МИЗЕСОВИ ФУНКЦИОНАЛИ И АСИМПТОТИЧНИТЕ ИМ РАЗПРЕДЕЛЕНИЯ

Боян И. Пенков

1. Увод. Когато става дума за Рихард фон Мизес (1883—1953) и приноса му в теорията на вероятностите и математическата статистика, обикновено се има пред вид неговата честотна интерпретация на понятието вероятност. Идеите на Мизес, формулирани за пръв път през 1919 г. и развити в монографиите [8] и [9], намериха широк, незаглъхнал и до днес отзвук. Тук няма да се спираме на твърде интересната, породена при това проблематика. Ще кажем само, че макар днес стохастиката да е изцяло потопена в общоприетата аксиоматика на Колмогоров, работата по изясняване на понятията случайно и вероятност съвсем не е завършена, както показват трудовете на самия Колмогоров и неговите ученици от последните години [19].

В настоящия обзорен доклад ще разгледаме едно от постиженията на Мизес в математическата статистика, а именно метода му за намиране на асимптотичните разпределения на определен клас статистики. Струва ни се, че този метод на Мизес днес е несправедливо позабравен. Макар, както ще видим по-долу, получените с него резултати да могат в повечето случаи да бъдат изведени и с други, специфични методи, които естествено на отделни места водят и до по-прецизни твърдения, методът на Мизес дава единен подход и до голяма степен разкрива механизма на нещата. Публикациите на Мизес по тия въпроси се разпростират в периода от 1935 до 1952 г. [10], [11], [12], [13], [14]. Едно осъвременено изложение на тази теория наред с редица нови резултати и приложения даде в 1962 г. А. А. Филипова [21].

Преди да изложим същността на Мизесовия метод, ще се спрем на ония статистики, към които той ще бъде прилаган.

Нека $\xi_1, \ldots, \xi_n$ е извадката, от която тръгваме във всяка статистическа задача, т. е. нека случайните величини $\xi_1, \ldots, \xi_n$ са независими и еднакво разпределени и нека общата за всички тях функция на разпределение означим с F. Когато F е абсолютно непрекъсната, съответната плътност ще означаваме с f. В някои случаи разпределението ще зависи от още един параметър θ и тогава функцията на разпределение и плътността ще означаваме с $F(\cdot, \theta)$ и $f(\cdot, \theta)$. Навсякъде по-долу ще предполагаме параметъра θ скаларен, т. е. $\theta \in \Theta \subset R$, където Θ е някакво отворено подмножество на реалната права R. Предположението, че θ е едномерен, правим, за да опростим изложението. Редица от фор-

мулираните по-долу твърдения, съответно видоизменени, остават в сила и когато Θ е отворено множество в някое крайномерно евклидово пространство с брой на измеренията, по-голям от единица.

Вектора $(\xi_1 \ldots, \xi_n)$ ще означаваме накратко и с $\bar{\xi}=(\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Почти всички т. нар. статистики, сиреч функции на $\bar{\xi}$, разглеждани в математическата статистика, са симетрични спрямо аргументите $\xi_1, \ldots \xi_n$. Инвариантността им спрямо произволна пермутация на тия компоненти ги кара да зависят в същност само от наредените статистики $X_1 \leqq X_2 \leqq \cdots \leqq X_n$, където X_i не са нищо друго освен ξ_i, наредени по големина. Така получения вектор $(X_1, \ldots, X_n)$ с монотонно (по i) ненамаляващи компоненти ще означаваме накратко с $\mathbf{X}=(X_1, \ldots, X_n)$. Както знаем, наред с векторите $\bar{\xi}$ и $\mathbf{X}$ обикновено се въвежда и емпиричната функция на разпределение $F_n(t)$, дефинирана с

$$F_n(t)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sigma(t-\xi_i), \tag{1}$$

където $\sigma(u)=1$ за $u>0$ и $\sigma(u)=0$ за $u\leqq 0$.

Съответствието между векторите $\mathbf{X}$ и стъпаловидните функции от вида (1) очевидно е взаимно еднозначно. Това обаче означава, че всяка симетрична функция на компонентите на ξ, сиреч всяка функция на $\mathbf{X}$, може да бъде разглеждана като функционал на F_n.

Ето някои примери. При разглеждането им в тоя дял ще предполагаме, че участвуващите в тях елементи са достатъчно регулярни, за да бъдат оправдани извършваните действия.

Пример 1.1. Емпиричните моменти $m_\nu=n^{-1}(\xi_1^\nu+\cdots+\xi_n^\nu)$ за $\nu=1, 2, \ldots$ са функционали от вида

$$m_\nu(F_n)=\int_R u^\nu\, dF_n(u). \tag{2}$$

Пример 1.2. Централните емпирични моменти $m_\nu^*=n^{-1}\times[(\xi_1-m_1)^\nu+\cdots+(\xi_n-m_1)^\nu]$ за $\nu=1, 2, \ldots$ са функционали от вида

$$m_\nu^*(F_n)=\int_R (u-m_1(F_n))^\nu\, dF_n(u). \tag{3}$$

Пример 1.3. Систематичните статистики, т. е. линейните комбинации от вида

$$C(\mathbf{X})=c_{n1}X_1+c_{n2}X_2+\cdots+c_{nn}X_n, \tag{4}$$

където $\mathbf{C}=(c_{ni})$, $1\leqq i\leqq n$, $n=1, 2, \ldots$, е безкрайна, триъгълна матрица също могат да се представят в интегрален вид. Нека $\bar{C}_n=c_{n1}+c_{n2}+\cdots+c_{nn}$ е сборът от членовете в n-тия ред на $\mathbf{C}$ и нека $\bar{c}_{ni}=c_{ni}-\bar{C}_n/n$. Очевидно $\bar{c}_{n1}+\bar{c}_{n2}+\cdots+\bar{c}_{nn}=0$. Нека освен това $c_n(\cdot)$ е функция, дефинирана в интервала $[0, 1]$, за която $c_n(0)=c_n(1)=0$ и $c_n((i-1)/n)-c_n(i/n)=\bar{c}_{ni}$, $i=1, 2, \ldots, n$, и накрая $p(\cdot)$ е произволна плътност в R. Тогава веднага се вижда, че

