, 2. \tag{22}$$

Левая часть i-ого уравнения этой системы представляет производную по ξ функции $\bar{z}_i$ вдоль характеристики: $\frac{d\eta}{d\xi}=-\bar{\lambda}_i$. Обозначим ее через $\frac{D_i\bar{z}_i}{D_i\xi}=\frac{d\bar{z}_i}{d\xi}$, $i=1, 2$. Зафиксируем произвольную точку $P(\xi, \eta)$ области D_1 и обозначим через l_i часть соответствующей характеристики $\frac{d\eta}{d\xi}=-\bar{\lambda}_i$ от P до ее пересечения в некоторой точке P_i либо с отрезком l оси $\xi=0$, либо с отрезком B оси $\eta=0$. Это всегда возможно, так как D_1 является R область для $l+B$. Проинтегрируем i-е равенство системы (20) по дуге l_i от точки P_i до точки P. Получим следующую систему интегральных уравнений

$$\bar{z}_i(\xi, \eta)-\bar{z}_i(P_1)=\int_0^s (C_i \bar{z}_1+D_i \bar{z}_2)\, d\xi. \tag{23}$$

Системы (22) и (23) эквивалентны.

Построим систему последовательных приближений к решению системы (23) следующим образом:

$$
(24)\qquad
\begin{aligned}
&\bar{z}_i^{(0)}(\xi,\eta)=0,\\
&\bar{z}_i^{(1)}(\xi,\eta)=0+\int_{l_i}(C_i\bar{z}_1^{(0)}+D_i\bar{z}_2^{(0)})\,d\xi,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\qquad (i=1,\ 2),\\
&\bar{z}_i^{(n+1)}(\xi,\eta)=0+\int_{l_i}(C_i\bar{z}_1^{(n)}+D_i\bar{z}_2^{(n)})\,d\xi.
\end{aligned}
$$

Все последовательные приближения (24) решения системы (23) равны нулю. Следовательно, и их граница, когда $n\to\infty$ тоже равна нулю во всей области D_1. Теорема доказана.

3. Пусть теперь $\Phi:\vec{x}=\vec{x}(u,v)$, $(u,v)\in G$, $\vec{x}(u,v)\in C^3$ — замкнутая односвязная поверхность отрицательной кривизны, которая ограничена четырехугольником $ABCD$, стороны которого являются простыми гладкими кривыми, которые нигде не касаются друг друга. Предполагаем еще, что они не касаются к асимптотическим направлениям и имеют уравнения

$$
(25)\qquad
\begin{aligned}
&AB=c_1:\ u=\varphi_1(v),\ BC=c_2:\ u=\varphi_2(v),\ v\in I,\\
&CD=c_3:\ u=\varphi_1(v)+d,\ DA=c_4:\ u=\varphi_4(v),\ d=\mathrm{const}.
\end{aligned}
$$

Как видно из (25), кривые c_1 и c_3 принадлежат к одному и тому же семейству кривых на поверхности.

Дефиниционная область G поверхности Φ в плоскости (u,v) является замкнутым четырехугольником со сторонами

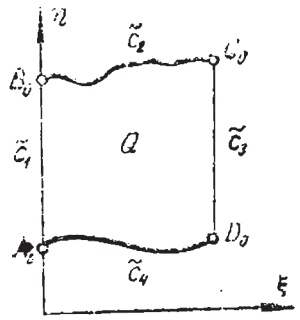
$$
(26)\qquad \bar{c}_1:u=\varphi_1(v);\ \bar{c}_2:u=\varphi_2(v);\ \bar{c}_3:u=\varphi_1(v)+d;\ \bar{c}_4:u=\varphi_4(v).
$$

Кроме того, здесь и в дальнейшем мы будем предполагать, что асимптотическая сеть на поверхности правильная и что каждая из двух асимптотических линий через произвольную точку поверхности Φ в отрицательном направлении относительно кривой c_1 пересекает границу $C=c_1\cup c_2\cup c_3\cup c_4$ поверхности.

Введем понятие индекса k_j кривой c_j (оно будет такое же и для $\bar{c}_j$) следующим образом: обозначим через k_j число асимптотических линий через любую точку кривой c_j в положительном направлении относительно c_1, которые идут во внутренность поверхности Φ. Поскольку асимптотические линии задаются уравнениями $\frac{dv}{du}=-\lambda_i(u,v)$ $(i=1,\ 2)$, где λ_i непрерывные функции, а кривая c_j нигде не содержит в себе асимптотических направлений, то число k_j одинаково для всех точек кривой c_j. Мы называем число k_j индексом кривой c_j. Из данного определения ясно, что индекс кривой c_j (соответственно кривой $\bar{c}_j$) на поверхности не зависит от параметризации поверхности.

