ВЪРХУ ТОЧКИТЕ НА ОТНОСИТЕЛНА НЕТВЪРДОСТ НА НЯКОИ СЪСТАВНИ РОТАЦИОННИ ПОВЪРХНИНИ

Иванка Иванова-Каратопраклиева, Екатерина Андрейчин

1. Нека S е ротационна повърхнина, принадлежаща на класа C^2. Нека e е единичен вектор по ротационната ос на повърхнината, а с $a(v)$ да означим единичен вектор, перпендикулярен на e и завъртян на ъгъл v от някакво начално положение $a(0)=f$. Тогава радиус-векторът на произволна точка от повърхнината S е

$$x(u,\ v)=u.e+r(u)\,.\,a(v), \tag{1}$$

където $r=r(u)$ е уравнение на меридиана c на повърхнината. Нека

$$z(u,\ v)=\alpha(u,\ v).e+\beta(u,\ v).a(v)+\gamma(u,\ v)a'(v) \tag{2}$$

е поле на безкрайно малко огъване за повърхнината (1), принадлежащо на C^2. Тогава $dx\,dz=0$ [1]. Ако представим α, β, γ с редове на Фурие

$$\begin{aligned} \alpha(u,\ v)&=\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikv}\varphi_k(u),\\ \beta(u,\ v)&=\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikv}\chi_k(u),\\ \gamma(u,\ v)&=\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikv}\psi_k(u), \end{aligned} \tag{3}$$

то за коефициентите $\varphi_k(u)$, $\chi_k(u)$, $\psi_k(u)$ получаваме системата

$$\begin{aligned} &\varphi_k'(u)+r'(u)\chi_k'(u)=0,\\ &ik\psi_k(u)+\chi_k(u)=0,\\ &ik\varphi_k(u)+r'(u)[ik\,\chi_k(u)-\psi_k(u)]+r(u)\psi_k'(u)=0. \end{aligned} \tag{4}$$

Оттук за коефициентите $\chi_k(u)$ получаваме уравненията

$$r(u)\chi_k''(u)+(k^2-1)r''(u)\chi_k(u)=0. \tag{5}$$

Известно е, че на всяко нетривиално решение на (5) при $k\geqq 2$ отговаря нетривиално поле на безкрайно малко огъване на повърхнината (1) [2].

Нека са дадени повърхнина S с гранична линия L и произволна точка M. S се нарича относително нетвърда спрямо точката M, ако съществува нетривиално поле $z(u, v)$ на безкрайно малко огъване, такова, че при него разстоянията от M до точките на L остават постоянни [3], [4]. Точката M се нарича точка на относителна нетвърдост за S. Ако с x_M означим радиус-вектора на точката M, то полето $z(u, v)$ ще е поле на безкрайно малкото огъване на повърхнината S, закрепена по граничната линия L относно точката M, ако то удовлетворява условието

$$(6) \qquad z(u, v)\,[x_M - x(u, v)]_L = 0,$$

където $x(u, v)$ е радиус-векторът на S.

В настоящата работа се изследват:

1. Безкрайно малки огъвания на частично изпъкнали, но изцяло неизпъкнали вътрешно слепени съосни ротационни повърхнини Σ_L, закрепени по граничния паралел относно точките върху ротационната ос.

2. Разположението на точките на относителна нетвърдост за Σ_L.

3. Безкрайно малки огъвания на затворени ротационни повърхнини, получени от Σ_L чрез слепването им с ротационен конус с връх върху ротационната ос на Σ_L.

2. Нека в равнината Oef са дадени кривите

$$c_1 : r_1 = r_1(u) \in C[0, u_1] \cap C^2(0, u_1], \quad r_1(0) = 0, \quad r_1(u) > 0 \text{ за } u \in (0, u_1],$$

$$r_1''(u) \leqq 0, \quad \lim_{u \to 0} r_1'(u) = +\infty;$$

$$c_2 : r_2 = r_2(u) \in C^2[u_3, u_1], \quad 0 < u_3 < u_1, \quad r_2(u_3) = 0, \quad r_2(u) > 0 \text{ за } u \in (u_3, u_1],$$

$$r_2''(u) \leqq 0,$$

като $r_1(u_1) = r_2(u_1)$, $r_1(u) > r_2(u)$ за $u \in [u_3, u_1)$.

(Равенствата $r_i''(u) = 0$ са възможни само в отделни точки.)

Разглеждаме повърхнината $\Sigma = S_1 + S_2$, получена при слепването на двете ротационни повърхнини S_1 и S_2 с обща ротационна ос и меридиани съответно c_1 и c_2. Предполагаме, че повърхнината S_1 е аналитична в околност на полюса $u = 0$ и полюсът $u = 0$ не е параболична точка за повърхнината.

