АКСИОМАТИЧНА ХАРАКТЕРИСТИКА НА РАЗМЕРНОСТТА НА КРУЛ

Владимир Чуканов

В тази работа се дава аксиоматична характеристика на размерността на Крул (теореми 1 и 2).

Ще припомним дефиницията на размерност на Крул. Нека R е пръстен (с единица). Всички модули, които ще разглеждаме, се предполагат леви (и унитарни) R-модули. С Ω ще означаваме класа на ординалните числа, допълнен с един елемент, който ще означаваме с $-\infty$. По дефиниция полагаме $-\infty<\alpha$ за всеки ординал α. По трансфинитна индукция дефинираме фамилия $(\mathbf{D}_\alpha)_{\alpha\in\Omega}$ от класове от R-модули, както следва:

1. $M\in\Omega_{-\infty}$ тогава и само тогава, когато $M=0$.

2. Ако $\alpha>-\infty$ и $\mathbf{D}_\beta$ са дефинирани при $-\infty\leqq\beta<\alpha$, полагаме $M\in\mathbf{D}_\alpha$ тогава и само тогава, когато за всяка намаляваща редица $M_1\supset M_2\supset\ldots\supset M_n\supset\ldots$ от подмодули на M е изпълнено $M_n/M_{n+1}\in\bigcup\limits_{\beta<\alpha}\mathbf{D}_\beta$ за почти всички индекси n.

По-нататък полагаме $\mathbf{D}=\bigcup\limits_{\alpha\in\Omega}\mathbf{D}_\alpha$. Казваме, че един модул M има размерност на Крул, когато $M\in\mathbf{D}$. В такъв случай полагаме $\dim(M)=\inf\{\alpha: M\in\mathbf{D}_\alpha\}$. Ординала $\dim(M)$ наричаме размерност на M. Например $\dim(M)\leqq 0$ тогава и само тогава, когато M е артинов. Тази дефиниция е предложена за пръв път за крайни ординали в [1] и е пренесена за произволни ординали в [2]. Уславянето $\dim(M)=-\infty$ при $M=0$ има чисто технически характер.

По такъв начин можем да разглеждаме dim като функция $\mathbf{D}\to\Omega$. По-общо, нека $\mathbf{C}$ е произволна категория от R-модули, затворена относно подмодули и фактормодули (по-точно предполагаме, че ако $M\in\mathbf{C}$ и редицата $0\to M'\to M\to M''\to 0$ е точна, то $M'\in\mathbf{C}$ и $M''\in\mathbf{C}$) и нека $d:\mathbf{C}\to\Omega$ е някакво изображение. Разглеждаме следните аксиоми:

D_0. $d\,M=-\infty$ тогава и само тогава, когато $M=0$.

D_1. Ако $M\in\mathbf{C}$ и редицата $0\to M'\to M\to M''\to 0$ е точна, то $d(M)=\max(d(M'),\ d(M''))$.

D_2. Ако $M\in\mathbf{C}$, $\alpha\in\Omega$ и $d(M/X)<\alpha$ за всеки $X\subset M$, $X\neq 0$, то $d(M)\leqq\alpha$.

D_3. Ако $M\in\mathbf{C}$, $\alpha\in\Omega$, $\alpha\geqq 0$ и $M_1\supset M_2\supset\ldots\supset M_n\supset\ldots$ е намаляваща редица от подмодули на M, за която $d(M_n/M_{n+1})\geqq\alpha$ за всяко n, то $d(M)>\alpha$.

D_4. Ако $M\in\mathbf{C}$, $\alpha\in\Omega$ и $M_0=\{x: x\subset M,\ d(x)\leqq\alpha\}$, то $d(M_0)\leqq\alpha$.

Например при $\mathbf{C}=\mathbf{D}$ функцията $d=\dim$ удовлетворява аксиомите D_i, $i=0, 1, 2, 3, 4$. Аксиома D_0 е тривиална, D_1 е доказана в [1], D_2 и D_3 следват непосредствено от дефиницията на размерност, а D_4 е доказана в [3]. Ще покажем, че тези аксиоми характеризират напълно размерността на Крул.

