ДВОЙКИ РОЕВЕ ПРАВИ С ОБЩ ПРИДРУЖАВАЩ ТЕТРАЕДЪР В ДВУОСНАТА ГЕОМЕТРИЯ

Боян Л. Петканчин

Нека в реалното тримерно проективно пространство P_3 са взети две реални кръстосани прави j, k. Всяка неособена реална колинеация в P_3, която трансформира всяка от правите j, k в себе си, ще наричаме двуосна колинеация или B-колинеация (с оси j, k); тяхната съвкупност B е една седемчленна група на Ли. Клайновата геометрия в P_3 с основна група B се нарича (хиперболична) двуосна геометрия или B-геометрия с абсолют правите j, k. В нашата работа [1] са дадени елементарни алгебрично-геометрични сведения за B-геометрията и е развита диференциалната геометрия на тъй наречените хиперболични роеве прави в тази геометрия. В следващото изложение ще използуваме терминологията, означенията и резултатите от [1].

В настоящата работа ще се занимаваме с някои B-инвариантно свързани двойки роеве прави в B-геометрията и при това, както в [1], ще имаме пред вид само реални обекти и величини, реалнозначни функции на реални аргументи и т. н.

Поставяме си следната

1. задача. Даден е един хиперболичен рой прави G в B-геометрията. Да се намерят (хиперболични) роеве прави, чиито възлови прави да съвпадат с възловите прави на G.

Предполагаме, че за роя G върху всяка права са взети като определящи точки двете възлови точки с координатни четворки в специалното нормиране от [1], изразени като функция на естествения параметър s на роя, мерен от фиксирана негова права.

Нека $g=g(s)$ е произволна права от G с възлови точки (x, y), (u, v) върху нея: $x=x(s), \ldots, v=v(s)$. Параметърът s се мени в някакъв отворен интервал J, като предполагаме, че $s=0$ е число от последния. Възловите прави на роя през възловите точки имат съответно безкрайни точки (x, o), (u, o) върху j и (o, y), (o, v) върху k.

Да предположим, че $\bar{G}$ е хиперболичен рой прави със същите възлови прави, както G (за всяко $s \in J$) и нека $\bar{g}=\bar{g}(s)$ е правата от $\bar{G}$, за която възловите прави съвпадат с възловите прави на G за s. Тъй като възловите точки (X, Y) върху j и (U, V) върху k на роя $\bar{G}$ лежат върху съответните възлови прави на G, ще имаме

$$(1) \qquad (X, Y)=\lambda(x, o)+(o, y), \quad (U, V)=\mu(u, o)+(o, v)$$

с подходящи числени коефициенти $\lambda=\lambda(s)$, $\mu=\mu(s)$. Разбира се, навсякъде работим с координатни четворки на точките спрямо една фиксирана координатна B-система K_0. В (1) (X, Y), (U, V) са кои да е координатни четворки на възловите точки на $\bar{G}$, очевидно функции на s. Тъй като те са крайни точки, имаме

$$\lambda(s)\neq 0,\ \mu(s)\neq 0 \text{ за всяко } s\in J. \tag{2}$$

Геометричното значение на λ, μ се намира веднага; това са двойните отношения

$$\begin{aligned}\lambda&=((x, o), (o, y), (x, y), (X, Y))'\\ \mu&=((u, o), (o, v), (u, v), (U, V)).\end{aligned} \tag{3}$$

Тук имаме основната инварианта на B-геометрията. Именно, ако (x, o), (o, y) са две безкрайни точки съответно върху j и k, а (x, y), (X, Y) са две крайни точки върху безкрайната права, която ги съединява, то двойното отношение λ от (3) ще наричаме отклонение на точката (X, Y) от точката (x, y) (или между (x, y) и (X, Y)). Ясно е, че μ от (3_2) е отклонението на (U, V) от (u, v).

Да изразим, че (X, Y) и (U, V) са възлови точки на $\bar{G}$ върху $\bar{g}$. Както е известно от [1], възловите точки на $\bar{G}$ са

$$\bar{a}_i(X, Y)+\bar{b}_i(U, V), \tag{4}$$

където (a_1, b_1) и (a_2, b_2) са двойките корени на хомогенното квадратно уравнение

$$\rho\,\bar{a}^2+\bar{\sigma}\,a\,\bar{b}+\bar{\tau}\,\bar{b}^2=0 \tag{5}$$

с коефициенти ρ, $\bar{\sigma}$, $\bar{\tau}$, които са пресметнати по-долу. Тъй като точката (4) съвпада например при $i=1$ с (X, Y), а при $i=2$ — с (U, V), трябва да имаме

$$a_1=1,\ \bar{b}_1=0;\ \bar{a}_2=0,\ \bar{b}_2=1. \tag{6}$$

Като заместим стойностите (6) в (5), намираме

$$\rho=0,\ \bar{\tau}=0. \tag{7}$$

И, разбира се,

$$\bar{\sigma}\neq 0, \tag{8}$$

тъй като предполагаме, че $\bar{G}$ е хиперболичен рой. Ако, обратно, са изпълнени (7) и (8), от (5) получаваме стойностите (6) и замествайки последните в (4), намираме, че възловите точки на $\bar{G}$ върху $\bar{g}$ са

$$(X, Y)=\lambda(x, o)+(o, y),\quad (U, V)=\mu(u, o)+(o, v).$$

Следователно тези точки лежат върху възловите прави на G и поради това възловите прави на $\bar{G}$ съвпадат с тези на G, така че $\bar{G}$ е рой с желаното свойство относно G.

