ЦЕЛИ ФУНКЦИИ ОТ ЕКСПОНЕНЦИАЛЕН ТИП, ОГРАНИЧЕНИ ВЪРХУ РЕАЛНАТА ОС

Татяна Аргирова

Ще казваме, че една цяла функция $f(z)$ е от експоненциален тип σ ако съществува константа A такава, че

$$|f(z)| \leqq Ae^{\sigma|z|}.$$

Картрайт [1] доказа, че ако една цяла функция от експоненциален тип $\sigma<\pi$ е ограничена в точките $0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n, \ldots$, тя е ограничена и върху цялата реална ос. Тази теорема, станала вече класическа, предизвика редица изследвания от страна на много автори. Получени бяха важни и интересни резултати, които оформиха цяло направление в теорията на целите функции от краен ред.

Бъаз [2] например доказа, че теоремата на Картрайт остава вярна, като заменим числата n с числа λ_n, за които $|\lambda_n - n| < L < 1/2\pi^2$.

Дафин и Шефер [3] обобщиха по-нататък тази теорема, като доказаха следното твърдение:

Нека $\{\lambda_n\}$ е редица, за която

$$|\lambda_n - n| \leqq \Gamma, \quad n=0, \pm 1, \ldots,$$

$$|\lambda_n - \lambda_m| \geqq \gamma > 0, \quad n \neq m,$$

където Γ и γ са константи. Ако $f(z)$ е цяла функция, която удовлетворява условията

$$|f(z)| \leqq Ae^{\sigma|z|}, \quad \sigma<\pi, \quad A=\text{const},$$

$$|f(\lambda_n)| \leqq 1, \quad n=0, \pm 1, \ldots,$$

тогава е в сила неравенството

$$|f(z)| \leqq Ne^{\sigma|y|}, \quad N=N(\Gamma, \gamma, \sigma)=\text{const}, \quad z=x+iy.$$

Да отбележим изрично, че константата N не зависи нито от функцията f, нито от константата A.

Кореваар [4] обобщи теоремата на Картрайт в друго направление. Той увеличи типа σ на функцията $f(z)$, като за сметка на това поиска ограниченост в целите точки не само на функцията, а и на производните ѝ до известен ред. Неговата теорема гласи:

Нека s е цяло положително число. Ако $f(z)$ е цяла функция от експоненциален тип, удовлетворяваща условията

$$|f^{(k)}(n)|=C,\quad k<0,\ 1,\ 2,\ldots,\ s-1,\ n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ldots,\ C=\text{const},$$

и ако върху лъчите $\arg z=\varphi_1$, $\arg z=\varphi_1+\pi$ типът на $f(z)$ е по-малък от типа на функцията $\sin^s \pi z$, т. е. ако за някакви константи $\beta>0$, $\delta>0$ е в сила неравенството

$$|f(z)|<\beta\, e^{(s\pi\,|\sin y|-\delta)r},\quad z=re^{i\varphi},\ \varphi=\varphi_1,\ \varphi=\varphi_1+\pi,$$

то $f(z)$ е ограничена върху реалната ос:

$$|f(x)|\leqq K=K(s,\ \delta,\ C).$$

За да докаже своята теорема, Кореваар установява най-напред, че $f(z)$ е ограничена върху реалната ос, а след това — че нейната горна граница не зависи от β и φ_1. Доказателството на първата част се основава на интерполационни формули и е доста сложно. Във втората част се използват някои расъждения на Дафин и Шефер от [3].

Като използуваме по подходящ начин изящния метод на Дафин и Шефер [3], ние ще докажем една теорема, която обобщава теоремата на Кореваар в същата посока, в която Дафин и Шефер обобщават теоремата на Картрайт.

