

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ДВИЖЕНИЕ ШАРА ИЗ СОСТОЯНИЯ ПОКОЯ В ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Славчо Г. Славчев

На основе уравнений Прандтля в работе [1] было исследовано развитие ламинарного пограничного слоя на телах вращения, движущихся в вязкой несжимаемой жидкости с нестационарной скоростью

$$(1) \quad U = U_0 \Omega(t) = U_0 t^\alpha (1 + A_1 t^n),$$

где $t = \frac{t'}{T_0}$ — безразмерное время, U_0, T_0 — характерные масштабы скорости и времени, $A_1 \geq 0, \alpha \geq 0, n$ — целое число. В настоящей работе для случая движения шара полученное раньше решение улучшается добавлением новых членов, которыми учитываются кривизна поверхности тела и взаимодействие пограничного слоя жидкости на стенке с набегающим потоком. Учет этих эффектов второго порядка делается возможным, если решать полные уравнения Навье—Стокса методом сращиваемых асимптотических разложений [2]. Применение этого метода к исследованию начальной стадии равномерного движения шара изложено в работе [3]. В [4] был принят степенной закон возрастания скорости ($A_1 = 0$), позволяющий рассмотреть ускоренные движения без начальной скорости. В случае, когда $A_1 \neq 0$, формулой (1) охватываются также ускоренные движения шара с ненулевой начальной скоростью.

Пусть в момент времени $t' = 0$ шар радиуса a начинает прямолинейное движение в покоящейся вязкой несжимаемой жидкости со скоростью (1). Ограничиваюсь в нашем рассмотрении малыми интервалами времени,

имеем случай больших значений числа Струхала $S = \frac{a}{U_0 T_0}$. Предполагая,

что число Рейнольдса $R = \frac{U_0 a}{\gamma'}$ имеет тот же порядок, вводим малый параметр

$$(2) \quad \epsilon = \frac{1}{S} = \frac{1}{\gamma R},$$

где γ' — кинематический коэффициент вязкости; γ — величина порядка единицы. Пусть $r = \frac{r'}{a}$, θ — безразмерные сферические координаты, связанные с шаром, причем угол отсчитывается от направления скорости тела.

Соответствующие им компоненты скорости и давление жидкости

$$(3) \quad u = \frac{v_r'}{U_0}, \quad v = \frac{v_\theta'}{U_0}, \quad p = \frac{p'}{\rho' U_0^2 S}$$

определяются из нестационарных уравнений Навье -- Стокса и уравнения неразрывности

$$(4) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \epsilon \left(u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v^2}{r} \right) &= - \frac{\partial p}{\partial r} \\ &+ \epsilon^2 \gamma \left(\Delta u - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{2u}{r^2} - \frac{2 \operatorname{cotg} \theta \cdot v}{r^2} \right), \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \epsilon \left(u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + u v \right) &= - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \\ &+ \epsilon^2 \gamma \left(\Delta v + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r^2 \sin^2 \theta} \right), \\ \frac{\partial}{\partial r} (u r^2 \sin \theta) + \frac{\partial}{\partial \theta} (v r \sin \theta) &= 0, \end{aligned}$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\operatorname{cotg} \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}$$

оператор Лапласа, ρ' — плотность жидкости. Вводя функцию тока $\psi(r, \theta, t)$ по известным формулам

$$(5) \quad u = - \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad v = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r},$$

сводим систему (4) к одному уравнению

$$(6) \quad \begin{aligned} r^2 \sin \theta \left(\frac{\partial}{\partial t} - \gamma \epsilon^2 \Delta_1 \right) \Delta_1 \psi &= 2 \epsilon \Delta_1 \psi \left(\operatorname{cotg} \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \psi \\ &+ \epsilon \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \Delta_1 \psi, \end{aligned}$$

где

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{\operatorname{cotg} \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

Функция тока должна удовлетворять следующим начальным и граничным условиям:

$$(7) \quad \psi \sim \frac{1}{2} \left(r^2 - \frac{1}{r} \right) \sin^2 \theta \Omega(t) \quad \text{при } t \rightarrow 0^+, r \geq 1;$$

$$(8) \quad \psi = \frac{\partial \phi}{\partial r} = 0 \quad \text{при } r = 1, t \geq 0;$$

$$(9) \quad \psi \sim \frac{1}{2} r^2 \sin^2 \theta \Omega(t) \quad \text{при } r \rightarrow \infty, t \geq 0.$$

Первое условие выражает отсутствие влияния вязкости в начальный момент движения, что определяет потенциальный характер течения. Равенства (8) представляют собой условия прилипания жидкости на поверхности тела, а (9) — условие стремления решения к функции тока безвихревого течения идеальной жидкости при удалении от шара.