Пресмятаме коефициентите на (5) съгласно (39) от [1]:

$$
(9)\qquad
\begin{gathered}
\bar{\rho}=Y'Y.XU-X'X.YV,\quad \bar{\tau}=V'V.XU-U'U.YV,\\
\sigma=\bar{\sigma}_1+\bar{\sigma}_2,\\
\bar{\sigma}_1=V'Y.XU-U'X.YV,\quad \bar{\sigma}_2=Y'V.XU-X'U.YV.
\end{gathered}
$$

Тук $'=\frac{d}{ds}$; разбира се, за $\bar{G}$ величината s играе ролята на общ параметър.

От (1) имаме

$$
(10)\qquad
\begin{gathered}
X=\lambda x,\quad Y=y,\\
U=\mu u,\quad V=v,
\end{gathered}
$$

следователно

$$
(11)\qquad
\begin{gathered}
X'=\lambda' x+\lambda x'=\lambda' x+\lambda\alpha u,\quad Y'=y'=\gamma y+\alpha v,\\
U'=\mu' u+\mu u'=\mu' u+\mu\beta x,\quad V'=v'=\beta y+\delta v,
\end{gathered}
$$

като се вземат пред вид формулите на Френе (117) от [1] за роя G:

$$
(12)\qquad
\begin{gathered}
x'=\alpha u,\qquad u'=\beta x,\\
y'=\gamma y+\alpha v,\quad v'=\beta y+\delta v,\\
\gamma+\delta=-1,\quad \gamma\neq\delta;
\end{gathered}
$$

с помощта на (10) и (11) пресмятаме

$$
(13)\qquad
\begin{gathered}
XU=\lambda\mu.xu,\quad YV=yv,\\
Y'Y=-\alpha.yv,\quad X'X=-\lambda^2\alpha.xu,\quad V'Y=-\delta.yv,\quad U'X=-\lambda'\mu.xu,\\
Y'V=\gamma.yv,\quad X'U=\lambda'\mu.xu,\quad V'V=\beta.yv,\quad U'U=\mu^2\beta.xu.
\end{gathered}
$$

Заместваме тези произведения в (9) и получаваме

$$
(14)\qquad
\begin{gathered}
\rho=\lambda\alpha(\lambda-\mu).xu.yv,\quad \bar{\tau}=\mu\beta(\lambda-\mu).xu.yv,\\
\bar{\sigma}_1=\lambda(\mu'-\mu\delta).xu.yv,\quad \sigma_2=-\mu(\lambda'-\lambda\gamma).xu.yv,\\
\bar{\sigma}=[\lambda\mu'-\lambda'\mu+\lambda\mu(\gamma-\delta)].xu.yv.
\end{gathered}
$$

С тези стойности необходимите и достатъчни условия (7) и (8), за да имат роевете G и $\bar{G}$ общи възлови прави, стават

$$
(15)\qquad
\begin{gathered}
\lambda\alpha(\lambda-\mu)=0,\quad \mu\beta(\lambda-\mu)=0,\\
\lambda\mu'-\lambda'\mu+\lambda\mu(\gamma-\delta)\neq 0.
\end{gathered}
$$

Оттук нататък ще разглеждаме общия случай на рой G, за който инвариантата

(16) $$K=\alpha\beta\neq 0 \qquad \text{за всяко } s\in J.$$

Съгласно [1], стр. 60, това означава, че никоя възлова точка на G не е постоянна при изменението на s и че двете възлови линии, описани от тях, не са безкрайни прави. Тогава (15) стават

(17) $$\lambda=\mu,\quad \gamma-\delta\neq 0.$$

Впрочем неравенството в (17) е изпълнено, както виждаме от (12). Така получихме

I. За всеки рой G с $K\neq 0$ съществуват безбройно много роеве прави $\bar{G}$ със същите възлови прави. Възловите точки (X, Y), (U, V) за кой да е рой $\bar{G}$ се дават с

(18) $$\bar{X}=\lambda x,\quad \bar{Y}=y,\quad \bar{U}=\lambda u,\quad \bar{V}=v,$$

където $\lambda=\lambda(s)$ е произволна функция на s в J и $\lambda(s)\neq 0$ за $s\in J$.

Разбира се, ако искаме $\bar{G}$ да бъде двукратно гладък — за такива роеве е развита диференциалната геометрия на роевете в [1] — ще трябва да предполагаме функцията $\lambda(s)$ двукратно гладка в J. Обратното твърдение в I, че от $\lambda=\mu$ се получава съвпадане на възловите прави на G и $\bar{G}$, се вижда по обратен път: при $\lambda=\mu$ от (15) веднага следва, че $\bar{\rho}=\bar{\tau}=0$ и че възловите точки (4) на $\bar{G}$ лежат върху възловите прави на G.

Съвкупността от всички роеве $\bar{G}$ при различни функции $\lambda(s)$ да означим с $R_1(G)$, а роя $\bar{G}$, получен при определена $\lambda(s)$ — с $G_1(G;\lambda)$. За този рой по (14) имаме

(19) $$\bar{\sigma}_1=\lambda(\lambda'-\lambda\delta).xu.yv,\quad \bar{\sigma}_2=-\lambda(\lambda'-\lambda\gamma).xu.yv,$$
$$\bar{\sigma}=\lambda^2(\gamma-\delta).xu.yv=\lambda^2(2\gamma+1).xu.yv.$$

