ВЪРХУ ДВЕ $n+1$-МЕРНИ ПОВЪРХНИНИ ОТ $n+1$-ВА СТЕПЕН СЪОТВЕТНО В $2n+1$- И $2n$-МЕРНО ПРОЕКТИВНО ПРОСТРАНСТВО

Анани Лангов, Стоян Моллов

Нека α_2 и α_2' са две двумерни равнини в P_4, нележащи в една хиперравнина, и φ е колинеация на α_2 върху α_2', при която общата точка на α_2 и α_2' не е двойна. Съвкупността от точките, които лежат на правите, съединяващи двойките точки, съответни при φ, е хиперповърхнина F_3^3 от трета степен. Тази повърхнина е дефинирана от А. Власов [1] и е използувана от С. Моллов [2] за различни изобразявания на P_4 върху равнина. Колинеациите в P_4, които запазват F_3^3, образуват шестчленна група. Като използува свойствата на тази група, А. Лангов в [3] намира инварианти на две кубични окръжности относно една група от кубични бирационални трансформации в Евклидовата равнина.

В настоящата работа, обобщавайки метода за образуване на повърхнината F_3^3, ще бъдат образувани две $n+1$-мерни повърхнини $F_{n+1}^{n+1}(2n+1)$ и $F_{n+1}^{n+1}(2n)$, от $n+1$-ва степен, лежащи съответно в $2n+1$- и $2n$-мерни проективни пространства и ще бъдат изучени някои техни свойства.

§ 1. ИЗСЛЕДВАНИЯ ВЪРХУ ЕДНА $n+1$-МЕРНА ПОВЪРХНИНА $F_{n+1}^{n+1}(2n+1)$ ОТ $n+1$-ВА СТЕПЕН, ЛЕЖАЩА В $2n+1$-МЕРНО ПРОЕКТИВНО ПРОСТРАНСТВО

Теорема 1. Нека α_n и α_n' са две n-равнини в $2n+1$-мерното проективно пространство P_{2n+1}, които нямат обща точка, а φ е колинеация на α_n върху α_n'. Съвкупността от точките, които лежат на правите, съединяващи двойките точки, съответни при φ, е $n+1$-мерна повърхнина $F_{n+1}^{n+1}(2n+1)$ от $n+1$-ва степен.

Доказателство. Да означим с W_n съвкупността от правите, които съединяват двойките точки, съответни при φ. Тази съвкупност е n-параметрична. При това никои две прави от съвкупността W_n нямат обща точка. Наистина, ако допуснем, че две прави от W_n се пресичат, то равнината, в която те лежат, ще пресича α_n и α_n' в пресекателни прави, общата точка на които ще лежи едновременно в α_n и α_n', а това противоречи на условието, че α_n и α_n' нямат обща точка. Следователно множеството от точките, които лежат на правите от W_n, е $n+1$-мерна повърхнина. За да

определим степента на тази повърхнина, вземаме една произволна n-равнина P_n и определяме броя на общите ѝ точки с повърхнината. Понеже всеки две прави от съвкупността W_n са кръстосани, то броят на пресечните точки на повърхнината с P_n е равен на броя на правите от W_n, които пресичат P_n. Последния брой определяме по следния начин. С π означаваме перспективната колинеация на α_n' върху α_n, която има за център n-равнината P_n. Колинеацията $\pi\varphi$ в α_n има в общия случай $n+1$ двойни точки. Нека P е една от тях, т. е. $\pi\varphi(P)=P$. Последното ни дава $\varphi(P)=\pi^{-1}(P)=P'$. От $\pi(P)=P'$ следва, че правата PP' принадлежи на W_n. От $\pi(P')P$ следва, че правата PP' лежи в една проектираща $n+1$-равнина, минаваща през P_n, и следователно PP' пресича P_n. По този начин от $n+1$-те двойни точки на колинеацията $\pi\varphi$ се намират $n+1$ прави на W_n, които пресичат P_n. Това показва, че разглежданата повърхнина е от $n+1$-ва степен. С това теоремата е доказана.

Теорема 2. Върху повърхнината $F_{n+1}^{n+1}(2n+1)$ лежат еднопараметрично множество n-равнини. Всяка от тези n-равнини може да замени α_n или α_n' при образуването на $F_{n+2}^{n+1}(2n+1)$.