Мы покажем, что если закрепить рассматриваемую поверхность Φ вдоль ее границы $C=c_1\cup c_2\cup c_3\cup c_4$, то Φ становится жесткой. Точнее,

докажем, что для жесткости поверхности Ф достаточно потребовать закрепления поверхности Ф только вдоль c_1 и тех c_j $(j=2, 4)$, которые имеют положительные индексы.



Фиг. 1

Теорема 2. Поверхность Ф закрепленая вдоль кривой c_1 и тех $c_j \in C$ $(j=2, 4)$, которые имеют положительные индексы, жестка.

Доказательство. Рассмотрим опять систему (16) в замкнутой области G, ограниченной кривой $\Gamma=\bar{c}_1 \cup \bar{c}_2 \cup \bar{c}_3 \cup \bar{c}_4$. Сделаем следующую замену независимых переменных:

$$\xi=u-\varphi_1(v), \qquad \eta=v. \tag{27}$$

При замене (27) система (16) переходит в систему

$$\begin{aligned} \bar{z}_{1\xi}-\bar{\lambda}_1 \bar{z}_{1\eta}&=C_1\bar{z}_1+D_1\bar{z}_2, \\ \bar{z}_{2\xi}-\bar{\lambda}_2 \bar{z}_{2\eta}&=C_2\bar{z}_1+D_2\bar{z}_2, \end{aligned} \tag{28}$$

а область G, ограниченная кривой $\Gamma=\bar{c}_1 \cup \bar{c}_2 \cup \bar{c}_3 \cup \bar{c}_4$ — в замкнутую область Q (рис. 1), ограниченную кривой $S=\tilde{c}_1 \cup \tilde{c}_2 \cup \tilde{c}_3 \cup \tilde{c}_4$, где $\tilde{c}_1$, $\tilde{c}_2$, $\tilde{c}_3$, $\tilde{c}_4$ кривые в плоскости (ξ, η) с уравнениями

$$\tilde{c}_1: \xi=0,\ 0 \leqq \eta \leqq p;\ \tilde{c}_2: \xi=\varphi_2(\eta)-\varphi_1(\varphi);\ \tilde{c}_3: \xi=d;\ \tilde{c}_4: \xi=\varphi_4(\eta)-\varphi_1(\eta).$$

Поскольку при замене независимых переменных характеристики системы (16) инвариантны, то индексы кривых $\bar{c}_j$ и $\tilde{c}_j$ $(j=1, 2, 3, 4)$ равны.

Мы ищем решения системы (28) в области Q, которое удовлетворяет следующим начальным и граничным условиям:

$$\bar{z}_i(0, \eta)=0 \quad (i=1, 2), \qquad 0 \leqq \eta \leqq p, \tag{29}$$

$$\bar{z}_i(\varphi_2(\eta)-\varphi_1(\eta), \eta)=0 \qquad (i=1, 2), \tag{30}$$

$$\bar{z}_i(\varphi_4(\eta)-\varphi_1(\eta), \eta)=0 \qquad (i=1, 2), \tag{31}$$

Проведем через оба конца A_0 и B_0 отрезка $\tilde{c}_1$ характеристики системы (28) в направлении растящих ξ. Возможны два случая:

а) Хотя бы одна пара характеристик из разных семейств, проведенные через A_0 и B_0, идут во внутренность области Q (фиг. 2); это означает, что индексы k_2 и k_4 сторон $A_0C_0=\tilde{c}_4$ и $B_0C_0=\tilde{c}_2$ положительные.

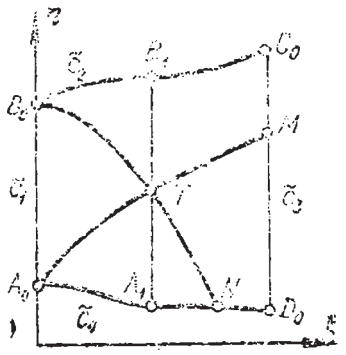
б) Один (или оба) из индексов k_2 и k_4 равны нулю (фиг. 3).