Нека $u_3 < u_2 < u_1$. Разрязваме Σ по паралела $u = u_2$ и нека Σ_L е онази част от повърхнината Σ, която не съдържа полюса на повърхнината S_2. Ще търсим точките M на относителна нетвърдост за Σ_L, които лежат върху ротационната ос на Σ, т. е. чиито радиус-вектори са $x_M = u_M . e$.

Нека $u_2 \neq u_M$. Ще предполагаме, че полето $z(u, v)$ на безкрайно малко огъване на повърхнината е от клас C^2 върху регулярните части S_i на повърхнината и от клас C върху Σ_L. Тогава уравненията, съответни на (5), за S_1 и S_2 са

$$(7) \qquad r_i(u) X''_{k,i}(u) + (k^2 - 1) r_i''(u) X_{k,i}(u) = 0, \quad i = 1, 2, \quad k \geqq 2.$$

Като се вземат пред вид равенствата (2), (3), (4) и това, че $\chi_{k,2}(u)>0$ [5], когато $\chi_{k,1}(u)>0$, то условието (6) става

$$-\frac{r_2'(u)}{r_2(u)}-\frac{\chi'_{k,2}(u)}{(k^2-1)\chi_{k,2}(u)}+\frac{k^2}{(k^2-1)(u-u_M)}\Bigg|_L=0,\quad k\geqq 2,$$

или ако означим, както в [6],

$$f_{k,i}(u)=\frac{r_i'(u)}{r_i(u)}+\frac{\chi'_{k,i}(u)}{(k^2-1)\chi_{k,i}(u)}, \tag{8}$$

получаваме

$$\frac{k^2-1}{k^2}f_{k,i}(u_2)=\frac{1}{u_2-u_M}. \tag{9}$$

Следователно задачата се свежда до следната: Нека $\chi_{k,1}(u)$ е регулярно [7] в полюса $u=0$ решение на (7) при $i=1$, търсим точка M върху ротационната ос, такава, че решението $\chi_{k,2}(u)$ на (7) при $i=2$, което върху паралела $u=u_1$ удовлетворява условията

$$\begin{gathered}\chi_{k,1}(u_1)=\chi_{k,2}(u_1),\\ r_1(u_1)\chi'_{k,1}(u_1)+(k^2-1)r_1'(u_1)\chi_{k,1}(u_1)=r_2(u_1)\chi'_{k,2}(u_1)+(k^2-1)r_2'(u_1)\chi_{k,2}(u_1),\end{gathered} \tag{10}$$

да удовлетворява върху граничния паралел условието (9).

В сила са следните теореми:

Теорема 1. За всяко $k\geqq 2$ съществува точка M_k върху ротационната ос, такава, че повърхнината Σ_L е относително нетвърда спрямо нея с поле на безкрайно малко огъване $z_k(u, v)$. Ако $r_2'(u_2)\neq 0$, то точковата редица $\{M_k(u_k, 0, 0), k\geqq 2\}$ е сходяща и има за граница точката

$$\overline{M}\left(\bar{u}=u_2-\frac{r_2(u_2)}{r_2'(u_2)},\ 0,\ 0\right).$$

Теорема 2. Ако $r_1'(u_1)\neq r_2'(u_1)$, $r_2'(u_2)\neq 0$ и или $\dfrac{r_2''(u)}{u-u_3}\in C[u_3, u_1]$, или c_2 е аналитична в околност на точката $u=u_3$, точките M_k, $k=2, 3, \ldots$, на относителна нетвърдост на повърхнината Σ_L се сгъстяват към точката $\overline{M}\left(\bar{u}=u_2-\dfrac{r_2(u_2)}{r_2'(u_2)},\ 0,\ 0\right)$.

Теорема 3. Повърхнината Σ_L е твърда относно центъра на паралела L.

Нека S' е ротационен конус с връх точката $M(u_M, 0, 0)$, $u_M\neq u_2$, и управителна линия граничния паралел L на Σ_L. Да разгледаме затворената повърхнина $S_L=\Sigma_L+S'$. Нека полето $z(u, v)$ на безкрайно малко огъване на S_L е от клас C^2 върху регулярните ѝ части S_i $(i=1, 2)$, S' и от клас C върху S_L. В сила е следната

Теорема 4. S_L е нетвърда тогава и само тогава, когато върхът на конуса S' е точка на относителна нетвърдост за повърхнината Σ_L.

Подобен резултат за ребристи ротационни повърхнини има в [8].

3. *Доказателство* на теорема 1.

а) Нека $f_{k,2}(u_2) \neq 0$. Тогава от (9) получаваме

$$u_k = u_2 - \frac{k^2}{k^2-1} \cdot \frac{1}{f_{k,2}(u_2)}, \tag{11}$$

т. е. за всяко $k \geqq 2$, за което $f_{k,2}(u_2) \neq 0$, получаваме точно една точка $M_k(u_k, 0, 0)$ върху ротационната ос на Σ_L, такава, че Σ_L е нетвърда спрямо нея с поле на безкрайно малко огъване $z_k(u, v)$.