Доказателство. Нека $X_0, X_1, \ldots, X_n$ са $n+1$ точки от α_n, нележащи в една $n-1$-равнина, а $X_0'=\varphi(X_0)$, $X_1'=\varphi(X_1), \ldots, X_n'=\varphi(X_n)$. В 3-равнината, която съдържа правите X_0X_0', X_kX_k' $(1\leq k\leq n)$, колинеацията φ поражда проективност φ_k на реда X_0X_k върху реда $X_0'X_k'$, която определя квадратичен рой прави R_k, принадлежащи на съвкупността W_n.

Нека X_0'' е произволна точка от правата X_0X_0'. Правата от квадратичния рой R_k^*, спрегнат на роя R_k, който минава през точката X_0'', пресича всички прави от роя R_k. Пресечната ѝ точка с правата X_kX_k' да означим с X_k''. По този начин при даване на k стойностите от 1 до n получаваме n точки X_k'', които заедно с X_0'' определят една n-равнина α_n''. Ако допуснем, че тази равнина е от измерение $l<n$, то ще следва, че n-равнините α_n и α_n' лежат в пространството с измерение $n+l+1<2n+1$, което съдържа α_n и разглежданата l-равнина, а това ще противоречи на условието, че α_n и α_n' нямат обща точка.

Да означим с π перспективната колинеация на α_n' върху α_n, която е с център n-равнината α_n''. Както в теорема 1, установяваме, че необходимото и достатъчно условие на една точка от α_n да е двойна за колинеацията $\pi\varphi$, е правата от съвкупността W_n, която минава през тази точка, да пресича α_n''. В разглеждания случай обаче всяка точка от правите X_0X_k $(k=1, 2, \ldots, n)$ е двойна за $\pi\varphi$ и следователно колинеацията $\pi\varphi$ съвпада с идентитета в α_n. Следователно всяка права от W_n пресича α_n'' и през всяка точка от α_n'' минава една права от W_n. Следователно α_n'' лежи на повърхнината $F_{n+1}^{n+1}(2n+1)$.

Да допуснем, че двете n-равнини α_n'' и α_n''', имащи едновременно свойството, че всяка от тях пресича всичките прави на съвкупността W_n, имат обща точка. Тогава те лежат в едно пространство от измерение $\leq 2n$. Очевидно в него ще лежат всичките прави на съвкупността W_n, а следователно в него ще лежат и n-равнините α_n и α_n', а това противоречи на условието, че те нямат обща точка. Следователно всеки две такива n-равнини са кръстосани.

Понеже през всяка точка X_0'' от правата $X_0 X_0''$ минава една такава n-равнина, следва, че тяхното множество е еднопараметрично.

Ако π_1 е перспективна колинеация на α_n' върху α_n'', която има за център n-равнината α_n, то очевидно колинеацията $\pi_1 \varphi$ на α_n върху $\alpha n''$ има свойството, че две точки са съответни при нея тогава и само тогава, когато тяхната съединителна права принадлежи на съвкупността W_n. Следователно n-равнината α_n' може да бъде заменена с n-равнината α_n'' при образуването на повърхнината. По същия начин може да се установи, че α_n'' може да замени и n-равнината α_n. С това теоремата е доказана.

От факта, че никои две от правите на съвкупността W_n не се пресичат, следва, че повърхнината $F_{n+1}^{n+1}(2n+1)$ няма нито една двойна точка.

Теорема 3. Колинеациите в $2n+1$-мерно проективно пространство, които запазват повърхнината $F_{n+1}^{n+1}(2n+1)$, образуват n^2+2n+3-членна група.

Доказателство. В n-мерно проективно пространство една k-мерна равнина се определя с помощта на $(n-k)(k+1)$ параметъра. За определяне на повърхнината $F_{n+1}^{n+1}(2n+1)$ задаваме n-мерните равнини α_n и α_n' в $2n+1$-мерното проективно пространство и колинеация φ между тях. Всяка от тези n-равнини се определя с помощта на $(n+1)^2$ параметъра, а колинеацията φ — с помощта на $(n+1)^2-1$ такива. Следователно за задаването на повърхнината са необходими $2(n+1)^2+(n+1)^2-1$ параметъра. Но понеже всяка от n-равнините α_n и α_n' може да се замени (съгл. теорема 2) с коя да е n-равнина от еднопараметричното множество n-равнини, лежащи на повърхнината, то независимите параметри, които са необходими за определянето на повърхнината, са с два по-малко от тази сума или те са $3n^2+6n$. Колинеациите в $2n+1$-мерно пространство образуват $(2n+2)^2-1$-членна група. Следователно колинеациите в това пространство, които запазват повърхнината $F_{n+1}^{n+1}(2n+1)$, образуват $(2n+2)^2-1-(3n^2+6n)=n^2+2n+3$-членна група. С това теоремата е доказана.

