КЕЛЕРОВО МНОГООБРАЗИЕ С ЛИНЕЙНА ВРЪЗКА МЕЖДУ ХОЛОМОРФНИТЕ КРИВИНИ НА ДВОЙКА ОРТОГОНАЛНИ НАПРАВЛЕНИЯ

Грозьо Станилов

Нека (M, g, J) е келерово многообразие с реална димензия $2n$. Ако u е единичен вектор в допирателното пространство M_z на M в $z \in M$, определени са следните кривини за u:

а) кривината $S(u, u)$ на Ричи;

б) холоморфната кривина $H(u)$ като секционна кривина на двумерното J-инвариантно подпространство на M_z, определено с векторите u, Ju;

в) холоморфната кривина $H(^{\perp}uJu)$ на ортогоналното допълнение в M_z на (u, Ju).

Естествено е да се разгледа следният условно наречен тук проблем на Бертран за келерови многообразия: да се изследва келеровото многообразие (M, g, J), ако е в сила следната зависимост:

$$pS(u, u)+q\,H(u)+rH(^{\perp}uJu)=c' \tag{1}$$

за всяко направление $u \in M_z$ и за всяка точка $z \in M$. При това p, q, r са реални константи, а c' — реалнозначна функция.

Най-напред ще отбележим, че при някои стойности на коефициентите зависимостта (1) не е ограничение за многообразието. Например за произволно келерово многообразие е в сила зависимостта (1) при $p=2$ $q=-1$, $r=1$, $c'=S(z)$:

$$2S(u, u)-H(u)+H(^{\perp}uJu)=S(z), \tag{2}$$

където $S(z)$ е скаларната кривина на многообразието M в точката z Проверката на това равенство е непосредствена [1], [2].

Ако елиминираме кривината $H(^{\perp}uJu)$ от (1) и (2), получаваме равенството

$$(p-2r)S(u, u)+(q+r)H(u)=c, \tag{3}$$

където $c=c'-rS(z)$. Получената зависимост е от вида (1), като $r=0$. Оттук въз основа непосредствено на изследванията ни в [3] можем да формулираме следната

Теорема 1. Нека за келеровото многообразие (M, g, J) с реална димензия $2n$ е в сила зависимостта (1). Тогава:

а) $q=0$, $r=0$, $p\neq 0 \Longleftrightarrow M$ е айнщайново многообразие,

б) $q=-1$, $r=1$, $p=2 \Longleftrightarrow M$ е произволно многообразие,

в) $q=-1$, $r=1$, $p\neq 2 \Longleftrightarrow M$ е айнщайново многообразие,

г) $p(n+2)+4q-2nr\neq 0 \Longleftrightarrow M$ е келерово многообразие с тензор на Бохнер $B=0$;

д) $p(n+2)+4q-2nr=0 \Longleftrightarrow M$ е келерово многообразие с постоянна холоморфна кривина.

Да вземем равенството [4]

$$H(i_1 i_2 \ldots i_p)=\sum_{i=i_1<i_2<\ldots<i_p} H_i+2\sum_{\lambda,\mu=i_1,i_2,\ldots,i_p}^{\lambda<\mu} H_{\lambda\mu} \tag{4}$$

за обобщената холоморфна кривина $H(i_1 i_2 \ldots i_p)$ на $2p$-мерното J — инвариантно допирателно подпространство на M_z, определено с векторите $u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_p}, Ju_{i_1}, Ju_{i_2}, \ldots, Ju_{i_p}$ на една адаптирана база $u_1, u_2, \ldots, u_n, Ju_1, Ju_2, \ldots, Ju_n$ за M_z. В (4) $H_i=H(u_i)$ е холоморфната кривина на u_i, а $H_{\lambda\mu}=H(u_\lambda, u_\mu)$ е бисекционната холоморфна кривина за u_λ и u_μ [6]. Като съберем равенствата (4), написани за всички $1\leqq i_1<i_2<\ldots<i_p\leqq n$, получаваме равенството

$$\sum_{1\leqq i_1<i_2<\ldots<i_p\leqq n} H(i_1 i_2 \ldots i_p)=\binom{n-2}{p-2}\left[\frac{n-1}{p-1}\sum_{i=1}^{n} H_i+2\sum_{1\leqq i<j\leqq n} H_{ij}\right]. \tag{5}$$