Идея метода сращиваемых асимптотических разложений состоит в том, чтобы для каждой гидродинамической величины найти два разложения по степеням ϵ по внешней и внутренней по отношению к телу областях. Требуется, чтобы эти разложения сращивались определенным образом в некоторой общей области их пригодности с точностью порядка рассматриваемого приближения. После сложения внешнего и внутреннего решений и вычитания их общей части, получаемой дважды при сращивании, находится равномерно пригодное во всей области течения решение.

Во внешней области (вдали от поверхности тела) гидродинамические величины ищутся в виде рядов

$$(10) \quad \begin{aligned} u &= U_1(r, \theta, t) + \epsilon U_2(r, \theta, t) + \dots, \\ v &= V_1(r, \theta, t) + \epsilon V_2(r, \theta, t) + \dots, \\ \psi &= \Psi_1(r, \theta, t) + \epsilon \Psi_2(r, \theta, t) + \dots, \\ p &= P_1(r, \theta, t) + \epsilon P_2(r, \theta, t) + \dots, \end{aligned}$$

где функции Ψ_i ($i = 1, 2, \dots$), согласно [3], удовлетворяют уравнению

$$(11) \quad \Delta_1 \Psi = 0.$$

Решение во внутренней области (вблизи поверхности) представляется в виде следующих разложений:

$$(12) \quad \begin{aligned} u &= \epsilon u_1(\zeta, \theta, t) + \epsilon^2 u_2(\zeta, \theta, t) + \dots, \\ v &= v_1(\zeta, \theta, t) + \epsilon v_2(\zeta, \theta, t) + \dots, \\ \psi &= \epsilon \psi_1(\zeta, \theta, t) + \epsilon^2 \psi_2(\zeta, \theta, t) + \dots, \\ p &= p_1(\zeta, \theta, t) + \epsilon p_2(\zeta, \theta, t) + \dots, \end{aligned}$$

где $\zeta = (r - 1)/\epsilon$ — новая переменная, которой растягивается данная область. Ограничивааясь вторым приближением, находим следующие уравнения для определения неизвестных функций:

$$(13) \quad \frac{\partial v_1}{\partial t} - \gamma \frac{\partial^2 v_1}{\partial \zeta^2} = - \frac{\partial p_1}{\partial \theta},$$

$$(14) \quad \frac{\partial u_1}{\partial \zeta} + \frac{\partial v_1}{\partial \theta} + v_1 \cot \theta = 0,$$

$$(15) \quad \frac{\partial p_1}{\partial \zeta} = \frac{\partial p_2}{\partial \zeta} = 0,$$

$$(16) \quad \frac{\partial v_2}{\partial t} - \gamma \frac{\partial^2 v_2}{\partial \zeta^2} = - \frac{\partial p_2}{\partial \theta} + \zeta \frac{\partial p_1}{\partial \theta} + 2\gamma \frac{\partial v_1}{\partial \zeta} - u_1 \frac{\partial v_1}{\partial \zeta} - v_1 \frac{\partial v_1}{\partial \theta},$$

$$(17) \quad \frac{\partial u_2}{\partial \zeta} + \frac{\partial v_2}{\partial \theta} - \zeta \frac{\partial v_1}{\partial \theta} + 2u_1 + (v_2 - \zeta v_1) \cot \theta = 0.$$

Решения уравнения (11) должны удовлетворять условиям (7), (9), а функция тока (12) — условиям (8). Соответствующие разложения для u , v и ϕ должны совпадать с точностью рассматриваемого приближения по ϵ при их сращивании в промежуточной области. Способ сращивания описывается ниже.