Накрая ще напишем уравнения на повърхнината $F_{n+1}^{n+1}(2n+1)$ спрямо един каноничен репер. Базисните точки на този репер избираме по следния начин. Точките $A_1, A_3, \ldots, A_{2n+1}$ избираме да лежат в α_n, а $A_2=\varphi(A_1)$, $A_4=\varphi(A_3), \ldots, A_{2n+2}=\varphi(A_{2n+1})$. Нека E_1 е точка от α_n, нележаща с никои n от точките $A_1, A_3, \ldots, A_{2n+1}$ в една $n-1$-равнина, а $E_2=\varphi(E_1)$. Единичната точка E на репера избираме произволно върху правата $E_1 E_2$.

Колинеацията φ има спрямо реперите $A_1, A_3, \ldots, A_{2n+1} E_1$ и $A_2, A_4, \ldots, A_{2n+2} E_2$ съответно от α_n и α_n' уравнения: $\rho y_1=x_1$, $\rho y_2=x_2$, $\ldots, \rho y_{n+1}=x_{n+1}$. Следователно произволна точка от повърхнината $F_{n+1}^{n+1}(2n+1)$ има параметрично представяне: $\rho z_1=\lambda x_1$, $\rho z_2=\mu x_1$, $\rho z_3=\lambda x_2$, $\rho z_4=\mu x_2, \ldots, \rho z_{2n+1}=\lambda x_{n+1}$, $\rho z_{2n+2}=\mu x_{n+1}$. Наредената $n+1$-орка $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ задава една точка от n-равнината α_n, а λ и μ задават положението на една точка от правата на съвкупността W_n, която минава през избраната точка от α_n. По този ничин се описва цялата повърхнина. Следователно за една и съща точка от повърхнината $n+1$-

орката $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ е нулева и е определена с точност до множител и също такива свойства има и двойката (λ, μ). При фиксирани λ и μ тези параметрични уравнения задават една от n-равнините на еднопараметричното множество n-равнини, лежащи на повърхнината.

Като елиминираме параметрите $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}, \lambda; \mu$, повърхнината $F_{n+1}^{n+1}(2n+1)$ можем да представим аналитично със следните уравнения:

$$z_1 z_4 - z_2 z_3 = 0,$$

$$z_1 z_6 - z_2 z_5 = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$z_1 z_{2n+2} - z_2 z_{2n+1} = 0.$$

§ 2. ИЗСЛЕДВАНИЯ ВЪРХУ ЕДНА $n+1$-МЕРНА ПОВЪРХНИНА ОТ $n+1$-ВА СТЕПЕН В $2n$-МЕРНО ПРОЕКТИВНО ПРОСТРАНСТВО С ДВОЙНА РАВНИНА

Нека α_n и α_n' са n-равнини в $2n$-мерно проективно пространство P_{2n}, нележащи в една хиперравнина, а φ е колинеация на α_n върху α_n', при която точката $M = \alpha_n \cap \alpha_n'$ не е двойна. Да означим и тук с W_n съвкупността от правите, които съединяват двойките точки, съответни при φ. Нека още $M^+ = \varphi(M)$, $M^- = \varphi^{-1}(M)$, $l = M^- M$, $l' = M^+ M$ и λ е равнината, минаваща през правите l и l'. Колинеацията φ поражда проективност φ_0 на реда l върху реда l', която не е перспективност, защото точката $M = \alpha_n \cap \alpha_n'$ не е двойна при φ. Кривата от втори клас c^2, лежаща в λ, която се образува от правите, които съединяват двойките точки, съответни при φ_0, съвпада със съвкупността от правите, принадлежащи на W_n, които лежат в λ. Всеки две от тези прави имат една обща точка.

Ако m_1 и m_2 са две прави от съвкупността W_n, поне едната от които не принадлежи на кривата c^2, то те са кръстосани. Наистина да означим с $M_1 = m_1 \cap \alpha_n$, $M_2 = m_2 \cap \alpha_n$, $M_1' = \varphi(M_1)$ и $M_2' = \varphi(M_2)$. От допускането, че поне една от правите m_1 и m_2 не принадлежи на λ, следва, че поне една от точките M_1 и M_2 не лежи на правата l, а следователно правите $M_1 M_2$ и $M_1' M_2' = \varphi(M_1 M_2)$ са различни от l и l'. Следователно последните прави са кръстосани, а от това получаваме, че и m_1 и m_2 са кръстосани.

Теорема 4. Съвкупността от точките, лежащи на правите от W_n, е $n+1$-мерна повърхнина $F_{n+1}^{n+1}(2n)$, от $n+1$-ва степен.