Теорема 1. Нека $\mathbf{C}$ е категория от R-модули, затворена относно подмодули и фактормодули, и $d:\mathbf{C}\to\Omega$ е функция, която удовлетворява D_0, D_1 и D_3. Тогава $\mathbf{C}\subset\mathbf{D}$ и $\dim(M)\leqq d(M)$ за всеки $M\in\mathbf{C}$. Ако освен това d удовлетворява и аксиомите D_2, D_4, то $\dim(M)=d(M)$ за всеки $M\in\mathbf{C}$.

Доказателство. Нека $M\in\mathbf{C}$. Релацията $M\in\mathbf{D}$ и неравенството $\dim(M)\leqq d(M)$ ще докажем индуктивно по $\alpha=d(M)$. При $\alpha=-\infty$ твърдението е тривиално следствие от D_0. Нека $\alpha>-\infty$ и за всеки $N\in\mathbf{C}$, за който $d(N)<\alpha$, е доказано, че $N\in\mathbf{D}$ и $\dim(N)\leqq d(N)$. Нека $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ е намаляваща редица от подмодули на M. Тогава $d(M_n/M_{n+1})<\alpha$ за почти всички n. Действително, ако допуснем, че $d(M_{n_p}/M_{n_p+1})\geqq\alpha$ за безбройно много индекси n_p $(p=1, 2,\ldots, n_p<n_{p+1})$, ще имаме също $d(M_{n_p}/M_{n_p+1})\geqq\alpha$ (защото M_{n_p}/M_{n_p+1} е фактормодул на M_{n_p}/M_{n_p+1} и неравенството следва от D_1) и тогава съгласно аксиома D_3, приложена за редицата $\{M_{n_p}\}_{p=1}^{\infty}$, ще получим $d(M)>\alpha$. И така $d(M_n/M_{n+1})<\alpha$ за почти всички n и съгласно индукционното предположение $M_n/M_{n+1}\in\mathbf{D}$ и $\dim(M_n/M_{n+1})\leqq d(M_n/M_{n+1})<\alpha$. От дефиницията на размерност получаваме, че $M\in\mathbf{D}$ и $\dim(M)\leqq\alpha$.

Нека сега α удовлетворява D_2 и D_4. Неравенството $d(M)\leqq\dim(M)$ ще докажем пак индуктивно по $\alpha=d(M)$. Предварително ще въведем някои помощни понятия. Един модул $M\in\mathbf{C}$ ще наричаме d-чист, ако $d(M)=d(X)$ за всеки $X\subset M$, $X\neq 0$; M ще наричаме d-критичен, ако $M\neq 0$ и $d(M/X)<d(M)$ за всеки $X\subset M$, $x\neq 0$. Не е трудно да се види, че всеки ненулев $M\in\mathbf{C}$ съдържа d-критичен подмодул. (Доказателството на този факт е същото, както и в частния случай $d=\dim$, разгледан например в [5]. В този именно момент от доказателството на теоремата се използва аксиома D_3.) Ще отбележим, че всеки d-критичен модул M е d-чист (от $X\subset M$, $X\neq 0$ и $d(X/M)<d(M)$ следва $d(X)=d(M)$ съгласно аксиома D_1) и всеки ненулев подмодул N на M е d-критичен (ако $X\subset N$, $X\neq 0$, имаме $N/X\subset M/X$ и от D_1 следва, че $d(N/X)\leqq d(M/X)<d(M)=d(N)$).

Пристъпваме към доказателството на неравенството $d(M)\leqq\dim(M)$. При $\alpha=-\infty$ то е очевидно. Нека $\alpha>-\infty$ и вече е доказано, че $d(N)\leqq\dim(M)$ за всеки $N\in\mathbf{C}$, за който $d(N)<\alpha$.