За роя $\bar{G}$ могат да се поставят редица задачи, например той да има специални свойства; или да се намерят неговите инварианти и пр. Отговорите естествено ще се изразяват чрез инвариантите на G и функцията $\lambda(s)$. Например да намерим условието, щото G да бъде развиваем рой. Според [1], формула (75), необходимото и достатъчно условие за това е $\bar{\rho}\,\bar{\tau}-\bar{\sigma}_1\bar{\sigma}_2=0$. Поради (7) и (19) това условие се написва

$$\lambda^2(\lambda'-\gamma\lambda)(\lambda'-\delta\lambda)=0,$$

така че

(20) $$\text{или } \lambda'-\gamma\lambda=0,\quad \text{или } \lambda'-\delta\lambda=0$$

($\lambda\neq 0$). Оттук

(21) $$\text{или } \lambda=\lambda_0\exp\int_0^s\gamma ds,\quad \text{или}\quad \lambda=\lambda_0\exp\int_0^s\delta ds$$

(λ_0 е константа, отлична от 0). Получихме

II. В семейството $R_1(G)$ съществуват безбройно много развиваеми роеве. За кой да е от тях отклонението на възловите му точки от съответните на основния рой $G=G_1(G;\ 1)$ е функцията $\lambda(s)$ от (21) при подходяща стойност на константата λ_0.

Оттук нататък да предполагаме $\bar{G}$ неразвиваем, така че

$$\lambda'-\gamma\lambda\neq 0,\quad \lambda'-\delta\lambda\neq 0 \qquad \text{за всяко } s\in J. \tag{22}$$

Изразите (19) и $\rho=\bar{\tau}=0$ ни дават възможност да пресметнем важната инварианта $\bar{D}$ от (68) на [1] за роя $\bar{G}$. Като вземем $\sqrt{\bar{\sigma}^2-4\bar{\rho}\,\bar{\tau}}=\bar{\sigma}=\bar{\sigma}_1+\sigma_2$, получаваме

$$\bar{D}=-\sigma_2:\sigma_1=\frac{\lambda'-\lambda\gamma}{\lambda'-\lambda\delta}. \tag{23}$$

Поради $\gamma=-D:(1+D)$ от (144) на [1] изразът за $\bar{D}$ може да се напише и така

$$\bar{D}=\frac{(1+D)\dfrac{\lambda'}{\lambda}+D}{(1+D)\dfrac{\lambda'}{\lambda}+1}. \tag{24}$$

Взето е пред вид, че $\delta=-1-\gamma$. Понеже $\bar{G}$ е предположен неразвиваем, числителят и знаменателят в (23) са отлични от 0, т. е. $\bar{D}\neq 0,\ \infty$. Но $\bar{D}$ е отлично и от 1, понеже $\bar{D}=1$ би дало $\gamma-\delta=0$, противно на (12).

Интересно е да се потърсят онези роеве $\bar{G}$ в $R_1(G)$, за които λ е постоянно; за тях по (24) $\bar{D}=D$ поради $\lambda'=0$. Разбира се, трябва да предполагаме, че $\lambda\neq 0,\ 1$. Да наречем θ_λ B-колинеацията, която се представя с уравненията

$$x_1=\lambda x_1,\quad x_2=\lambda x_2,\quad y_1=y_1,\quad y_2=y_2; \tag{25}$$

лесно се проверява, че тя е неособена, понеже детерминантата ѝ $\lambda^2\neq 0$. Поради (18) точките $(x,\ y)$ и $(u,\ v)$ от правата g на G се трансформират чрез θ_λ в точките $(X,\ Y)$, $(U,\ V)$ от съответната права $\bar{g}$ на $\bar{G}$. Следователно и правата $g(s)$ се трансформира чрез θ_λ в правата $\bar{g}(s)$. Понеже това е вярно за всяко s от J, следва, че роят G се трансформира чрез θ_λ в роя $\bar{G}$, т. е. G и $\bar{G}$ са B-конгруентни. Така:

III. Всички роеве G в семейството $R_1(G)$, които се получават, когато на λ даваме постоянни стойности, са B-конгруентни с роя G.

Връщаме се към общия случай и ще намерим естествения параметър $\bar{s}$ на $\bar{G}$. Имаме

$$XU=\lambda^2.xu,\quad YV=yv,$$

$$(XU)'=2\lambda\lambda'.xu+\lambda^2(x'u)+\lambda^2(xu')$$

$$=2\lambda\lambda'.xu+\lambda^2.0+\lambda^2.0=2\lambda\lambda'.xu,$$

$$(YV)' = y'v + yv' = (\gamma + \delta).yv = -1.yv.$$

Тогава по формула (85) от [1] намираме за $\bar{s}$:

$$\frac{d\bar{s}}{ds} = s' = \frac{(XU)'}{XU} - \frac{(YV)'}{YV} = \frac{2\lambda' + \lambda}{\lambda} \tag{26}$$

$$\bar{s} = s_0 + s + \ln \lambda^2 \qquad (s_0 \text{ — константа}),$$

Разбира се, по-нататък ще предполагаме, че

$$\lambda + 2\lambda' \neq 0 \qquad \text{за всяко } s \in J. \tag{27}$$

Между другото от (26) се вижда, че при $\lambda = \text{const}$ съответствието на G върху $\bar{G}$, при което си отговарят прави g от G и $\bar{g}$ от $\bar{G}$ за равни стойности на s, е тъй да се каже изометрично в смисъл, че естествените параметри на двата роя в съответните прави са равни до адитивна константа.