(5) $$C(F_n)=C(X)=\int_R c_n(F_n(u))\,du+C_n\int_R u\,dF_n(u),$$

или

(6) $$C(F_n)=\int_{R^2}[c_n(F_n(u_1))+C_n p(u_1)u_2]\,du_1\,dF_n(u_2).$$

Пример 1.4. Статистиката X^2 на Пирсон може да се представи като функционал на F_n по следния начин. Нека с $-\infty=a_0<a_1<a_2<\cdots<a_k<a_{k+1}=\infty$ означим границите на интервалите на групировка, с I_i — съответните интервали: $I_0=(-\infty, a_1)$, $I_i=[a_i, a_{i+1})$, $i=1, 2, \ldots, k$, а с p_i вероятностите им: $p_i=F(a_{i+1})-F(a_i)$. Тогава $X^2(F_n)$ се дава с

(7) $$X^2(F_n)=n\int_{R^2}\varphi(u_1, u_2)\,dF_n(u_1)\,dF_n(u_2),$$

където $\varphi(u_1, u_2)=-1+\sum_{i=1}^{k}\varphi_i(u_1, u_2)$, а

$$\varphi_i(u_1, u_2)=\begin{cases} p_i^{-1}, & (u_1, u_2)\in I_i\times I_i,\\ 0, & (u_1, u_2)\bar{\in} I_i\times I_i.\end{cases}$$

Пример 1.5. Представянето на статистиката ω^2 се дава от

(8) $$\omega^2(F_n)=\int_R[F_n(u)-F(u)]^2 f(u)\,du.$$

Изброените в примери 1.1 до 1.5 статистики се представят явно като интегрални функционали на F_n. Когато съответната статистика обаче е оценка на параметъра θ, функционалът може да бъде зададен и неявно. Такива функционали се разглеждат в примерите 1.6 до 1.9.

Пример 1.6. Оценка на максимума на правдоподобието. Тази оценка, означена с $\hat{\theta}(F_n)$, е решение спрямо θ на уравнението

(9) $$\int_R \frac{d}{d\theta}\log f(u, \theta)\,dF_n(u)=0.$$

Пример 1.7. Групирана оценка по максимума на правдоподобието $\hat{\theta}_g(F_n)$. Тази оценка е решение на уравнението

(10) $$\int_R \varphi_g(\theta, u)\,dF_n(u)=0,$$

където

$$\varphi_i(\theta, u)=\begin{cases} \frac{d}{d\theta}\log p_i(\theta), & u\in I_i, \\ 0, & u\bar{\in} I_i, \end{cases}$$

а $p_i(\theta)=F(a_{i+1}, \theta)-F(a_i, \theta)$, $i=0, 1, \ldots, k$.

Пример 1.8. Оценка по минимума на X^2. Тази оценка $\hat{\theta}_X$ е вече решение на уравнение от вида

$$\int_{R^2} \varphi_X(\theta, u_1, u_2)\, dF_n(u_1)\, dF_n(u_2)=0, \tag{11}$$

където $\varphi_X(\theta, u_1, u_2)=\sum_{i=0}^{k} \varphi_X^i(\theta, u_1, u_2)$, а

$$\varphi_X^i(\theta, u_1, u_2)=\begin{cases} p_i^{-1}(\theta)\frac{d}{d\theta}\log p_i(\theta), & (u_1, u_2)\in I_i\times I_i, \\ 0, & (u_1, u_2)\bar{\in} I_i\times I_i. \end{cases}$$

Пример 1.9. Оценка по минимума на ω^2. Оценката $\hat{\theta}_\omega$ е решение спрямо θ на уравнението

$$\int_{R^2} \varphi_\omega(\theta, u, F_n(u))\, dF_n(u)=0, \tag{12}$$

където

$$\varphi_\omega(\theta, u, F_n)=2[F(u, \theta)-F_n(u)]\frac{\partial F}{\partial\theta}(u, \theta) f(u, \theta)+[F_n(u)-F(u, \theta)]^2\frac{\partial f}{\partial\theta}(u, \theta).$$

Когато статистиките X^2 и ω^2 се прилагат за проверка на сложна хипотеза, т. е. когато истинската стойност на параметъра θ не ни е известна, в съответния израз вместо θ поставяме някоя негова оценка. Статистиките от примери 1.10 до 1.13 са получени по тоя начин.

Пример 1.10. Статистика $\hat{X}^2$. Получаваме я, когато в X^2 заместим θ с $\hat{\theta}$. Имаме

$$\hat{X}^2=\int_{R^2} \hat{\varphi}(\hat{\theta}(F_n), u_1, u_2)\, dF_n(u_1)\, dF_n(u_2), \tag{13}$$

където $\hat{\varphi}(\hat{\theta}(F_n), u_1, u_2)=-1+\sum_{i=0}^{k} \hat{\varphi}_i(\hat{\theta}(F_n), u_1, u_2)$, а

$$\hat{\varphi}_i=\begin{cases} p_i(\hat{\theta}(F_n))^{-1}, & (u_1, u_2)\in I_i\times I_i, \\ 0, & (u_1, u_2)\bar{\in} I_1\times I_i, \end{cases}$$

$i=0, 1, 2, \ldots, k$.

Пример 1.11. Статистика $\hat{X}_g^2$. Тя се дава пак с интеграла (13), само че вместо $\hat{\theta}$ е поставено $\hat{\theta}_g$.

Пример 1.12. Статистика $\hat{X}_X^2$. И тя е от вида (13), където вместо $\hat{\theta}$ имаме $\hat{\theta}_X$.

Пример 1.13. Статистика $\hat{\omega}^2$. Тя се представя с

$$\hat{\omega}^2(F_n)=n\int_R [F_n(u)-F(u,\ \hat{\theta}(F_n))]^2 f(u,\ \hat{\theta}(F_n))\,du.$$

Примерите 1.1 до 1.13 показват, че разгледаните в тях статистики имат интегрално представяне, при което F_n участвува или под знака на диференциала, или в подинтегралния израз, или и в едното, и в другото. Тези интегрални представяния, когато не съвпадат с общоразпространените дефиниции на съответните статистики, лесно се получават от тях. Получените явни интегрални функционали на F_n, които по-долу ще означаваме изобщо с $T(F_n)$, са от три типа:

$$T(F_n)=\int_{R^2} \varphi(S(F_n),\ u_1,\ u_2)\,dF_n(u_1)\,dF_n(u_2), \tag{14}$$

$$T(F_n)=\int_R \varphi(F_n(u),\ S(F_n),\ u)\,du, \tag{15}$$

$$T(F_n)=\int_{R^2} \varphi(F_n(u_1),\ F_n(u_2),\ S(F_n),\ u_1,\ u_2)\,du_1\,dF_n(u_2), \tag{16}$$

където $S(F_n)$ е функционал на F_n. От типа (14) са статистиките 1.1, 1.2, 1.4, 1.10, 1.11, 1.12, от типа (15) — статистиките 1.5 и 1.13 и от типа (16) — статистиката 1.3.

