ТОЧНЫЕ ОЦЕНКИ СВЕРХУ ЧИСЛА КЛИК ГРАФА

Николай Хаджииванов, Недялко Ненов

Пусть G является графом с n вершинами. Обозначим через $V(G)$ множество его вершин.

Множество вершин $v_1, v_2, \cdots, v_p$ графа G называется p-кликой, если любые две вершины этого множества соединены ребром в G. Число p-клик графа G, содержащих данную вершину v, назовем p-степенью вершины v и обозначим через $d^{(p)}(v)$.

Пусть $n=ks+\nu$, $0\leqq\nu<s$. Через $T(n, s)$ будем обозначать полный s-хроматический граф с n вершинами, который имеет ν одноцветных групп вершин с $k+1$ вершинами в каждой и $s-\nu$ одноцветных групп вершин с k вершинами в каждой.

Через $t(G;p)$ будем обозначать число p-клик графа G. Положим $t(T(n, s);p)=t(n,s;p)$.

В работе [1] Н. Хаджиивановым доказана следующая теорема:

Теорема 1. Пусть граф G с n вершинами не содержит $(s+1)$-клики. Тогда

$$t(G;p)\leqq t(n,s;p),\ 2\leqq p\leqq s. \tag{1}$$

При этом равенство достигается тогда и только тогда, когда $G=T(n,s)$.

В этой работе мы хотим показать, что неравенство (1) справедливо для более широкого класса графов.

Теорема 2. Если граф G с n вершинами содержат вершину v_1 максимальной p-степени, которая не содержится ни в какой $(s+1)$-клике, то справедливо неравенство (1). Равенство достигается тогда и только тогда, когда $G=T(n, s)$.

Доказательство теоремы 2. Пусть $d^{(p)}(v_1)=d$. Рассмотрим множество вершин графа G, каждая из которых вместе с v_1 содержится в некоторой p-клике (v_1 к этому множеству не относим). Через Γ обозначим подграф графа G, порожденный этим множеством вершин. Очевидно число $(p-1)$-клик графа Γ совпадает с числом p-клик графа G, содержащих вершину v_1, т. е.

$$t(\Gamma;p-1)=d. \tag{2}$$

Число вершин графа Γ обозначим через k. Граф Γ не содержит s-клик (в противном случае v_1 будет содержаться в некоторой $(s+1)$-клике).

Согласно теореме 1

$$t(\Gamma;\ p-1)\leqq t(k,\ s-1;\ p-1). \tag{3}$$

Из (2) и (3) получаем

(4) $$d \leq t(k,\ s-1;\ p-1).$$

Обозначим чрез l число p-клик графа G, которые имеют хотя бы одну вершину, не принадлежащую $V(\Gamma)$. Очевидно

(5) $$t(G;p)=t(\Gamma;p)+l.$$

Так как Γ не содержит s-клики, то согласно теореме 1

(6) $$t(\Gamma;p) \leq t(k,\ s-1;p), \text{ если } p \leq s-1.^*$$

Поскольку любая вершина графа G содержится не больше чем в d p-клик и $|V(G) \setminus V(\Gamma)|=n-k$, то

(7) $$l \leq \sum_{v \in T} d^{(p)}(v) \leq d(n-k), \text{ где } T=V(G) \setminus V(\Gamma).$$

Используя (4), получаем

(8) $$l \leq t(k,\ s-1;\ p-1)\ (n-k).$$

Из (5), (6) и (8) получаем

(9) $$t(G;p) \leq t(k,\ s-1;\ p)+t(k,\ s-1;p-1)\ (n-k).$$

Рассмотрим теперь полный s-хроматический граф K, первые $s-1$ одноцветные группы вершин которого совпадают с одноцветными группами вершин графа $T(k,\ s-1)$, а последняя одноцветная группа имеет $n-k$ элементов. Непосредственно подсчитываем, что

$$t(K;p)=t(k;s-1;p)+t(k,s-1;\ p-1)(n-k).$$

Следовательно,

(10) $$t(G;p) \leq t(K;p).$$

Так как K не содержит $(s+1)$-клик, то согласно теореме 1

(11) $$t(K;p) \leq t(n,\ s;p).$$

Неравенство (1) следует из (10) и (11).

