# ВЪРХУ ТОЧНОТО РЕШЕНИЕ НА NAVIER-STOKES'ОВИТЕ УРАВНЕНИЯ ПРИ ИЗВОРНА ОС В ПОЛУПРОСТРАНСТВОТО

**Георги Паскалев, Иван Чобанов**

**1.** През 1942 г. Wijngaarden [1] се е занимал със задачата за движението на несвиваем вискозен флуид при наличие на вертикална ос $Oz$ в него, равномерно обложена с извори с постоянен интензитет, и на хоризонтална стена $Oxy$, върху която е изпълнено условието за полепване. Той изхожда от Navier-Stokes'овите диференциални уравнения

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\bar{v}\,\mathrm{grad})\,\bar{v} = -\frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\,p + \nu\,\Delta\bar{v} \tag{1}$$

на движението на флуида, където $\bar{v}$ е скоростта на произволна флуидна частица, $p$ — хидродинамичното налягане, включващо и теглото на флуида, $\rho$ — плътността на флуида, $\nu$ — материален фактор на пропорционалност (кинетичен вискозитет). Операторът $\Delta$ на Laplace се дефинира с

$$\Delta\bar{v} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\bar{v} - \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\bar{v}. \tag{2}$$

Към уравнението (1) се добавя и условието за несвиваемост

$$\mathrm{div}\,\bar{v} = 0. \tag{3}$$

При дадени $\rho$ и $\nu$ от четирите уравнения (1) и (3) се определят компонентите на скоростта $\bar{v}$ и налягането $p = p(x, y, z, t)$.

Wijngaarden третира проблема в приближение, което съответствува на теорията на граничния слой. От (1) се получава

$$\mathrm{rot}\,\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \mathrm{rot}\,(\bar{v}\,\mathrm{grad})\,\bar{v} = \nu\,\mathrm{rot}\,\Delta\,\bar{v}. \tag{4}$$

Поради (2) и

$$\mathrm{rot}\,\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{rot}\,\bar{v}, \tag{5}$$

$$(\bar{v}\,\mathrm{grad})\,\bar{v} = \mathrm{grad}\,\frac{v^2}{2} + \mathrm{rot}\,\bar{v} \times \bar{v} \tag{6}$$

уравнението (4) добива вида

$$\frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{rot}\,\bar{v} + \mathrm{rot}\,(\mathrm{rot}\,\bar{v} \times \bar{v}) = -\nu\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\bar{v}. \tag{7}$$

Хидродинамичната задача на Wijngaarden е стационарна и той я третира в цилиндрични координати. Както е известно, на скоростния потенциал $\Phi$

(8) $$\bar{v} = -\operatorname{grad} \Phi$$

в общия тримерен случай не може да се съпостави функция на тока. Обаче при флуидно течение с ос на симетрия, както е показал още Stokes [2], такава функция съществува. Ако при традиционните означения цилиндричните координати са $\varphi$, $\rho$ и $z$, при осова симетрия скоростният потенциал $\Phi = \Phi(\rho, z)$ не зависи от $\varphi$. От

(9) $$\operatorname{div} \bar{v} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho v_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

за условието (3) за несвиваемост сега се получава

(10) $$\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho v_\rho) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) = 0,$$

(11) $$\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho \frac{\partial \Phi}{\partial z}\right) = 0$$

т. е. съгласно (8). Следователно съществува функция $\omega = \omega(\rho, z)$ с

(12) $$\frac{\partial^2 \omega}{\partial \rho \partial z} = \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho}\right) = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho \frac{\partial \Phi}{\partial z}\right).$$

Специално при

(13) $$\frac{\partial \omega}{\partial z} = \rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho}, \quad \frac{\partial \omega}{\partial \rho} = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

се получава

(14) $$\frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \frac{\partial \omega}{\partial \rho} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial \omega}{\partial z} = 0,$$

което показва, че при

(15) $$\varphi = \text{const}$$

фамилиите криви

(16) $$\Phi = \text{const}$$

и

(17) $$\omega = \text{const}$$

са ортогонални, т. е. тангентите към кривите (17) съвпадат с направленията на $\bar{v}$ с (8). Следователно кривите от фамилията (17) са линии на тока. Поради това $\omega = \omega(\rho, z)$ е функция на тока и

(18) $$v_\rho = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \omega}{\partial z}, \quad v_z = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \omega}{\partial \rho}, \quad v_\varphi = 0.$$

В цилиндрични координати

(19) $$\operatorname{rot} \bar{v} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial v_z}{\partial \rho} - \frac{\partial v_\varphi}{\partial z}\right) \bar{\rho}^0 + \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial \rho}\right) \bar{\varphi}^0 + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial (\rho v_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{\partial v_\rho}{\partial \varphi}\right) \bar{k}^0.$$

При

(20) $$D\omega=\frac{\partial^2\omega}{\partial\rho^2}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\omega}{\partial\rho}+\frac{\partial^2\omega}{\partial z^2}$$

и дясна ориентация на единичните вектори от (2), (5), (6), (18) и (19) се получава последователно

(21) $$\operatorname{rot}\frac{\partial\bar{v}}{\partial t}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial D\omega}{\partial t}\bar{\varphi}^0,$$

(22) $$\operatorname{rot}(\bar{v}\operatorname{grad})\bar{v}=-\frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial D\omega}{\partial z}\frac{\partial\omega}{\partial\rho}-\frac{\partial D\omega}{\partial\rho}\frac{\partial\omega}{\partial z}\right)+\frac{2}{\rho^2}D\omega\frac{\partial\omega}{\partial z}\right)\bar{\varphi}^0,$$

(23) $$\operatorname{rot}\Delta\bar{v}=\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial^2 D\omega}{\partial\rho^2}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial D\omega}{\partial\rho}+\frac{\partial^2 D\omega}{\partial z^2}\right)\bar{\varphi}^0=\frac{1}{\rho}DD\omega\bar{\varphi}^0.$$