Най-напред ще предположим, че M е d-чист. M съдържа подмодул M_0, който е едновременно d-критичен и критичен (dim-критичен) (най-напред избираме d-критичен подмодул N на M, а след това критичен подмодул M_0 на N). Тъй като $M_0\neq 0$, имаме $d(M_0)=\alpha$ и понеже $\dim(M_0)\leqq\dim(M)$, достатъчно е да покажем, че $d(M_0)\leqq\dim(M_0)$. Нека $X\subset M$, $X\neq 0$. Тъй като M_0 е d-критичен, имаме $d(M_0/X)<\alpha$ и съгласно индукционното предположение $d(M_0/X)\leqq\dim(M_0/X)$. Но M_0 е критичен и следователно $\dim(M_0/X)<\dim(M_0)$ и по такъв начин получаваме $d(M_0/X)<\dim(M_0)$ за всеки $X\subset M_0$, $X\neq 0$. От аксиома D_2 следва, че $d(M_0)\leqq\dim(M_0)$.

Нека сега M е произволен. Да положим $M_0=\sum\{x: x\subset M,\ d(X)<\alpha\}$. Ако $d(M_0)=\alpha$, то $d(M/M_0)=\alpha$ и M/M_0 е d-чист. Действително равенството $d(M/M_0)=\alpha$ следва от D_1. Нека X/M_0, $X\supset M_0$, $X\neq M_0$, е ненулев подмодул на M/M_0. Ако допуснем, че $d(X/M_0)<\alpha$, от D_1 ще получим, че $d(X)<\alpha$ и тогава $X\subset M_0$ поради самата дефиниция на M_0, което е противоречие. И така M/M_0 е d-чист и съгласно направеното по-горе разсъждение имаме $\alpha=d(M/M_0)\leqq\dim(M/M_0)\leqq\dim(M)$.

Накрая нека $d(M_0)=\alpha$. В такъв случай за всяко $\beta<\alpha$ съществува подмодул $X\subset M$, за който $\beta<d(X)<\alpha$. Действително, ако допуснем, че за всеки $X\subset M$ е изпълнено $d(X)\leqq\beta$ или $d(X)=\alpha$, ще получим, че $M_0=\sum\{X: X\subset M,\ d(X)\leqq\beta\}$ и съгласно аксиома D_4 $d(M_0)\leqq\beta<\alpha$. И така нека $\beta<\alpha$ и $X\subset M$ е такъв, че $\beta<d(X)<\alpha$. Съгласно индуктивното предположение $d(X)\leqq\dim(X)\leqq\dim(M)$. По такъв начин за всяко $\beta<\alpha$ е изпълнено неравенството $\dim(M)>\beta$, откъдето $\dim(M)\geqq\alpha$.

С това доказателството е завършено.

По-нататък ще разгледаме малко по-подробно случая, когато $\mathbf{C}$ е съставена от ньотерови модули. При това предположение разглежданите аксиоми малко се опростяват и допускат някои модификации, удобни за приложения.

Теорема 2. Нека $\mathbf{C}$ е категория от ньотерови R-модули, затворена относно подмодули и фактормодули, и $d:\mathbf{C}\to\Omega$ е функция, която удовлетворява аксиомите D_0 и D_1. Тогава d удовлетворява и D_4. Освен това аксиома D_3 е еквивалентна на следната

D_3^N. Всеки модул $M\in\mathbf{C}$ има композиционен ред $\{M_i\}_{i=0}^n$ с d-критични фактори M_i/M_{i+1}.

Доказателство. Най-напред ще направим следната бележка. Ако $M_1\subset M$ и $M_2\subset M$ и $d(M_i)\leqq\alpha$, $i=1, 2$, то $d(M_1+M_2)\leqq\alpha$. Действително, ако положим $F=(M_1+M_2)/M_1$, F може да се разглежда като фактормодул на M_2 и следователно $d(F)\leqq d(M_2)\leqq\alpha$. От точната редица $0\to M_1\to M_1+M_2\to F\to 0$, като приложим D_1, получаваме $d(M_1+M_2)\leqq\alpha$.