б) Нека $f_{k,2}(u_2) = 0$ за някое $k \geqq 2$. В [6] е доказано, че в този случай съществува равнина α, перпендикулярна на ротационната ос на Σ_L, такава, че Σ_L е относително нетвърда спрямо нея [4]. Ако, както в [4], приемем, че когато Σ_L е нетвърда спрямо равнина α, тя е относително нетвърда спрямо безкрайно отдалечената точка, зададена от нормалата към α, то и сега, когато $f_{k,2}(u_2) = 0$, имаме, че върху ротационната ос съществува точка M_k, такава, че Σ_L е относително нетвърда спрямо нея — това е безкрайната точка на ротационната ос.

Нека $r_2'(u_2) \neq 0$. Ще покажем, че само за краен брой стойности на k, $k \geqq 2$, може да е изпълнено равенството

$$f_{k,2}(u_2) = 0. \tag{12}$$

Да допуснем противното, т. е. че съществува безкрайна подредица $\{f_{k_i,2}(u_2)\}$ на редицата $\{f_{k,2}(u_2)\}$, чиито членове са нули. Като вземем пред вид лема 2 от [7] и равенство (8), получаваме

$$\lim_{k \to \infty} f_{k_i,2}(u_2) = \frac{r_2'(u_2)}{r_2(u_2)} = 0,$$

което противоречи на предположението $r_2'(u_2) \neq 0$. Следователно, като вземем пред вид горното и теоремата от [6], то следва, че равенство (12) може да е изпълнено само за краен брой стойности на k, $k \geqq 2$, т. е. повърхнината Σ_L може да е относително нетвърда спрямо безкрайната точка на ротационната ос само с краен брой полета $z_k(u, v)$.

Да разгледаме числовата редица $\{u_k\}$, чиито членове са определени с равенство (11) (k взема всички цели стойности, по-големи или равни на 2, евентуално без краен брой от тях). Като вземем пред вид лема 2 от [7], получаваме, че редицата е сходяща и

$$\lim_{k \to \infty} u_k = \lim_{k \to \infty} \left[u_2 - \frac{k^2}{k^2-1} \cdot \frac{1}{f_{k,2}(u_2)} \right] = u_2 - \frac{r_2(u_2)}{r_2'(u_2)} = \bar{u}. \tag{13}$$

Оттук следва, че съответната точкова редица $\{M_k(u_k, 0, 0)\}$, всеки елемент на която е еднозначно определен от (11), е сходяща и има за граница точката $\bar{M}(u, 0, 0)$ [9].

Следствие 1. Повърхнината Σ_L е твърда относно всяка точка M от оста, която не е от $\{M_k\}$.

З а б е л е ж к а 1. Ако $r_2'(u_2)=0$, то $\lim_{k\to\infty} u_k$ не съществува, т. е. редицата от точки $\{M_k\}$ е разходяща.

З а б е л е ж к а 2. Да разгледаме повърхнината $\Sigma=S_1+S_2+\ldots+S_n$ [5], като S_i, $i=1, 2, \ldots, n$, удовлетворяват условията на теорема 1 и при това допиране е възможно само за $r_1(u)$ и $r_2(u)$. Да разрежем повърхнината Σ по някой паралел u' на повърхнината S_i, където $2<i\leqq n$, и да означим със Σ_L онази част от Σ, която съдържа полюса на S_1. Да потърсим точките на относителна нетвърдост, лежащи върху ротационната ос на повърхнината Σ_L. Както в теорема 1 (вж. забел. 2 в [7]), може да се докаже, че за всяко $k\geqq 2$ съществува точка M_k, такава, че повърхнината Σ_L е относително нетвърда спрямо нея и ако $r_i'(u')\neq 0$, то точковата редица $\{M_k(u_k, 0, 0)\}$ е сходяща и има за граница точката $\overline{M}\left(\overline{u}=u'-\frac{r_i(u')}{r_i'(u')}, 0, 0\right)$.