Като вземем пред вид, че

$$S(z)=\sum_{i=1}^{n} H_i+2\sum_{1\leqq\lambda<\mu\leqq n} H_{\lambda\mu}, \tag{6}$$

(5) приема вида

$$\sum_{1\leqq i_1<i_2<\ldots<i_p\leqq n} H(i_1 i_2 \ldots i_p)=\binom{n-2}{p-2}\left[\frac{n-p}{p-1}\sum_{i=1}^{n} H_i+S(z)\right]. \tag{7}$$

От нашата работа [3] използуваме следното твърдение:

$$B=0 \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n} H_i=\text{const},$$

т. е. келеровото многообразие има тензор на Бохнер $B=0$ точно когато сумата $\sum_{i=1}^{n} H_i$ не зависи от адаптираната база на M_z. Като използуваме това твърдение и от (7), получаваме

Теорема 2. Нека келеровото многообразие (M, g, J) има реална димензия $2n$. Следните две твърдения са еквивалентни:

а) $B=0$;

б) $\sum\limits_{1\leqq i_1<i_2<\ldots<i_p\leqq n} H(i_1 i_2\ldots i_p)=\text{const}$ за фиксирано p от редицата $1, 2, \ldots, n$.

След тези предварителни бележки да разгледаме следната обща задача: да се изследва келерово многообразие (M, g, J) с реална димензия $2n$, ако е в сила линейната зависимост

$$\lambda H(E_{2p})+\mu H(\perp\varepsilon_{2p})=c_p, \tag{8}$$

като λ, μ са реални числа, а c_p — реалнозначна функция.

Съгласно (8) написваме

$$\lambda H(12\ldots p)+\mu H(p+1\ldots n)=c_p, \tag{9}$$

а също така и равенството

$$\lambda H(12\ldots p-1i)+\mu H(p+1\ldots \hat{i}\ldots n)=c_p, \tag{10}$$

като знакът ^ означава, че съответният индекс се изпуска. Написваме равенствата (10) за $i=p, p+1, \ldots, n$ и събираме получените равенства. Като вземем пред вид равенството

$$H(12\ldots p-1\,;\ pp+1\ldots n)=S(z)-H(12\ldots p-1)-H(pp+1\ldots n), \tag{11}$$

получаваме

$$\begin{aligned}&\lambda(n-p)H(12\ldots p-1)+(\mu(n-p-1)-\lambda)H(pp+1\ldots n)\\ &-(\lambda+\mu)\sum_{i=1}^{p-1}H_i=(n-p+1)c-\lambda S(z)-(\lambda+\mu)\sum_{i=1}^{n}H_i.\end{aligned} \tag{12}$$

От друга страна, съгласно (10) можем да напишем

$$\lambda H(i_1 i_2\ldots i_p)+\mu H(i_{p+1} i_{p+2}\ldots i_n)=c \tag{13}$$

за $1\leqq i_1<i_2<\ldots<i_p\leqq n$. Като съберем тези равенства и използуваме (7), получаваме

$$(\lambda+\mu)\sum_{i=1}^{n}H_i=\frac{n(n-1)}{p(n-p)}c-\lambda\frac{p-1}{n-p}S(z)-\mu\frac{n-p-1}{p}S(z). \tag{14}$$

Следователно има да разгледаме два случая:

Първи случай: $\lambda+\mu\neq 0$.

В този случай (14) показва, че $\sum\limits_{i=1}^{n}H_i=\text{const}$ и следователно $B=0$.