Первое приближение. Решение уравнения (11) есть известная функция тока при безвихревом обтекании шара идеальной жидкостью:

$$(18) \quad \Psi_1 = \frac{1}{2} \left(r^2 - \frac{1}{r} \right) \sin^2 \theta \Omega(t).$$

Ввиду (15), градиент давления во внутренней области определяется по формуле

$$(19) \quad - \frac{\partial p_1}{\partial \theta} = - \frac{\partial P_1}{\partial \theta} \Big|_{r=1} = \frac{3}{2} \sin \theta t^{x-1} [\alpha + (n+\alpha) A_1 t^n].$$

С учетом (19), легко устанавливается, что решение уравнения (13), принятное в форме

$$(20) \quad v_1 = \frac{3}{2} \sin \theta \Omega(t) [F_0'(\eta) + (q-\alpha) F_n'(\eta)],$$

$$\psi_1 = 3 \sin^2 \theta (yt)^{1/2} \Omega(t) [F_0(\eta) + (q-\alpha) F_n(\eta)],$$

где

$$(21) \quad \eta = \frac{\zeta}{2\sqrt{yt}}, \quad q = \frac{t}{\Omega} \frac{d\Omega}{dt} = \alpha + \frac{nA_1 t^n}{1+A_1 t^n},$$

а штрих обозначает дифференцирование по аргументу, совпадает с первым приближением решения уравнений пограничного слоя для случая движения тела вращения с той же скоростью [1]. В таком случае имеем:

$$(22) \quad F_0(\eta) = \eta + 2^{2\alpha} \Gamma(\alpha+1) g_{\alpha+\frac{1}{2}}(\eta) - \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma\left(\alpha+\frac{3}{2}\right)},$$

$$F_n(\eta) = \frac{1}{n} \left[2^{2\alpha+2n} \Gamma(\alpha+n+1) g_{\alpha+n+\frac{1}{2}}(\eta) - 2^{2\alpha} \Gamma(\alpha+1) g_{\alpha+\frac{1}{2}}(\eta) \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma\left(\alpha+\frac{3}{2}\right)} - \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma\left(\alpha+n+\frac{3}{2}\right)} \right) \right],$$

где

$$(23) \quad g_\alpha(\eta) = \frac{2}{\pi^{1/2} \Gamma(2\alpha+1)} \int_{\eta}^{\infty} (\gamma-\eta)^{2\alpha} e^{-\gamma^2} d\gamma$$

(2α)-кратный интеграл от гауссовой функции ошибок.

Второе приближение. Сращиванием выражений $\epsilon \psi_1$ и $\Psi_1 + \epsilon \Psi_2$, находим граничное условие на стенке для функции Ψ_2 . Для этого выражаем обе разложения функции тока через новую „промежуточную“ переменную

$$(24) \quad \bar{\eta} = \frac{r-1}{2(\epsilon \gamma t)^{1/2}} = \eta \epsilon^{1/2}$$

и сравниваем их при фиксированной η и $\epsilon \rightarrow 0$. С учетом (7) и (9), функция Ψ_2 будет

$$(25) \quad \Psi_2 = -\frac{3 \sin^2 \theta}{2r} (\gamma t)^{1/2} \Omega(t) \left[\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma\left(\alpha+\frac{3}{2}\right)} + \frac{q-\alpha}{n} \left(\frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma\left(\alpha+n+\frac{3}{2}\right)} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma\left(\alpha+\frac{3}{2}\right)} \right) \right].$$

Она порождает добавочное внешнее течение вследствие вытеснения набегающей на шар жидкости нарастающим пограничным слоем на его поверхности.

Обратное влияние внешнего течения на течение во внутренней области проявляется через второе приближение градиента давления:

$$(26) \quad -\frac{\partial p_2}{\partial \theta} = -\frac{\partial P_2}{\partial \theta} \Big|_{r=1} = \frac{9}{4} \sin \theta \cos \theta \Omega^2(t) \\ + \frac{3}{2} \sin \theta \left(\frac{\gamma}{t} \right)^{1/2} \Omega(t) \left[\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)} + \frac{q-\alpha}{n} \left(\frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma\left(\alpha+n+\frac{1}{2}\right)} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)} \right) \right].$$

Учитывая (20) и (26), ищем решение уравнения (16) в следующем виде:

$$(27) \quad v_2 = \frac{9t}{4} \sin \theta \cos \theta \Omega^2(t) [G_0'(\eta) + (q - z)G_n^{(1)\prime}(\eta) + (q - z)^2 G_n^{(2)\prime}(\eta)] \\ + 3 \sin \theta (\gamma t)^{1/2} \Omega(t) [H_0'(\eta) + (q - z)H_n^{(1)\prime}(\eta)];$$