Ще потърсим за роя G специалните инвариантни координатни четворки (x, y) и $(\bar{u}, \bar{v})$ на възловите му точки според начина от т. 6 на [1]. Очевидно трябва да положим за тях

$$(x, \bar{y}) = \varphi(X, Y), \quad (\bar{u}, \bar{v}) = \psi(U, V), \tag{28}$$

където нормировъчните множители $\varphi \neq 0$, $\psi \neq 0$ са функции на s. При това според формула (110) от [1] трябва да имаме

$$\left(\frac{dx}{ds}\, \bar{u}\right) = 0, \quad \left(\frac{d\bar{u}}{ds}\, x\right) = 0. \tag{29}$$

От (28) и (18) намираме

$$\bar{x} = \varphi\lambda x, \quad \bar{y} = \varphi y, \quad \bar{u} = \psi\lambda u, \quad \bar{v} = \psi v. \tag{30}$$

Разбира се,

$$\frac{d\bar{x}}{d\bar{s}} = \frac{1}{\bar{s}'}\, \bar{x}', \quad \frac{d\bar{u}}{d\bar{s}} = \frac{1}{\bar{s}'}\, \bar{u}',$$

където $\bar{s}'$ има стойността от (26). Тогава (29) се написват така:

$$\bar{x}'\, \bar{u} = 0, \quad \bar{u}'\, \bar{x} = 0 \tag{31}$$

и тук трябва да заместим $\bar{x}$, $\bar{u}$ от (30) и

$$\bar{x}' = \varphi'\lambda x + \varphi\lambda' x + \varphi\lambda x' = (\varphi\lambda)' x + \varphi\lambda\alpha u,$$

$$\bar{u}' = \psi'\lambda u + \psi\lambda' u + \psi\lambda u' = (\psi\lambda)' u + \psi\lambda\beta x.$$

Заместваме в (31) и получаваме за φ и ψ уравненията $\psi\lambda(\varphi\lambda)'.xu = 0$, $-\varphi\lambda(\psi\lambda)'.xu = 0$ или $(\varphi\lambda)' = 0$, $(\psi\lambda)' = 0$.

Оттук

$$\varphi=\frac{a}{\lambda}, \quad \psi=\frac{b}{\lambda}, \tag{32}$$

където a, b са някакви константи, отлични от 0. Заместваме в (30) и добиваме

$$\begin{aligned} \bar{x}&=ax, \quad \bar{y}=\frac{a}{\lambda}\, y, \\ \bar{u}&=bu, \quad \bar{v}=\frac{b}{\lambda}\, v, \end{aligned} \tag{33}$$

т. е. специалните координатни четворки за възловите точки на G са

$$\begin{aligned} (\bar{x}, \bar{y})&=\left(ax, \frac{a}{\lambda}\, y\right), \\ (\bar{u}, \bar{v})&=\left(bu, \frac{b}{\lambda}\, v\right). \end{aligned} \tag{34}$$

За G ще имаме формули на Френе съгласно (117) от [1]:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{x}}{d\bar{s}}&=\bar{\alpha}\, \bar{u}, \quad \frac{d\bar{u}}{d\bar{s}}=\bar{\beta}\, \bar{x}, \\ \frac{d\bar{y}}{d\bar{s}}&=\bar{\gamma}\, \bar{y}+\bar{\alpha}\, \bar{v}, \quad \frac{d\bar{v}}{d\bar{s}}=\bar{\beta}\, \bar{y}+\bar{\delta}\, \bar{v}. \end{aligned} \tag{35}$$

Заместваме тук двойките от (33) и помним, че $\frac{d}{d\bar{s}}=\frac{1}{\bar{s}'}\cdot\frac{d}{ds}$ с $\bar{s}'$ от (26):

$$\frac{1}{\bar{s}'}a\alpha u=\bar{\alpha}bu, \quad \frac{1}{\bar{s}'}\, b\beta x=\bar{\beta}ax\,,$$

$$\frac{1}{\bar{s}'}\, a\left[\left(\frac{1}{\lambda}\right)' y+\frac{1}{\lambda}\,(\gamma y+\alpha v)\right]=\gamma\,\frac{a}{\lambda}\, y+\bar{\alpha}\frac{b}{\lambda^2}\, v,$$

$$\frac{1}{\bar{s}'}\left[\left(\frac{1}{\lambda}\right)' v+\frac{1}{\lambda}(\beta y+\delta v)\right]=\bar{\beta}\,\frac{a}{\lambda}y+\bar{\delta}\,\frac{b}{\lambda}\, v.$$

Оттук се получават полуинвариантите $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ и инвариантите $\bar{\gamma}$, $\bar{\delta}$ на $\bar{G}$:

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}&=\frac{a}{b\bar{s}'}\,\alpha, \quad \bar{\beta}=\frac{b}{a\bar{s}'}\,\beta, \\ \bar{\gamma}&=\frac{\lambda\gamma-\lambda'}{2\lambda'+\lambda}, \quad \bar{\delta}=\frac{\lambda\delta-\lambda'}{2\lambda'+\lambda}. \end{aligned} \tag{36}$$

С тях могат съгласно (118) от [1] да се образуват и други инварианти на $\bar{G}$, именно

$$\bar{K}=\alpha\,\beta=K\frac{\lambda^2}{(2\lambda'+\lambda)^2},$$

(37)

$$\bar{L}=\frac{1}{\alpha}\frac{d\bar{\alpha}}{ds}=\frac{1}{s'}\cdot L+\left(\frac{1}{s'}\right)',\quad \bar{M}=\frac{1}{s'}\cdot M+\left(\frac{1}{s'}\right)'.$$

Така:

IV. Инвариантите $\bar{\gamma}$, $\bar{\delta}$, $\bar{D}$, $\bar{K}$, $\bar{L}$, $\bar{M}$ и полуинвариантите $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ на роя $\bar{G}$ се изразяват чрез λ и чрез аналогичните инварианти и полуинварианти на изходния рой G посредством формулите (24), (36), (37).