И трите типа (14), (15) и (16), а заедно с тях и статистиките 1.6 до 1.9 могат да бъдат обхванати в едно единно представяне, а именно като решения спрямо T на уравнението

$$\int_{R^2} \varphi(T,\ F_n(u_1),\ F_n(u_2),\ S(F_n),\ u_1,\ u_2)\prod_{i=1}^{r} du_i \prod_{i=r+1}^{2} dF_n(u_i)=0, \tag{17}$$

където $r=0,\ 1,\ 2$.

Уравнението (17) обрисува класа на функционалите на F_n, които ще разглеждаме и ще наречем функционали от интегрален тип. Точните класове ще се получат, когато наложим известни условия върху φ, $S(\cdot)$ и F, които да осигурят както съществуване на решение на (17), така и някои свойства на решенията му. Това ще сторим в третия дял на настоящата работа.

Както вече споменахме, ще ни интересува асимптотичното поведение на функционалите $T(F_n)$ от интегрален тип, или по-точно съществуването на две редици от числа α_n и $\beta_n>0$, за които вероятността $P(\beta_n^{-1}(T(F_n)$

$-\alpha_n)<x)$ има граница при $n\to\infty$, а наред с това, разбира се, и вида на граничното (асимптотично) разпределение. Тези асимптотични разпределения са единствените, които можем да използуваме на практика, понеже разпределенията на изброените по-горе статистики по правило не могат да бъдат получени при крайно n.

Има един специален случай на статистики от типа (14), когато работата е сравнително проста. Това е случаят, когато φ зависи само от u_1. Статистиките са тогава от вида

$$T(F_n)=\int_R \varphi(u)\,dF_n(u), \tag{18}$$

или

$$T(F_n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varphi(\xi_i), \tag{19}$$

т. е. $T(F_n)$ е средна аритметична на независими, еднакво разпределени случайни величини. Ако

$$\mathrm{E}\,\varphi^2(\xi_i)=\int_R \varphi^2(u)\,dF(u)<\infty,$$

то по централната гранична теорема разпределението на $\sqrt{n}\,(T(F_n)-T(F))/\sigma$, където $\sigma^2=\mathrm{Var}\,\varphi(\xi_i)$, ще клони при $n\to\infty$ към стандартното нормално разпределение, нещо, което ще запишем с

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma}[T(F_n)-T(F)]\longrightarrow_d N(0,1).$$

Както знаем, статистиките (18) далеч не са единствените с асимптотично нормално поведение. Асимптотично нормални са и m_ν^* [4], някои от систематичните статистики [17], оценките $\hat\theta$ [4] и $\hat\theta_\infty$ [2]. За останалите обаче знаем, че асомптотичното им разпределение не е нормално. Такива са някои от систематичните статистики [18], както и статистиките ω^2 [20], X^2 [4], $\hat X^2$ [3], $\hat X_g^2$ [4], $\hat\omega^2$ [5].

И тъй в заключение на казаното дотук можем да формулираме интересуващата ни задача така: да се намери клас от функционали на F_n (съдържащ функционалите от интеграл тип), чиито елементи имат асимптотични разпределения, както и да бъдат намерени съответните разпределения. Отсега ще кажем, че по-голям успех ни очаква по отношение на първата част на задачата (съществуване на асимптотично разпределение). Ще успеем да опишем по един определен начин и класа на възможните гранични разпределения, но във всеки отделен случай съответното гранично разпределение ще трябва да се търси ad hoc.

2. Основната идея в метода на Мизес. Да означим с $\mathcal{J}$ съвкупността на всички функции на разпределение в R и нека T е функционал, дефиниран в $\mathfrak{F}$. Нека $0\leq\tau\leq1$; да въведем функцията на разпределение $F_n^{(\tau)}(u)$, където

(20) $$F_n^{(\tau)}(u)=F(u)+\tau(F_n(u)-F(u)),$$

и да разгледаме функцията на τ

(21) $$T_n(\tau)=T(F_n^{(\tau)}).$$

Да допуснем, че с вероятност единица $T_n(\tau)$ е диференцируема поне два пъти за $\tau\in[0, 1]$. Тогава по формулата на Тейлър

$$T_n(1)-T_n(0)=T_n'(0)+\frac{1}{2}T_n''(\vartheta),\ 0<\vartheta<1,$$

или

(22) $$T(F_n)-T(F)=T_n'(0)+\frac{1}{2}T_n''(\vartheta).$$

Да допуснем по-нататък, че $T_n'(0)$ може да се представи във вида

(23) $$T_n'(0)=\int_R \varphi(u)\,d[F_n(u)-F(u)],$$

т. е. $T_n'(0)$ е средна аритметична на независимите и еднакво разпределени случайни величини $\eta_i=\varphi(\xi_i)-\mathrm{E}\varphi(\xi_i)$, за които освен това нека $\mathrm{Var}\,\eta_i=\sigma^2<\infty$. Понеже $\mathrm{E}\eta_i=0$, последното изискване се свежда до $\int_R \varphi^2\,dF<\infty$.

И тъй нека първото събираемо в дясната страна на (22) е асимптотично нормално. Ако освен всичко това $\sqrt{n}\sup_{0<\vartheta<1}|T_n''(\vartheta)|$ клони към нула по вероятност, когато $n\to\infty$, то това ще означава, че $\sqrt{n}\ (T(F_n)-T(F))$ ще бъде асимптотично $N(0, \sigma)$.

Преди да обсъдим гореказаното, да разгледаме няколко примера, които ще ни покажат съществуването на подобни ситуации.