Теорема 1. Нека $f(z)$ е цяла функция от експоненциален тип $s\sigma$, където s е цяло положително число и $\sigma<\pi$. Това означава, че за всяко z е в сила неравенството

$$f(z)<Ae^{s\sigma|z|},\quad A=\text{const}. \tag{1}$$

Нека $\{\lambda_n\}_{-\infty}^{\infty}$ е редица от точки, за която съществуват константи Γ и γ такива, че са в сила неравенствата

$$|\lambda_n-n|<\Gamma,\quad n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ldots, \tag{2}$$

$$|\lambda_n-\lambda_m|\geqq\gamma>0,\quad n\neq m. \tag{3}$$

Ако

$$|f^{(k)}(\lambda_n)|\leqq 1,\quad k=0,\ 1,\ldots,\ s-1,\qquad n=0,\ \pm 1,\ldots,$$

то функцията $f(z)$ е ограничена върху реалната ос. Нещо повече,

$$|f(x)|\leqq N(\Gamma,\ \gamma,\ s,\ \sigma),\quad -\infty<x<\infty,$$

т. е. константата N е една и съща за всички функции $f(z)$, удовлетворяващи изброените условия.

Както ще се убедим, тази теорема следва лесно от подобна теорема, отнасяща се до функции, холоморфни в дясната полуравнина $\operatorname{Re} z\geqq 0$.

Теорема 2. Нека $f(z)$ е холоморфна в полуравнината $\operatorname{Re} z\geqq 0$ и удовлетворява условието

$$|f(z)|\leqq e^{s\sigma|z|},\quad \sigma<\pi,\ \operatorname{Re} z\geqq 0. \tag{4}$$

Нека освен това за $n>\Gamma$ имаме

$$|f^{(k)}(\lambda_n)|\leqq 1,\quad k=0,\ 1,\ldots,\ s-1, \tag{5}$$

където $\{\lambda_n\}$ е редица, за която са изпълнени неравенствата

(6) $$|\lambda_n - n| \leqq \Gamma, \quad n > \Gamma$$

и

(7) $$|\lambda_n - \lambda_m| \geqq \gamma > 0, \quad n \neq m.$$

В такъв случай е в сила оценката

$$|f(z)| \leqq M(\Gamma, \gamma, s, \sigma) e^{s\sigma|y|}, \quad x \geqq 0 \quad (z = x + iy).$$

Най-напред, предполагайки допълнително, че $f(z)$ е ограничена за $x \geqq 0$, ще докажем, че $\sup\limits_{x \geqq 0} |f(x)|$ се мажорира от константа, зависеща само от Γ, γ, s и σ. По-точно, ще установим следната

Теорема 3. Нека $\{\lambda_n\}$ е редица, удовлетворяваща условията (6) и (7). Ако $f(z)$ е холоморфна в полуравнината $x \geqq 0$, удовлетворява условията (4) и (5) и освен това

(8) $$f(x) = O(1), \quad x \to \infty,$$

тогава

$$|f(x)| \leqq M(\Gamma, \gamma, s, \sigma), \quad x \geqq 0.$$

Преди да пристъпим към доказателството на теорема 3, ще докажем едно помощно твърдение.

Лема 1. Нека $f(z)$ е цяла функция, за която

(9) $$|f(z)| \leqq A e^{s\sigma|y|}, \quad \sigma < \pi.$$

Нека точките λ_n, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, са s-кратни нули на функцията $f(z)$, като редицата $\{\lambda_n\}$ удовлетворява условията (2) и (3). Тогава функцията $f(z)$ е тъждествено равна на нула.

Доказателство. Да допуснем противното — че $f(z) \not\equiv 0$. В такъв случай можем да приемем, че $f(0) \neq 0$. Да положим $p = [\Gamma] + 1$. От неравенствата $|\lambda_m| < n + p$, $n < 0, \pm 1, \ldots$, заключаваме, че в кръга $|z| \leqq m + p$ лежат поне $2ms$ нули на функцията $f(z)$ — точките λ_n, $n = 0, \pm 1, \ldots, \pm m$, всяка от които е нула от кратност s. Оттук въз основа на формулата на Йензен [5] получаваме неравенството