Като вземем пред вид структурата на тензора на кривината за келерово многообразие с тензор на Бохнер $B=0$

$$(15)\qquad g(R(x,y)z,u)=\frac{1}{2n+4}\,[g(y,z)S(x,u)-g(y,u)S(x,z)$$
$$+g(x,u)S(y,z)-g(x,z)S(y,u)$$
$$+g(Jy,z)S(Jx,u)-g(Jy,u)S(Jx,z)$$
$$+g(Jx,u)S(Jy,z)-g(Jx,z)S(Jy,u)$$
$$-2g(Jx,y)S(Jx,u)-2g(Jz,u)S(Jx,y)]$$
$$\frac{-2S}{(2n+4)(2n+2)}\,[g(y,z)g(x,u)-g(x,z)g(y,u)+g(Jy,z)g(Jx,u)$$
$$-g(Jx,z)g(Jy,u)-2g(Jx,y)g(Jz,u)],$$

намираме

$$(16)\qquad H(12\ldots p)=\frac{p+1}{n+2}\left[2\sum_{i=1}^{p}S_i-\frac{p}{n+1}\;S(z)\right]$$

и аналогично

$$(17)\qquad H(p+1\ldots n)=\frac{n-p+1}{n+2}\left[2\sum_{i=p+1}^{n}S_i-\frac{n-p}{n+1}\;S(z)\right].$$

От (16) и (17) забелязваме, че е в сила зависимостта

$$(18)\qquad \frac{1}{p+1}\,H(12\ldots p)+\frac{1}{n-p+1}\,H(p+1\ldots n)=\mathrm{const}.$$

Нека

$$(19)\qquad D=\begin{vmatrix}\lambda & \mu\\ \dfrac{1}{p+1} & \dfrac{1}{n-p+1}\end{vmatrix}.$$

Логично възможни са следните два подслучая:

а) $D=0$. В този случай след подходящо нормиране получаваме $\lambda=\frac{1}{p+1}$, $\mu=\frac{1}{n-p+1}$. Следователно (M, g, J) е келерово многообразие с тензор на Бохнер $B=0$.

б) $D\neq 0$. От (9) и (18) заключаваме, че $H(12\ldots p)=\mathrm{const}$. Като вземем пред вид и (16), следва, че $S(u,u)=\mathrm{const}$. И тъй (M, g, J) има тензор на Бохнер $B=0$ и е айнщайново. Следователно многообразието има постоянна холоморфна кривина.

Втори случай: $\lambda+\mu=0$. Ако нормираме с $\lambda=1$, следва $\mu=-1$ и (9) приема вида

(9′) $$H(12\ldots p)-H(p+1\ldots n)=c_p$$

а (12)

(12′) $$H(12\ldots p-1)-H(pp+1\ldots n)=\frac{n-p+1}{n-p}\,c_p.$$

И така от (9′) е получено (12′). Аналогично следва

$$H(12\ldots p-2)-H(p-1\,p\ldots n)=\text{const}.$$

Като продължим този процес, ще достигнем до равенството

$$H(1)-H(23\ldots n)=\text{const},$$

което въз основа на теорема 1, в) показва, че (M, g, J) е айнщайново многообразие. От равенството (14) намираме

(20) $$c_p=\frac{2p-n}{n}\,S(z).$$

В частност при четно n $c_{\frac{n}{2}}=0$, както и трябва да се очаква.

Резултатите, получени след теорема 2, ще резюмираме със следната

Теорема 3. Нека (M, g, J) е келерово многообразие с реална димензия $2n$ и нека е в сила зависимостта

(8) $$\lambda H(E_{2p})+\mu H(^{\perp}E_{2p})=\text{const}$$

за фиксирано $p=1,2,\ldots,n-1$ и за всяко $2p$-мерно J-инвариантно допирателно подпространство E_{2p} на Mz за всяко z. Тогава

а) $\lambda=1$, $\mu=-1 \Longleftrightarrow M$ е айнщайново многообразие;

б) $\lambda=\dfrac{1}{p+1}$, $\mu=\dfrac{1}{n-p+1} \Longleftrightarrow B=0$;

в) в останалите случаи за λ, $\mu \Longleftrightarrow H(u)=\text{const}$.

В частност при $\mu=0$ (или $\lambda=0$) от

$$H(E_{2p})=\text{const}$$

следва $H(u)=\text{const}$.