Пример 2.1. Да вземем отначало емпиричната дисперсия, т. е. функционала

(24) $$m_2^*(F_n)=\int_R\Big(u-\int_R v\,dF_n(v)\Big)^2 dF_n(u).$$

Нека $\mathrm{Var}\,\xi_i<\infty$, да заместим F_n с $F_n^{(\tau)}$ и да диференцираме функцията $\sigma_n(\tau)=m_2^*(F_n^{(\tau)})$ по τ. Получаваме

$$\sigma'(0)=\int_R(u-\mu_1)^2\,d[F_n(u)-F(u)]=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\mu_1)^2-\mu_2$$

и

$$\frac{1}{2}\sigma''(\vartheta)=-(m_1-\mu_1)^2,\quad 0<\vartheta<1$$

($\mu_1 = E\xi_i$, $\mu_2 = \mathrm{Var}\,\xi_i$), откъдето

$$m_2^*(F_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\mu_1)^2-(m_1-\mu_1)^2. \tag{25}$$

Понеже $\sqrt{n}(m_1-\mu_1)^2$ клони по вероятност към нула, оттук следва асимптотичната нормалност на $m_2^*(F_n)$.

В тоя пример не само получихме един класически факт, но и равенството (22) се оказа известното тъждество (25). По-нетривиален е следващият

Пример 2.2. Да разгледаме сега систематичната статистика на Джини [6]

$$g(F_n) = \int_0^1 F_n(u)(1-F_n(u))\,du, \tag{26}$$

т. е. статистика от вида, посочен в пример 1.3, за която $C_n=0$, $c(u) = u(1-u)$ и ξ_i са равномерно разпределени в интервала [0, 1]. Имаме

$$\gamma_n(\tau) = g(F_n^{(\tau)}) = \int_0^1 F_n^{(\tau)}(1-F_n^{(\tau)})\,du$$

и

$$g(F_n)-g(F) = g(F_n)-1/6 = \gamma_n(1)-\gamma_n(0) = \gamma_n'(0)+{}^1/_2\,\gamma_n''(\vartheta),$$

$0<\vartheta<1$. За γ_n' и γ_n'' обаче получаваме

$$\gamma_n'(\tau) = \int_0^1 (F_n(u)-u)(1-2F_n^{(\tau)}(u))\,du.$$

$$\gamma_n''(\tau) = -2\int_0^1 (F_n(u)-u)^2\,du,$$

откъдето виждаме, че

$$\gamma_n'(0) = \int_0^1 (F_n(u)-u)(1-2u)\,du,$$

а γ_n'' изобщо не зависи от τ. За да представим $\gamma_n'(0)$ във вида (23), да отбележим, че

$$F_n(u)-u = \int_0^1 \sigma(u-v)\,d[F_n(v)-v]. \tag{27}$$

Като заместим, получаваме

$$\gamma_n'(0)=\int_0^1 u(u-1)\,d[F_n(u)-u]=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\eta_i-E\eta_i),$$

където $\eta_i=\xi_i(\xi_i-1)$, $E\eta_i=-1/6$, $\operatorname{Var}\eta_i=1/180$.
Остава да видим, че $\sqrt{n}\gamma_n''$ клони по вероятност към нула. Но

$$P(\sqrt{n}|\gamma_n''|>\varepsilon)\leqq P(\sqrt{n}\sup_u|F_n(u)-u|>n^{1/4}\sqrt{\varepsilon}).$$

Както знаем обаче [7],

$$P(\sqrt{n}\sup_u|F_n(u)-u|>n^{\delta}\varepsilon_1)\to 0,\quad n\to\infty,$$

при всяко $\varepsilon_1>0$ и $\delta>0$, което сочи, че $\sqrt{n}\gamma_n''$ клони по вероятност към нула. Окончателно имаме

$$\sqrt{5n}\,(6g(F_n)-1)\to_d N(0,\ 1).$$

Следващият пример е посветен на статистика, зададена неявно.

Пример 2.3. В уравнението (9), което дефинира оценката по максимума на правдоподобието, заместваме F_n с $F_n^{(\tau)}$ и означаваме $\hat\theta(F_n^{(\tau)})$ накратко с $\hat\theta(\tau)$. Тогава за всяко τ, $0\leqq\tau\leqq 1$, трябва да бъде в сила равенството

$$\int_R \frac{f_\theta'(u,\hat\theta(\tau))}{f(u,\hat\theta(\tau))}\,dF_n^{(\tau)}(u)=0, \tag{28}$$

където с f_θ' сме означили частната производна на $f(u,\theta)$ спрямо втория ѝ аргумент. Като диференцираме (28), имаме

$$\int_R \frac{f_\theta''(n,\hat\theta(\tau))\,f(u,\hat\theta(\tau))\,\hat\theta'(\tau)-f_\theta'^2(n,\hat\theta(\tau))\,\hat\theta'(\tau)}{f(u,(\hat\theta(\tau))^2}\,dF_n^{(\tau)}(u) \tag{29}$$

$$+\int_R \frac{f_\theta'(u,\hat\theta(\tau))}{f(u,\hat\theta(\tau))}\,d[F_n(u)-F(u,\theta)]=0.$$

Съвсем естествено е да предположим, че $\hat\theta(0)=\theta$. Тогава от (29) веднага получаваме

$$\hat\theta'(0)=\frac{\int_R f_\theta'(u,\theta)[f(u,\theta)]^{-1}d[F_n(u)-F(u)]}{\int_R f_\theta'^2(u,\theta)\,[f(u,\theta)]^{-1}\,du}. \tag{30}$$

Последното равенство (30) показва, че $\hat{\theta}'(0)$ е от вида (23). Ако освен това $\sqrt{n}\sup_\tau|\hat{\theta}''(\tau)|$ клони към нула по вероятност, то бихме получили известния факт, че оценките по максимума на правдоподобието са асимптотично нормални. Че $\sqrt{n}\sup_\tau|\hat{\theta}''(\tau)|$ наистина клони към нула, тук няма да доказваме, тъй като това ще следва от общите теореми в следващия дял.