а) Рассмотрим первый случай. Пусть характеристика через точку A_0 пересекает стороны $\tilde{c}_2$ или $\tilde{c}_3$ в точке M, а характеристика через B_0 пересекает $\tilde{c}_3$, либо $\tilde{c}_4$ в точке N. Тогда замкнутая часть Q_1 области Q, которая ограничена кривыми $\tilde{c}_1$, $\tilde{c}_4$ и характеристикой B_0N, является дефиниционной областью для $\tilde{c}_1+\tilde{c}_4$ (см. теорему 1); аналогично замкнутая часть Q_2 области Q, ограниченная кривыми $\tilde{c}_1$, $\tilde{c}_2$, $\tilde{c}_3$ и характеристикой A_0M, является дефиниционной областью для $\tilde{c}_1+\tilde{c}_2$.

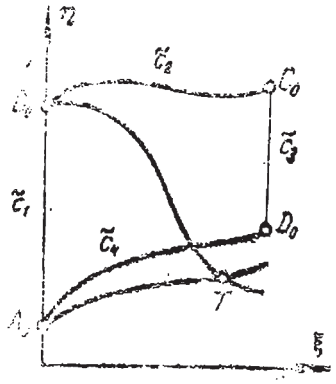
Из теоремы 1 следует, что в области Q_1 система (28) при начальных условиях (29) и граничных условиях (30) имеет только нулевое решение $\bar{z}_i(\xi, \eta)=0$ в замкнутой области Q_1. Аналогично, в области Q_2 система (28) имеет нулевое решение $\bar{z}_i(\xi, \eta)=0$ при тех же самых начальных условиях (29) и граничных условиях (31).

Обозначим через T точку пересечения характеристик A_0M и B_0N. Если точка T лежит на стороне $C_0D_0=\tilde{c}_3$ или вне области Q, то система (28) имеет в замкнутых областях $Q':B_0A_0D_0T$ и $Q'':A_0B_0C_0T$ нулевое решение, так как Q' является дефиниционной областью для $A_0B_0+A_0D_0$, а Q'' — дефиниционной областью для $A_0B_0+B_0C_0$. Но $Q\subset Q'\cup Q''$, следовательно, система (28) имеет нулевое решение во всей области Q.

Пусть T внутренняя точка для Q (фиг. 2). Проведем через T прямую, параллельную оси η. Она пересекает кривые $\tilde{c}_2$ и $\tilde{c}_4$ соответственно в точках B_1 и A_1. В замкнутой области Q_1: $A_0A_1B_1B_0$ система (28) при условиях (29), (30), (31) имеет нулевое решение. Дальше рассмотрим область $Q-Q_1:A_1D_0C_0B_1$. Возьмем кривую A_1B_1 для начальной и проведем характеристики через точки A_1, B_1 таким же образом как это сде-



Фиг. 2



Фиг. 3

лали в области Q. Ищем решения системы (28) в области $Q-Q_1$ точно так же как и в Q. Обозначим через A_1B_1 минимальное вертикальное расстояние между кривыми $\tilde{c}_2$ и $\tilde{c}_4$, а через x — верхнюю границу $\bar{\lambda}_i(\xi,\eta)$

($l=1, 2$) в области Q. Прямая A_1B_1 отстоит от прямой A_0B_0 на расстоянии, по крайней мере, $\bar{\eta}:2x$. Мы разбиваем Q последовательно на четырехугольники $A_{j-1}A_jB_jB_{j-1}$ и $A_rC_0D_0B_0$ прямыми A_jB_j ($j=1, \ldots, r+1$), параллельными A_0B_0 и находящимися друг от друга в направлении растящих ξ на расстоянии, по крайней мере, $\bar{\eta}:2x$. Число $r+1$ четырехугольников $A_{j-1}A_jB_jB_{j-1}$ меньше или равно самому большому натуральному числу, которое содержится в $\frac{2sx}{\bar{\eta}}$, где s — абсцисса точек прямой C_0D_0. В каждом из четырехугольников $A_{j-1}A_jB_jB_{j-1}$ решение системы (28) тождественно равно нулю при граничных условиях (30), (31) и начальных условиях $\bar{z}_l(d_{j-1}, \eta)=0$, где d_{j-1} — постоянная вдоль $A_{j-1}B_{j-1}$: $\xi=d_{j-1}$, $d_{j-1} \neq d_j$, $j=1, 2, \ldots, r$. Следовательно, решение системы (28) во всей области Q_l получаем при помощи покрытия решениями в областях $A_{j-1}A_jB_jB_{j-1}$, число которых равно $r+1$. Это решение равно нулю во всей области Q.