Ако $\lambda=\text{const}$, получаваме $s'=1$ и $\bar{\gamma}=\gamma$, $\bar{K}=K$, $\bar{L}=L$. Това според I) от [1] означава, че G и $\bar{G}$ са B-конгруентни, като си отговарят правите $g(s)$ и $\bar{g}(s)$ с едно и също s. Така отново потвърждаваме III. Впрочем важи и обратното твърдение на III. Наистина да предположим, че роевете G и $\bar{G}$ са B-конгруентни, като си отговарят правите за едно и също s. Тогава изпълнени са равенствата

$$\bar{\gamma}=\gamma,\ \bar{K}=K,\ \bar{L}=L \qquad \text{за всяко } s\in J.$$

От израза за $\bar{\gamma}$, като поставим $\bar{\gamma}=\gamma$, следва

$$(2\gamma+1)\lambda'=0,\ \lambda'=0,$$

понеже $2\gamma+1\neq 0$ поради (135) от [1]. Получаваме $\lambda=\text{const}$, тъй че за G и $\bar{G}$ функцията $\lambda(s)$ е константа. Нещо повече. От $\bar{\gamma}=\gamma$ следва $\lambda'=0$, $\bar{s}'=1$ и по-нататък $\bar{K}=K$, $\bar{L}=L$ по (37), т.е. B-конгруентността на G и $\bar{G}$. Така че имаме по-общо от III:

V. Роевете G и $\bar{G}$ са точно тогава B-конгруентни при съответствие на $g(s)$ и $\bar{g}(s)$, когато $\bar{\gamma}=\gamma$. Това е изпълнено точно тогава, когато $\lambda=\text{const}$.

Впрочем в V. условието $\bar{\gamma}=\gamma$ може да се замести с $\bar{D}=D$ поради

$$D=-\gamma:(1+\gamma),\quad \bar{D}=-\gamma:(1+\gamma)$$

съгласно (144) от [1].

Ако е даден един рой G, можем с всяка негова права $g(s)$ (означенията са от [1]) да свържем B-инвариантно тетраедъра с върхове (x, o), (o, y), (u, o), (o, v), т. е. безкрайните точки на възловите прави, отговарящи на g. От шестте ръба на този придружаващ тетраедър на G два са абсолютните прави j и k — съединителните на (x, o) с (u, o) и на (o, y) с (o, v); два са безкрайни прави, именно възловите прави, които съединяват (x, o) с (o, y) и (u, o) с (o, v). Остават два ръба, също безкрайни прави, които съединяват (x, o) с (o, v) и (u, o) с (o, y). Да ги наречем напречни оси на роя G за правата му g.

Нека са дадени два роя G и $\bar{G}$ и 1,1-значно съответствие между правите им. Искаме във всеки две съответни прави g и g на двата роя придружаващите тетраедри да съвпадат, т. е. да имат общи върхове. Поради горните обяснения има две възможности: 1) Възловите прави на двата роя съвпадат; разбира се, тогава съвпадат и напречните им оси. 2) Възловите прави на единия рой са напречни оси на другия; разбира се, тогава и възловите прави на втория рой са напречни оси на първия. В досега разгледаната задача 1. се занимахме със случая 1). Сега ще се занимаем със случая 2), като поставяме следната

2. задача. Даден е един хиперболичен рой прави G в B-геометрията. Да се намерят хиперболични роеве прави, чиито възлови прави да съвпадат с напречните оси на G.

Да допуснем, че G е рой с желаните свойства и възловите му прави през възловите точки (X, Y), (U, V) съвпадат с напречните оси на G, които съединяват съответно (x, o) и (o, v) и (u, o) и (o, y). Очевидно за възловите точки на $\bar{G}$ можем да положим

$$(38)\qquad \begin{aligned}(X, Y)&=\lambda(x, o)+(o, v),\\ (U, V)&=\mu(u, o)+(o, y),\end{aligned}$$

където $\lambda=\lambda(s)\neq 0$, $\mu=\mu(s)\neq 0$. Оттук имаме

$$(39)\qquad X=\lambda x,\quad Y=v;\quad U=\mu u,\quad V=y$$

и следователно

$$(40)\qquad \begin{aligned}X'&=\lambda' x+\lambda\alpha u, & U'&=\mu' u+\mu\beta x,\\ Y'&=\beta y+\delta v, & V'&=\gamma y+\alpha v.\end{aligned}$$

Веднага се пресмята

$$(41)\qquad \begin{aligned}XU&=\lambda\mu.xu, & YV&=-yv,\\ Y'Y&=\beta.yv, & Y'V&=-\delta.yv,\\ X'X&=-\lambda^2\alpha.xu, & X'U&=\lambda'\mu.xu,\\ V'Y&=\gamma.yv, & V'V&=-\alpha.yv,\\ U'X&=-\lambda\mu'.xu, & U'U&=\mu^2\beta.yv.\end{aligned}$$

В уравнението (5) за възловите точки на $\bar{G}$ имаме по (9) и (41) коефициенти

$$(42)\qquad \begin{aligned}\bar{\rho}&=\lambda(\mu\beta-\lambda\alpha).xu.yv,\\ \bar{\sigma}_1&=\lambda(\gamma\mu-\mu').xu.yv, & \bar{\sigma}_2&=\mu(\lambda'-\delta\lambda).xu.yv,\\ \bar{\sigma}&=[\lambda'\mu-\lambda\mu'+\lambda\mu(\gamma-\delta)].xu.yv,\\ \bar{\tau}&=\mu(\mu\beta-\lambda\alpha).xu.yv.\end{aligned}$$