Примерите 2.1 до 2.3 ни дават възможност да направим следния извод: ако функционалът T е диференцируем по Гато поне два пъти, ако $T_n'(0)$ има вида (23) и ако членът с втората производна в (22) е асимптотично пренебрежим, то $\sqrt{n}(T(F_n)-T(F))$ е асимптотично нормален. Както показват обаче следващите примери, може да се случи $T_n'(0)$ да се анулира. Тогава е естествено да поискаме $T_n(\tau)$ да бъде диференцируема поне три пъти и да използуваме вместо (22) формулата

$$T_n(1)-T_n(0)=\frac{1}{2}T_n''(0)+\frac{1}{6}T_n'''(\vartheta),\ 0<\vartheta<1. \tag{31}$$

В такива случаи поведението на $T(F_n)-T(F)$ ще зависи вече от поведението на $T_n''(0)$. Обобщавайки представянето (23), следва да поискаме $T_n''(0)$ да се представя във вида

$$T_n''(0)=\int_{R^2}\varphi(u_1,\ u_2)\,d[F_n(u_1)-F(u_1)]\,d[F_n(u_2)-F(u_2)]. \tag{32}$$

Оказва се, че асимптотичното разпределение на функционали от вида (32) може да бъде представено като стохастичен интеграл, както това ще видим в следващия дял.

Пример 2.4. Да заместим в (8) F_n с $F_n^{(\tau)}$. Получаваме

$$\omega^2(F_n^{(\tau)})=\omega(\tau)=n\tau^2\int_R[F_n(u)-F(u)]^2f(u)\,du=\tau^2\omega^2(F_n), \tag{33}$$

откъдето $\omega'(0)=0$, $\omega''(\tau)/\omega^2(F_n)$, $\omega'''(\tau)\equiv 0$. Равенството (31) се превръща в тъждество и не дава нищо ново.

Съвсем аналогичен резултат получаваме и за статистиката X^2.

Независимо от това обаче и в двата случая $T_n''(0)/2$ е от вида (32), понеже самите статистики X^2 и ω^2 са от тоя вид. За X^2 това се вижда направо от дефиниционното равенство (7), а за ω^2 такова представяне получаваме, като използуваме (27):

$$\omega^2(F_n)=n\int_{R^2}[1-F(\max(u_1,\ u_2))]\,d[F_n(u_1)-F(u_1)]\,d[F_n(u_2)-F(u_2)].$$

Пример 2.5. Нетривиален е случаят обаче с функционала $\hat{\omega}^2$. Ако означим $\hat{\omega}(\tau)=\hat{\omega}^2(F_n^{(\tau)})$, то виждаме, че $\hat{\omega}'(0)=0$ и

$$\frac{1}{2}\hat{\omega}''(0)=n\int_R[F_n(u)-F(u,\ \theta)-\frac{\partial F}{\partial\theta}(u,\ \theta)\hat{\theta}(0)]^2f(u,\ \theta)\,du.$$

Като вземем пред вид (27) и (29), лесно се убеждаваме, че $\hat{\omega}''(0)/2$ има вида (32), където

$$\varphi(u_1, u_2) = 1 - F(\max(u_1, u_2), \theta) + \frac{\alpha}{\beta^2} \frac{f'_\theta(u_1, \theta) f'_\theta(u_2, \theta)}{f(u_1, \theta) f(u_2, \theta)}$$

$$+ \frac{1}{\beta}\left[\frac{f'_\theta(u_1, \theta)}{f(u, \theta)} \int_{-\infty}^{u_2} \frac{\partial F}{\partial \theta}(u, \theta) f(u, \theta)\, du + \frac{f'_\theta(u_2, \theta)}{f(u_2, \theta)} \int_{-\infty}^{u_1} \frac{\partial F}{\partial \theta}(u, \theta) f(u, \theta)\, du\right],$$

където

$$\alpha(\theta) = \int_R \left[\frac{\partial F}{\partial \theta}(u, \theta)\right]^2 f(u, \theta)\, du,$$

$$\beta(\theta) = \int_R f'^2_\theta(u, \theta)\, [f(u, \theta)]^{-1}\, du.$$

И в трите случая, разгледани в примери 2.4 и 2.5, $T'_n(0)=0$, а $T''_n(0)/2$ има вида (32).

Казаното дотук ни дава възможност да формулираме основната идея на Мизес така: във функционала $T(F_n)$ заместваме F_n с $F_n^{(\tau)}$ и получената функция разлагаме във формулата на Тейлър около началото. Нека първата отлична от нула производна е от ред m. Тогава при известни предположения асимптотичното поведение на $T(F_n) - T(F)$ съвпада с това на $T_n^{(m)}(0)$.

Засега не са известни примери на статистики, представляващи интерес, за които $m>2$. Независимо от това в следващия дял ще докажем теореми, които оправдават направените досега евристични разглеждания в общия случай, т. е. за произволно натурално m. Да обърнем внимание засега само на това, че интегралните представяния (23) и (32) са съвсем естествени и следват от изискването функционалът T да бъде диференцируем по Гато, стига на T да гледаме като на функция на безброй много променливи. Наистина нека T е функция на N променливи, които да означим с $F_1, \ldots, F_N$. Векторите $(F_1, \ldots, F_N)$ и $(G_1, \ldots, G_N)$ накратко да отбележим с F и G. Тогава имаме

$$\frac{d}{d\tau} T(F + \tau(G - F))\Big|_{\tau=0} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial T(F)}{\partial F_i}(G_i - F_i) = \sum_{i=1}^{N} \varphi(F;\, i)\, \Delta(G_i).$$

Така получената формула (читателят може лесно да види как φ се изразява с помощта на $\operatorname{grad} T(F)$) е дискретният прообраз на Стилтесовия интеграл (23), в който вместо функция на N променливи имаме функционал на F или функция на непрекъснато много променливи. Изразите от вида (32) и подобните им от ред, по-висок от 2, са „пълни диференциали“ от по-висок ред.

3. Основни теореми. Дотук изложението ни беше евристично и формално. В този дял ще преминем към точни формулировки и ще изложим

основните теореми в метода на Мизес във вида, даден им от А. Филипова [15]. За краткост няма да доказваме всички твърдения. Пропуснатите доказателства читателят може да намери в [21].

Дефиниция 3.1. Нека $\mathscr{I}$ е множеството на функциите на разпределение в R и нека $F \in \mathscr{I}$. Една подсъвкупност $\mathscr{I}_F \subset \mathscr{I}$ ще наричаме звездна спрямо F, ако за всяко $G \in \mathscr{I}_F$ и всяко $\tau \in [0, 1]$ имаме $F+\tau(G-F) \in \mathscr{I}_F$.