Доказателство. Доказателството на тази теорема се прави по принцип, както доказателството на теорема 1. Съвкупността от правите W_n е n-параметрична и в общия случай две прави от W_n нямат обща точка. Следователно повърхнината, която се образува от точките, лежащи на правите от съвкупността W_n, е $n+1$-параметрична.

За да определим степента на тази повърхнина, избираме една произволна $n-1$-равнина P_{n-1} (защото повърхнината е $n+1$-мерна и лежи в $2n$-мерно пространство) и означаваме с π перспективната колинеация на α_n' върху α_n

с център $n-1$-равнината P_{n-1}. Колинеацията $\pi\varphi$ в α_n има $n+1$ двойни точки и през тях минават $n+1$ прави на съвкупността W_n, пресичащи P_{n-1}. Следователно степента на повърхнината е $n+1$. С това теоремата е доказана.

Нека $X_0, X_1, \ldots, X_{k-1}, X_k, \ldots, X_n$ са произволни точки от α_n, неинцидентни с една $n-1$-равнина, като $X_0 \not\subset l$ и $X_0' = \varphi(X_0)$, $X_1' = \varphi(X_1)$, $\ldots, X_n' = \varphi(X_n)$. Още нека X_0'' е произволна точка от правата $X_0 X_0'$. Да построим n-равнината α_n'' по начина, изложен в теорема 2. Ще установим няколко свойства на n-равнината α_n''.

Теорема 5. n-равнината α_n'' пресича равнината λ в една права от кривата c^2.

Доказателство. Построяваме $n-1$-равнината $\overset{k}{\alpha}_{n-1}$, съдържаща точките $X_0, X_1, \ldots, X_{k-1}, X_{k+1}, \ldots, X_n$. Като даваме на k значенията от 1 до n, получаваме n такива $n-1$-равнини. Поне две от тези $n-1$-равнини не минават през правата l. Ние ще предполагаме, че това са $\overset{1}{\alpha}_{n-1}$ и $\overset{2}{\alpha}_{n-1}$. Понеже $\overset{1}{\alpha}_{n-1}$ не е инцидентна с l, то $\overset{1}{\alpha}_{n-1}$ и $\overset{1'}{\alpha}_{n-1} = \varphi(\overset{1}{\alpha}_{n-1})$ нямат обща точка. Следователно имаме условията за изпълнение на теорема 2, § 1 и значи правите от съвкупността W_n, които минават през точките на $\overset{1}{\alpha}_{n-1}$, пресичат $n-1$-равнината $\overset{1}{\alpha}{}''_{n-1}$, съдържаща точките $X_0'', X_2'', \ldots, X_n''$. Да означим $L_1 = \overset{1}{\alpha}_{n-1} \cap l$. Правата $L_1 L_1'$, където $L_1' = \varphi(L_1)$, съгласно казаното по-горе, пробожда $\overset{1}{\alpha}{}''_{n-1}$ в точка L_1''. Понеже $L_1 Z l$, следва, че правата $L_1 L_1'$ лежи в λ и значи точката L_1'' е обща за α_n'' и λ. Същите разсъждения са приложими и за $n-1$-равнината $\overset{2'}{\alpha}_{n-1}$ и следователно върху правата $L_2 L_2'$ ($L_2 = \overset{2}{\alpha}_{n-1} \cap l_1$, $L_2'' = \varphi(L_2)$) има точка L_2'', която също лежи в λ и в α_n''.

Нека π_{2n-1} е една хиперравнина, която изпълнява условията: а) съдържа α_n''; б) не минава през точката X_0; в) пробожда правата l в точката L, различна от точките L_1 и L_2. Да означим $\beta_{n-1} = \pi_{2n-1} \cap \alpha_2$ и $\beta_{n-1} \cap X_0 X_1$, $X_0 X_2, \ldots, X_0 X_n = A_1$, $A_2, \ldots, A_n$. Правите от W_n, минаващи през точките $A_1, A_2, \ldots, A_n$, пресичат α_n'' и следователно те принадлежат на π_{2n-1}. Тогава и $\beta_{n-1}' = \varphi(\beta_{n-1})$ принадлежи на него. От $L = \pi_{2n-1} \cap l$ следва, че $L \in \beta_{n-1}$. От $L \in \beta_{n-1}$ следва, че $\varphi(L) = L' \in \beta'_{n-1}$ и следователно правата $m = LL'$ лежи в π_{2n-1}. Понеже LL' е права от c^2, то следва, че π_{2n-1} съдържа една права от равнината λ. Но съгласно условието в) хиперравнината π_{2n-1} не съдържа λ и следователно $m = LL'$ е единствената обща права на π_{2n-1} и λ.

