ТЕРМОЕЛАСТИЧНО ПОВЕДЕНИЕ НА ДВУКОНТИНУУМ В ПОЛЕ НА МАЛКИ ДЕФОРМАЦИИ

Пенчо Маринов, Върбинка Вълева

Увод. Нарасналото приложение и голямото разнообразие на композиционните материали създаде необходимост от аналитични и технически похвати при разрешаване на механичните и термичните проблеми. Характерният път към такива проблеми в миналото е бил моделирането на композиционните материали като прост континуум, понякога анизотропен, чиито съставни части са избрани по същия начин [1—3]. Въпреки че този подход е бил достатъчен за описание на статичните и квазистатичните проблеми, изгубват се напълно някои характеристики на макроскопичната структура на материала.

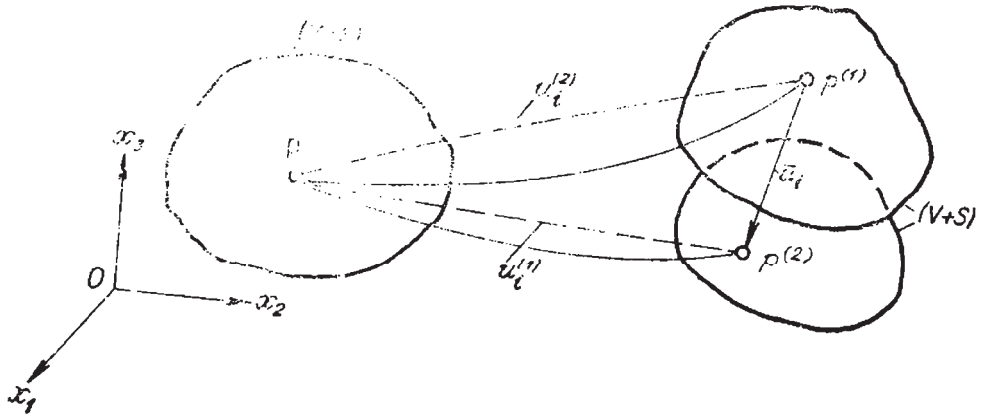
В последните години се появиха редица изследвания в тази област, които държат сметка за редица микроефекти. В теорията на смесите, развита от Truesdell и Toupin [4], Green и Nachdi [5], се разглежда модел на деформируемо тяло, представляващ съвкупност от краен брой континууми, всеки от които притежава индивидуално движение. За разлика от гореспоменатите теории, предназначени за описание на механичните свойства на газови смеси и многофазни течности, Bedford и Stern разглеждат модел на твърди многофазни системи, предполагайки за разлика от [4, 5], че взаимодействуват точки, които са съвпадали преди деформацията. Към разработките за твърдите двуфазни и многофазни системи се отнасят и работите на Eringen и Suhubi [7], Eringen [8, 9], Быковцев и Нго Тхань Фонг [10]. Тези математични модели, които описват сложни структурни взаимодействия при твърдите двуфазни системи, не засягат свързаните термомеханични процеси.

В работите на Бранков, Петров, Иванов и Маринов [11] и на Маринов [12] се дава един нов подход на континуалната теория за твърдите двуфазни и трифазни системи, който вече описва термомеханичното им поведение. Чрез въвеждане на заместващ континуум, движението на който съвпада с движението на масовите центрове на материалните точки, и на вектор поляризация u_i се моделират средата като цяло, а също така и микродвиженията на съставните части при свързани термомеханични процеси. Теорията в [11, 12] е развита в област на крайни деформации.

Настоящото изследване има за цел да разшири областта на приложение от [11], като се изведат уравненията на полето и конститутивните уравнения за твърда двуфазна система при свързан термомеханичен процес и в поле на малки деформации. Като следствие се дават разрешаващите уравнения при изотермични условия.