Тъй като предполагаме, че (X, Y), (U, V) от (38) са възлови точки на $\bar{G}$, имаме $\bar{\rho}=0$, $\bar{\tau}=0$ и следователно

(43) $$\mu\beta-\lambda\alpha=0\,.$$

Пак предполагаме, че за роя G е изпълнено условието (16). Тогава (43) дава

(44) $$\lambda=\theta\beta,\quad \mu=\theta\alpha,$$

където $\theta=\theta(s)$ е функция на s в J; при това постоянно $\theta(s)\neq 0$. Така за възловите точки на $\bar{G}$ имаме представяне

(45) $$(X,\ Y)=\theta\beta(x,\ o)+(o,\ v),\quad (U,\ V)=\theta\alpha(u,\ o)+(o,\ y)$$

или

(46) $$X=\theta\beta x,\quad Y=v\,;\quad U=\theta\alpha u,\quad V=y.$$

По обратен път се вижда, че правата g, която съединява точките $(X,\ Y)$, $(U,\ V)$ от (45) върху напречните оси на G, описва при произволна функция $\theta\,(s)$ един рой $\bar{G}$, чиито възлови прави съвпадат с напречните оси на G (и обратно), т. е. рой $\bar{G}$ с желаните свойства. Получихме:

VI. За всеки рой G с $K\neq 0$ съществуват безбройно много роеве прави $\bar{G}$, чиито възлови прави съвпадат с напречните оси на G. Възловите точки $(X,\ Y)$, $(U,\ V)$ на кой да е рой $\bar{G}$ се дават от (45), където $\theta(s)\neq 0$ е произволна функция на s в J.

Предполагаме $K\neq 0$, защото възловите точки (45) на $\bar{G}$ не са безкрайни точки. Означаваме с $R_{\rm II}(G)$ съвкупността от всички тези роеве $\bar{G}$, когато функцията $\theta(s)$ се мени. С $G_{\rm II}(G;\ \theta)$ означаваме оня рой $\bar{G}$, който отговаря на определена функция $\theta\,(s)$.

За роя $\bar{G}=G_{\rm II}(G;\ \theta)$ имаме по (42) и (44):

(47) $$\begin{gathered}\lambda'=\theta'\beta+\theta\beta',\quad \mu'=\theta'\alpha+\theta\alpha',\\ \sigma_1=\theta\beta[\gamma\theta\alpha-\theta'\alpha-\theta\alpha'].xu.yv,\quad \sigma_2=\theta\alpha[\theta'\beta+\theta\beta'-\delta\theta\beta].xu.yv,\\ \bar{\sigma}=\sigma_1+\sigma_2=\theta^2[\alpha\beta(\gamma-\delta)-(\alpha'\beta-\alpha\beta')].xu.yv\\ =\theta^2K[\gamma-\delta+M-L)].xu.yv.\end{gathered}$$

Разбира се, тук можем да положим $\delta=-1-\gamma$. За да бъде $\sigma\neq 0$, предполагаме

(48) $$\gamma-\delta+(M-L)\neq 0,\ \text{т. е.}\ \frac{\beta'}{\beta}-\frac{\alpha'}{\alpha}+(2\gamma+1)\neq 0\quad \text{за всяко } s\in J.$$

За роя $\bar{G}$ ще разгледаме почти същите въпроси, както в задача 1. За да бъде G развиваем, необходимо и достатъчно е да имаме $\sigma_1\,\bar{\sigma}_2=0$ или по (47):

(49) $$\begin{gathered}\gamma\theta\alpha-(\theta\alpha)'=0,\ \text{или}\quad \delta\theta\beta-(\theta\beta)'=0,\\ \theta=a\exp\int_0^s\gamma ds\,.\,\frac{1}{\alpha},\quad \theta=b\exp\int_0^s\delta ds\,.\,\frac{1}{\beta}\quad (a,\ b\ \text{— константи}).\end{gathered}$$

Така получихме:

VII. В семейството $G_{II}(G;\ \theta)$ съществуват безбройно много развиваеми роеве. Кой да е от тях се представя по (45) с $\theta(s)$ от (49) при подходяща стойност на константата $a \neq 0$ или константата $b \neq 0$.

За инвариантата $\bar{D}$ на $\bar{G}$ имаме по (47):

$$(50) \qquad \bar{D} = -\frac{\bar{\sigma}_2}{\bar{\sigma}_1} = \frac{\alpha}{\beta}\,\frac{\delta\theta\beta - \theta'\beta - \theta\beta'}{\gamma\theta\alpha - \theta'\alpha - \theta\alpha'} = \frac{\delta\theta - \theta' - \theta M}{\gamma\theta - \theta' - \theta L} = \frac{\delta - M - \dfrac{\theta'}{\theta}}{\gamma - L - \dfrac{\theta'}{\theta}}.$$

Ако $\bar{D} = -1$, инвариантната проективност (64) от [1] за роя G е инволюция. Поради (50) за $\bar{D} = -1$ е необходимо и достатъчно да имаме

$$(51) \quad 2\frac{\theta'}{\theta} = -1 - (L + M), \text{ т. е. } \theta = ae^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^s (L + M)ds\right)$$ (a — константа). Следователно:

VIII. В семейството $G_{II}(G;\ \theta)$ има безбройно много роеве $\bar{G}$, за които инвариантната проективност върху правата $g(s)$ е инволюция. Те се дават с формула (45) с функция $\theta(s)$ от (51) при постоянна $a \neq 0$.