От друга страна, α_n'' лежи в π_{2n-1} и следователно общите точки на α_n'' с λ, а именно L_1'' и L_2'' принадлежат на правата $m = \pi_{2n-1} \cap \lambda$. Точките L_1'' и L_2'' са следователно пресечни точки на правата m с правите $L_1 L_1''$ и $L_2 L_2''$. Понеже последните три прави са различни и принадлежат на c^2, то следва, че точките L_1'' и L_2'' са различни и значи правата m е пресечна права на α_n'' и λ. С това теоремата е доказана.

Теорема 6. Всяка права от съвкупността W_n с изключение на правата $m = \alpha_n'' \cap \lambda$ пресича n-равнината α_n''.

Доказателство. Правите от W_n, лежащи в λ, пресичат правата m, която лежи в α_n''. Нека сега $u \in W_n$, $u \not\subset \lambda$. Да означим $U = \alpha_n \cap u$, $U' = \alpha_n' \cap u$. Разглеждаме $n+1$-равнината π_{n+1}, минаваща през n-равнината α_n'' и през точката U. Нека $p_1 = \alpha_{n_1} \cap \pi_{n+1}$ (очевидно $p_1 \not\supset U$). Правата p_1 пробожда $n-1$-равнините α_{n-1} и α_{n-1}, които са построени, както при доказателството на теорема 5, в точките P_1 и P_2. Правите $P_1 P_1'$, $P_2 P_2'$, където $P_1' = \varphi(P_1)$, $P_2' = \varphi(P_2)$, пресичат съответно α_{n-1}'' и α_{n-1}'' в точките P_1'' и P_2''. От това следва, че правите $P_1 P_1'$ и $P_2 P_2'$ принадлежат на π_{n+1}, а следователно на π_{n+1} принадлежат и правата $P_1' P_2' = \varphi(P_1 P_2)$, точката $U' = \varphi(U)$, която е инцидентна с правата $P_1' P_2'$ и следователно на него принадлежи и правата u. От това, че α_n'' и u лежат в π_{n+1}, следва, че те се пресичат в точка U''. С това теоремата е доказана.

Следствие 1. Ако n-равнината α_n''' е образувана по начина, изложен за образуването на α_n'', като са използувани други $n+1$ точки от α_n, то α_n''' и α_n'' 1) пресичат λ в две различни прави от c^2, 2) нямат обща точка, нележаща в λ.

Доказателство. Да допуснем, че α_n'' и α_n''' пресичат λ в една и съща права от c^2. Понеже съгласно теорема 6 всяка права от съвкупността W_n пресича α_n'' и α_n''', то всичките прави на W_n ще лежат в една $2n-1$-мерна равнина, в която ще лежат и n-равнините α_n и α_n', противно на условието, че те имат само една обща точка. Полученото противоречие доказва 1).

Понеже α_n'' и α_n''' съгласно теорема 5 пресичат λ в две прави, следва, че те имат обща точка в λ. Ако допуснем, че те имат и една обща точка, която е извън λ, то ще следва, че те имат обща права, и ще стигнем до същото противоречие. С това е доказано и 2).

Следствие 2. Нека $Y_0, Y_1, \ldots, Y_n$ са точки от α_n, нележащи в една $n-1$-равнина, като $Y_0 \not\subset l$, и още $Y_0' = \varphi(Y_0)$, $Y_1' = \varphi(Y_1), \ldots, Y_n' = \varphi(Y_n)$, $Y_0'' = Y_0 Y_0' \cap \alpha_n''$. Ако образуваме n-равнината β_n'' по начина, по който образувахме α_n'', само че започвайки построението от точката Y_0'' и използувайки правите $Y_k Y_k'$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, то $\beta_n'' = \alpha_n''$.

Доказателство. β_n'' и α_n'' ще имат свойствата, които са доказани в теоремите 5 и 6, и понеже имат обща точка Y_0'', нележаща в λ, то съгласно следствие 1 от теорема 6 ще имаме $\beta_n'' = \alpha_n''$.

Следствие 3. n-равнините, които имат свойствата на n-равнината α_n'', изказани в теоремите 5 и 6, са еднопараметрично множество.

Това е така, защото през всяка точка от правата $X_0 X_0'$ минава точно една от тези n-равнини и никои две от тях нямат обща точка извън равнината λ.