Доказателство на теорема 2. Ще покажем, че точките M_k не могат да съвпадат за безброй много стойности на k. Достатъчно е да докажем това за елементите на точковата редица $\{M_k\}$, които са определени чрез (11). Действително, ако допуснем противното, то ще трябва безброй точки да съвпадат с $M(u, 0, 0)$, тъй като числовата редица $\{u_k\}$ е сходяща. Тогава равенството

$$u_2-\frac{k^2}{k^2-1}\cdot\frac{1}{f_{k,2}(u_2)}=u_2-\frac{r_2(u_2)}{r_2'(u_2)}$$

трябва да е изпълнено за безброй много стойности на k. Оттук, като вземем пред вид (8), получаваме

$$\frac{\chi_{k,2}'(u_2)}{\chi_{k,2}(u_2)}=\frac{r_2'(u_2)}{r_2(u_2)}. \tag{14}$$

Да означим, както в [10], $\theta_{k,2}(u)=r_2(u)\chi_{k,2}'(u)-r_2'(u)\chi_{k,2}(u)$. Тогава (14) става

$$\Delta_k=\frac{\theta_{k,2}(u_2)}{r_2(u_2)\chi_{k,2}(u_2)}=0,$$

или (14) е изпълнено за безброй стойности на k, ако $\theta_{k,2}(u_2)=0$ за безброй стойности на k. В [10] е показано при същите предположения за S_1 и S_2, както тук, че функциите $\theta_{k,2}(u)$ са растящи и само краен брой от тях могат да бъдат нули в (u_3, u_1). Следователно най-много краен брой функции $\theta_{k,2}(u)$ могат да се анулират в u_2. Оттук следва, че върху оста на Σ_L съществува изброимо множество точки на относителна нетвърдост за Σ_L. И тъй като $\{M_k(u_k, 0, 0)\}$ е сходяща, то точките M_k се сгъстяват към M.

Доказателство на теорема 3. От (6) получаваме

$$\varphi_{k,2}(u_2)(u_M-u_2)-\chi_{k,2}(u_2)r_2(u_2)=0. \tag{15}$$

Като вземем пред вид, че центърът на паралела е точката $M_0(u_2, 0, 0)$, то равенството (15) добива вида $\chi_{k,2}(u_2)r_2(u_2)=0$, откъдето се получава $\chi_{k,2}(u_2)=0$. Но $\chi_{k,2}(u_2)>0$ [5]. Следователно Σ_L е твърда спрямо M_0.

Забележка 3. Повърхнината Σ_L, дефинирана в забележка 2, е също твърда относно центъра на паралела L, тъй като $\chi_{k,i}(u)>0$, $k\geqq 2$, $i=1, 2,\ldots, n$ [5].

4. Да разгледаме какво е разположението на точките M_k върху оста. Тъй като всяка точка от $\{M_k(u_k, 0, 0)\}$ е еднозначно определена чрез своята координата u_k от (11), то достатъчно е да изследваме какво е разположението на числата u_k върху реалната ос. От (11) имаме, че $u_k>u_2$, ако $f_{k,2}(u_2)<0$, и $u_k<u_2$, ако $f_{k,2}(u_2)>0$.

A. Нека $r_1'(u_1)\neq r_2'(u_1)$. Възможни са следните три случая: I. $r_1'(u_1)\geqq 0$, II. $r_2'(u_1)<0$, III. $r_1'(u_1)<0$, $r_2'(u_1)\geqq 0$.

I. Нека $r_1'(u_1)\geqq 0$. Тогава $r_2'(u_1)>0$ и от [6] имаме, че $f_{k,2}(u)>0$, $k\geqq 2$, за всяко $u\in(u_3, u_1]$. Следователно $u_k\in(-\infty, u_2)$, каквото и да е $u_2\in(u_3, u_1)$.

II. Нека $r_2'(u_1)<0$. Тогава съществува u^*, такова, че, $r_2'(u^*)=0$. Освен това от [6] е известно, че съществуват:
число N_1, такова, че

$$(16)\qquad \frac{\chi'_{k,1}(u_1)}{(k^2-1)\chi_{k,1}(u_1)}<\frac{|r_1'(u_1)-r_2'(u_1)|}{r_1(u_1)}\ \text{за}\ k>N_1\ \text{и}\ \frac{\chi'_{k,1}(u_1)}{(k^2-1)\chi_{k,1}(u_1)}\geqq\frac{|r_1'(u_1)-r_2'(u_1)|}{r_1(u_1)}\ \text{за}\ k\leqq N_1;$$

число N_2, такова, че

$$(17)\qquad \frac{\chi'_{k,1}(u_1)}{(k^2-1)\chi_{k,1}(u_1)}<\frac{|r_1'(u_1)|}{r_1(u_1)}\ \text{за}\ k>N_2\ \text{и}\ \frac{\chi'_{k,1}(u_1)}{(k^2-1)\chi_{k,1}(u_1)}\geqq\frac{|r_1'(u_1)|}{r_1(u_1)}\ \text{за}\ k\leqq N_2;$$

число N_3, такова, че

$$(18)\qquad \frac{\chi'_{k,2}(\tilde u)}{(k^2-1)\chi_{k,2}(\tilde u)}<\frac{r'^2(\tilde u)}{r_2(\tilde u)}\ \text{за}\ k>N_3\ \text{и}\ \tilde u\in(u_3, u^*),$$

като при това е изпълнено $N_2\leqq N_1\leqq N_3$. Тогава, като се вземат пред вид изразът (8) за $f_{k,2}(u)$, неравенствата (17) и това, че $f_{k,2}(u_1)=f_{k,1}(u_1)$, то $f_{k,2}(u_1)<0$ за $k>N_2$ и $f_{k,2}(u_1)\geqq 0$ за $k\leqq N_2$.