(10) $$\ln \frac{(m+p)^{2ms}}{\prod\limits_{n=-m}^{m} |\lambda_n|^s} \leqq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(m+p) e^{i\theta}| \, d\theta - \ln |f(0)|.$$

По-нататък, като вземем пред вид неравенството

$$\prod_{n=-m}^{m} |\lambda_n| \leqq p(p+1)^2 \cdots (p+m)^2 \leqq [(m+p)!]^2,$$

с помощта на формулата на Стирлинг намираме

(11) $$\varliminf_{m \to \infty} \frac{1}{m+p} \ln \frac{(m+p)^{2ms}}{\prod\limits_{n=-m}^{m} |\lambda_n|^s} \geqq \lim_{m \to \infty} \ln \frac{(m+p)^{2ms}}{[(m+p)!]^{2s}} = 2s.$$

От друга страна, от (9) следва $\ln|f(m+p)e^{i\theta}| \leqq s\sigma(m+p)|\sin\theta| + \ln A$, откъдето получаваме оценката

$$(12)\qquad \overline{\lim}\,\frac{1}{2\pi(m+p)}\left[\int_0^{2\pi}\ln|f(m+p)e^{i\theta}|\,d\theta - \ln|f(0)|\right] \leqq \frac{2s\sigma}{\pi} < 2s\,.$$

Но неравенствата (11) и (12) очевидно противоречат на (10). Следователно $f(z)$ се анулира тъждествено.

Доказателство на теорема 3. Нека константите Γ, γ, s и σ са фиксирани. Да допуснем, че не съществува константа $M=M(\Gamma, \gamma, \sigma, s)$, независеща от функцията f. В такъв случай може да се намери редица от функции $\{f_\nu(z)\}$, които удовлетворяват условията на теорема 3, но въпреки това $c_\nu = \sup\limits_{x\geqq 0}|f_\nu(x)| \to \infty$, когато $\nu\to\infty$. Редицата $\{f_\nu(z)\}$ можем да изберем по такъв начин, че да имаме $c_\nu > \nu$. Нека $\{\lambda_n^\nu\}$ е редицата, съответствуваща на функцията $f_\nu(z)$, т. е. нека са в сила неравенствата

$$|f_\nu^{(k)}(\lambda_n^\nu)| \leqq 1, \quad k=0,\ 1,\ 2,\ldots,\ s-1,\ n>\Gamma.$$

Понеже $f_\nu(z)$ удовлетворява (4) и освен това $|f_\nu(x)| \leqq c_\nu$ за $x \geqq 0$, с помощта на принципа на Фрагмен — Линдельоф [6, гл. 6] заключаваме, че

$$|f_\nu(z)| \leqq c_\nu e^{s\sigma|y|},\ x \geqq 0\ (z=x+iy).$$

Нека реалното число x_ν е избрано по такъв начин, че $|f_\nu(x_\nu)| \geqq c_\nu\left(1-\frac{1}{\nu}\right)$. Условието (4) показва, че $x_\nu\to\infty$, когато $\nu\to\infty$. Да положим $\psi_\nu(z) = \frac{1}{c_\nu} f_\nu(z+[x_\nu])$, където $[x_\nu]$ е цялата част на x_ν. Функцията $\psi_\nu(z)$ е холоморфна в полуравнината $x \geqq -[x_\nu]$ и удовлетворява неравенствата

$$(13)\qquad |\psi_\nu(z)| \leqq e^{s\sigma|y|},\ x \geqq -[x_\nu],$$

$$(14)\qquad \max_{0\leqq x\leqq 1}|\psi_\nu(x)| \geqq 1-\frac{1}{\nu},$$

$$(15)\qquad |\psi_\nu^{(k)}(\mu_n^\nu)| \leqq \frac{1}{c_\nu},\ k=0,\ 1,\ldots,\ s-1,$$