Ще намерим естествения параметър s на G в общия случай. По формули (46)

$$XU = \theta^2\alpha\beta.xu, \quad YV = -yv,$$

$$(52) \qquad (XU)' = 2\theta\theta'.\alpha\beta.xu + \theta^2(\alpha\beta)'.xu + \theta^2.\alpha\beta.(xu)',$$

$$(YV)' = -y'v - yv' = (-\gamma - \delta).yv = 1.yv,$$

$$\frac{d\bar{s}}{ds} = s' = \frac{(XU)'}{XU} - \frac{(YV)'}{YV} = 2\frac{\theta'}{\theta} + \frac{(\alpha\beta)'}{\alpha\beta} + 1 = 1 + \frac{K'}{K} + 2\frac{\theta'}{\theta}.$$

Тогава

$$(53) \qquad \bar{s} = s + \ln\frac{K\theta^2}{K_0\theta_0^2},$$

ако искаме $s(0) = 0$; тук фигурират константите $K_0 = K(0)$, $\theta_0 = \theta(0)$ $[\neq 0]$.

Нека специалните координатни четворки на възловите точки на $\bar{G}$ са

$$(54) \qquad (x, \bar{y}) = \eta(X, Y) = (\eta\theta\beta x, \eta v), \quad (u, \bar{v}) = \varkappa(U, V) = (\varkappa\theta\alpha u, \varkappa y),$$

където $\eta = \eta(s) \neq 0$, $\varkappa = \varkappa(s) \neq 0$ са подходящи нормировъчни множители. Както и в случая 1, тези множители се получават от условията (31). Но от (54) намираме

$$x' = (\eta\theta\beta)'.x + \eta\theta\beta\alpha.u,$$

$$\bar{u}' = (\varkappa\theta\alpha)'.u + \varkappa\theta\alpha\beta.x$$

и (31) стават

$$(\eta\theta\beta)'=0,\quad (\varkappa\theta\alpha)'=0,$$

(55)
$$\eta=\frac{a}{\theta\beta},\quad \varkappa=\frac{b}{\theta\alpha};$$

тук $a \neq 0$, $b \neq 0$ са константи. С тези стойности за η, $\varkappa$ от (54) получаваме

(56)
$$\bar{x}=a.x,\quad \bar{u}=b.u,$$
$$\bar{y}=\frac{a}{\theta\beta}.v,\quad \bar{v}=\frac{b}{\theta\alpha}.y.$$

С това са намерени специалните координатни четворки на възловите точки на $\bar{G}$. С тях по формулите (35) на Френе за $\bar{G}$ можем да намерим инвариантите и полуинвариантите на $\bar{G}$. Сега

(57)
$$\frac{d}{d\bar{s}}=\frac{1}{\bar{s}'}\cdot\frac{d}{ds}\quad \text{с}\quad \bar{s}'=1+\frac{K'}{K}+2\,\frac{\theta'}{\theta}\cdot$$

Като извършим диференцираниятa и с оглед на (56) намираме

$$\bar{\alpha}=\frac{a\alpha}{b\bar{s}'},\quad \bar{\beta}=\frac{b\,\beta}{a\bar{s}'},$$

(58)
$$\bar{\gamma}=\frac{1}{\bar{s}'}\left[\delta-\frac{(\theta\beta)'}{\theta\beta}\right],\quad \bar{\delta}=\frac{1}{\bar{s}'}\left[\gamma-\frac{(\theta\alpha)'}{\theta\alpha}\right],$$
$$\bar{K}=\bar{\alpha}\,\bar{\beta}=\frac{\alpha\beta}{\bar{s}'^2}=K:\left(1+\frac{K'}{K}+2\,\frac{\theta'}{\theta}\right)^2\cdot$$

За $\bar{L}$ пресмятаме

$$\bar{L}=\frac{d\bar{\alpha}}{d\bar{s}}\cdot\frac{1}{\bar{\alpha}}=\frac{\bar{\alpha}'}{\bar{s}'.\bar{\alpha}},\quad \bar{\alpha}'=\frac{a}{b}\,\frac{\bar{s}'\alpha'-\bar{s}''\alpha}{\bar{s}'^2},$$

$$\bar{L}=\frac{1}{\bar{s}'}\cdot\frac{\alpha'}{\alpha}-\frac{\bar{s}''}{\bar{s}'^2}$$

или

(59)
$$\bar{L}=\frac{1}{\bar{s}'}\cdot L-\frac{\bar{s}''}{\bar{s}'^2}\cdot$$

Аналогично

(60)
$$\bar{M}=\frac{d\bar{\beta}}{d\bar{s}}\cdot\frac{1}{\bar{\beta}}=\frac{1}{\bar{s}'}\cdot M-\frac{\bar{s}''}{\bar{s}'^2}\cdot$$

Намерихме:

IX. Инвариантите γ, δ, D, K, L, M и полувариантиα, β на роя G се изразяват чрез θ и чрез аналогичните инварианти и полуинварианти на изходния рой G посредством формулите (58) — (60), (50).