Уравнението (4) е равносилно с

(24) $$\frac{\partial D\omega}{\partial t}+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial D\omega}{\partial z}\frac{\partial\omega}{\partial\rho}-\frac{\partial D\omega}{\partial\rho}\frac{\partial\omega}{\partial z}\right)+\frac{2}{\rho^2}D\omega\frac{\partial\omega}{\partial z}=\nu DD\omega.$$

При предположението

(25) $$\omega=\rho f(\eta),\quad \eta=\frac{z}{\rho}$$

на Wijngaarden в стационарния случай се получава уравнението

(26) $$\begin{aligned}&3\eta ff''+\eta^2 ff'''+ff'''+3\eta^2 f'f''-3ff'+3\eta f'^2+3f'f''\\&=\nu(21\eta^2 f''-3f+10\eta^3 f'''+3\eta f'+6f''+10\eta f'''+2\eta^2 f^{IV}+\eta^4 f^{IV}+f^{IV}),\end{aligned}$$

което допуща непосредствено първа квадратура

(27) $$\begin{aligned}ff''+\eta^2 ff''+\eta ff'-2f^2+\eta^2 f'^2+f'^2=\nu(f'''+\eta^4 f'''+6\eta^3 f''+2\eta^2 f''+6\eta f''\\+3\eta^2 f'-3\eta f)+C.\end{aligned}$$

Видът на уравнението (27) е твърде ексцентричен, за да може да дава някакви надежди за по-нататъшно директно интегриране, въпреки че, както по-долу ще видим, косвени указания за възможност за двукратно интегриране на (27) в затворена форма са налице.

**2.** В работата си [3] Schmieden и Müller отново се спират на задачата за движението на флуид при изворна ос в полупространството, като успяват да придвижат значително изследването на този въпрос в сравнение с Wijngaarden поради удачната употреба на сферични координати. Едно кратко сравнение на двата медода е твърде инструктивно. Нека при традиционните означения сферичните координати са $r$, $\varphi$ и $\theta$ ($\theta=0$ върху вертикалната, насочена нагоре ос $Oz$). Вместо (9) сега се получава

(28) $$\operatorname{div}\bar{v}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v_r)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\, v_\theta)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi},$$

а вместо (10)

(29) $$\frac{\partial}{\partial r}(r^2\sin\theta\, v_r)+\frac{\partial}{\partial\theta}(r\sin\theta\, v_\theta)=0.$$

Поради

(30) $$\bar{v} = -\operatorname{grad}\Phi = -\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\bar{r}^0 + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\bar{\theta}^0 + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\bar{\varphi}^0\right)$$

от (29) се получава

(31) $$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right) = 0.$$

Същото уравнение (31) може да се получи и директно от диференциалното уравнение на скоростния потенциал в сферични координати

(32) $$\nabla^2\Phi = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\right)\right) = 0.$$

Следователно съществува функция $\psi = \psi(r, \theta)$ с

(33) $$\frac{\partial^2\psi}{\partial r\,\partial\theta} = \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) = \frac{\partial}{\partial\theta}\left(-\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right).$$

Специално при

(34) $$\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = -r^2\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial r}, \quad \frac{\partial\psi}{\partial r} = \sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}$$

се получава

(35) $$\frac{\partial\Phi}{\partial r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = 0,$$

или

(36) $$\operatorname{grad}\Phi \,.\, \operatorname{grad}\psi = 0,$$

откъдето следва, че $\psi(r, \theta)$ е функция на тока. От (30) и (34) се получават равенствата

(37) $$v_r = \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial\psi}{\partial u},$$

$$v_\theta = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial r},$$

$$v_\varphi = 0,$$

където е положено

(38) $$u = \cos\theta.$$

Аналогът на (20) при Schmieden и Müller е

(39) $$D\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{1-u^2}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}.$$

Поради

(40) $$\operatorname{rot}\bar{v} = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial(\sin\theta\, v_\varphi)}{\partial\theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial\varphi}\right)\bar{\varphi}^0$$

$$+ \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial(r v_\varphi)}{\partial r}\right)\bar{\theta}^0 + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(r v_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial\theta}\right)\bar{\varphi}^0$$

и съгласно (2), (5), (6) и (37) съвършено аналогично на Wijngaarden с получава

$$\text{(41)} \qquad \operatorname{rot}\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial D\psi}{\partial t}\bar{\varphi}^0,$$

$$\text{(42)} \qquad \operatorname{rot}(\bar{v}\operatorname{grad})\bar{v} = -\frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial D\psi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial r} - \frac{\partial D\psi}{\partial r}\frac{\partial\psi}{\partial u}\right) + \frac{2D\psi}{r^2}\left(\frac{u}{1-u^2}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)\right)\bar{\varphi}^0,$$

$$\text{(43)} \qquad \operatorname{rot}\triangle v = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial^2 D\psi}{\partial r^2} + \frac{1-u^2}{r^2}\frac{\partial^2 D\psi}{\partial u^2}\right)\bar{\varphi}^0 = \frac{1}{r\sin\theta}DD\psi\bar{\varphi}^0,$$

а от уравнението (4)

$$\text{(44)} \qquad \frac{\partial D\psi}{\partial t} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial D\psi}{\partial u} - \frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial D\psi}{\partial r}\right) + \frac{2D\psi}{r^2}\left(\frac{u}{1-u^2}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial u}\right) = \nu DD\psi,$$

което е аналог на (24). В същност Schmieden и Müller не използват в работата си тази форма на уравнението (4). Полагането

$$\text{(45)} \qquad \psi = r\Phi(u),$$

което те правят, е също трансформираното в сферични координати условие (25) на Wijngaarden.