Ще отбележим, че получените тук резултати обобщават всичките резултати в работата [5]. Действително равенството

$$H(E_{2p};\ ^{\perp}E_{2p})=\text{const}$$

е еквивалентно на равенството

$$H(E_{2p})+H(E_{2p})^{\perp}=\text{const}.$$

Остава да се приложи теорема 3 за $\lambda=\mu=1$. Случаят б) води до $p=\frac{1}{2}n$ (n — четно) точно когато $B=0$. В останалите случаи за $p=1, 2, \ldots, n-1$ имаме $H(u)=\text{const}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Станилов, Г.: Обобщение на римановата кривина и някои приложения. Изв. на Мат. инст. на БАН, 14 (1970), 211—241.
2. Stanilov, Gr.: Eine Verallgemeinerung der Schnittkrümmung. Arch. d. Math., XXI, 4, 1970, 424 — 428.
3. Stanilov, Gr.: On Kähler manifold with vanishing Bochner tensor. Pure Applied Math. Sci., V, 1977, No. 1—2, 7—11.
4. Stanilov, Gr., Marinova, V.: On the geometry of the Kählerian manifolds. Comp. Rend. de l'Acad. Bulg. d. Sciences, 29, 5, 1976, 623—626.
5. Tachibana, S.: On the mean curvature for holomorphic $2p$-plane in Kählerian spaces. Toh. Math. J., 25, 2 (1973), 157 — 165.
6. Goldberg, S., Kobayashi, S.: Holomorphic bisectional curvature. J. Diff. Geom., 1967, 1, 3, 225 — 233.

Постъпила на 10. XII. 1975 г.

KÄHLERIAN MANIFOLDS WITH A LINEAR RELATION BETWEEN THE HOLOMORPHIC CURVATURES OF EVERY TWO ORTHOGONAL COMPLEMENTS

G. Stanilov

(SUMMARY)

In the paper are proved the following theorems.

Theorem 1. Let (M, g, J) be a Kählerian manifold of real dimension $2n$ and the linear relation holds good

$pS(u, u)+qH(u)+rH((u, Ju))=\text{const}$.

Then:

a) $q=r=0$, $p\neq 0 \Longleftrightarrow M$ is an Einsteinian manifold;

b) $q=1$, $r=1$, $p=2 \Longleftrightarrow M$ is any arbitrary manifold;

c) $q=-1$, $p=1$, $p\neq 2 \Longleftrightarrow M$ is an Einsteinian manifold;

d) $p(n+2)+4q-2nr\neq 0 \Longleftrightarrow M$ is a Kähler manifold with vanishing Bochner curvature tensor;

e) $p(n+2)+4q-2nr=0 \Longleftrightarrow$ is a Kähler manifold with constant holomorphic sectional curvature.

Theorem 2. Let (M, g, J) be a Kählerian manifold of real dimension $2n$. Then the following two assertions are equivalent:

a) the manifold has vanishing Bochner curvature tensor;

b) $\sum\limits_{1\leq i_1<i_2<\ldots<i_p\leq n} H(i_1, i_2, \ldots, i_p)=\text{const}$ for a fixed p with $1\leq p\leq n$.

Here $H(i_1, i_2, \ldots, i_p)$ is the generalized holomorphic curvature of the $2p$-dimensional holomorphic tangent subspaces, spanned by the vectors $u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_p}, Ju_{i_1}, Ju_{i_2}, \ldots, Ju_{i_p}$ of any adapted base.

Theorem 3. Let (M, g, J) be a Kählerian manifold or real dimension $2n$ and let the following relation holds goods:

$$\lambda H(E^{2p}) + \mu H(\perp E^{2p}) = \text{const},$$

where $E^{2p} = JE^{2p}$. Then

a) $\lambda = 1$, $\mu = -1 \Longleftrightarrow M$ is an Einsteinian manifold;

b) $\lambda = \dfrac{1}{p+1}$, $q = \dfrac{1}{n-p+1} \Longleftrightarrow M$ is a Kählerian manifold with vanishing Bochner curvature tensor;

c) $(\lambda, \mu) \neq \left(\dfrac{1}{p+1}, \dfrac{1}{n-p+1}\right)$, $(\lambda, \mu) \neq (1, -1) \Longleftrightarrow M$ is a Kählerian manifold with constant holomorphic sectional curvature ($H(u) = \text{const}$). In particulary, if

$$H(E^{2p}) = \text{const}$$

then $H(u) = \text{const}$.