I. КИНЕМАТИКА НА ДВИЖЕНИЕТО

Нека деформируемото тяло се състои от два континуума, които заемат материалния обем V, ограничен с повърхност S. Разглеждаме в момент t_0 материална точка от недеформируемото тяло с еднородна температура. Материалната точка (в P) съдържа компоненти на двата континуума [6, 11]. След деформацията в момент t материалната точка се разслоява и заема положения $p^{(1)}$ и $p^{(2)}$, като температурата е изобщо нееднородна, но еднаква за двата континуума. Означаваме с x_j ($j=1, 2, 3$) и $x_i^{(l)}$ ($i=1, 2, 3$), където $l=1, 2$, координатите на P, $p^{(1)}$ и $p^{(2)}$ в правоъгълна координатна система. Последната се използува за описване на недеформируемо и деформируемо състояние (фиг. 1).



Фиг. 1

Индивидуалното движение на отделните компоненти е зададено с

$$x_i^{(l)}=x_i^{(l)}(x_j, t), \qquad l=1, 2. \tag{1.1}$$

В област на малки деформации векторите премествания за отделните континууми се дават от

$$u_i^{(l)}=x_i^{(l)}(x_j, t), \qquad l=1, 2. \tag{1.2}$$

Движението на съставните континууми може да се дефинира освен с (1.1) още с уравнението за движение центъра на масите на двата континуума x_i и уравненията за движение на вектора поляризация при двата континуума u_i

$$x_i=\sum_l c^{(l)} x_i^{(l)}(x_j, t), \qquad l=1, 2, \tag{1.3}$$

$$\bar{u}_i=x_i^{(1)}(x_j, t)-x_i^{(2)}(x_j, t), \tag{1.4}$$

където $c^{(l)}=\rho^{(l)}/\rho$, $\rho=\sum_l \rho^{(l)}$; $\rho^{(l)}$ и ρ са парциалните и тоталната плътности.

Мерките на деформациите и на поляризацията са

(1.5) $$e_{ij}^{(l)}=u_{i,j}^{(l)},\quad \bar{u}_i \text{ и } \bar{u}_{i,j}=x_{i,j}^{(1)}-x_{i,j}^{(2)},$$

където $x_{i,j}^{(l)}=\partial x_i^{(l)}/\partial x_j$, $l=1, 2$.

Тъй като сме постулирали, че си взаимодействуват в деформираното състояние само частици, които са съвпадали в начално недеформируемо състояние — вж. [6, 11, 12], то при наличност на централни сили $p^{(l)}$ между разглежданите две материални компоненти ще са в сила равновесните условия

(1.6) $$\sum \rho^{(l)} p_i^{(l)}=0,\quad \sum \rho^{(l)} e_{ijk} u_j p_k^{(l)}=0,$$

където $p_i^{(l)}$ е парциална вътрешна сила; e_{ijk} — тензор на Леви-Чивита.

II. УРАВНЕНИЯ ЗА ЗАПАЗВАНЕ

1. Уравнения за запазване на количеството на движение

За всеки от двата континуума е в сила уравнение за запазване на количеството на движение от вида

(2.1) $$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho^{(l)} \dot{x}_i^{(l)} dV=\int_S t_{ji}^{(l)} dS_j+\int_V \rho^{(l)}(F_i^{(l)}+p_i^{(l)}) dV,\quad l=1, 2,$$

където $t_{ji}^{(l)}$ е парциален тензор на напреженията; $F_i^{(l)}$ — парциална масова сила.

След въвеждане на (1.3) в (2.1), сумиране по l и използуване на теоремата на Гаус — Остроградски, получаваме уравнението за запазване на количеството на движение за заместващия континуум в глобална форма:

(2.2) $$\int_V \rho \ddot{x}_i dV=\int_V t_{ji,j} dV+\int_V \rho F_i dV,$$

където $t_{ji}=\sum_l t_{ji}^{(l)}$ и $F_i=\sum c^{(l)} F_i^{(l)}$, $l=1, 2$, са тоталният тензор на напреженията и тоталната масова сила относно заместващия континуум. В (2.2) имаме $t_{ji}\neq t_{ij}$ и $t_{ji}^{(l)}=t_{ij}^{(l)}$.