Оказа се обаче — и това е основният момент в работата на Schmieden и Müller, — че диференциалното уравнение, което се получава от (44) или евентуално директно от (4) при (45), аналогично на уравнение (26) на Wijngaarden, а именно уравнението

$$\text{(46)} \qquad \Phi\Phi''' + 3\Phi'\Phi'' = \nu\left(2\Phi'' + \frac{d^2}{du^2}(1-u^2)\Phi''\right),$$

където чертичките означават диференциране спрямо $u$, е несравнено по-просто, отколкото уравнението (26) и допуща директно не само една, а три последователни квадратури, като води до Riccati'евото диференциално уравнение

$$\text{(47)} \qquad \frac{d\Phi}{du} = \frac{1}{2\nu(1-u^2)}\Phi^2 - \frac{2u}{1-u^2}\Phi - \frac{C_1u^2 + C_2u + C_3}{\nu(1-u^2)},$$

където $C_1$, $C_2$ и $C_3$ са интеграционни константи. Нещо повече, с помощта на добре позната трансформация уравнението (47) се преобразува в хипергеометричното диференциално уравнение, чиято добре разработена теория позволява на Schmieden и Müller да направят редица важни хидродинамични заключения при граничните условия на разглежданата от тях задача. При

$$\text{(48)} \qquad \Phi(u) = 2\nu q\varphi(u)$$

(където $q<0$ при извори и $q>0$ при бездни) тези гранични условия са:

а) върху стената $Oxy$ ($z=0$, $u=0$)

$$\text{(49)} \qquad \varphi_0 = \varphi_0' = 0$$

(условие за полепване);

б) върху оста $Oz$ $(u=1,\ \theta=0)$

(50) $$\varphi_1=1,\ \varphi_1'\neq 0.$$

Освен това Schmieden и Müller изискват, щото за изчезващо триене $(\nu\to 0)$ навсякъде с изключение на зоните в непосредствена близост до стената да се установи идеално равнинно изворно течение, свободно от триене и вихри, и получават следните стойности за интеграционните константи в (47):

(51) $$C_1=2\nu^2 q(q-2+\varphi_0''),\ C_2=-2\nu^2 q\varphi_0'',\ C_3=0,$$

където е положено

(52) $$\varphi_0''=\varphi''_{u=0}.$$

Поради (48) и (51) уравнението (47) добива вида

(53) $$\frac{d\varphi}{du}=\frac{q}{1-u^2}\varphi^2-\frac{2u}{1-u^2}\varphi+\frac{(2-q-\varphi_0'')u^2+\varphi_0''u}{1-u^2}.$$

3. Известно е, че всяко общо Riccati'ево диференциално уравнение

(54) $$\frac{d\varphi}{du}=f_1(u)\varphi^2+f_2(u)\varphi+f_3(u)$$

чрез

(55) $$z=\exp\left(-\int f_1(u)\varphi(u)\,du+\frac{1}{2}\int f_4(u)\,du\right),$$

където

(56) $$f_4(u)=-\left(\frac{f_1'(u)}{f_1(u)}+f_2(u)\right),$$

се преобразува в каноничното линейно хомогенно диференциално уравнение от втори ред

(57) $$z''+\left(f_1(u)f_3(u)-\frac{1}{4}f_4^2(u)-\frac{1}{2}f_4'(u)\right)=0.$$

За уравнението (53) е в сила

(58) $$f_4(u)=0,\ q\varphi=-(1-u^2)\frac{z'}{z}$$

и (57) добива вида

(59) $$(1-u^2)^2z''+quz(\varphi_0''(1-u)+(2-q)u)=0.$$

Известно е [4], че чрез

(60) $$z(u)=(1+u)^s(1-u)^t w(u)\qquad(|u|<1),$$

където

(61) $$4at(t-1)+2bt+c+d+e=0,\qquad(s-t)(2a(s+t-1)+b)=d,$$

уравнението

(62) $$a(u^2-1)^2z''+bu(u^2-1)z'+(cu^2+du+e)z=0$$

се преобразува в

(63) $$(u^2-1)w''+((2(s+t)+b/a)u+2(t-s))w' +((s+t)(s+t-1+b/a)+c/a)w=0,$$

а последното чрез

(64) $$2v=1-u$$

преминава в уравнението

(65) $$v(v-1)w''+((2(s+t)+b/a)v-(2t+b/2a))w' +((s+t)(s+t-1+b/a)+c/a)u=0,$$

а чрез

(66) $$v=1+u$$

в уравнението

(67) $$v(v-1)w''+((2(s+t)+b/a)v-(2s+b/2a))w' +((s+t)(s+t-1+b/a)+c/a)w=0.$$

За уравнението (59) условията (61) са

(68) $$4t(t-1)+(2-q)q=0,\ 2(s-t)(s+t-1)=q\varphi_0'',$$

първото от които е удовлетворено при

(69) $$t_1=q/2,\quad t_2=1-q/2.$$

Ако $s_1$ и $s_2$ са корените на второто уравнение (68), от

(70) $$(2s-1)^2=2q\varphi_0''+(q-1)^2$$

следва

(71) $$s_1+s_2=1.$$

Ако специално се положи

(72) $$s_1=p/2,$$

то

(73) $$s_2=1-p/2.$$

И в двата случая (72), (73) равенството (70) получава вида

(74) $$(p-1)^2-(q-1)^2=2q\varphi_0'',$$

откъдето

(75) $$p=1\pm\sqrt{2q\varphi_0''+(q-1)^2}.$$

За интеграла $z$ на уравнението (59) граничните условия (49) и (50) са:

а) върху стената $Oxy$ $(u=0)$

(76) $$z_0\neq 0,\ z_0'=z_0''=0,$$

б) върху оста $Oz$ $(u=1)$

(77) $$\lim_{u\to 1}(1-u^2)z'/z=-q.$$

Поради това, че системата (68) има четирите възможни двойки решения

(78) $$(p,\ q),\ (p,\ 2-q),\ (2-p,\ q),\ (2-p,\ 2-q),$$

е необходимо да се разгледа въпросът, дали следва да се съобразят всичките тези случаи. За две различни двойки от стойности на параметрите $q$ и $\varphi_0''$, например $q=q_1$, $\varphi_0''=\varphi_1$ и $q=q_2$, $\varphi_0''=\varphi_2$, уравнението (59) добива съответно вида