Теорема 7. Нека α_n'' пресича λ в правата m и сме означили $m \cap l = L$, като още L^+ е допирната точка на кривата c^2, която лежи на правата m, а L^- е допирната точка на c^2, която лежи на правата l. Еднозначно-обратимото съответствие ψ на α_n върху α_n'', при което: а) на произволна точка X от α_n, различна от L и L^-, се съпоставя прободната точка с n-равнината α_n'' на правата от съвкупността W_n, която минава през точката X; б) $\psi(L) = L^+$, $\varphi(L^-) = L$ е колинеация на α_n върху α_n''.

Доказателство. Че точка от α_n чрез ψ се трансформира в точка от α_n'', следва непосредствено от дефиницията на ψ. Ще докажем още, че точките от произволна k-равнина, принадлежаща на α_n, при ψ се трансформират в точките на една k-равнина, принадлежаща на α_n''.

Нека γ_k е произволна k-равнина от α_n. Избираме точките Y_0, Y_1, . . . , Y_k от γ_k, нележащи в една $k-1$-равнина, и точките $Y_{k+1}, \ldots, Y_n$, от α_n, които не лежат в γ_k, но така, че Y_0, $Y_1, \ldots, Y_n$ не лежат в една $n-1$-равнина. Ще предполагаме още, че точката Y_0 не лежи на правата l. Нека още $Y_0''=Y_0Y_0'\bigcap d_n''$, където $Y_0'=\varphi(Y_0)$. α_n'' може съгласно следствие 2 от теорема 6 да се построи, като се започне построението от точката Y_0'' и като се използуват точките Y_0, $Y_1, \ldots, Y_n$.

Случай 1. Нека γ_k не минава през правата l. Тогава k-равнините γ_k и $\gamma_k'=\varphi(\gamma_k)$ нямат обща точка и в $2k+1$-равнината, която ги съдържа, точките Y_0'', Y_1'', . . . , Y_k'' определят една k-равнина γ_k'', която е образувана, както в теорема 2. Тогава тя има свойството, че произволна права от съвкупността W_n, която минава през точка от γ_k, пробожда γ_k''. Понеже γ_k'' лежи в α_n'', то следва, че точките на k-равнината γ_k при ψ се трансформират в точките на k-равнината γ_k'' от α_n''.

Случай 2. Нека γ_k минава през правата l. Тогава k-равнините γ_k и $\gamma_k'=\varphi(\gamma_k)$ имат една обща точка и значи лежат в една $2k$-мерна равнина. В нея точките Y_0'', Y_1'', . . . , Y_k'' задават k-равнината γ_k'', която има свойствата, изказани в теоремите 5 и 6. Следователно правите от W_n, които минават през точките от γ_k, освен правата m пробождат α_n'' в точките на k-равнината γ_k''. Като вземем пред вид и това, че $\psi(L)=L^+$ и следователно $\psi(L)$ е точка от γ_k'', то значи и в този случай образите при ψ на точките от γ_k образуват k-равнината γ_k''. С това теоремата е доказана.

Следствие 1. n-равнината α_n'' може да замени n-равнината α_n' при образуването на повърхнината $F_{n+1}^{n+1}(2n)$.

Ясно е, че такова свойство има всяка от n-равнините на еднопараметричното множество n-равнини, принадлежащи на повърхнината, и то не само спрямо n-равнината α_n', но и спрямо равнината α_n.

Дефиниция. Ще казваме, че $n-1$-равнината P_{n-1} е в общо положение спрямо повърхнината $F_{n+1}^{n+1}(2n)$, ако сечението ѝ с повърхнината се състои само от краен брой точки и е в частно положение спрямо повърхнината в противния случай.

Теорема 8. Ако $n-1$-равнината P_{n-1} минава през точката X от λ и пресича още n прави от съвкупността W_n, никоя от които не лежи в λ, то P_{n-1} е в частно положение относно повърхнината $F_{n+1}^{n+1}(2n)$.

Доказателство. Нека, както в теорема 4, да означим с π перспективната колинеация на n-равнината α_n'' върху n-равнината α_n, която е с център $n-1$-равнината P_{n-1}. Както в теорема 1, установяваме, че необходимото и достатъчно условие една точка от α_n да е двойна за колинеацията $\varphi_1=\pi\varphi$, в n-равнината α_n е правата от съвкупността W_n, която минава през тази точка, да пресича P_{n-1}. През точката X минават две прави от кривата c^2, които принадлежат на W_n и които пресичат α_n в две точки от правата l. По допускане P_{n-1} пресича и още n прави от W_n, които не лежат в λ. Тези прави пресичат α_n в нови n точки. Така в α_n получаваме $n+2$ точки, които са двойни за колинеацията φ_1.