Тъй като изразът (2.2) остава в сила за произволен обем V, то имаме локално

(2.3) $$\rho \dot{v}_i=t_{ji,j}+\rho F_i,$$

където $v_i=\dot{x}_i=\dot{u}_i$ е скорост на изменение центъра на заместващия континуум.

2. Уравнения за запазване на момента на количеството на движение

Съгласно принципа за запазване на момента на количеството на движение за всеки от двата континуума е изпълнено

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho^{(l)} e_{ijk} x_j^{(l)} \dot{x}_k^{(l)} d V = \int_S e_{ijk} x_j^{(l)} t_{pk}^{(l)} d S_p + \int_V \rho^{(l)} e_{ijk} x_j^{(l)} (F_k^{(l)} + p_k^{(l)}) d V, \quad l = 1, 2. \tag{2.4}$$

От (1.3) и (1.4) следва, че

$$x_i^{(1)} = x_i + c^{(2)} u_i, \quad x_i^{(2)} = x_i - c^{(1)} u_i. \tag{2.5}$$

След заместване на зависимости (2.5) и (2.4), сумиране по l и прилагане теоремата на Гаус — Остроградски получаваме уравнението за запазване на момента на количеството на движение за заместващия континуум в глобална форма:

$$\int_V \rho c^{(1)} c^{(2)} e_{ijk} \dot{u}_j \ddot{u}_k d V = \int_V e_{ijk} x_{j,p} t_{pk} d V + \int_V M_{pi,p} d V + \int_V \rho L_k d V, \tag{2.6}$$

където

$$M_{pi} = e_{ijk} \bar{u}_j (c^{(2)} t_{pk}^{(1)} - c^{(1)} t_{pk}^{(2)}) = e_{ijk} \bar{u}_j g_{pk}, \tag{2.7}$$

$$L_i = e_{ijk} c^{(1)} c^{(2)} \bar{u}_j (F_k^{(1)} - F_k^{(2)}) = e_{ijk} \bar{u}_j P_k \tag{2.8}$$

са тензорът на механичния момент и моментът на единица маса за заместващия континуум. За тензорите M_{pi} и g_{pk} важи $M_{pi} \neq M_{ip}$ и $g_{pk} \neq g_{kp}$.

Понеже (2.6) е в сила за произволен обем V, то валидно е локалното уравнение

$$\rho c^{(1)} c^{(2)} e_{ijk} \dot{u}_j \ddot{u}_k = e_{ijk} x_{j,p} t_{pk} + M_{pi,p} + \rho L_i. \tag{2.9}$$

3. Уравнение за запазване на енергията

За всеки от двата континуума е изпълнен принципът за запазване на енергията:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho^{(l)} (\epsilon^{(l)} + \frac{1}{2} \dot{x}_i^{(l)} \dot{x}_i^{(l)}) d V = \int_V [\rho^{(l)} e^{(l)} + \rho^{(l)} (F_i^{(l)} + p_i^{(l)}) \dot{x}_i^{(l)}] d V + \int_S (t_{ji}^{(l)} \dot{x}_i^{(l)} - q_j^{(l)}) d S_j, \quad l = 1, 2, \tag{2.10}$$

където $\epsilon^{(l)}$ е парциалната вътрешна енергия за единица маса, $e^{(l)}$ — количеството топлина, което разглежданият континуум получава при взаимодействие с другия континуум, $q_j^{(l)}$ — парциален топлинен поток, отнесен към повърхността S и насочен от външната обкръжаваща среда към тялото. Вътрешни топлинни източници не са включени в (2.10).