(79) $$(1-u^2)\,z''+zq_1u\,(\varphi_1(1-u)+(2-q_1)\,u)=0$$

и

(80) $$(1-u^2)\,z''+zq_2u\,(\varphi_2(1-u)+(2-q_2)\,u)=0.$$

Да допуснем, че уравненията (79), (80) имат общ интеграл; тогава

(81) $$q_1\,(\varphi_1(1-u)+(2-q_1)\,u)=q_2\,\varphi_2\,(1-u)+(2-q_2)\,u)$$

тъждествено спрямо $u$, откъдето

(82) $$q_1\varphi_1=q_2\varphi_2,\quad q_1(2-q_1)=q_2(2-q_2).$$

Следователно

(83) $$q_2=2-q_1,\quad \varphi_2=q_1\varphi_1/(2-q_1).$$

Ето защо, ако $z(u)$ е интеграл на уравнението (59) при параметри $q$ и $\varphi_0''$, $z(u)$ е интеграл на (59) и при параметрите $2-q$ и $q\varphi_0''/(2-q)$. Но ако в първия случай $z(u)$ удовлетворява граничното условие (77), във втория случай очевидно не го удовлетворява.

След тази забележка да допуснем, че сме намерили решение на уравнението (59), което удовлетворява граничните условия при параметри $q$ и $\varphi_0''$, или, което е същото, при двойката $(p,\ q)$, която съответствува на $(q,\ \varphi_0'')$ чрез (75).

Няма смисъл да се разглежда случаят $(2-p,\ q)$, понеже на тази двойка съгласно (75) съответствува пак двойката $(q,\ \varphi_0'')$.

Няма смисъл да се разглежда и случаят $(p,\ 2-q)$, понеже на тази двойка съгласно забележката съответствува двойката $(2-q,\ q\varphi_0''/(2-q))$ със същия интеграл $z(u)$, както и при $(q,\ \varphi_0'')$, който обаче не удовлетворява граничното условие (77).

Най-после, няма смисъл да се разглежда и случаят $(2-p,\ 2-q)$, понеже на тази двойка съгласно (75) съответствува пак двойката $(p,\ 2-q)$, при която, както току-що бе отбелязано, граничното условие (77) не е удовлетворено.

Поради тази причина е достатъчно да ограничим разглежданията си само с двойката $(p,\ q)$.

При (64) уравнението (65) за уравнението (59) е

(84) $$v(v-1)\,w''+((p+q)\,v-q)\,w'+\left(\frac{p+q}{2}-\left(\frac{p-q}{2}\right)^2\right)w=0.$$

Това е хипергеометричното уравнение, до чието решение се свежда хидродинамичната задача у Schmieden и Müller.

Като сравним (84) с традиционната форма

$$v(v-1)w''+((\alpha+\beta+1)v-\gamma)w'+\alpha\beta w=0 \tag{85}$$

или символично

$$H(\alpha,\ \beta,\ \gamma;\ w,\ v)=0 \tag{86}$$

на хипергеометричното диференциално уравнение, получаваме

$$\begin{cases} \alpha+\beta=p+q-1, \\ \alpha\beta=\frac{q}{2}(p+2-q-\varphi_0'')=\frac{p+q}{2}-\left(\frac{p-q}{2}\right)^2, \\ \gamma=q, \end{cases} \tag{87}$$

откъдето

$$\begin{cases} \alpha=\frac{1}{2}\left(p+q-1-\sqrt{2p^2+2q^2-4p-4q+1}\right), \\ \beta=\frac{1}{2}\left(p+q-1+\sqrt{2p^2+2q^2-4p-4q+1}\right), \\ \gamma=q \end{cases} \tag{88}$$

или съгласно (75)

$$\begin{cases} \alpha=\frac{1}{2}\left(p+q-1-\sqrt{4q\varphi_0''+4q^2-8q+1}\right), \\ \beta=\frac{1}{2}\left(p+q-1+\sqrt{4q\varphi_0''+4q^2-8q+1}\right), \\ \gamma=q. \end{cases} \tag{89}$$

Съгласно теорията на хипергометричното диференциално уравнение два линейно независими интеграла на уравнението (59) са

$$z_1=(1-u)^{q/2}(1+u)^{p/2}F\left(\alpha,\ \beta,\ \gamma;\ \frac{1-u}{2}\right) \tag{90}$$

и

$$z_2=(1-u)^{1-q/2}(1+u)^{1-p/2}F\left(1-\beta,\ 1-\alpha,\ 2-\gamma;\ \frac{1-u}{2}\right), \tag{91}$$

където

$$F(\alpha,\ \beta,\ \gamma;\ v)=1+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\binom{\alpha+\nu-1}{\nu}\binom{\beta+\nu-1}{\nu}}{\binom{\gamma+\nu-1}{\nu}}v^{\nu} \tag{92}$$

е хипергеометричният ред.

Граничното условие $z_0''=0$ се проверява непосредствено от (59). Другите условия (76) са

$$z_1'(0)+kz_2'(0)=0,\quad z_1(0)+kz_2(0)\neq 0. \tag{93}$$

Като анализират условието (77), Schmieden и Müller стигат до следните изводи:

1. За $q<1$ задачата има решение при произволно $\varphi_0''$, което допуща реални стойности за $p$ съгласно (75).

2. За $q>1$ решения няма, като се изключи случаят, когато са удовлетворени условията (93) при $k=0$.

3. За $q=1$ съществува съвкупност от решения с параметър $\varphi_0''$, както в случая 1, но има само една стойност на $\varphi_0''$, при която производните на $\varphi$ остават регулярни за $u=1$.