1. Нека $k\leqq N_2$. Тъй като $f_{k,2}(u)$ е намаляваща функция [6], то $f_{k,2}(u)>0$ за $u\in(u_3, u_1)$, т. е. за всяко $2\leqq k\leqq N_2$ $u_k\in(-\infty, u_2)$, каквото и да е $u_2\in(u_3, u_1)$.

2. Нека $N_2<k\leqq N_1$. Тогава поради (16) $\chi'_{k,2}(u_1)\geqq 0$ [6]. Но $\chi''_{k,2}(u)\geqq 0$, т. е. $\chi'_{k,2}(u)$ е растяща функция. Има две възможности:

а) $\chi''_{k,2}(u)\geqq 0$ за всяко $u\in(u_3, u_1)$. От $f_{k,2}(u^*)=\dfrac{\chi'_{k,2}(u^*)}{(k^2-1)\chi_{k,2}(u^*)}\geqq 0$ и $f_{k,2}(u_1)<0$ следва, че съществува $\tilde{u}_k\in[u^*, u_1)$, такова, че $f_{k,2}(\tilde{u}_k)=0$. Тогава $f_{k,2}(u)>0$ за $u\in(u_3, \tilde{u}_k)$ и $f_{k,2}(u)<0$ за $u\in(\tilde{u}_k, u_1)$. Следователно, ако $u_2\in(u_3, \tilde{u}_k)$, то $u_k\in(-\infty, u_2)$, а ако $u_2\in(\tilde{u}_k, u_1)$, то $u_k\in(u_2, \infty)$.

б) Съществува точка u_k', такава, че $\chi'_{k,2}(u_k')=0$, т. е. $\chi'_{k,2}(u)<0$ за $u\in(u_3, u_k')$ и $\chi'_{k,2}(u)>0$ за $u\in(u_k', u_1)$.

б1) Ако $u_3<u^*<u_k'<u_1$, то $f_{k,2}(u^*)=\dfrac{\chi'_{k,2}(u^*)}{(k^2-1)\chi_{k,2}(u^*)}<0$ и следователно $f_{k,2}(u)<0$ за $u\in[u^*, u_1]$, т. е. когато $u_2\in[u^*, u_1)$, то съответните числа $u_k\in(u_2,\infty)$.

б2) Ако $u_3<u_k'<u^*<u_1$, то $f_{k,2}(u^*)>0$. Но $f_{k,2}(u_1)<0$ и следователно съществува $\tilde{u}_k\in(u^*, u_1)$, такова, че $f_{k,2}(\tilde{u}_k)=0$. Тогава получаваме, че когато $u_2\in(u_3, \tilde{u}_k)$, то $u_k\in(-\infty, u_2)$, а когато $u_2\in(\tilde{u}_k, u_1)$, то $u_k\in(u_2, \infty)$.

б3) Ако $u_k'=u^*$, то $f_{k,2}(u^*)=0$ и следователно имаме $f_{k,2}(u)>0$ за $u\in(u_3, u^*)$ и $f_{k,2}(u)<0$ за $u\in(u^*, u_1)$, т. е. когато $u_2\in(u_3, u^*)$, съответните числа $u_k\in(-\infty, u_2)$, а когато $u_2\in(u^*, u_1)$, съответните числа $u_k\in(u_2, \infty)$.

3. Нека $k>N_1$. Тогава поради (16) $\chi'_{k,2}(u_1)<0$ [6]. От $\chi'_{k,2}(u_1)<0$ и $\chi''_{k,2}(u)\geqq 0$ получаваме $\chi'_{k,2}(u)<0$ за $u\in(u_3, u_1]$.

а) Нека $u_2\in[u^*, u_1)$. От това, че $f_{k,2}(u)$ е намаляваща функция и $f_{k,2}(u^*)<0$, следва, че $f_{k,2}(u)<0$ за $u\in[u^*, u_1]$, т. е. когато $u_2\in[u^*, u_1)$, $u_k\in(u_2, \infty)$ за всяко $k>N_1$.

б) Нека $u_2\in(u_3, u^*)$. От (18) следва, че за всяко $u_2\in(u_3, u^*)$ съществува число $N_3\geqq N_1$, такова, че $f_{k,2}(u_2)>0$ при $k>N_3$, т. е. когато $u_2\in(u_3, u^*)$, то $u_k\in(-\infty, u_2)$ за всяко $k>N_3$ (числото N_3 зависи от u_2).