В (2.10) се вижда, че парциалните специфични вътрешни енергии $\epsilon^{(l)}$, $l=1, 2$, са непознати функции. За тяхното елиминиране въвеждаме уравнение за запазване на тоталната специфична енергия E, като приемаме, че скоростта на изменение на тоталната специфична енергия е равна на сумата от механичната работа на масовите сили, повърхностните сили и топлинния поток през повърхността S, а именно:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho \mathrm{E}\, dV = \sum_l \int_V \rho^{(l)} F_i^{(l)} \dot{x}_i^{(l)}\, dV + \sum_l \int_S (t_{ji}^{(l)} \dot{x}_i^{(l)} - q_j^{(l)})\, dS_j \quad l=1, 2. \tag{2.11}$$

След сумиране на (2.10) по l и сравняване на получената сума с (2.11) имаме

$$\int_V \rho \dot{\mathrm{E}}\, dV = \int_V \sum_l \rho^{(l)} (\dot{\epsilon}^{(l)} + \dot{x}_i^{(l)} \ddot{x}_i^{(l)})\, dV - \int_V \sum_l \rho^{(l)} (e^{(l)} + p_i^{(l)} \dot{x}_i^{(l)})\, dV, \quad l=1, 2. \tag{2.12}$$

Локалната форма на (2.12) е

$$\rho \dot{\mathrm{E}} = \sum_l \rho^{(l)} (\dot{\epsilon}^{(l)} + \dot{x}_i^{(l)} \ddot{x}_i^{(l)}) - \sum_l \rho^{(l)} (e^{(l)} + p_i^{(l)} \dot{x}_i^{(l)}). \tag{2.13}$$

Като използуваме (2.5), можем да запишем (2.13) във вида

$$\dot{\mathrm{E}} = \dot{\mathrm{K}} + \dot{\epsilon}, \tag{2.14}$$

където

$$\dot{\mathrm{K}} = \dot{x}_l \dot{x}_l + c^{(1)} c^{(2)} \dot{\bar{u}}_i \ddot{u}_i, \tag{2.15}$$

$$\dot{\epsilon} = \sum_l c^{(l)} (\dot{\epsilon}^{(l)} - e^{(l)}) + c^{(2)} p_i^{(2)} \dot{\bar{u}}_i \tag{2.16}$$

са скоростта на изменение на пълната специфична кинетична енергия и скоростта на изменение на специфичната вътрешна енергия.

От (2.14) се вижда, че специфичната вътрешна енергия е функция на тоталната специфична енергия. Скоростта на изменение на тоталната специфична енергия получаваме, след като преминем в усреднена координата в (2.5), т. е. заместим (2.5) в (2.11):

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho \mathrm{E}\, dV = \int_S (t_{ji}\dot{x}_i + g_{ji}\dot{u}_i - q_i)\, dS_j + \int_V \rho (F_i \dot{x}_i + P_i \dot{u}_i)\, dV. \tag{2.17}$$

След прилагане на теоремата на Гаус — Остроградски за (2.17) получаваме

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho \mathrm{E}\, dV = \int_V (t_{ji,j}\dot{x}_i + t_{ji}\dot{x}_{i,j} + g_{ji,j}\dot{\bar{u}}_{i,j} + g_{ji}\dot{\bar{u}}_{i,j} - q_{j,j})\, dV + \int_V \rho (F_i \dot{x}_i + P_i \dot{u}_i)\, dV. \tag{2.18}$$

Или в локална форма за (2.18) ще имаме

$$\rho \dot{\mathrm{E}} = t_{ji,j}\dot{x}_i + t_{ji}\dot{x}_{i,j} + g_{ji,j}\dot{u}_i + g_{ji}\dot{\bar{u}}_{i,j} - q_{j,j} + \rho (F_i \dot{x}_i + P_i \dot{u}_i). \tag{2.19}$$

Остава да определим члена $c^{(1)} c^{(2)} \dot{u}_i \ddot{\bar{u}}_i$, влизащ в израза за кинетичната енергия (2.15). За целта чрез събиране и изваждане на локалната форма на (2.1) получаваме

$$\rho c^{(1)} c^{(2)} \ddot{u}_i = g_{ji,j} + \rho P_i + \rho c^{(1)} p_i^{(1)}. \tag{2.20}$$