Ясно е следователно, че проблемът на Wijngaarden може да се смята за решен от Schmieden и Müller, доколкото е сведен до операции с хипергеометричната функция (92). След направените общи разглеждания тези автори се спират на някои решения на Navier-Stokes'овите уравнения на задачата, които се получават в затворена форма от решаване с квадратури на хипергеометричното диференциално уравнение (84). Те обаче дискутират подробно само онези затворени решения, които се получават, като се удовлетворява с полином хипергеометричното диференциално уравнение (84) или уравнението, съответствуващо на (63). В същност в първия случай Schmieden и Müller получават ефективни резултати само при $p=q$, т. е. в най-простия случай $\varphi_0''=0$. Случаи с $\varphi_0''\neq 0$ те получават по втория от посочените начини. Така тези автори достигат до дискретни стойности на хидродинамичните параметри $q$ и $\varphi_0''$ на задачата (и то невинаги явно изразени), при които могат да се получат затворени решения на Navier-Stokes'овите диференциални уравнения на движението на флуида.

В настоящата работа съществено се допълват резултатите на Schmieden и Müller по отношение на онези стойности на параметрите $q$ и $\varphi_0''$, при които Navier-Stokes'овите уравнения на движението допущат точни решения. При това се използват резултати от нашата статия [5], в която е дадена систематика на случаите, когато хипергеометричното диференциално уравнение се интегрира с квадратури.

4. Преди всичко ще приложим почти тривиалните квадратури на хипергеометричното диференциално уравнение за намиране на такива стойности на $q$ и $\varphi_0''$, при които Navier-Stokes'овите уравнения на движението на флуида допущат точни решения. Schmieden и Müller решават този въпрос точно при следните стойности на параметрите:

$$\varphi_0''=0,\quad q=-\frac{2n(2n-1)}{4n+1}\qquad (n\in N). \tag{94}$$

За интеграла $w=w(v)$ на уравнението (84) граничните условия (76) и (77) стават

$$w\left(\frac{1}{2}\right)\neq 0, \tag{95}$$

$$w'\left(\frac{1}{2}\right)=(p-q)\,w\left(\frac{1}{2}\right) \tag{96}$$

и

$$\lim_{v\to 0}\frac{w'(v)}{w(v)} \tag{97}$$

да съществува.

Понеже $u$ в (64) варира между $-1$ и 1, то $0<v<1$. В случая

$$\alpha=1-n \qquad (n\in N \tag{98}$$

общият интеграл на уравнението (84) може да се намери от релацията (35) при (33) на [5]. При това константите $C_1$ и $C_2$ в цитираното равенство (35) трябва да се определят по такъв начин, че интегралът $w$ да удовлетворява граничните условия (95)—(97). Ако специално е известен интеграл на уравнението (84), получен от общия интеграл (35) на [5], който удовлетворява граничните условия (95) и (96), проверката на (97) е излишна, тъй като за такъв интеграл това условие е изпълнено. Наистина в този случай границата

$$\lim_{v\to 0}\frac{w'(v)}{w(v)}=\frac{(1-n)(n+p+q-2)}{q} \tag{99}$$

съществува при $q\neq 0$.

От (98) съгласно (88) следва

$$p^2+2(1-2n-q)p+q^2+2q-4nq-4n^2+12n-8=0, \tag{100}$$

т. е.

$$p=q+2n-1+R, \tag{101}$$

където за краткост е положено

$$R^2=8n^2+8nq-4q-16n+9. \tag{102}$$

По този начин $p$, $q$ и $\varphi_0''$ се изразяват параметрично чрез $R$ съгласно (74), (101) и (102), както следва:

$$p=\frac{R^2+(8n-4)R+8n^2-5}{8n-4}, \tag{103}$$

$$q=\frac{R^2-8n^2+16n-9}{8n-4}, \tag{104}$$

$$\varphi_0''=\frac{(R+2n-1)(R^2+2(2n-1)R-3)}{R^2-(8n^2-16n+9)}. \tag{105}$$

Съгласно (88) и (98) от (33) на [5] се получава

$$H_n(v)=1+\sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{\binom{\nu-n}{\nu}\binom{\nu+p+q+n-3}{\nu}}{\binom{\nu+q-1}{\nu}}v^\nu, \tag{106}$$

т. е. съгласно (103) и (104)

$$H_n(v)=1+\sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{\binom{\nu-n}{\nu}\binom{\nu+\frac{R^2+(4n-2)R+4n^2-6n-1}{4n-2}}{\nu}}{\binom{\nu+\frac{R^2-8n^2+8n-5}{8n-4}}{\nu}}v^\nu. \tag{107}$$

Следователно за всяка стойност на $R$ уравнението (84) със (103)—(105) има в интервала (0, 1) общ интеграл

$$w(v)=H_n(v)\left(C_1+C_2\int H_n^{-2}(v)\,v^{-q}(1-v)^{-p}\,dv\right), \tag{108}$$

където $H_n(v)$ се определя със (107), а $p$ и $q$ — със (103) и (104).

Предстои да се извърши такъв подбор на интеграционните константи $C_1$ и $C_2$, че да са удовлетворени граничните условия (95)—(96). Условието (96) става

$$\left(H_n'\left(\frac{1}{2}\right)+(q-p)\,H_n\left(\frac{1}{2}\right)\right)\left(C_1+C_2\int_0^{\frac{1}{2}} H_n^{-2}(v)\,v^{-q}(1-v)^{-p}\,dv\right) \tag{109}$$
$$+C_2\,2^{p+q}H_n^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=0.$$

Понеже случаят $C_2\neq 0$ е технически извънредно комплициран, ще се спрем по-подробно на резултатите, които се получават при $C_2=0$. Сега условието (97) е изпълнено, а (96), т. е. (109), става

$$\sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{\binom{\nu-n}{\nu}\binom{\nu+\frac{R^2+(4n-2)R+4n^2-6n-1}{4n-2}}{\nu}}{\binom{\nu+\frac{R^2-8n^2+8n-5}{8n-4}}{\nu}}\left(\frac{\nu}{2^{\nu-1}}+\frac{q-p}{2^{\nu}}\right)=p-q, \tag{110}$$

или

$$\sum_{\nu=1}^{n-1}\binom{\nu-n}{\nu}(2\nu-2n+1-R)\frac{\prod_{s=1}^{\nu}F_s}{\prod_{s=1}^{\nu}G_s}=2n-1+R \tag{111}$$