за всяко $n>\Gamma-[x_\nu]$. Тук $\mu_n^\nu = \lambda_{n+[x_\nu]}^\nu - [x_\nu]$. При това очевидно имаме

$$(16)\qquad |\mu_n^\nu - n| = |\lambda_{n+[x_\nu]} - (n+[x_\nu])| < \Gamma,\ n>\Gamma-[x_\nu]$$

и

$$(17)\qquad |\mu_n^\nu - \mu_m^\nu| \geqq \gamma > 0,\ n\neq m.$$

Както показва (13), принципът за компактност е приложим към редицата $\{\psi_\nu(z)\}$. Следователно можем да изберем подредица $\{\psi_{\nu_k}(z)\}$, клоняща към някаква цяла функция $\psi(z)$. Сега въз основа на (13) получаваме

(18) $$|\psi(z)| \leqq e^{s\sigma|y|},$$

а неравенството (14) ни дава

(19) $$\max_{0\leqq x\leqq 1} |\psi(x)| = 1,$$

което между другото показва, че функцията $\psi(z)$ не е тъждествено равна на нула.

От друга страна, (16) показва, че при фиксирано n редицата $\{\mu_n^\nu\}_{\nu=1}^\infty$ е ограничена. Следователно с помощта на Канторовия диагонален процес можем да изберем подредицата $\{\nu_k\}$ по такъв начин, че всяка от редиците $\{\mu_\nu^{\nu_k}\}_{k=1}^\infty$ да е сходяща. Нека това е направено и нека $\mu_n^{\nu_k} \underset{k\to\infty}{\to} \mu_n$. Извършвайки граничен преход в неравенствата (15), получаваме

(20) $$\psi^{(q)}(\mu_n) = 0, \quad q = 0, 1, \ldots, s-1, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

По същия начин от (16) и (17) следват неравенствата

$$|\mu_n - n| \leqq \Gamma, \quad |\mu_n - \mu_m| \geqq \gamma > 0, \quad n \neq m,$$

които заедно с (18) и (20) показват, че предположенията на лема 1 са налице. Следователно $\psi(z) \equiv 0$, което противоречи на (19).

С това теорема 3 е доказана.

Доказателство на теорема 2. Нека $f(z)$ удовлетворява условията на теорема 2. Да положим

$$\rho = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln|f(x)|}{x}$$

и да изберем положителната константа a по такъв начин, че да имаме $a > \frac{\rho+\rho'}{2}$. След това да въведем функцията

$$g_\nu(z) = f(z)\, e^{-az} \sum_{p=0}^{\nu} \frac{(\varepsilon z)^p}{p!}, \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots,$$

където положителното число ε е подчинено на условията $\varepsilon < a$ и $\varepsilon < \frac{\pi-\sigma}{2} s$. Понеже

$$\left| \sum_{p=0}^{\nu} \frac{\varepsilon(z)p}{p!} \right| \leqq e^{\varepsilon|z|}, \quad \nu = 1, 2, \ldots,$$

в полуравнината $\operatorname{Re} z \geqq 0$ имаме

$$|g_\nu(z)| \leqq |f(z)|\, e^{\varepsilon|z|} \leqq e^{(s\sigma+\varepsilon)|z|} \leqq e^{\frac{\sigma+\pi}{2} s|z|} = e^{s\sigma_1|z|},$$

където $\sigma_1 = \frac{\sigma+\pi}{2} < \pi$. По-нататък, ако $\lambda_n = \mu_n + i\tau_n$, то

$$|g_\nu(\lambda_n)| \leqq e^{-a\mu_n} e^{\varepsilon|\lambda_n|} \leqq e^{\varepsilon\Gamma}, \quad n > \Gamma,$$

тъй като $\varepsilon|\lambda_n| - a\mu_n \leqq \varepsilon(\mu_n + |\tau_n|) - \varepsilon\mu_n = \varepsilon|\tau_n| \leqq \varepsilon\Gamma$.