Векторното уравнение (2.20) умножаваме скаларно с вектора $\dot{\bar{u}}_i$ и получаваме търсения член:

$$\rho c^{(1)} c^{(2)} \dot{\bar{u}}_i \ddot{\bar{u}}_i = g_{ji,j}\dot{u}_i + \rho P_i \dot{u}_i + \rho c^{(1)} p_i^{(1)} \dot{u}_i. \tag{2.21}$$

След заместване на (2.19), (2.15) и (2.21) в (2.14) получаваме локалната форма на уравнението за запазване на енергията:

$$\rho \dot{\epsilon} = t_{ij}\dot{x}_{i,j} + p_i \dot{u}_i + g_{ji}\dot{\bar{u}}_{i,j} - q_{j,j}, \tag{2.22}$$

където $p_i = \rho c^{(1)} p_i^{(1)}$ е вътрешната сила; тензорът g_{ij} е определен от израза (2.7):

$$g_{ji} = c^{(2)} t_{ji}^{(1)} - c^{(1)} t^{(2)}. \tag{2.23}$$

4. Уравнение за баланса на ентропията

В основата на изложената теория дотук стои предположението, че двата континуума си взаимодействуват само посредством разделителната си повърхност. Съгласно втория принцип на термодинамиката за всеки континуум е изпълнено неравенството на Клаузиус — Дюхем

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho^{(l)} s^{(l)} dV + \int_S \frac{q_i^{(l)}}{\theta^{(l)}} dS_i - \int_V \frac{\rho^{(l)}}{\theta^{(l)}} e^{(l)} dV \geqq 0, \tag{2.24}$$

където $s^{(l)}$ е парциалната специфична ентропия, $\theta^{(l)}$ — локалната абсолютна температура за l-тия континуум.

Ако двата континуума се намират в температурно равновесие, т. е. $\theta^{(1)}=\theta^{(2)}=\theta$, то след сумиране на неравенство (2.24) и използуване на теоремата на Гаус — Остроградски получаваме

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho s dV + \int_V \left(\frac{1}{\theta} q_i\right)_{,i} dV - \int_V \frac{1}{\theta}(\rho^{(1)} e^{(1)} + \rho^{(2)} e^{(2)}) dV \geqq 0, \tag{2.25}$$

където $s = c^{(1)} s^{(1)} + c^{(2)} s^{(2)}$ е тоталната специфична ентропия.

Но за да бъде изпълнено неравенството на Клаузиус — Дюхем и за заместващия континуум, необходимо е

$$\rho^{(1)} e^{(1)} + \rho^{(2)} e^{(2)} = 0, \tag{2.26}$$

тъй като $e^{(1)}$ и $e^{(2)}$ не са външни топлинни количества.

При заместване на (2.26) в (2.16) се получава, че енергията на взаимодействие между двата континуума

$$\epsilon^{(1,2)} = \epsilon - \sum c^{(l)} \epsilon^{(l)}, \quad l = 1, 2,$$

е в равновесие с извършената от вътрешните сили работа, т. е.

$$\dot{\epsilon}^{(1,2)} = c^{(2)} p_i^{(2)} \dot{u}_i. \tag{2.27}$$

Локалната форма на уравнението за баланса на ентропията за заместващия континуум следва от (2.25) и (2.26):

$$\rho \dot{s} - \frac{q_i}{\theta^2} \theta_{,i} + \frac{1}{\theta} q_{i,i} \geqq 0, \tag{2.28}$$

където

$$q_i = \sum_l q_i^{(l)}, \quad l = 1, 2.$$

III. НЕИЗОТЕРМИЧНИ КОНСТИТУТИВНИ УРАВНЕНИЯ

Постулираме, че заместващият континуум е хомогенен и може да се опише от следните конститутивни уравнения:

$$t_{ji} = t_{ji}(u_{ji}, u_i, \bar{u}_{ji}, \theta; \theta_{,i}),$$

$$p_i = p_i(u_{ji}, \bar{u}_i, \bar{u}_{ji}, \theta; \theta_{,i}),$$

$$g_{ji} = g_{ji}(u_{ji}, \bar{u}_i, u_{ji}, \theta; \theta_{,i}), \tag{3.1}$$

$$
(3.1)\qquad
\begin{aligned}
\epsilon &= \epsilon(u_{ji},\ u_i,\ \bar{u}_{ji},\ \theta;\ \theta_{,i}),\\
s &= s(u_{ji},\ \bar{u}_i,\ \bar{u}_{ji},\ \theta;\ \theta_{,i}),\\
q_i &= q_i(u_{ji},\ u_i,\ u_{ji},\ \theta;\ \theta_{,i}),
\end{aligned}
$$