при

$$\begin{cases} F_0=G_n=1, \\ F_s=R^2+(4n-2)R+4n^2+(4s-6)n-2s-1, \\ G_s=R^2-8n^2+(8s+8)n-4s-5 \\ (s=1,\ 2,\ .\ .\ .,\ n-1). \end{cases} \tag{112}$$

Чрез привеждане към общ знаменател равенството (111) се записва във вида

$$\sum_{\nu=0}^{n-1}\binom{\nu-n}{\nu}(2n-2\nu-1+R)\prod_{s=0}^{\nu}F_s\prod_{s=\nu+1}^{n}G_s=0. \tag{113}$$

От уравнението (113) при (112) $R$ се определя във функция на $n$. Тогава от (103) и (104) се намират съответните стойности на $p$ и $q$, при които уравнението (84) има интеграл

$$w(v)=C_1H_n(v) \tag{114}$$

с $H_n(v)$, определен от (107) при намерената стойност на $R$. При това условието (96) е удовлетворено; условието (97) също е изпълнено, стига да е в сила $R^2\neq 8n^2-16n+9$. Условието (95) сега става

$$\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{\binom{\nu-n}{\nu}\binom{\nu+\frac{R^2+(4n-2)R+4n^2-6n-1}{4n-2}}{\nu}}{2^\nu\binom{\nu+\frac{R^2-8n^2+8n-5}{8n-4}}{\nu}}\neq 0. \tag{115}$$

За илюстрация нека в частност $n=3$. Уравнението (113) при (112) става

$$(R+3)(R+5)(R+7)=0 \tag{116}$$

с корени $-3$, $-5$ и $-7$. Оттук получаваме:

Интегралът на уравнението (59) е

$$z(u)=(1-u)^{-3/5}(1+u)^{2/5}(2u^2-5u+5) \tag{117}$$

при $\varphi_0''=2$ и $q=-6/5$,

$$z(u)=(1-u^2)^{-1/5}(u^2-5) \tag{118}$$

при $\varphi_0''=0$ и $q=-2/5$,

$$z(u)=(1-u)^{2/5}(1+u)^{-3/5}(2u^2+5u+5) \tag{119}$$

при $\varphi_0''=3$, $q=4/5$. Във всичките тези случаи граничните условия (76) и (77) са удовлетворени. При това константата $C_1$ в (114) е подходящо фиксирана, което е направено и по-долу.

Случаят (118) спада към случая (94), разгледан от Schmieden и Müller.

При $n=5$ например уравнението (113) със (112) става

$$(R+7)(R+9)(R+11)(11R^2+198R+579)=0 \tag{120}$$

и има корени

$$R_1=-7,\ R_2=-9,\ R_3=-11,\ R_4\approx-3{,}6742,\ R_5\approx-14{,}3258. \tag{121}$$

Ето защо стигаме до резултата:

Интегралът на уравнението (59) е

$$z(u)=(1-u)^{-10/9}(1+u)^{-1/9}(184u^4-414u^3+54u^2+486u-486) \tag{122}$$

при $\varphi_0''=2$, $q=-20/9$,

$$z(u)=(1-u^2)^{-2/3}(7u^4-18u^2+27) \tag{123}$$

при $\varphi_0''=0$, $q=-4/3$,

(124) $$z(u)=(1-u)^{-1/9}(1+u)^{-10/9}(184u^4+414u^3+54u^2-486u-486)$$

при $\varphi_0''=-20$, $q=-2/9$,

(125) $$z(u)\approx(1-u)^{-1,6042}(1+u)^{1,0588}(59,778u^4-259,403u^3+438,356u^2 -356,657u+133,926)$$

при $\varphi_0''\approx 2,5654$, $q\approx -3,2083$,

(126) $$z(u)\approx(1-u)^{1,0588}(1+u)^{-1,6042}(0,766u^4+3,325u^3+5,619u^2 +4,572u+1,714)$$

при $\varphi_0''\approx 3,8869$, $q\approx 2,1175$. Във всичките тези случаи граничните условия (76) и (77) са удовлетворени. Случаят (123) спада към случая (94), разгледан от Schmieden и Müller.

По-общо, при

(127) $$n=2m+1 \qquad (m\in N)$$

за $R=-(2n-1)$ от (103)—(105) се получава

(128) $$p=q=-\frac{n^2-3n+2}{2n-1}, \qquad \varphi_0''=0,$$

а уравнението (110) за $R$ става

(129) $$\sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{\binom{\nu-n}{\nu}\binom{\nu-\frac{n+1}{2n-1}}{\nu}}{\binom{\nu-\frac{n^2-n+1}{2n-1}}{\nu}}\frac{\nu}{2^\nu}=0.$$

То е удовлетворено тъждествено при (127), т. е. получава се релацията

(130) $$\sum_{\nu=1}^{2m}\frac{\binom{\nu-2m-1}{\nu}\binom{\nu-\frac{2m+2}{4m+1}}{\nu}}{\binom{\nu-\frac{4m^2+2m+1}{4m+1}}{\nu}}\frac{\nu}{2^\nu}=0 \qquad (m\in N),$$

която впрочем е частен случай от

(131) $$\sum_{\nu=2n-1}^{2m}\frac{\binom{\nu}{2n-1}\binom{\nu-2m-1}{\nu}\binom{\nu-\frac{2m+2}{4m+1}}{\nu}}{2^\nu\binom{\nu-\frac{4m^2+2m+1}{4m+1}}{\nu}}=0$$

при $m\in N$, $n\in N$, $n\leq m$.

Следователно интегралът на уравнението (59) е

$$(132)\qquad z(u)=(1-u^2)^{-\frac{m(2m-1)}{4m+1}}\left\{1+\sum_{\nu=1}^{2m}\frac{\binom{\nu-2m-1}{\nu}\binom{\nu-\frac{2m+2}{4m+1}}{\nu}}{\binom{\nu-\frac{4m^2+2m+1}{4m+1}}{\nu}}\frac{(1-u)^\nu}{2^\nu}\right\}$$

при

$$(133)\qquad \varphi_0''=0,\quad q=-\frac{2m(2m-1)}{4m+1}\qquad (m\in N),$$

което съвпада с резултата в случая (94) на Schmieden и Müller.