здесь неизвестные функции удовлетворяют обыкновенным дифференциальным уравнениям:

$$(28) \quad G_0''' + 2\eta G_0'' - 4(2\alpha + 1)G_0' = 4(F_0'^2 - 2F_0 F'' - 1),$$

$$(29) \quad G_n^{(1)''' + 2\eta G_n^{(1)''} - 4(2\alpha + n + 1)G_n^{(1)\prime} = 8(G_0' + F_0' F_n' - F_0'' F_n - F_0 F_n''),}$$

$$(30) \quad G_n^{(2)''' + 2\eta G_n^{(2)''} - 4(2\alpha + 2n + 1)G_n^{(2)\prime} = 4(G_n^{(1)\prime} + F_n'^2 - 2F_n F_n''),}$$

$$(31) \quad H_0''' + 2\eta H_0'' - 4\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)H_0' = 4\alpha\eta - 2^{2\alpha+1} \Gamma(\alpha + 1) g_{\alpha - \frac{1}{2}} - \frac{2\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)},$$

$$(32) \quad H_n^{(1)''' + 2\eta H_n^{(1)''} - 4\left(\alpha + n + \frac{1}{2}\right)H_n^{(1)\prime} = 4(H_0' + \eta) + \frac{2}{n} \left[2^{2\alpha} \Gamma(\alpha + 1) g_{\alpha - \frac{1}{2}} - 2^{2\alpha+2n} \Gamma(\alpha + n + 1) g_{\alpha+n-\frac{1}{2}} + \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)} - \frac{\Gamma(\alpha + n + 1)}{\Gamma\left(\alpha + n + \frac{1}{2}\right)} \right].}$$

При выводе этих уравнений мы пользовались следующими, легко проверяемыми соотношениями:

$$(33) \quad t \frac{dq}{dt} + q(q - \alpha) = (n + \alpha)(q - \alpha), \\ t \frac{dq}{dt} + 2q(q - \alpha) = (n + 2\alpha)(q - \alpha) + (q - \alpha)^2.$$

Из граничных условий (8) следует, что на поверхности тела выполнены равенства

$$(34) \quad G_0(0) = G_0'(0) = G_n^{(1)}(0) = G_n^{(1)\prime}(0) = G_n^{(2)}(0) = G_n^{(2)\prime}(0) = 0, \\ H_0(0) = H_0'(0) = H_n^{(1)}(0) = H_n^{(1)\prime}(0) = 0.$$

Срашивая $v_1 + \epsilon v_2$ и $V_1 + \epsilon V_2$ с точностью $O(\epsilon)$, находим также

$$(35) \quad G_0'(\infty) = G_n^{(1)\prime}(\infty) = G_n^{(2)\prime}(\infty) = 0.$$

Решения линейных уравнений (28) — (30), удовлетворяющие условиям (34) и (35), даются по формулам

$$(36) \quad G_0 = \Psi_0 + \Phi_0, \quad G_n^{(1)} = \Psi_n^{(1)} + \Phi_n^{(1)}, \quad G_n^{(2)} = \Psi_n^{(2)} + \Phi_n^{(2)},$$

где функции Ψ_0 , $\Psi_n^{(1)}$, $\Psi_n^{(2)}$ и Φ_0 , $\Phi_n^{(1)}$, $\Phi_n^{(2)}$ определены соответственно в работах [1] и [5]. Там же приведены необходимые для вычисления поверхностного трения значения вторых производных этих функций в нуле.

Путь решения уравнения (31) описан в [4]. Сначала находится частное решение, которое в сумме с искомым решением однородного уравнения определяет функцию $H_0(\eta)$. Условие на бесконечности, которому должно удовлетворять это решение, получается из сращивания соответствующих разложений для продольной скорости v . Таким путем находим

$$(37) \quad H_0(\eta) = 2^{2\alpha-1} \Gamma(\alpha+1) [4(\alpha+1)g_{\alpha+1}(\eta) - g_\alpha(\eta)] + \frac{\eta}{2} \left[-\eta + \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+\frac{3}{2})} \right].$$

Аналогичным образом определяется функция $H_n^{(1)}(\eta)$:

$$(38) \quad H_n^{(1)}(\eta) = \frac{1}{2n} \left\{ 2^{2\alpha+2n} \Gamma(\alpha+n+1) [4(\alpha+n+1)g_{\alpha+n+1}(\eta) - g_{\alpha+n}(\eta)] - 2^{2\alpha} \Gamma(\alpha+1) [4(\alpha+1)g_{\alpha+1}(\eta) - g_\alpha(\eta)] + \left(\frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(\alpha+n+\frac{3}{2})} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+\frac{3}{2})} \right) \eta \right\}.$$

Становится ясным, что коэффициент перед $\sin \theta \cos \theta$ в формуле (27) представляет собой второе приближение решения уравнений пограничного слоя, в то время как оставшиеся члены характеризуют влияние внешнего потока на течение в слое. Вместе с тем в первом приближении учтена также кривизна стенки.