Дефиниция 3.2. Нека T е функционал, дефиниран в звездното спрямо $F \in \mathscr{I}$ подмножество $\mathscr{I}_F$. Ще казваме, че T е диференцируем m пъти спрямо $\mathscr{I}_F$ в точката F, ако са изпълнени следните условия:

1. Производните $(d^p/d\tau^p)\, T(F+\tau(G-F))$ съществуват за всяко $\tau \in [0, 1]$, всяко $p=1, 2, \ldots, m$, и всяко $G \in \mathscr{I}_F$;

2. Съществуват функционали $T^{(p)}(F; u_1, \ldots, u_p)$ на F, зависещи симетрично още от p на брой реални променливи $u_1, \ldots, u_p$, тъй щото за всяко $G \in \mathscr{I}_F$ и $p=1, 2, \ldots, m$ да бъде в сила равенството

$$\frac{d^p}{d\tau^p} T(F+\tau(G-F))\Big|_{\tau=0} = \int\limits_{R^p} T^{(p)}(F; u, \ldots, u_p) \prod_{i=1}^{p} d[F_n(u_i)-F(u_i)].$$

Дефиниция 3.3. Нека $F \in \mathscr{I}$ и нека F_n е емпиричната функция, построена от извадка с обем n от разпределението F. Функционалът T, дефиниран в звездното множество $\mathscr{I}_F$, наричаме мизесов ред m в точката $F \in \mathscr{I}$, ако:

1. $\lim P(F_n \in \mathscr{I}_F)) = 1$, $n \to \infty$;

2. Функционалът T е диференцируем m пъти в точката F спрямо $\mathscr{I}_F$;

3. $\lim P\left(n^{p/2-\delta} \sup_{0 \leq \tau \leq 1} \left| \frac{d^p}{d\tau^p} T(F_n^{(\tau)} \right| > \varepsilon\right) = 0$, $n \to \infty$, за произволни положителни $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ и $p=1, 2, \ldots, m$. Тук $F_n^{(\tau)} = F+\tau(F_n-F)$.

Теорема 1 (Мизес). Нека T е мизесов функционал от ред $m+1$ в точката $F \in \mathscr{I}$ и нека $T^{(p)}(F; u_1, \ldots, u_p) = 0$ за $p=1, 2, \ldots, m+1$. Тогава случайните величини

$$n^{m/2}(T(F_n)-T(F)) \tag{34}$$

и

$$\frac{n^{m/2}}{m!} \int\limits_{R^m} T^{(m)}(F; u_1, \ldots, u_m) \prod_{i=1}^{m} d[F_n(u_i)-F(u_i)] \tag{35}$$

са асимптотично еквивалентни в смисъл, че разликата им клони към нула, когато $n \to \infty$.

Доказателство. Теоремата е непосредствено следствие на горните дефиниции. Наистина от условие 1. на дефиниция 3.3 и условията на самата теорема имаме, че

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{ n^{m/2}[T(F_n)-T(F)] = \frac{n^{m/2}}{m!} \int\limits_{R^m} T^{(m)}(F; u_1, \ldots, u_m) \prod_{i=1}^{m} d[F_n(u_i)\right.$$

$$-F(u_i)]+\frac{n^{\frac{m+1}{2}-\frac{1}{2}}}{(m+1)!}\frac{d^{m+1}}{d\tau^{m+1}}T(F_n^{(\tau)})\Big|_{\tau=\vartheta_n}\Big\}=1,$$

където $0<\vartheta_n<1$. От условие 3 на дефиниция 3.3 имаме (тук $p=m+1$, $\delta=1/2$)

$$\lim P\left\{\frac{n^{\frac{m+1}{2}-\frac{1}{2}}}{(m+1)!}\sup_{0\leq\tau\leq1}\left|\frac{d^{m+1}}{d\tau^{m+1}}T(F_n^{(\tau)})\right|>\varepsilon\right\}=0,$$

с което теоремата е доказана.

Теорема 1 свежда въпроса за поведението на функционала T, стига той да е мизесов, към това на функционал от вида (35). Класът на възможните гранични разпределения се описва от теорема 2.

Нека с $V(t)$, $0\leq t\leq1$, означим т. нар. Браунов мост, т. е. гаусов процес с $EV(t)=0$, $0\leq t\leq1$, $E(V(t)V(s))=s(1-t)$ при $0\leq s\leq t\leq1$. Нека освен това $V_n(t)$ означава емпиричния процес $\sqrt{n}(F_n(t)-F(t))$, когато $F(t)$ е равномерното в [0, 1] разпределение, т. е. за $0\leq t\leq1$ имаме $V_n(t=\sqrt{n}(F_n(t)-t)$. Както знаем, V_n клони слабо в смисъл на слаба сходимост в пространството $D[0, 1]$ към V [1].

От друга страна, всеки интеграл от вида (35) може да се представи във вида

$$\int_{D^m}\psi(t_1,\ldots,t_m)\prod_{i=1}^{m}dV_n(t_i),\quad D^m=[0,1]^{\times m}. \tag{36}$$

Достатъчно е да се направи замяната $t_i=F(u_i)$, $i=1, 2, \ldots, m$. Казаното дотук мотивира достатъчно следващата

Теорема 2. Нека $\psi(t_1,\ldots,t_m)$ е дефинирана в D^m и е симетрична функция на аргументите си и нека $\psi\in\mathscr{L}$ (вж. дефиниция 3.4). Тогава

$$\int_{D^m}\psi(t)\prod_{i=1}^{m}dV_n(t_i)\to_d\int_{D^m}\psi(t)\prod_{i=1}^{m}dV(t). \tag{37}$$

Доказателството на тая теорема тук няма да излагаме. Читателят може да го намери заедно със свойствата на стохастичните интеграли от Брауновия мост в [21].

В редица случаи, особено при неявно зададени функционали, като тези от параметрите 1.6 до 1.9, е необходимо да разполагаме с достатъчни условия за това, че даден функционал е мизесов. За класа на функционалите от вида (17) такива условия дава следващата теорема 3. За доказателството й отново ще отпратим читателя към [21].