За $R=3-2n$ от (103) — (105) се получава

$$(134)\qquad p=-\frac{n^2-5n+2}{2n-1},\quad q=-\frac{n^2-n}{2n-1},\quad \varphi_0''=2,$$

а уравнението (110) за $R$ става

$$(135)\qquad \sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{\binom{\nu-n}{\nu}\binom{\nu-\frac{n-1}{2n-1}}{\nu}}{\binom{\nu-\frac{n^2+n-1}{2n-1}}{\nu}}\frac{\nu-1}{2^\nu}=0.$$

То е удовлетворено тъждествено при (127), т. е. получава се релацията

$$(136)\qquad \sum_{\nu=0}^{2m}\frac{\binom{\nu-2m-1}{\nu}\binom{\nu-\frac{2m}{4m+1}}{\nu}}{\binom{\nu-\frac{4m^2+6m+1}{4m+1}}{\nu}}\frac{\nu-1}{2^\nu}=0.$$

Следователно интегралът на уравнението (59) е

$$(137)\qquad z(u)=(1-u)^{-\frac{m(2m+1)}{4m+1}}(1+u)^{-\frac{2m^2-3m-1}{4m+1}}$$

$$\times\left\{1+\sum_{\nu=1}^{2m}\frac{\binom{\nu-2m-1}{\nu}\binom{\nu-\frac{2m}{4m+1}}{\nu}}{\binom{\nu-\frac{4m^2+6m+1}{4m+1}}{\nu}}\frac{(1-u)^\nu}{2^\nu}\right\}$$

при

$$(138)\qquad \varphi_0''=2,\quad q=-\frac{2m(2m+1)}{4m+1}\qquad (m\in N),$$

а граничното условие $z(0)\neq 0$ дава

$$\sum_{\nu=0}^{2m}\frac{\binom{\nu-2m-1}{\nu}\binom{\nu-\frac{2m}{4m+1}}{\nu}}{\binom{\nu-\frac{4m^2+6m+1}{4m+1}}{\nu}}\frac{1}{2^\nu}\neq 0. \tag{139}$$

За $R=-1-2n$ от (103)—(105) се получава

$$p=-\frac{n^2-n}{2n-1},\quad q=-\frac{n^2-5n+2}{2n-1},\quad \varphi_0''=-\frac{2n(n-1)}{n^2-5n+2}, \tag{140}$$

а уравнението (110) за $R$ става

$$\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{\binom{\nu-n}{\nu}\binom{\nu-\frac{n-1}{2n-1}}{\nu}}{\binom{\nu-\frac{n^2-3n+1}{2n-1}}{\nu}}\frac{\nu+1}{2^\nu}=0 \tag{141}$$

и е тъждествено удовлетворено при (127), т. е. получава се релацията

$$\sum_{\nu=0}^{2m}\frac{\binom{\nu-2m-1}{\nu}\binom{\nu-\frac{2m}{4m+1}}{\nu}}{\binom{\nu-\frac{4m^2-2m-1}{4m+1}}{\nu}}\frac{\nu+1}{2^\nu}=0. \tag{142}$$

Следователно интегралът на уравнението (59) е

$$z(u)=(1-u)^{-\frac{2m^2-3m-1}{4m+1}}(1+u)^{-\frac{m(2m+1)}{4m+1}} \times\left\{1+\sum_{\nu=1}^{2m}\frac{\binom{\nu-2m-1}{\nu}\binom{\nu-\frac{2m}{4m+1}}{\nu}}{\binom{\nu-\frac{4m^2-2m-1}{4m+1}}{\nu}}\frac{(1-u)^\nu}{2^\nu}\right\} \tag{143}$$

при

$$\varphi_0''=-\frac{2m(2m+1)}{2m^2-3m-1},\quad q=-\frac{4m^2-6m-2}{4m+1}\qquad (m\in N), \tag{144}$$

а граничното условие $z(0)\neq 0$ дава

$$\sum_{\nu=0}^{2m}\frac{\binom{\nu-2m-1}{\nu}\binom{\nu-\frac{2m}{4m+1}}{\nu}}{\binom{\nu-\frac{4m^2-2m-1}{4m+1}}{\nu}}\frac{1}{2^\nu}\neq 0. \tag{145}$$

Дотук бе разгледан случаят $\alpha=1-n$ при почти тривиалните квадратури на хипергеометричното уравнение и при $C_3=0$. Случаят $\alpha=n$, както и случаите $\alpha$ и $\beta$ произволни, $\gamma=\alpha+1-n$ и $\gamma=\alpha+n$ $(n\in N)$, приложени върху уравнението (84), или дават отново горните резултати, или водят отново до двойки стойности на параметрите $p$ и $q$, при които граничните условия не са удовлетворени, вж. съответната забележка в т. 3. Ако се използва трансформацията (60), но не при $s=p/2$ и $t=q/2$, а при други възможни корени на системата (61), се получават същите резултати, но не при $\alpha=1-n$ $(n\in N)$, а при $\alpha=n$ $(n\in N)$ или $\alpha$ и $\beta$ произволни, а $\gamma=\alpha+n$ или $\gamma=\alpha+1-n$ $(n\in N)$ в зависимост от избраните корени на системата (61). Най-после, ако се работи с трансформацията (60), но не при (64), а при (66), отново се получават същите резултати по посочения начин. На пръв поглед това съвсем не личи, понеже тогава $\alpha$ и $\beta$ в (89) имат същите стойности, но $\gamma$ е равно не на $q$, а на $p$, т. е. привидно връзката (113) между $R$ и $n$ е друга. Корените за $R$ на тази връзка обаче са същите, поне в разгледаните частни случаи. Вероятно така е и в общия случай, но проверката на това предположение не сме извършили, тъй като се касае за приложение.