III. Нека $r_1'(u_1)<0$, $r_2'(u_1)\geqq 0$. Тогава съществуват числа N_1, N_2, N_3 [6] съответно със същите свойства (16), (17), (18), като е изпълнено $N_1\leqq N_2\leqq N_3$.

1. Нека $k\leqq N_2$. Тогава $f_{k,2}(u_1)\geqq 0$ и тъй като $f_{k,2}(u)$ е намаляваща функция, следва, че $f_{k,2}(u)>0$ за $u\in(u_3, u_1)$. Тогава за всяко $u_2\in(u_3, u_1)$, $u_k\in(-\infty, u_2)$.

2. Нека $k>N_2$. Тогава $f_{k,2}(u_1)<0$. Нека $\tilde{u}\in(u_3, u_1)$. Тогава от (17) следва, че съществува число $N_3\geqq N_2$, такова, че при $k>N_3$, $f_{k,2}(\tilde{u})>0$ и следователно ще съществува $\tilde{u}_k\in(\tilde{u}, u_1)$ такова, че $f_{k,2}(\tilde{u}_k)=0$, т. е. $f_{k,2}(u)>0$ за $u\in(u_3, \tilde{u}_k)$ и $f_{k,2}(u)<0$ за $u\in(\tilde{u}_k, u_1)$. Следователно, когато $u_2\in(u_3, \tilde{u}_k)$, то $u_k\in(-\infty, u_2)$ при $k>N_3$, а когато $u_2\in(\tilde{u}_k, u_1)$, то $u_k\in(u_2, \infty)$ при $k>N_3$ (N_3 зависи от $\tilde{u}$).

Б. Нека $r_1'(u_1)=r_2'(u_1)$, като $r_2''(u)r_1(u)-r_1''(u)r_2(u)\leqq 0$ за $u\in(u_3, u_1)$. Сега са възможни случаите: I. $r_1'(u_1)\geqq 0$ и II. $r_1'(u_1)<0$.

I. Нека $r_1'(u_1)\geqq 0$. Тогава $f_{k,2}(u_1)>0$ и следователно $f_{k,2}(u)>0$ за $u\in(u_3, u_1)$, т. е. за всяко $u_2\in(u_3, u_1)$, $u_k\in(-\infty, u_2)$.

II. Нека $r_1'(u_1)<0$. Тогава съществуват числа $N_2\leqq N_3$ със свойствата (17) и (18) [6].

1. Нека $k \leqq N_2$. Тогава $f_{k,2}(u_1) \geqq 0$ и следователно $f_{k,2}(u) > 0$ за $u \in (u_3, u_1)$ или за всяко $u_2 \in (u_3, u_1)$, $u_k \in (-\infty, u_2)$.

2. Нека $k > N_2$. Тогава $f_{k,2}(u_1) < 0$. Но тъй като $\chi'_{k,2}(u_1) > 0$, то за точката u^* $(r_2'(u^*) = 0)$ е изпълнено $\chi'_{k,2}(u^*) \geqq 0$ или $\chi'_{k,2}(u^*) < 0$.

а) За онези $k > N_2$, за които $\chi'_{k,2}(u^*) \geqq 0$, имаме $f_{k,2}(u^*) \geqq 0$. Но $f_{k,2}(u_1) < 0$ и следователно съществува $\tilde{u}_k$, такова, че $f_{k,2}(\tilde{u}_k) = 0$ и $f_{k,2}(u) > 0$ за $u \in (u_3, \tilde{u}_k)$, $f_{k,2}(u) < 0$ за $u \in (\tilde{u}_k, u_1)$. Тогава, ако $u_2 \in (u_3, \tilde{u}_k)$, то $u_k \in (-\infty, u_2)$, а ако $u_2 \in (\tilde{u}_k, u_1)$, то $u_k \in (u_2, \infty)$.

б) За онези $k > N_2$, за които $\chi'_{k,2}(u^*) < 0$, $f_{k,2}(u^*) < 0$ и следователно $f_{k,2}(u) < 0$ за $u \in (u^*, u_1)$. Тогава, ако $u_2 \in (u^*, u_1)$, $u_k \in (u_2, \infty)$.

Нека сега $\tilde{u} \in (u_3, u^*)$. Тогава съществува $N_3 > N_2$, такова, че $f_{k,2}(\tilde{u}) > 0$ за всяко $k > N_3$. Следователно съществува $\tilde{u}_k \in (u_3, u^*)$, такова, че $f_{k,2}(\tilde{u}_k) = 0$, т. е. когато $u_2 \in (u_3, \tilde{u}_k)$, $u_k \in (-\infty, u_2)$ при $k > N_3$, а когато $u_2 \in (\tilde{u}_k, u^*)$, $u_k \in (u_2, \infty)$ при $k > N_3$ (N_3 зависи от $\tilde{u}$).