С помощта на леки пресмятания се убеждаваме, че за производните на $g_\nu(z)$ са в сила неравенствата

$$|g_\nu^{(k)}(\lambda_n)| \leqq C_k e^{\varepsilon\Gamma}, \quad k=0, 1, \ldots, s-1,$$

с константи $C_k = C_k(a, \varepsilon) > 1$ такива, че $C_k(a, \varepsilon) \to 1$, когато $a \to 0$, $\varepsilon \to 0$.

Понеже $g_\nu(x) \to 0$ за $x \to \infty$, както непосредствено се вижда от дефиницията на $g_\nu(z)$, тази функция е ограничена за $x \geqq 0$. Следователно функцията

$$\frac{g_\nu(x)}{Ce^{\varepsilon\Gamma}}, \text{ където } C = \max(C_1, C_2, \ldots, C_{s-1}),$$

удовлетворява условията на теорема 3, като σ_1 играе ролята на σ. По такъв начин получихме неравенството

$$|g_\nu(x)| \leqq Ce^{\varepsilon\Gamma} M(\Gamma, \gamma, \sigma, \varepsilon), \quad x \geqq 0,$$

откъдето, извършвайки граничния преход $\nu \to \infty$ при фиксирани a и ε, получаваме

$$|f(x)| \leqq e^{(a-\varepsilon)x} Ce^{\varepsilon\Gamma} M(\Gamma, \gamma, s, \sigma), \quad x \geqq 0. \tag{21}$$

Сега ще покажем, че $\rho \leqq 0$. Да допуснем противното, че $\rho > 0$. Да подчиним числото $\varepsilon > 0$ на допълнителното условие $0 < \varepsilon < \rho$. Като фиксираме ε и оставим a да клони към ρ (тъй като $a > \rho$, а $\varepsilon < \rho$, това няма да наруши условието $\varepsilon > a$), от (21) получаваме

$$|f(x)| \leqq e^{(\rho-\varepsilon)x} \cdot C^* e^{\varepsilon\Gamma} M(\Gamma, \gamma, s, \sigma), \quad x \geqq 0, \quad (C^* = \lim_{a\to\rho} C),$$

което противоречи на дефиницията на ρ. Следователно $\rho \leqq 0$. Това обстоятелство пък ни позволява да оставим в (21) a и ε да клонят към нула, без да нарушим някое от условията, на които те са подчинени (в разглеждания случай $\rho + |\rho| = 0$). Така получаваме

$$|f(x)| \leqq M(\Gamma, \gamma, s, \sigma), \quad x \geqq 0,$$

откъдето благодарение на принципа на Фрагмен — Линдельоф следва неравенството

$$|f(z)| \leqq Me^{s\sigma|y|}, \quad M = M(\Gamma, \gamma, s, \sigma), \quad x \geqq 0.$$

С това теорема 2 е доказана.

Следствие от теорема 2.

Нека $\{\lambda_n\}$ е редица, за която важат условията (6) и (7). Ако функцията $f(z)$ е холоморфна в полуравнината $\operatorname{Re} z \geqq 0$ и удовлетворява неравенствата

$$\begin{aligned} &|f(z)| \leqq Ae^{s\sigma|z|}, \quad \sigma < \pi, \quad A = \text{const}, \\ &|f^{(k)}(\lambda_n)| \leqq 1, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, s-1, \quad n > \Gamma, \end{aligned} \tag{22}$$

тогава

$$|f(x)| \leqq N = N(\Gamma, \gamma, s, \sigma), \; x \geqq \frac{A_1^2}{(\pi-\sigma)s},$$

където A_1 е константа, евентуално по-голяма от A.

Да отбележим изрично, че константата N не зависи от A.