б) Предположим, что $k_4=0$ (фиг. 3). Тогда характеристики системы (28) через любую точку области Q в направлении убывающих ξ пересекают либо $\tilde{c}_0$, либо $\tilde{c}_2$. Следовательно, Q является дефиниционной областью для $\tilde{c}_0+\tilde{c}_4$. Из теоремы 1 следует, что система (28) имеет нулевое решение во всей области Q. Если $k_0=k_4=Q$, то решение системы (28) только при условиях (29) равно нулю.

4. Предположим, что замкнутая область G является криволинейным трехугольником со сторонами: $\bar{c}_1: u=\varphi_1(v)$, $\bar{c}_2: u=\varphi_2(v)$, $\bar{c}_4: u=\varphi_4(v)$. При замене (27) область G переходит в трехугольник Q в плоскости (ξ, η) со сторонами

$$\tilde{c}_1: \xi=0, \quad \tilde{c}_2: \xi=\varphi_2(\eta)-\varphi_1(\eta), \quad \tilde{c}_4: \xi=\varphi_4(\eta)-\varphi_1(\eta), \quad \eta \in [0, p].$$

И в области Q система (28) при начальных и граничных условиях (29) (30), (31) имеет нулевое решение. Действительно, в случае, когда хотя бы один из индексов k_2, k_4 равен нулю, например, $k_2=0$, область Q является дефиниционной областью для $\tilde{c}_1$ и $\tilde{c}_4$, и по доказанному решение системы (28) равно тождественно нулю во всей области Q. Если характеристики проведены через концы $\tilde{c}_1$ идут во внутренность области Q, то решение системы (28) равно тождественно нулю в четырехугольнике $\tilde{c}_1$, $\tilde{c}_2$, LN, $\tilde{c}_4$, где LN — прямая, проходящая через произвольную внутреннюю точку области Q и параллельная c_1 (фиг. 4). Мы можем получить нулевое решение системы в области Q сколь угодно близко к вершине B, но в самой вершине решение может и не существовать. Следовательно, теорема 2 в силу и для трехугольных областей.

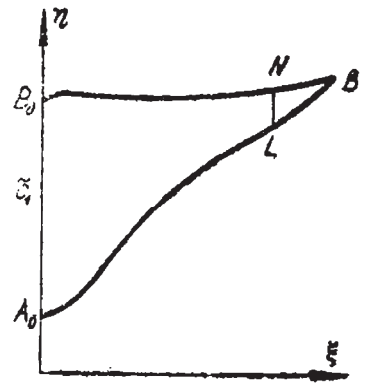
5. Рассмотрим теперь поверхность Φ отрицательной кривизны, которая ограничена кусочно гладкой замкнутой кривой $C=\bigcup c_j$, $j=0, 1, \ldots, m$, и удовлетворяет следующим условиям:

а) $\Phi: \vec{x}=\vec{x}(u, v)$, $(u, v) \in D$, $\vec{x}(u, v) \in C^3$;

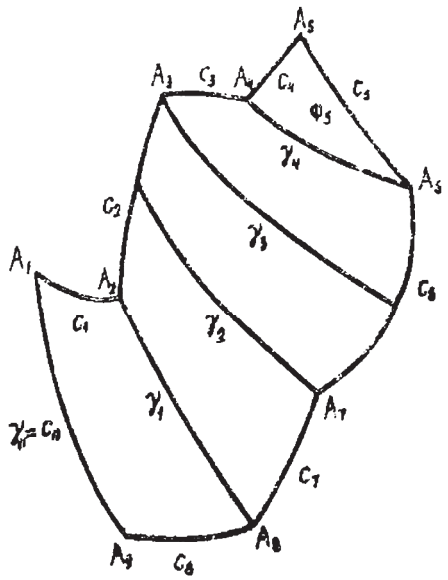
б) D — замкнутая, односвязная область с границей $\Gamma=\bigcup \bar{c}_j$, $j=0, \ldots, m$;

в) кривые c_j, $j=0, 1, \ldots, m$ — простые, гладкие, не касаются друг друга и не касаются к асимптотическим направлениям: $c_j: u=\varphi(v)$, $v \in I$ $(j=0, 1, \ldots, m)$;