Забележка 4. От (13) се вижда, че ако $r_2'(u_2) > 0$, то $u \in (-\infty, u_2)$ и следователно $u_k \in (-\infty, u_2)$ за безброй стойности на k. Аналогично, ако $r_2'(u_2) < 0$, то $u_k \in (u_2, \infty)$ за безброй стойности на k. Но очевидно направените по-горе изследвания за разпределението на точките на относителна нетвърдост са по-подробни.

Забележка 5. От израза (13) се вижда, че при подходящ избор на меридиана c_2 и паралела L върху S_2 може числото $\bar{u}$ да е отрицателно, т. е. ще съществуват точки M_k на относителна нетвърдост за Σ_L, които са наляво от полюса $u = 0$, т. е. за които $u_k < 0$.

Забележка 6. Всички изследвания, направени в тази точка, са в сила и когато повърхнината Σ е аналитична и в околността на полюса u_3. При това, ако u_3 е елиптична точка за Σ, то непосредствено се проверява, че $\lim\limits_{u \to u_3} f_{k,2}(u) = +\infty$ (уравнение (7) при $i = 2$ е от класа на Фукс в околността на u_3). В този случай може да се укаже подробно къде се намират съответните точки на относителна нетвърдост и за случаите: А II 2б1), когато $u_2 \in (u_3, u^*)$, А II 3б), когато $N_1 < k \leqq N_3$; А III 2, когато $N_2 < k \leqq N_3$, и Б II 2б), когато $N_2 < k \leqq N_3$.

5. *Доказателство* на теорема 4. Нека $\chi_{k,1}(u)$ е регулярно в точката $u = 0$ решение на (7) при $i = 1$, а $\chi_{k,2}(u)$ е решение на (7) при $i = 2$, удовлетворяващо в точката u_1 условията (10). Нека $\chi_{k,3}(u)$ е решение на съответното уравнение на (7) за повърхнината S', удовлетворяващо в точката u_2 условията

$$\chi_{k,2}(u_2) = \chi_{k,3}(u_2),$$
$$(19) \qquad r_2(u_2)\chi'_{k,2}(u_2) + (k^2 - 1)r_2'(u_2)\chi_{k,2}(u_2) = r_3(u_2)\chi'_{k,3}(u_2) + (k^2 - 1)r_3'(u_2)\chi_{k,3}(u_2).$$

Тъй като полето $z_k(u, v)$ е непрекъснато върху S_L, то в точката $M(u_M, 0, 0)$ е изпълнено

$$(20) \qquad \varphi_{k,3}(u_M) = \chi_{k,3}(u_M) = \psi_{k,3}(u_M) = 0.$$

Меридианът c_3 на S' има следното уравнение $c_3: r_3(u) = \frac{r_2(u_2)}{u_2 - u_M}(u - u_M)$.

Тогава съответното уравнение на (7) за повърхнината S' става

$$\chi''_{k,3}(u)=0. \tag{21}$$

Като се вземат пред вид условията (19) и означението (8), за решението на (21) получаваме

$$\chi_{k,3}(u)=\left[(k^2-1)\chi_{k,2}(u_2)f_{k,2}(u_2)+(k^2-1)\frac{1}{u_M-u_2}\chi_{k,2}(u_2)\right](u-u_2)+\chi_{k,2}(u_2),$$

откъдето следва, че (20) е изпълнено тогава и само тогава, когато

$$u_M=u_2-\frac{k^2}{(k^2-1)f_{k,2}(u_2)},$$

т. е. тогава и само тогава, когато точката M съвпада с точка от $\{M_k(u_k,\ 0,\ 0)\}$.

Следствие 3. Съществуват най-много изброимо много огъваеми повърхнини S_L от горния вид за всяка повърхнина Σ_L.