Но колинеацията φ_1 не съвпада с идентитета в α_n. Наистина, ако допуснем, че $\varphi_1=\pi\varphi=i$, то получаваме $\varphi=\pi^{-1}$, а от това ще следва, че $\varphi(M)=\pi^{-1}(M)=M$, което противоречи на условието.

От $\varphi_1\neq i$ следва, че измежду тези $n+2$ двойни точки на φ_1 могат да се намерят $k+2\,(1\leq k\leq n)$, които лежат в една k-равнина γ_k, но всеки $k+1$ от тях да не лежат в една $k-1$-равнина. Колинеацията φ_1 индуцира в k-равнината γ_k колинеация, която съвпада с идентитета в γ_k. Тогава всяка права от съвкупността W_n, която минава през точка от γ_k, пресича P_{n-1}. От това следва, че P_{n-1} има безбройно много общи точки с $F_{n+1}^{n+1}(2n)$ и следователно P_{n-1} не е в общо положение спрямо нея. С това теоремата е доказана.

Понеже една $n-1$-равнина, която е в общо положение спрямо $F_{n+1}^{n+1}(2n)$, може да има с нея най-много $n+1$ общи точки, то получаваме следното

Следствие 1. Ако една $n-1$-равнина P_{n-1}, която е в общо положение спрямо повърхнината $F_{n+1}^{n+1}(2n)$, минава през точката X от λ, то P_{n-1} пресича $F_{n+1}^{n+1}(2n)$ още най-много в n точки.

С други думи, пресечната точка на P_{n-1} с λ трябва да се счита за две пресечни точки на P_{n-1} с $F_{n+1}^{n+1}(2n)$, което заключение изказваме като следното

Следствие 2. Равнината λ е двойна равнина на повърхнината $F_{n+1}^{n+1}(2n)$.

Теорема 9. Колинеациите в $2n$-мерно проективно пространство, които запазват повърхнината $F_{n+1}^{n+1}(2n)$, образуват n^2+2-членна група.

Доказателство. За определянето на n-равнина в $2n$-мерно проективно пространство са необходими $n(n+1)$ параметъра, а за задаването на една колинеация между две n-равнини — n^2+2n параметъра. Повърхнината $F_{n+1}^{n+1}(2n)$ се определя със задаването на n-равнините α_n и α_n' и колинеацията φ на α_n върху α_n'. Следователно за определяното на $F_{n+1}^{n+1}(2n)$ са необходими $2n(n+1)+n^2+2n=3n^2+4n$ параметъра. Но всяка от n-равнините α_n и α_n' може при образуването на повърхнината да се замени с произволна n-равнина от еднопараметричното множество n-равнини (следствие 1 на теорема 7), принадлежащи на повърхнината. Следователно независими параметри, необходими за задаването на $F_{n+1}^{n+1}(2n)$, са $3n^2+4n-2$.

Колинеацията в $2n$-мерно проективно пространство образуват $4n^2+4n$-членна група. Следователно подгрупата на тази група, състояща се от колинеациите в $2n$-мерно проективно пространство, които запазват повърхнината $F_{n+1}^{n+1}(2n)$, е $4n^2+4n-(3n^2+4n-2)=n^2+2$-членна.

Накрая ще напишем уравнения на повърхнината $F_{n+1}^{n+1}(2n)$ спрямо един каноничен репер. Базисните точки на този репер избираме по следния начин: 1) $A_2=\alpha_n\cap\alpha_n'$, $A_1=\varphi^{-1}(A_2)$, $A_3=\varphi(A_2)$, 2) точките $A_4, A_6, \ldots, A_{2n}$ избираме от α_n, а точките $A_5, A_7, \ldots, A_{2n+1}$ — от α_n', като $A_5=\varphi(A_4)$, $A_7=\varphi(A_6), \ldots, A_{2n+1}=\varphi(A_{2n})$, 3) нека E_1 е точка от α_n, а E_2 е точка от α_n' и $\varphi(E_1)=E_2$; тогава за единична точка на координатната система из-

бираме пресечната точка E на n-равнините, съдържащи съответно точките $A_1, A_4, A_6, \ldots, A_{2n}, E_1$ и $A_3, A_5, \ldots, A_{2n+1}, E_2$.