Пусть теперь в (1) есть равенство, т. е. $t(G;p)=t(n,s;p)$. Из (10) и (11) получаем $t(K;p)=t(n,s;p)$. Согласно теореме 1

(12) $$K=T(n,s).$$

Из равенства в (1) следует равенство в (9), а из (9) следует $t(\Gamma;p-1)=t(k,s-1;p-1)$ и $t(\Gamma;\ p)=t(k,s-1,p)$. Согласно теореме 1, в применении к Γ, имеем

(13) $$\Gamma=T(k,s-1).$$

Заметим, что в $T=V(G) \setminus V(\Gamma)$ нет ребра p-клики графа G. Действительно, из равенства в (1) следует равенство в (7), т. е.

(14) $$d^{(p)}(v)=d \text{ для любого } v \in T \text{ и}$$

(15) $$l=\sum_{v \in T} d^{(p)}(v).$$

Из равенства (15) следует, что нет p-клики графа G, хотя бы две вер-

*Если $p=s$, неравенство (6) очевидно переходит в равенство.

шины которой принадлежат T. Значит любая p-клика графа G имеет не более чем одну вершину в T. Следовательно, любая p-клика графа G, которая содержит некоторую вершину $v \in T$, имеет остальные $p-1$ вершины в Г. Так как $d^{(p)}(v)=d$, $v \in T$, число $(p-1)$-клик графа Г равно в точности d и любая вершина из $V(\Gamma)$ содержится в некоторой $(p-1)$-клике графа Г, то вершины $v \in T$ смежны всем вершинам из $V(\Gamma)$. Покажем, что в T нет смежных вершин. Действительно, если $v_i \in T$ и $v_j \in T$ смежны, то соединяющее этивершины ребро будет ребром некоторой p-клики, а это, как убедились выше, невозможно. Следовательно $G=K$. Из (12) следует, что $G=T(n,s)$.

Теорема 2 доказана полностью.

Предложение 1 [1]. Верно равенство

$$t(n,s;p)=\sum_{t=0}^{p}\binom{\nu}{t}\binom{s-t}{p-t}k^{p-t}, \text{ где } n=ks+\nu,\ 0\leqq\nu<s. \tag{16}$$

Следствие 1. Если граф G имеет вершину v_1 максимальной p-степени, которая не содержится ни в какой $(s+1)$-клике, то

$$t(G;p)\leqq\sum_{t=0}^{p}\binom{\nu}{t}\binom{s-t}{p-t}k^{p-t}, \text{ где } n=ks+\nu,\ 0\leqq\nu<s.$$

Равенство достигается тогда и только тогда, когда $G=T(n,s)$.

Следствие 1 непосредственно следует из теоремы 2 и предложения 1.

Предложение 2 [1]. Верно неравенство

$$t(n,s;p)\leqq\binom{s}{p}\left(\frac{n}{s}\right)^p. \tag{17}$$

Равенство достигается тогда и только тогда, когато n/s целое число.

Следствие 2 [2]. Если граф G удовлетворяет условиям теоремы 2, то

$$t(G;p)\leqq\binom{s}{p}\left(\frac{n}{s}\right)^p.$$

Равенство достигается тогда и только тогда, когда n/s целое число и $G=T(n,s)$.

Следствие 2 следует непосредственно из теоремы 2 и предложения 2.

Замечание при корректуре. В связи с теоремой 1 см. также работу А. Зыкова „О некоторых свойствах линейных комплексов". Мат. сборн., **24** (1949).

ЛИТЕРАТУРА

1. Хаджииванов. Н.: Обобщение теоремы Турана о графах. Докл. БАН, **29** (1976) № 11, 1567—1570.
2. Хаджииванов, Н., Ненов, Н.: О максимуме числа клик некоторых графов. Докл. БАН, **29** (1976), № 11, 1575—1578.

Постъпила на 26. XI. 1976 г.

MAXIMUM OF THE NUMBER OF COMPLETE SUBGRAPHS OF SOME GRAPHS

N. Hadjiivanov, N. Nenov

(SUMMARY)

Let $t(G;p)$ denotes the number of complete subgraphs with p vertices of the graph G. The number of complete subgraphs with p vertices of G containing a given vertex v is called p-degree of the vertex v.

In this paper the following theorem is proved:

Theorem. If in a graph G with n vertices there exists a vertex v_1 with a maximal p-degree and v_1 is not contained in any complete subgraph with $s+1$ vertices, then

$$t(G;p) \leq t(T(n, s);p), \tag{i}$$

where $T(n, s)$ is a Turan graph. Equality in (i) is obtained if and only if $G=T(n, s)$.