където $u_{ji}=u_{i,j}$ е тензорът градиент от вектора преместване u_i, $\bar{u}_i$ — векторът поляризация и $\bar{u}_{ji}=\bar{u}_{i,j}$ — тензорът градиент от вектора поляризация $\bar{u}_i$.

Свободната енергия, въведена чрез $\Psi=\epsilon-s\theta$, зависи от същите независими променливи, посочени в уравнения (3.1), а именно:

$$
(3.2)\qquad \Psi=\Psi(u_{ji},\ \bar{u}_i,\ u_{ji},\ \theta,\ \theta_{,i}).
$$

След заместване на свободната енергия в неравенството на Клаузиус — Дюхем относно заместващия континуум (2.28) получаваме

$$
(3.3)\qquad
\begin{aligned}
&\left(t_{ji}-\rho\frac{\partial\Psi}{\partial u_{ji}}\right)\dot{u}_{ji}+\left(p_i-\rho\frac{\partial\Psi}{\partial \bar{u}_i}\right)\dot{\bar{u}}_i\\
&+\left(g_{ji}-\rho\frac{\partial\Psi}{\partial \bar{u}_{ji}}\right)\dot{\bar{u}}_{ji}-\rho\left(s+\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\right)\dot{\theta}-\rho\frac{\partial\Psi}{\partial\theta_{,i}}\dot{\theta}_{,i}-\frac{q_i}{\theta}\theta_{,i}\geqq 0.
\end{aligned}
$$

Тъй като изразите в скобите на неравенство (3.3) не зависят от производните на независимите променливи, то за да бъде изпълнено същото неравенство, трябва да са в сила зависимостите

$$
(3.4)\qquad
\begin{aligned}
&t_{ji}=\rho\frac{\partial\Psi}{\partial u_{ji}},\quad p_i=\rho\frac{\partial\Psi}{\partial \bar{u}_i},\quad g_{ji}=\rho\frac{\partial\Psi}{\partial \bar{u}_{ji}},\\
&s=-\frac{\partial\Psi}{\partial\theta},\quad \frac{\partial\Psi}{\partial\theta_{,i}}=0,\ q_i\theta_{,i}\geqq 0.
\end{aligned}
$$

Уравнението $\frac{\partial\Psi}{\partial\theta_{,i}}=0$ показва, че конститутивните уравнения (3.1) и (3.2) не зависят от градиента на температурата $\theta_{,i}$. Тъй като тензорите t_{ji}, g_{ji}, u_{ji} и $\bar{u}_{ji}$ са несиметрични, то уравнения (3.4) могат да се разделят на симетрична и антисиметрична част, както следва:

$$
(3.5)\qquad
\begin{aligned}
&t_{(ji)}=\rho\frac{\partial\Psi}{\partial u_{(ji)}}=\rho\frac{\partial\Psi}{\partial e_{ij}},\quad t_{[ji]}=\rho\frac{\partial\Psi}{\partial u_{[ji]}},\\
&g_{(ji)}=\rho\frac{\partial\Psi}{\partial u_{(ji)}},\quad g_{[ji]}=\rho\frac{\partial\Psi}{\partial \bar{u}_{[ji]}},\quad p_i=\rho\frac{\partial\Psi}{\partial \bar{u}_i}.
\end{aligned}
$$

Накрая ще посочим условието, което ограничава избора на свободната енергия Ψ. За целта се умножава векторното уравнение (2.20) скаларно с вектора $\bar{u}_i$ и се получава

$$\rho c^{(1)} c^{(2)} \bar{u}_i \ddot{u}_i = g_{ji,j} u_i + \rho P_i \bar{u}_i + p_i \bar{u}_i, \tag{3.6}$$

където $P_i = c^{(1)} c^{(2)} (F_k^{(1)} - F_k^{(2)})$, $p_i = \rho c^{(1)} p_i^{(1)}$.