Дефиниция 3.4. С $\mathscr{L}$ да означим банаховото пространство на функциите f, дефинирани в R^2, за които

$$\int_R f^2(u,u)\,dF(u)<\infty,\qquad \int_{R^2}f^2(u_1,u_2)\,dF(u_1)\,dF(u_2)<\infty.$$

С $H(\tau, T)$ да означим

$$H(\tau, T)=\int_{R^2} \varphi(T, F_n^{(\tau)}(u_1), F_n^{(\tau)}(u_2), S(F_n^{(\tau)}), u_1, u_2) \prod_{i=1}^{r} du_i \prod_{i=r+1}^{2} dF_n^{(\tau)}(u_i).$$

Теорема 3. Ако:

1. Съществува T_0, за което $H(0, T_0)=0$, $\frac{\partial H}{\partial T}(0, T_0)\neq 0$;

2. Функционалът S е мизесов от ред m в точката F;

3. Всевъзможните частни производни на φ по първите ѝ четири аргумента до ред $m+1$ включително съществуват, непрекъснати са като функции на u_1 и u_2 (на мястото на втория и третия аргумент са заместени $F(u_1)$ и $F(u_2)$) и не надминават някоя функция $g(u_1, u_2)$, за която $\int_{R^2} g(u_1, u_2) \prod_{i=1}^{r} du_i \in \mathscr{L}$ за $r=0, 1, 2$; то уравнението $H(\tau, T)=0$ има за решение спрямо T мизесов функционал T от ред m в точката F, при което $T(F)=T_0$.

В следващия, последен дял ще разгледаме като приложения на доказаните теореми посочените в първия дял статистики, както и някои други параметри.

4. Някои приложения. За да можем да приложим изложената по-горе теория, трябва да се убедим, че разглежданите функционали са мизесови. Това става с помощта на теорема 3. Ще се спрем само на някои от параметрите 1.1 до 1.13.

Ако например статистиката (2) трябва да зададем с уравнение от вида (17), то $\varphi=T-u_1^{\nu}$ и $r=0$. Веднага виждаме, че условието 1. на теорема 3 е изпълнено, ако $\mu_\nu<\infty$. Условието 3. води до изискването $\mu_{2\nu}<\infty$. И тъй, ако $\mu_{2\nu}<\infty$, то m_ν е мизесов. По теорема 1 m_ν ще бъде асимптотично нормален, т. е. $\sqrt{n(\mu_{2\nu}-\mu_\nu^2)}\,[m_\nu-\mu_\nu]\to_d N(0, 1)$.

Подобно е положението и в пример 1.2, където $\varphi=T-[u_1-S(F_n)]^\nu$, $S(F_n)=m_1(F_n)$.

В случая на статистиката ω^2 имаме $\varphi=(T-n[F_n(u_1)-F(u_1)]^2 f(u_1)f(u_2))$, $r=2$. Теорема 3 показва, че ω^2 е мизесов от трети ред, а от теореми 1 и 2 получаваме, че

$$\omega^2(F_n)\to_d \int_0^1 V^2(u)\,du=\int_0^1\int_0^1 (1-\max(u_1, u_2))\,dV(u_1)\,dV(u_2).$$

Разпределението на интеграла от V^2 за пръв път е намерено от Смирнов [20].

За статистиката X^2 получаваме аналогично

$$X^2(F_n)\to_d \sum_{i=0}^{k} (b_{i+1}-b_i)^{-1}[V(b_{i+1})-V(b_i)]^2,$$

където $b_i = F(a_i)$, $i=0, 1, \ldots, k+1$. Ако нормалните случайни величини $V(b_{i+1}) - V(b_i)$ линейно трансформираме до независими, ще получим едно χ^2 разпределение с k степени на свобода.

При статистиките 1.6 до 1.9 получаваме при известни условия за f мизесови функционали от втори ред и асимптотична нормалност. Условията се дават от теорема 3. Ще разгледаме само статистиката $\hat{\theta}$, получена по максимума на правдоподобието. Тук $\varphi = (d/d\theta) \log p(u_1, \theta)|_{\theta=T,\, r=0}$. Лесно виждаме, че ако f е от т. нар. крамеров тип [16], то $\hat{\theta}$ е асимптотично нормална.

Интересни резултати се получават и при параметричните статистики 1.10 до 1.13. Ще оставим на читателя сам да формулира получените тук резултати.

Накрая ще разгледаме по-подробно още два случая. Първият от тях са систематичните статистики 1.3. При тях съответният функционал се даваше от (6) с

$$C(F_n) = \int_{R^2} [c_n \circ F_n(u_1) + C_n p(u_1) u_2]\, du_1\, dF_n(u_2).$$

Ако използуваме представянето (17), то $r=1$,

$$\varphi = T_p(u_1) - c_n \circ F_n(u_1) - C_n p(u_1) u_2,$$

$$T(\tau) = T(F_n^{(\tau)}) = \int_{R^2} [c_n \circ F_n^{(\tau)}(u_1) + C_n p(u_1) u_2]\, du_1\, dF_n^{(\tau)}(u_2).$$

Условията на теорема 3 изискват $\mu_1 < \infty$ и функциите $c_n \circ F$, $c_n' \circ F$ и $c_n'' \circ F$ да съществуват и да бъдат интегрируеми в R. Тогава можем да твърдим, че $C(F_n)$ е мизесов от ред 2. По-нататък имаме

$$\left.\frac{dT}{d\tau}\right|_{\tau=0} = \int_R c_n' \circ F(u_1) [F_n(u_1) - F(u_1)]\, du_1 + C_n(m_1 - \mu_1).$$

Ако означим $h_n(t) = \int_t^\infty c_n' \circ F(u)\, du$, то

$$\left.\frac{dT}{d\tau}\right|_{\tau=0} = \frac{1}{n} \sum [h_n(\xi_i) - E h_n(\xi_i)] + C_n(m_1 - \mu_1).$$

За променливите $\eta_{ni} = h_n(\xi_i)$ имаме

$$\mathrm{E}\,\eta_{ni} = \int_R c_n' \circ F\, du, \quad \sigma_n^2 = \mathrm{Var}\, h_n(\xi_i)$$

$$= \int_{R^2} c_0' \circ F(u) \times c_n' \circ F(v) [F(\min(u, v)) - F(u) F(v)]\, du\, dv.$$

Ако накрая допуснем, че $C_n = O(n^{-1/2})$ и $\liminf \sigma_n^2 > 0$, то можем да заключим, че

$$\sqrt{n}/\sigma_n (C(F_n) - C(F)) \to_d N(0, 1).$$

Наложените тук върху систематическата статистика условия са, изглежда, малко по-ограничителни от тия в последните ни познати публикации като [17].