Колинеацията φ се определя от условието:

$$\varphi(A_1, A_2, A_4, A_6, \ldots, A_{2n}, E_1) = A_2, A_3, A_5, A_7, \ldots, A_{2n+1}, E_2.$$

Ако координатите на произволна точка X от α_n спрямо репера $A_1 A_2 A_4 A_6 \ldots A_{2n} E_1$ означим $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n+1})$, а на произволна точка Y от α_n' спрямо репера $A_2 A_3 A_5 \ldots A_{2n+1} E_2$ те са $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n+1})$, то уравненията на φ са $\mu_k = \rho\lambda_k (k=1, \ldots, n+1)$. Като вземем пред вид, че X и Y спрямо репера $A_1 A_2 A_3 \ldots A_{2n+1} E$ имат координатни $2n+1$-орки съответно $(\lambda_1, \lambda_2, 0, \lambda_3, 0, \ldots, \lambda_{n+1}, 0)$ и $(0, \mu_1, \mu_2, 0, \mu_3, 0, \ldots, 0, \mu_{n+1})$, то параметричните уравнения на повърхнината $F_{n+1}^{n+1}(2n)$, която е геометрично място на точките $Z(z_1, z_2, \ldots, z_{2n+1})$ от правите XY, където $Y=\varphi(X)$, имат следния вид: $\rho z_1 = \lambda_1$, $\rho z_2 = \sigma\lambda_1 + \lambda_2$, $\rho z_3 = \sigma\lambda_2$, $\rho z_4 = \lambda_3$, $\rho z_5 = \sigma\lambda_3, \ldots, \rho z_{2n} = \lambda_{n+1}$, $\rho z_{2n+1} = \sigma\lambda_{n+1}$, където ρ и σ са числа, различни от нула.

Като елиминираме параметрите от това представяне на повърхнината, то нейните уравнения се написват във вида:

$$\frac{z_4}{z_5} = \frac{z_6}{z_7} = \cdots = \frac{z_{2n}}{z_{2n+1}}; \quad z_1 z_5^2 + z_3 z_4^2 - z_2 z_4 z_5 = 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Власов, А.: Полярные системы высших порядков в образах первой ступени. М., 1909.
2. Моллов, С.: Косо, аскиално и изотропно проектиране на четиримерното проективно пространство P^4 посредством една тримерна повърхнина от трета степен. Канд. дисертация, С., 1974.
3. Лангов, А.: Геометрия на една група от кубични бирационални трансформации в Евклидовата равнина. Изв. ВМЕИ „В. И. Ленин", XXXIV, 1975, кн. 8, 167—183.

Постъпила на 25. XII. 1975 г.

ÜBER ZWEI $n+1$-DIMENSIONALE FLÄCHEN $n+1$. ORDNUNG BEZIEHUNGSWEISE IM $2n+1$-UND $2n$-DIMENSIONALEN PROJEKTIVEN RAUM

A. Langov, S. Mollov

(ZUSAMMENFASSUNG)

Es seien α_n und α_n' zwei n-dimensionale Ebenen in P_{2n+1}, die keinen gemeinsamen Punkt haben, und φ eine Kollineation von α_n auf α_n'. In der Arbeit wird die Fläche gebildet und untersucht, welche die Punkte auf den

Verbindungsgeraden der Paare entsprechender Punkte in α_n und α_n' enthält. Die Fläche ist $n+1$-dimensional von der Ordnung $n+1$. Es wird bewiesen, dass es eine einparametrige Menge n-dimensionaler Ebenen auf der Fläche existiert; je zwei Ebenen dieser Menge können als α_n und α_n' zur Erzeugung der Fläche dienen. Es wird gezeigt, dass die Kollineationen in P_{2n+1}, die die Fläche in sich transformieren, eine n^2+2n+3-gliedrige Gruppe bilden.

Es seien α_n und α_n' zwei n-dimensionale Ebenen, die in P_{2n}, aber nicht in einer Hyperebene liegen, und φ eine Kollineation von α_n auf α_n', wobei der Punkt $\alpha_n \cap \alpha_n'$ kein Doppelpunkt von φ ist.

In der Arbeit wird die Fläche gebildet und untersucht, welche die Punkte auf den Verbindungsgeraden der Paare entsprechender Punkte in α_n und α_{n1} enthält. Es wird bewiesen, dass diese Fläche $n+1$-dimensional und von der $n+1$. Ordnung ist und eine Doppelebene besitzt. Auf der Fläche liegt eine einparametrige Menge n-dimensionaler Ebene und je zwei Ebenen derselben können als α_n und α_n' zur Erzeugung der Fläche dienen. Es wird gefunden, dass die Kollineationen in P_{2n}, welche die Fläche in sich transformieren, eine n^2+1-gliedrige Gruppe bilden.