Ако пък векторното уравнение (2.9) умножим скаларно с вектора $\bar{u}_i$, то ще получим

$$\rho c^{(1)} c^{(2)} \bar{u}_i \ddot{u}_i = x_{i,p} t_{pi} + \bar{u}_{i,p} g_{pi} + \bar{u}_i g_{pi,p} + \rho u_i P_i. \tag{3.7}$$

От сравнението на (3.6) с (3.7) следва търсеното условие

$$p_i u_i = u_{pi} t_{pi} + u_{pi} g_{pi}, \tag{3.8}$$

тъй като сме положили $u_{i,p} = u_{pi}$ и $\bar{u}_{i,p} = u_{pi}$, а за поле на малки деформации имаме $x_{i,p} = u_{i,p}$.

След заместване на $t_{(pi)}$ и $g_{(pi)}$ от (3.5) в (3.8) получаваме окончателно следното уравнение, което трябва да удовлетворява свободната енергия:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial u_i} u_i = e_{ip} \frac{\partial \Psi}{\partial e_{ip}} + \bar{u}_{(ip)} \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{u}_{(ip)}}, \tag{3.9}$$

където e_{ip} е тензорът на малката деформация, а $u_{(ip)}$ — симетричната част на тензора градиент от вектора поляризация.

Уравненията (2.3), (2.9), (2.22), (3.1) и (3.9) образуват пълната система от 33 уравнения за определяне на неизвестните функции u_i, $\bar{u}_i$, t_{ji}, p_i, g_{ji}, ϵ, s, θ и q_i, които участвуват в свързаната термоеластична задача на двуконтинуум в поле на малки деформации.

IV. ИЗОТЕРМИЧНИ КОНСТИТУТИВНИ УРАВНЕНИЯ

В случай на изотермични условия (3.1) и (3.2) приемат вида

$$\begin{aligned} t_{ji} &= t_{ij}(e_{ij}, u_i, \bar{u}_{ji}; \theta_0), \\ p_i &= p_i(e_{ij}, \bar{u}_i, \bar{u}_{ji}; \theta_0), \end{aligned} \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned} g_{ji} &= g_{ji}(e_{ij}, u_i, \bar{u}_{ji}; \theta_0), \\ \epsilon &= \epsilon(e_{ij}, u_i, \bar{u}_{ji}; \theta_0), \end{aligned} \tag{4.2}$$

като за тензорите t_{ji}, p_i и g_{ji} остават в сила (3.5).

Да приемем, че функцията $\rho\epsilon$ може да се разложи в ред на Тейлор опрямо независимите променливи e_{ij}, $\bar{u}_i$, $\bar{u}_{ji}$. Членовете, по-високи от втори ред, могат да се пренебрегнат, а линейните членове на e_{ij}, $\bar{u}_i$ и $\bar{u}_{ji}$ изчезват поради ненапрегнатост на континуума в равновесно състояние. За $\rho\epsilon$ се получава

$$\rho\epsilon=\frac{1}{2}a_{ijkl}e_{ij}e_{kl}+b_{ijlk}e_{ij}u_{lk}+\frac{1}{2}c_{jilk}\bar{u}_{ji}u_{lk}+a_{ijk}e_{ij}u_k+d_{jik}u_{ji}u_k+\frac{1}{2}b_{ij}u_i\bar{u}_j, \tag{4.3}$$