Да положим $\beta = 2\frac{\ln A}{(\pi-\sigma)s}$ и $\tau = \beta A$. Най-напред ще разгледаме случая, когато константата A от (22) удовлетворява допълнителните условия

$$A > 1 \text{ и } \frac{2A\ln A}{(\pi-\sigma)s} > 1, \text{ т. е. } \tau > 1. \tag{23}$$

Да разгледаме сега функцията

$$g(z) = \frac{z}{z+\tau} f(z).$$

Лесно се вижда, че в полуравнината $\operatorname{Re} z \geqq 0$ са изпълнени неравенствата

$$\left|\frac{1}{z+\tau}\right| \leqq \frac{1}{\tau} < 1, \quad \left|\frac{z}{z+\tau}\right| < 1, \tag{24}$$

благодарение на които в същата полуравнина за функцията $g(z)$ получаваме

(25)
а) ако $|z| \leqq \beta$, то $|g(z)| \leqq \beta\tau^{-1}|f(z)| \leqq A^{-1}Ae^{s\sigma z} = e^{s\sigma|z|}$;
б) ако $|z| \geqq \beta$, то $|g(z)| \leqq |f(z)| \leqq Ae^{s\sigma|z|} = e^{\ln A + s\sigma|z|}$

$$\leqq e^{\beta\frac{\pi-\sigma}{2}s + s\sigma|z|} \leqq e^{|z|\frac{\pi-\sigma}{2}s + s\sigma|z|} = e^{s\sigma_1|z|},$$

където $\sigma_1 = \frac{\sigma+\pi}{2} < \pi$.

Тъй като в полуравнината $\operatorname{Re} z \geqq 0$ очевидно имаме $|g(z)| \leqq |f(z)|$, в сила са и неравенствата

$$|g(\lambda_n)| \leqq |f(\lambda_n)| \leqq 1 \text{ (при } n > \Gamma \text{ имаме } \operatorname{Re}\lambda_n \geqq 0).$$

Като пресметнем производните на $g(z)$ до ред $s-1$ и използуваме неравенства, подобни на тези от (24), получаваме оценките[1]

$$|g^{(k)}(\lambda_n)| \leqq C_k, \; k = 0, 1, \ldots, s-1, \; n > \Gamma,$$

с константи C_k, независещи нито от функцията f, нито от константата A. При това $C_k > 1$.

Нека $C = \max(C_1, C_2, \ldots, C_{s-1})$.

Горните разглеждания показват, че функцията $\frac{g(z)}{C}$ удовлетворява

[1] Именно тук се използува условието $\tau > 1$.

условията на теорема 2, като ролята на σ играе σ_1 (вж. (25)). Следователно

$$\frac{g(x)}{C} \leqq M = M(\Gamma, \gamma, s, \sigma), \quad x \geqq 0,$$

или все едно

$$|g(x)| \leqq M_1(\Gamma, \gamma, s, \sigma).$$

Като изразим $f(x)$ чрез $g(x)$ и вземем пред вид, че $\frac{x+\tau}{2} \leqq 2$ за $x \geqq \tau$, получаваме

$$|f(x)| \leqq 2M_1(\Gamma, \gamma, s, \sigma), \quad x \geqq \tau.$$

Понеже $\tau = \frac{2A \ln A}{(\pi-\sigma)s} \leqq \frac{A^2}{(\pi-\sigma)s}$, в крайна сметка можем да напишем оценката

$$|f(x)| \leqq N(\Gamma, \gamma, s, \sigma), \quad x \geqq \frac{A^2}{(\pi-\sigma)s}.$$

Очевидно, ако за дадена функция $f(z)$ е в сила неравенството (22) с константа A, която не удовлетворява (23), то заменяйки A с константа, по-голяма от нея, се убеждаваме, че формулираното следствие от теорема 2 е вярно и в този случай.

След всичко това сме в състояние да докажем основната теорема 1.