Составное решение задачи, которое равномерно пригодно во всей области течения и удовлетворяет всем условиям (7) — (9), выражено через функцию тока, записывается так:

$$(39) \quad \psi = \frac{\sin^2 \theta}{2} \Omega(t) \left\{ r^2 - \frac{1}{r} + \epsilon \cdot 3(\gamma t)^{1/2} \left[-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+\frac{3}{2})} \frac{1}{r} + 2^{2\alpha+1} \Gamma(\alpha+1) g_{\alpha+\frac{1}{2}}(\eta) + \frac{A_1 t^n}{1+A_1 t^n} \left(\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+\frac{3}{2})} \frac{1}{r} - \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(\alpha+n+\frac{3}{2})} \frac{1}{r} + 2^{2\alpha+2n+1} \Gamma(\alpha+n+1) g_{\alpha+n+\frac{1}{2}}(\eta) - 2^{2\alpha+1} \Gamma(\alpha+1) g_{\alpha+\frac{1}{2}}(\eta) \right) \right] + \epsilon^2 3\gamma t \left[2^{2\alpha+2} \Gamma(\alpha+1) g_{\alpha+1}(\eta) - \frac{1}{\alpha+1} + \frac{A_1 t^n}{1+A_1 t^n} \left(-\frac{1}{\alpha+n+1} \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+\frac{3}{2})} \frac{1}{r} - \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(\alpha+n+\frac{3}{2})} \frac{1}{r} + 2^{2\alpha+2n+1} \Gamma(\alpha+n+1) g_{\alpha+n+\frac{1}{2}}(\eta) - 2^{2\alpha+1} \Gamma(\alpha+1) g_{\alpha+\frac{1}{2}}(\eta) \right) \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\alpha+1} + 2^{2\alpha+2n+2} \Gamma(\alpha+n+1) g_{\alpha+n+1}(\eta) - 2^{2\alpha+2} \Gamma(\alpha+1) g_{\alpha+1}(\eta) \Big] \\
& + \varepsilon^{29} \gamma^{1/2} t^{3/2} \Omega(t) \cos \theta \left[G_0(\eta) + \frac{n A_1 t^n}{1+A_1 t^n} G_n^{(1)}(\eta) \right. \\
& \left. + \frac{n^2 A_1^2 t^{2n}}{(1+A_1 t^n)^2} G_n^{(2)}(\eta) \right] + O(\varepsilon^3).
\end{aligned}$$

С учетом (39) поверхностное трение дается следующим выражением ($\mu' = \gamma' \rho'$):

$$\begin{aligned}
(40) \quad \tau_w = & \frac{3}{2} \sin \theta \left(\frac{\mu' \rho'}{t'} \right)^{1/2} U_0 \Omega(t) \left\{ \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)} + \frac{A_1 t^n}{1+A_1 t^n} \left(\frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma\left(\alpha+n+\frac{1}{2}\right)} \right. \right. \\
& \left. - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)} + \varepsilon (\gamma t)^{1/2} \right. \\
& \left. + \varepsilon \frac{3}{4} \cos \theta t \Omega(t) \left[G_0''(0) + \frac{n A_1 t^n}{1+A_1 t^n} G_n^{(1)''}(0) + \frac{n^2 A_1^2 t^{2n}}{(1+A_1 t^n)^2} G_n^{(2)''}(0) \right] \right\}.
\end{aligned}$$

Если приравнить поверхностное трение к нулю, получим уравнение для определения времени t_s от начала движения до момента возникновения отрыва слоя в задней критической точке, где $\theta = \pi$. Тогда отнесенный к радиусу шара путь, который тело проходит до момента отрыва, вычисляется по формуле

$$(41) \quad \sigma = \frac{1}{S} \frac{t_s^{\alpha+1}}{\alpha+1} \left(1 + \frac{\alpha+1}{\alpha+n+1} A_1 t_s^n \right).$$

Применим формулы (40) и (41) к случаю равноускоренного движения шара с начальной скоростью U_0 и ускорением $\frac{U_0 A_1}{T_0}$ ($\alpha=0$, $n=1$). Вводя безразмерные величины

$$(42) \quad T_s = \frac{U_0 t_s'}{a}, \quad b = \frac{a A_1}{T_0 U_0},$$

запишем уравнение для определения момента возникновения отрыва и путь следующим образом:

$$\begin{aligned}
(43) \quad & 1 + 2b T_s + \left(\frac{\pi T_s}{R} \right)^{1/2} (1+b T_s) - T_s [2,3634 + 3,4966 b T_s + 1,3986 (b T_s)^2] = 0, \\
& \sigma = T_s \left(1 + \frac{1}{2} b T_s \right).
\end{aligned}$$

Кривые σ в зависимости от числа Рейнольдса для различных значений параметра b представлены на рис. 1. Кривая $b=0$ соответствует случаю равномерного импульсивного движения шара.