г) асимптотическая сеть на поверхности Ф правильная,



Фиг. 4

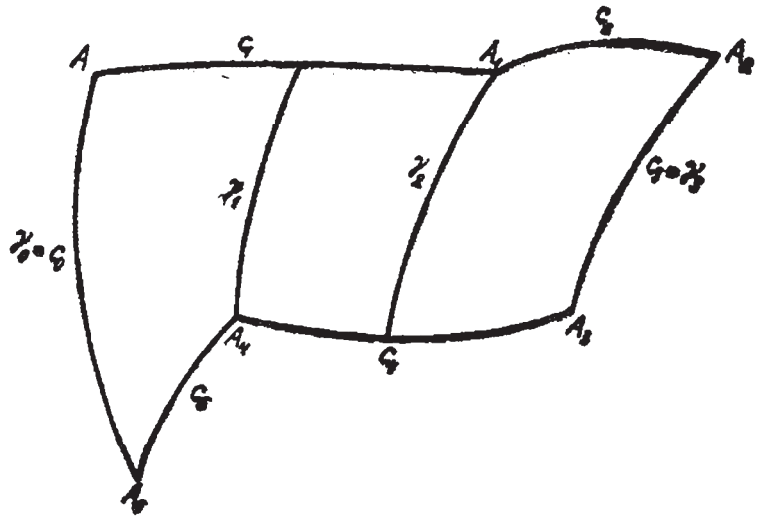


Фиг. 5

д) Если через каждую вершину кривой c, начиная с $c_0=\gamma_0$, последовательно проведем кривые $\gamma_k (k=0, 1, \ldots, m-1$ или $k=0, 1, \ldots, m)$, принадлежащие той фамилии кривых на поверхности Ф, к которой принадлежит c_0, и имеющие уравнения $u=\varphi_0(v)+b$, где b постоянная, то поверхность Ф при помощи этих кривых γ_k разбивается на куски $\Phi_l\{(l=1, \ldots, m)$ или $(l=1, \ldots, m-1)\}$. Каждый кусок $\Phi_l\{l=1, \ldots, m-1\}$ представляет собой поверхность отрицательной кривизны, рассмотренная в 3; это означает, что Φ_l — поверхность, ограниченная четырехугольником $\gamma_{l-1}\, c_p\, \gamma_p\, c_q$, p, q — некоторые числа из $1, \ldots, m$, а кусок Φ_m — трехугольник $j_{m-1}\, c_a\, c_{a+1}$, рассмотренный в 4 (фиг. 5 и 6). Таким

образом $\Phi=\Phi_1\cup\Phi_2\cup\ldots\cup\Phi_m$, где $\Phi_1=c_0c_2\gamma_1c_m'$ или $\Phi_1=c_0c_2'\gamma_1c_m$, $c_2'\subset c_2$, $c_m'\subset c_m$; $\Phi_2=\gamma_1c_m''\gamma_2c_3$, $\Phi_2=\gamma_1c_2''\gamma_2c_{m-1}$ и т. д.

Теорема 3. Поверхность Φ, закрепленная вдоль кривой c_0 и тех кривых c_j $(j=1,\ldots,m)$, которые имеют положительные индексы*, жестка.



Фиг. 6

Доказательство. Прилагаем теорему 2 последовательно к каждому куску Φ_l с начальной линией γ_{l-1} $(l=1,\ldots,m)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ефимов, Н. В.: Поверхности с медленно изменяющейся отрицательной кривизны. Усп. мат. наук, XXI (1966), вып. 5 (131) 3—58.
2. Курант, Р.: Уравнения с частными производными. М., 1964.
3. Minagava, T., Rado, T.: On the infinitesimal Rigidity of Surfaces. Osaka Math. J., 4 (1952), No. 2, 241—285.
4. Campbell, L. L., Robinson, A.: Mixed problems for hyperbolic partial differential equations. Proc. London. Math. Soc. (3), 5 (1955) 129—147.

Постъпила на 14. XII. 1974 г.

* Положительные направления асимптотических относительно кривой c_0.

INFINITESIMAL BENDING OF SURFACES WITH NEGATIVE GAUSSIAN CURVATURE

S. T. Hineva

(SUMMARY)

T. Minagava and T. Rado have proved that a bounded finitely connected surface Φ ($\Phi \in C^2$) with a negative Gaussian curvature, bounded by the piecewise smooth curve C, is rigid if it is fixed along its whole boundary C.

The present article treats infinitesimal bendings of a simple connected surface Φ ($\Phi \in C^2$) with a negative Gaussian curvature bounded by the piecewise smooth curve $C = \bigcup c_j$, $j = 1, 2, \ldots, m$. It has been shown that for such a surface Φ to become rigid it is sufficient to fix it only along those curves $c_j (j = 1, 2, \ldots, m)$ which have a special location to the asymptotic lines of the surface.