Доказателство на теорема 1. Лесно се вижда, че щом функцията $f(z)$ удовлетворява условията на теорема 1, то както $f(z)$, така и $f(z)$ изпълняват изискванията на току-що доказаното следствие на теорема 2. Оттук веднага следва, че функцията $f(z)$ е ограничена върху цялата реална ос, което заедно с (1) ни позволява да приложим принципа на Фрагмен — Линдельоф, за да получим оценката

$$|f(z)| \leqq Ce^{s\sigma|z|}, \quad B = \text{const}. \tag{26}$$

Нека m е произволно избрано естествено число. Да разгледаме функцията

$$g_m(z) = f(z-m).$$

От (26) се вижда, че $g_m(z)$ удовлетворява неравенството

$$|g_m(z)| \leqq Ce^{s\sigma|y|} \leqq Ce^{s\sigma|z|}.$$

Да положим сега $\mu_n = \lambda_{n-m} + m$, $n = 0, \pm 1, \ldots$ Имаме

$$|\mu_n - n| = |\lambda_{n-m} - (n-m)| < \Gamma, \quad n = 0, \pm 1, \ldots,$$

$$|\mu_n - \mu_k| = |\lambda_{n-m} - \lambda_{k-m}| \geqq \gamma, \quad n \neq k.$$

Тъй като $|f^{(\nu)}(\lambda_n)| \leqq 1$, то $|g_m^{(\nu)}(\mu_n)| \leqq 1$, $\nu = 0, 1, \ldots, s-1$, за всяко цяло n.

От всичко казано дотук следва, че условията на следството на теорема 2 са в сила за функцията $g_m(z)$, поради което имаме

$$|g_m(x)| \leqq N = N(\Gamma, \gamma, s, \sigma), \; x \geqq \frac{C_1^2}{(\pi-\sigma)s},$$

което от своя страна показва, че

$$|f(x)| = |g_m(x \leqq m)| < N(\Gamma, \gamma, s, \sigma)$$

за всяко x, за което $x > -m + \frac{C_1^2}{(\pi-\sigma)s}$. Поради произволния избор на естественото число m можем да заключим, че оценката

$$|f(x)| \leqq N(\Gamma, \gamma, s, \sigma)$$

е вярна за всяко реално x.

С това теорема 1 е доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Cartwright, M. L.: On certain integral functions of order one. Quarterly J. of Math. (Oxford Series), 7 (1936), 46—55.
2. Boas, R. P. Jr.: Entire functions bounded on a line. Duke Math. J., 6 (1940), 148—169.
3. Duffin, R. J., Schaeffer, A. C.: Power series with bounded coefficients. Amer. J. Math., 67 (1945), 141—154.
4. Korevaar, J.: Functions of exponential type bounded on sequences of points. Ann. Soc. Polon. Math., 22 (1949), 207—234.
5. Titchmarsh, E.: Theory of functions. Oxford, 1939, 2nd. ed.
6. Boas, R. P. Jr.: Entire functions. New York, 1954.

Постъпила на 18. XII. 1974 г.

ENTIRE FUNCTIONS OF EXPONENTIAL TYPE BOUNDED ON THE REAL AXIS

T. Argirova

(SUMMARY)

In this paper, by means of a method of Duffin and Scheaffer [3] is proved the following

Theorem. Let $f(z)$ be an entire function which satisfies the inequality

(1) $$|f(z)| < Ae^{s\sigma|z|},$$

where $s>0$ is an integer, $\sigma<\pi$, $A=\text{const}$. Further, let $\{\lambda_n\}$ be a sequence of points such that

$$|\lambda_n - n| < \Gamma, \; n = 0, \pm 1, \ldots$$

and

$$|\lambda_n - \lambda_m| \geqq \gamma > 0$$

for some constants Γ and γ.

If

(2) $$|f^{(k)}(\lambda_n)| \leqq 1, \quad k=0, 1, \ldots, s-1, \quad n=0, \pm 1, \ldots$$

then $f(z)$ is bounded on the real axis. Moreover, there is a constant $N(\Gamma, \gamma, s, \sigma)$ such that the estimate

$$|f(x)| \leqq N(\Gamma, \gamma, s, \sigma)$$

is verified for every function subject to the conditions (1) and (2).

In the case $\lambda_n = n$ this theorem is proved by Korevaar [4] under somewhat less restrictive conditions.