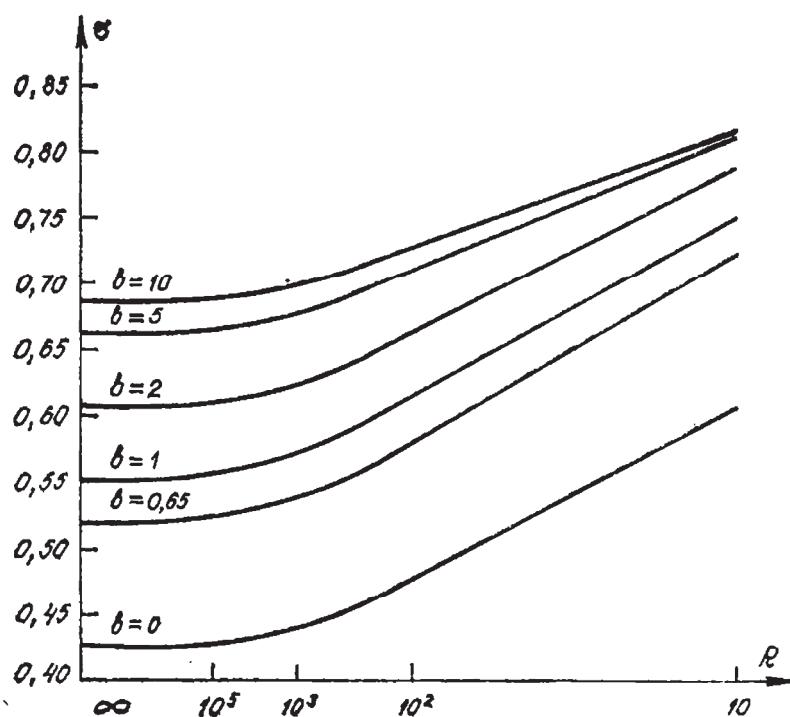


Рис. 1

Видно, что при фиксированном b функция σ уменьшается с увеличением числа R и при $R \rightarrow \infty$ стремится к значению σ_0 , найденному раньше на основе решения уравнений Прандтля [1]. Для фиксированного числа Рейнольдса путь возрастает вместе с величиной b . Расчеты показали, что если начертить кривые $\sigma - \sigma_0$ с зависимостью от R , то кривая, получаемая для значения, приблизительно равного 0,65, окажется выше всех других. Следовательно, при фиксированном числе Рейнольдса путь, вычисляемый для $b=0,65$, отклоняется максимально от предсказываемого в теории пограничного слоя значения.

ЛИТЕРАТУРА

- Славчев, С. Г.: Развитие ламинарного пограничного слоя на телах вращения. Год. Соф. унив., Мат. фак., 66 (1971/72), 7—17.
- Ван-Дайк, М.: Методы возмущений в механике жидкости. М., 1967.
- Wang, C.-Y.: The impulsive starting of a sphere. Quart. Appl. Math., 27 (1969), 273—277.
- Заприйнов, З., Славчев, С. Г.: Нестационарный ламинарный пограничный слой на шаре при степенном законе возрастания скорости. Изв. АН СССР, сер. Мех. жидк. и газа (в печати).
- Славчев, С. Г.: Развитие ламинарного слоя на цилиндрическом теле. Вест. Ленингр. унив., № 19 (1969), 106—115.

Поступила 12. XII. 1975 г.

UNSTEADY MOTION OF A SPHERE FROM REST
IN A VISCOUS INCOMPRESSIBLE FLUID

S. G. S l a v c h e v

(SUMMARY)

Unsteady motion of a sphere from rest in a viscous incompressible fluid with given velocity is investigated. The Navier-Stokes equations are solved by the method of matched asymptotic expansions. The second approximation to the flow velocity and the skin friction is calculated. The solution is uniformly valid in the whole flow field and takes account of second-order effects as curvature of body surface and interaction between the boundary layer and the inviscid outer flow.