Като последна илюстрация на метода на Мизес да се спрем на статистиките в т. нар. $C(\alpha)$-тестове на Нейман [16].

Нека g е някаква реална функция, за която

$$E_\theta(g) = \int_K g(u)\, dF(u, \theta) = \int_R g(u) f(u, \theta)\, du = \mu(\theta),$$

$$\mathrm{Var}_\theta(g) = E_\theta(g - E_\theta g)^2 = \sigma^2(\theta).$$

За нормираната функция $h(\cdot, \theta) = [g(\cdot) - \mu(\theta)]/\sigma(\theta)$ очевидно $E_\theta h = 0$, $\mathrm{Var}_\theta h = 1$. Да разгледаме сумата

$$S_n(\xi, \theta) = n^{-1/2} \sum_{i=1}^{n} h(\xi_i, \theta). \tag{38}$$

Очевидно S_n ще бъде асимптотично стандартно нормална за всяко θ и с нейна помощ бихме могли да построим тест за сложната хипотеза, че ξ_i са разпределени по закона $F(t, \theta)$, $\theta \in \Theta$. Тази възможност обаче е съвсем илюзорна поради тоза, че в такава ситуация ние не познаваме θ и следователно и самото $S_n(\xi, \theta)$. Ако постъпим така, както в примерите 1.10 до 1.13, можем в (38) вместо θ да заместим някоя оценка, например $\hat{\theta}(F_n)$, и да видим какво ще бъде асимптотичното поведение на $\hat{S}_n(\xi; h) = S_n(\xi, \hat{\theta}(F_n))$ или на функционала

$$\hat{S}_n(F_n, h) = \sqrt{n} \int_R h(u, \hat{\theta}(F_n))\, dF_n. \tag{39}$$

Веднага намираме, че ако g е крамерова, то $\hat{S}_n(\xi; h)$ е мизесов от ред 2. По-нататък процедираме, както обикновено. Полагаме $\sigma(\tau) = \hat{S}_n(F_n^{(\tau)}; h)$ и получаваме

$$\sigma'(0) = \sqrt{n} \int_R \psi(u, \theta)\, d[F_n(u) - F(u, \theta)],$$

където

$$\psi(u, \theta) = \gamma^{-1} \frac{d}{d\theta} \log f(u, \theta)\, E_\theta(f'_\theta(\xi_i, \theta)) + h(u, \theta)$$

и $\gamma = E_\theta\left[\frac{d}{d\theta} \log f(\xi_i, \theta)\right]$. Всичкотова сочи, че $\hat{S}_k$ е асимптотично еквивалентен на

$$n^{-1/2} \sum \psi(\xi_i, \theta),$$

т. е. асимптотично нормален. За да можем да използуваме $\hat{S}_n$ като тестова статистика, би трябвало $\mathrm{Var}\,\psi(\xi_i, \theta)$ да не зависи от θ. Както знаем, [16] за това е необходимо и достатъчно $E_\theta\left[g(\xi)\frac{d}{d\theta}\log f(\xi, \theta)\right]=0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Billingsley, P.: Convergence of probability measures. New York, 1968.
2. Blackman, J.: On the approximation of a distribution function by an empiric distribution. Ann. Math. Stat., **25** (1955), 256—267.
3. Chernoff, H., Lehmann, E. L.: The use of maximum likelihood estimates in χ^2 tests of goodness of fit. Ann. Math. Stat., **25** (1954), 579—586.
4. Cramér, H.: Mathematical methods of statistics. Princeton, 1946.
5. Darling, D. A: The Cramér — Smirnov test in the parametric case. Ann. Math. Stat., **26** (1955), 1—20.
6. Kendall, M. G., Buckland, W. R.: A dictionary of statistical terms. London, 1957.
7. Kiefer, J., Wolfowitz, J.: On the deviations of the empiric distribution of vector chance variables. Trans. Amer. Math. Soc., **87** (1958), 173—186.
8. Mises, R. V.: Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung in der Statistik und theoretischen Physik. Leipzig und Wien, 1931.
9. Mises, R. V.: Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit. Wien, 1936.
10. Mises, R. V. Deux nouveaux théorèmes de limite dans le calcul des probabilités. Istanbul univ. ben. fak. mecmuasi. Nouv. sér., child I (1935), 1, 61—80.
11. Mises, R. V.: Les lois de probabilité pour les fonctions statistiques. Ann. Inst. H. Poincaré, **6** (1936), 185—212.
12. Mises, R. V.: Sur les fonctions statistiques. Soc. Math. de France. Conf. de la. Réun. intern. des mathématiciens. Paris, 1937.
13. Mises, R. V.: The asymptotic distribution of differentiable statistical functions Ann. Math. Stat., **18** (1947), 309—348.
14. Mises, R. V.: Théorie et application des fonctions statistiques. Rend. mat., **11** (1952), 374—410.
15. Neuhaus, G.: Asymptotic properties of the Cramér- von Mises-statistic when parameters are estimated. Proc. of the Prague Symp. on asymptotic statistics (1973). Prague, 1975, 257—297.
16. Neyman, J.: Optimal asymptotic tests of composite statistical hypotheses. In U. Grenander (ed.). Probability and Statistics. Upsalla, 1959, 213—234.
17. Shorack, G.: Functions of order statistics. Ann. of Math. Stat., **43** (1972), 412—427.
18. Stigler, S. M.: The asymptotic distribution of the trimmed mean. Ann. Stat., **1** (1973), 472—485.
19. Звонкин, А. К., Левин, Л. А.: Сложность конечных объектов и обоснование понятий информации и случайности с помощью теории алгоритмов. Усп. мат. наук, **25** (1970) 6, 85—127.
20. Смирнов, Н. В.: О распределении ω^2-критерия Мизеса. Мат. сборник, **2** (1937), 973—993.
21. Филиппова, А. А.: Теорема Мизеса о предельном поведении функционалов от эмпирических функций распределения и ее статистические применения. Теория вероятностей и ее применения, **7** (1962), 26—51.

Постъпила на 12. IX. 1976 г.

MISES'SCHE FUNKTIONALE UND DEREN ASYMPTOTISCHE VERTEILUNGEN

B. Penkov

(ZUSAMMENFASSUNG)

Übersicht der Theorie und einiger Anwendungen der von der empirischen Verteilungsfunktion abhängenden und von R. von Mises eingeführten Funktionale.