Сега да докажем, че d удовлетворява D_4. Нека $M\in\mathbf{C}$, $\alpha\in\Omega$ и M_0 е максимален подмодул на M, за който $d(X)\leqq\alpha$. Ако $X\subset M$ е произволен подмодул на M с $d(X)\leqq\alpha$, съгласно направената по-горе бележка имаме $d(M_0+X)\leqq\alpha$ и от максималността на M_0 следва, че $M_0+X\subset M_0$, т. е. $X\subset M_0$. По такъв начин $M_0=\sum\{X: X\subset M,\ d(X)\leqq\alpha\}$ и аксиома D_4 е изпълнена.

Сега да докажем, че D_3 е еквивалентна с D_3^N. Нека е изпълнена D_3, $M\in\mathbf{C}$ и M_0 е максимален подмодул на M, който има композиционен ред с d-критични фактори. Ако $M/M_0\neq 0$, както отбелязахме в доказателството на теорема 1, M/M_0 съдържа d-критичен подмодул M_1/M_0. Тогава $M_0\subsetneq M_1$ и M_1 също има композиционен ред с d-критични фактори, което противоречи на максималността на M_0. Следователно $M_0=M$ и по такъв начин виждаме, че M има композиционен ред с d-критични фактори.

Обратно, нека е изпълнена аксиома D_3^N. Най-напред ще покажем, че ако редицата $0\to M'\to M\to M''\to 0$ е точна и D_3 е изпълнена за M' и M'', тя е изпълнена и за M. Да положим $M_n'=M_n\cap M'$ и $M_n''=M_n+$

$M'/M' \subset M''$. (Без ограничение на общността можем да считаме, че $M' \subset M$ и $M'' = M/M'$.) Тогава за всяко n имаме точна редица $0 \to M_n'/M'_{n+1} \to M_n/M_{n+1} \to F_n \to 0$, където $F_n \subset M_n''/M''_{n+1}$. От аксиома D_1 получаваме $d(M_n/M_{n+1}) = \max(d(M_n'/M'_{n+1}), d(F_n))$ и понеже $d(F_n) \leqq d(M_n''/M''_{n+1})$, имаме $d(M_n/M_{n+1}) \leqq \max(d(M_n'/M'_{n+1}), d(M_n''/M''_{n+1}))$. По такъв начин за всяко n е изпълнено поне едно от неравенствата $d(M_n'/M'_{n+1}) \geqq \alpha$ или $d(M_n''/M''_{n+1}) \geqq \alpha$ и следователно поне едно от тези неравенства, например първото, е изпълнено за безбройно много индекси n. Но тогава $d(M') > \alpha$ и още повече $d(M) > \alpha$.

По-нататък чрез индукция по n виждаме, че ако M има композиционен ред $\{M_i\}_{i=0}^n$, всеки фактор на който удовлетворява D_3, то и M удовлетворява D_3.

За да завършим доказателството, остава да отбележим, че всеки d-критичен модул M удовлетворява D_3. Действително от $d(M_2/M_3) \geqq \alpha > -\infty$ в частност следва $M_2 \neq M_3$ и още повече $M_2 \neq 0$. Тогава от $M_1/M_2 \subset M/M_2$ и критичността на M получаваме, че $d(M_1/M_2) \leqq d(M/M_2) < d(M)$ и следователно $d(M) > \alpha$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Gabriel, P., Rentsler, R.: Sur la dimension des anneaux et ensembles ordonnés. C. R. Acad. sci., Paris, **265** (1967), 712—715.
2. Krause, G.: On fully left bounded left noeterian rings. J. Algebra, **23** (1972), 88—99.
3. Gordon, R., Robson, J. C.: Krull dimension. Mem. Amer. Math. Soc., **133** (1973).

Постъпила на 19. I. 1976 г.

AXIOMATISCHE CHARAKTERISTIK DER KRULLSCHEN DIMENSION

W. Tschukanov

(ZUSAMMENFASSUNG)

In der Arbeit wird die Krullsche Dimension axiomatisch charakterisiert (Sätze 1 und 2). Es wird weiter gezeigt, dass die Krullsche Dimension eines Noetherschen Moduls mit der Länge einer gewissen Menge von dessen Teilmoduln übereinstimmt.