където a_{ijkl}, b_{ijlk}, c_{jilk}, a_{ijk}, d_{jik} и b_{ij} са материални константи, които характеризират еластичните свойства на двуконтинуума. Тензорите a_{ijkl}, c_{jilk} и b_{ij} са истински тензори, а тензорите b_{ijlk}, a_{ijk}, d_{jik} са псевдотензори. При условие, че разглеждаме центросиметрична изотропна двуфазна среда (при тази среда всички материални свойства остават инвариантни при централна инверсия и произволна ротация на координатите), то тогава $\rho\epsilon>0$ и за псевдотензорите са в сила условията

$$b_{ijlk}=a_{ijk}=d_{jik}=0. \tag{4.4}$$

Разглеждайки уравнение (4.3) като еластичен потенциал на двуконтинуум, то след като се вземат под внимание уравнения $(4.1)_{1,2,3}$, уравнение (3.5) и условия (4.4) се получават конститутивните връзки, които дефинират обобщения закон на Хук за линеен еластичен двуконтинуум, а именно

$$t_{(ij)}=A_{ijkl}e_{kl},\quad p_i=B_{ij}\bar{u}_j,\quad g_{ji}=C_{jilk}\bar{u}_{lk}, \tag{4.5}$$

където $t_{(ij)}=t_{(ji)}$ и $g_{ij}\neq g_{ji}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hashin, Z., Shtrikman, S.: A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials. J. Mech. Phys. Solids, 2 (1963), 127.
2. Hill, R.: Elastic properties of reinforced solids: some theoretical principles. J. Mech. Phys. Solids, 2 (1963), 357.
3. Болотин, В. В.: Основные уравнения теории армированных сред. Мех. полимеров, кн. 2 (1965), 27—37.
4. Truesdell, C., Toupin, R.: The classical field theories. Encyclopedia of Physics III/I, Berlin — Heidelberg — New York, 1965.
5. Green, A. E., Nachdi, P.: On basic equations for mixtures. Quart. J. Mech. and Applied Math., XXII, pt. 4, 1969.
6. Bedford, A., Stern, M.: A multi-continuum theory for composite elastic materials. Acta Mech., 14 (1972), 85—102.
7. Eringen, A. C., Suhubi, E.: Nonlinear theory of simple microelastic solid. I and II. Int. J. Engng. Sci., 2 (1964), 189—203 and 389—404.
8. Eringen, A. C.: Mechanics of Micromorphic Continua. Presented at IUTAM Symp. Freudenstadt-Stuttgart. August 28 — Sept. 2, 1967. Published in IUTAM — Symp., Mechanics of Generalized Continua. Berlin, 1968. 18—35.
9. Eringen, A. C.: Micropolar elastic solids with stretch. Ari Kitabevi Matbaasi, Istanbul, 1971.
10. Быковцев, Г. И., Нго Тхань Фонг: Об одной модели теории армированных сред. Сб. мех. спл. среды и родств. проблемы анализа к 80-лет. ак. Н. Н. Мусхелишвили, М., 1972, 103—110.

11. Brancov, G., Petrov, N., Ivanov, Z., Marinov, P.: A two-continuum theory for composite media. Rep. II the Bulg. nat. conrgess of theor. and appl. mech., Varna 1973 (in press).
12. Marinov, P.: A three-continuum theory for composite thermomechanical materials. Bull. de la Soc. Royale des Sc. de Liège, 43e année, 1974, Nr. 1—2, 106—118.

Постъпила на 7. I. 1976 г.

THERMO-ELASTIC BEHAVIOUR OF TWO-CONTINUUM IN A SMALL DEFORMATION FIELD

P. Marinov, V. Vâleva

(SUMMARY)

The theory of thermo-elastic behaviour for two-continuum in a small deformation field is presented in which the composite constituents are modelled by a mean continuum and a polarization vector which undergo thermal and mechanical interactions. Kinematical notations, field equations, non-isotermal and isotermal constitutive equations are developed including consequences of material frame indifference and material symmetry which restrict the form of the potential function. It is shown that under conditions of arbitrary temporal and spatial variation of the temperature field the stress tensor, the internal force, the couple stress tensor and the entropy are derivable from a potential function.