И при задача 2. поставяме въпроса: може ли $\bar{G}$ да бъде B-конгруентен с G, като си отговарят правите при една и съща стойност на s? За да е налице това, необходимо и достатъчно е да имаме

$$\bar{\gamma}=\gamma,\ \bar{K}=K,\ \bar{L}=L. \tag{61}$$

С намерените стойности за $\bar{K}$, $\bar{L}$, $\bar{\gamma}$ тези уравнения се написват:

$$\begin{gathered}\frac{1}{\bar{s}'}\left[\delta-\frac{(\theta\beta)'}{\theta\beta}\right]=\gamma,\\ \frac{K}{\bar{s}'^2}=K,\quad \frac{1}{\bar{s}'}L-\frac{\bar{s}''}{\bar{s}'^2}=L\end{gathered} \tag{62}$$

за всяко $s\in J$. От (61_2) поради $K\neq 0$ получаваме $\bar{s}'=\zeta=\pm 1$. Заместваме в (62_3) и при $L\neq 0$ намираме $\bar{s}'=\varepsilon=+1$. Заместваме това в (62_1) и добиваме

$$\frac{(\theta\beta)'}{\theta\beta}=\delta-\gamma \quad \text{или} \quad \frac{(\theta\beta)'}{\theta\beta}=-(1+2\gamma). \tag{63}$$

С интегриране получаваме

$$\theta=\frac{A}{\beta}\exp\left(-\int_0^s(1+2\gamma)\,ds\right), \tag{64}$$

където $A\neq 0$ е константа. От друга страна, $\bar{s}'=1$ с оглед на (57) дава

$$\frac{K'}{K}+2\frac{\theta'}{\theta}=0 \quad \text{и} \quad K\theta^2=B \qquad (B\text{—константа}). \tag{65}$$

Заместваме тук намереното θ от (64) и $K=\alpha\beta$ и достигаме до

$$\frac{\alpha}{\beta}\exp\left(-2\int_0^s(1+2\gamma)ds\right)=C \qquad (C\text{—константа}) \text{ за всяко } s\in J. \tag{66}$$

Следователно за α, β, γ на роя G е налице връзката (66) за всяко $s\in J$.

Обратно, нека връзката (66) е изпълнена за всяко $s\in J$. С роя G свързваме роя $\bar{G}$ от семейството R_{II} (G) по формули (45), като полагаме специално

$$\theta=\frac{\theta_0}{\beta}\exp\left(-\int_0^s(1+2\gamma)ds\right) \qquad (\theta_0 \text{ — константа}). \tag{67}$$

Оттук следва

$$K\theta^2 = \alpha\beta\,\theta_0^2 . \frac{\bar{1}}{\beta^2} . \exp\left(-2\int_0^s (1+2\gamma)ds\right) = \theta_0^2 C.$$

Чрез диференциране намираме

$$\frac{K'}{K} + 2\frac{\theta'}{\theta} = \theta, \quad \bar{s}' = 1$$

с оглед на (52). Тогава изразите (58), (59) за $\bar{\gamma}$, $\bar{K}$, L (левите страни на (62)) стават $\gamma = \gamma$, $\bar{K} = K$, $\bar{L} = L$, тъй като поради $\bar{s}' = 1$ и (67) функцията θ удовлетворява уравнението (62_1). Следователно роят $\bar{G}$ е B-конгруентен с G. Така установихме:

X. В семейството $R_{II}(G)$ тогава и само тогава съществуват роеве прави $\bar{G}$, които са B-конгруентни с G със съответни прави при равни стойности на s, когато величините α, β, γ за роя G са свързани с (66). Ако тази връзка е изпълнена, за G съществуват безбройно много роеве прави $\bar{G}$ в $R_{II}(G)$, които са B-конгруентни с него по казания начин. Те се дават с формулите (56) с функция $\theta(s)$ от (64), в която $A \neq 0$ е произволна константа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Петканчин, Б.: Хиперболични роеве прави в двуосната геометрия. Год. на Соф. унив., Физ.-мат. фак., 48 (1953/54), кн. 1 (мат. и физ.), ч. I, 33 — 65.

Постъпила на 15. XII. 1975 г.

PAARE VON REGELSCHAREN MIT EINEM GEMEINSAMEN BEGLEITENDEN TETRAEDER IN DER ZWEIACHSIGEN GEOMETRIE

B. L. Petkantschin

(ZUSAMMENFASSUNG)

Es sei G eine hyperbolische Regelschar in der hyperbolischen zweiachsigen Geometrie [1]; die allgemeine Gerade g der Regelschar sei als Funktion $g(s)$ des von einer fixierten Geraden gemessenen natürlichen Parameters s gegeben. Die Knotenpunkte von G auf g seien $(x(s), y(s))$, $(u(s), v(s))$. Das mit $g(s)$ verbundene begleitende Tetraeder von G hat als Ecken die unendlichen Punkte $(x(s), o)$, $(u(s), o)$, $(o, y(s))$, $(o, v(s))$. Zwei Kanten des Tetraeders sind die absoluten Geraden j, k, zwei weitere die Knotengeraden durch die Knotenpunkte. Die letzten zwei Kanten seien

Querachsen der Regelschar genannt. Es wird die Aufgabe behandelt zu einer vorgegebenen Regelschar G eine andere Regelschar G zu finden, die dieselben begleitenden Tetraeder wie G besitzt. Es sind zwei Fälle möglich: 1. die Knotengeraden einer der Regelscharen G, $\bar{G}$ sind zugleich Knotengeraden der anderen. 2. Die Knotengeraden einer der Regelscharen sind Querachsen der anderen.

Es ergibt sich, dass in jedem der Fälle zu G eine Menge $R_{\mathrm{I}}(G)$ bezw. $R_{\mathrm{II}}(G)$ von $\bar{G}$ existiert, wobei $\bar{G}$ von einer skalaren Funktion des Parameters s abhängt.

Man löst verschiedene sich auf G, $\bar{G}$ beziehende Aufgaben, welche die Invarianten von $\bar{G}$ und die Korrespondenz zwischen den Geraden von G und $\bar{G}$ betreffen. Es wird z. B. die E-Kongruenz von G und $\bar{G}$ untersucht.