Забележка 7. Нека Σ_L е повърхнината, дефинирана в забележка 2, а S' е ротационен конус с връх точката $M(u_M,\ 0,\ 0)$ и управителна линия граничният паралел L на Σ_L. Както в теорема 4, може да се докаже, че повърхнината $S_L=\Sigma_L+S'$ е нетвърда тогава и само тогава, когато върхът на конуса S' е точка на относителна нетвърдост за повърхнината Σ_L.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ефимов, Н. Ф.: Качественные вопросы теории деформаций поверхностей. Усп. мат. наук, 3, № 2 (1948), 47 — 158.
2. Кон-Фоссен, С. Э.: Некоторые вопросы дифференциальной геометрии в целом. М., Физматгиз, 1959.
3. Александров, А. Д., Сенькин, Е. П.: О неизгибаемости выпуклых поверхностей. Вестник ЛГУ, № 8, вып. 3 (1955), 3 — 13.
4. Милка, А. Д.: О точках относительной нежесткости выпуклой поверхности вращения. Укр. геом. сборник, вып. 1 (1965), 65 — 74.
5. Сабитов, И. Х.: О жесткости некоторых поверхностей вращения. Матем. сборник, 60 (1963), № 3, 506 — 519.
6. Иванова-Каратопраклиева, И.: О бесконечно малых изгибаниях скольжения некоторых составных поверхностей вращения. Матем. заметки, 10 (1971), вып. 5, 549 — 554.
7. Иванова-Каратопраклиева, И.: О нежесткости некоторых составных поверхностей вращения. Матем. заметки, 10 (1971), вып. 3, 333 — 344.
8. Перлова, Н. Г.: О точках относительной нежесткости 1-го и 2-го порядков ребристых поверхностей вращения. Матем. анализ и его приложения, т. IV (1972), Изд. Ростовского у-та.
9. Петканчин, Б. Л.: Диференциална геометрия. С., 1964.
10. Иванова-Каратопраклиева, И.: Бесконечно малые изгибания поверхностей вращения при некоторых краевых условиях. Год. Соф. унив., Мат. фак., 67 (1972/73), 235 — 246.

Постъпила на 18. XII. 1975 г.

ÜBER DIE PUNKTE DER RELATIVEN VERBIEGUNG EINIGER ZUSAMMENGESETZTEN ROTATIONSFLÄCHEN

I. Ivanova-Karatopraklijeva, E. Andrejtschin

(ZUSAMMENFASSUNG)

In der vorliegenden Arbeit betrachtet man die infinitesimalen Verbiegungen (erster Ordnung) einer einfachen zusammenhängenden stückweise konvexen, aber im Grossen nicht konvexen Rotationsfläche, die vom Breitenkreis L begrenzt ist, bei folgender Randbedingung: die Entfernungen der Punkte auf L zu dem Punkt M auf der Rotationsachse sind invariabel.

Es seien S_1 und S_2 konvexe Rotationsflächen, die eine gemeinsame Achse haben und der Klasse C^2 angehören. Es seien $c_1: r_1 = r_1(u)$ und $c_2: r_2 = r_2(u)$ die Meridianen der Flächen S_1 und S_2. Betrachten wir die innerlich längs des Breitenkreises $u = u_1$ zusammengeklebte Fläche $\Sigma = S_1 + S_2$. Es sei $u=0$ der Pol der Fläche S_1 und $u = u_3$ — der Pol der Fläche S_2. Es sei L ein innerer Breitenkreis der Fläche S_2. Bezeichnen wir mit Σ_L dasjenige Stück der Fläche Σ, das vom Breitenkreis L begrenzt wird und den Pol der Fläche S_1 nicht enthält. Es sei die Fläche S_1 analytisch in einer Umgebung des Pols $u=0$ und der Pol sei kein parabolischer Punkt für sie. Dann gilt:

Satz 1. Zu jedem $k \geqq 2$ existiert ein Punkt M_k auf der Rotationsachse, so dass die Fläche Σ_L relativ unstarr gegenüber derselben ist mit dem Feld $z_k(u, v)$ der infinitesimalen Verbiegung. Wenn $r_2'(u_2) \neq 0$, konvergiert die Punktfolge $\{M_k(u_k, 0, 0),\ k \geqq 2\}$ gegen den Punkt $\bar{M}\left(\bar{u} = u_2 - \frac{r_2(u_2)}{r_2'(u_2)},\ 0,\ 0\right)$.

Satz 2. Wenn $r_1'(u_1) \neq r_2'(u_1)$, $r_2'(u_2) \neq 0$ und entweder $\frac{r_2''}{u - u_3} \in C[u_3, u_1]$, oder c_2 ist analytisch in einer Umgebung des Punktes $u = u_3$, dann verdichten sich die Punkte M_k, $k = 2, 3, \ldots$, der relativen Unstarrheit der Fläche Σ_L zu dem Punkt $M\left(u = u_2 - \frac{r_2(u_2)}{r_2'(u_2)},\ 0, 0\right)$.

Satz 3. Die Fläche Σ_L ist infinitesimal starr gegenüber dem Zentrums des Breitenkreises L.

Es sei S' ein Rotationskegel mit Spitze der Punkt $M(u_M, 0, 0)$, $u_M \neq u_2$, und mit Leitkurve der Randbreitenkreis der Fläche S_2. Betrachten wir die geschlossene Fläche $S_L = \Sigma_L + S'$. Dann gilt:

Satz 4. Die Fläche S_L ist unstarr dann und nur dann, wenn die Spitze des Kegels ein Punkt der relativen Unstarrheit der Fläche ist.