**5.** В настоящата точка се прави приложение на получените в цитираната работа [5] резултати относно случаите, в които хипергеометричното диференциално уравнение допуща нетривиални квадратури, върху уравнението (84) с (88) или (89). При това ще се цитира табл. 2 от [5]. За пълнота ще включим и случаите 1 и 2 от табл. 2, на които съответствуват почти тривиални квадратури.

В случая 1 от табл. 2 е в сила

$$(p+q-2n-1)^2=4q^2-8q+1+4q\varphi_0'' \tag{146}$$

или съгласно (74)

$$\begin{aligned}4(2n-1)q^3+(\varphi_0''^2+8-6\varphi_0''+12n\varphi_0''-4n^2-20n)q^2\\+4(5n^2-2n^3-3n^2\varphi_0''+n)q+4n^2(n^2-1)=0 \qquad (n\in N)\end{aligned} \tag{147}$$

при

$$2q\varphi_0''+(q-1)^2\geqq 0. \tag{148}$$

Следователно при връзките (147) със (148) между параметрите $q$ и $\varphi_0''$ на уравнението (84) същото се интегрира в затворена форма.

В случая 2 от табл. 2 е в сила

$$(p-q+2n-1)^2=4q^2-8q+1+4q\varphi_0'' \tag{149}$$

и отново се получава връзката (147) между $q$ и $\varphi_0''$.

В случая 3 от табл. 2 е в сила

$$q=n+\frac{1}{2},\quad p+q-1=m+n \qquad (m\in I,\ n\in I); \tag{150}$$

откъдето

$$(m+n-q)^2=2\varphi_0''q+(q-1)^2, \tag{151}$$

т. е.

(152) $$q=n+\frac{1}{2}, \quad \left(m-\frac{1}{2}\right)^2-(q-1)^2=2\varphi_0'' q.$$

Ето защо съгласно (75) уравнението (84) се интегрира с квадратури при

(153) $$q=n+\frac{1}{2}, \quad p=m+\frac{1}{2} \qquad (m\in I,\ n\in I)$$

и при $\varphi_0''$, определено съгласно (74). Тези условия могат да се запишат още така:

(154) $$q=n+\frac{1}{2}, \quad \varphi_0''=\frac{(m-n)(m+n-1)}{2n+1} \qquad (m\in I,\ n\in I).$$

В случая 4 от табл. 2 е в сила

(155) $$q=n+\frac{1}{2}, \quad 4q^2-8q+1+4q\varphi_0''=\left(m-\frac{1}{2}\right)^2,$$

следователно (84) се интегрира в затворена форма при

(156) $$q=n+\frac{1}{2}, \quad \varphi_0''=\frac{\left(m-\frac{1}{2}\right)^2-(2n-1)^2+3}{2(2n+1)} \qquad (m\in I,\ n\in I).$$

Най-после в случая 5 от табл. 2 е в сила

(157) $$4q^2-8q+1+4q\,\varphi_0''=\left(n-\frac{1}{2}\right)^2 \qquad (n\in I)$$

и

(158) $$(m+n-p)^2=4q^2-8q+1+4q\varphi_0'' \qquad (m\in I),$$

откъдето

(159) $$p=m+\frac{1}{2}, \quad p=m+2n-\frac{1}{2}.$$

Съгласно (75) от уравнението (158) се получава

(160) $$3q^2-6q+2q\varphi_0''-(m+n-1)^2=2(1-m-n)\sqrt{2\varphi_0''q+(q-1)^2}$$

или поради (157)

(161) $$\left((m+n-1)^2-\frac{3}{16}(2n+1)(2n-3)+q\varphi_0''\right)^2 =4(m+n-1)^2(2q\varphi_0''+(q-1)^2).$$

Определянето на $q$ и $\varphi_0''$ в зависимост от целочислените параметри $m$ и $n$ става от уравненията (161) и (157).

За ефективното използване на резултатите от статията [5] в случаите, когато хипергеометричното диференциално уравнение (84) на Schmieden и Müller допуща интегриране с нетривиални квадратури, за които граничните условия на хидродинамичната задача са удовлетворени, трябва да се приложи изразът (155) от [5] за общия интеграл на хипергеометричното диференциално уравнение (1) от [5] в случаите 3—5 на табл. 2, където стойностите на $p$, $q$, $r$, $s$, $a$ и $D$ се пресмятат по табл. 3 или 4 от

[5] в зависимост от стойностите на целочислените параметри $m$ и $n$, а функциите $F_1$ и $F_2$ се определят съгласно табл. 5 от [5] в зависимост от стойностите на аргумента.

Статията [6] е резюме на настоящата работа.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Wijngaarden: Laminar flow in radial direction along a plane surface. Proc. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, **45** (1942).
2. Stokes, J. G.: Trans. Cambr. Phil. Soc., **7** (1842), p. 439.
3. Schmieden, C., Müller, K.-H.: Die Strömung einer Quellstrecke im Hallbraum, eine strenge Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen. Zeitschr. f. Flugwiss., **4** (1956), Heft 9, 300—309.
4. Kamke, E.: Differentialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen. Bd. I. Leipzig, 1951.
5. Паскалев, Г., Чобанов, Ив.: Върху интегрирането на хипергеометричното диференциално уравнение с квадратури. Год. Соф. унив., Фак. мат. и мех., **70** (1975/76), 47—70.
6. Paskalew, G., Tschobanow, I.: Über die strenge Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen bei einer Quellstrecke im Halbraum. Zeitschr. für Flugwiss., **6** (1958), H. 7, 199—203.


Постъпила на 14. XII. 1976 г.

# ON THE EXACT SOLUTION OF THE NAVIER-STOKES EQUATIONS IN THE SEMI-SPACE IN THE PRESENCE OF A SOURCE AXIS

G. Paskalev, I. Chobanov

## (SUMMARY)

C. Schmieden and K.-H. Müller investigate in [3] the problem of the motion of an incompressible viscous fluid in the upper semi-space in the presence of a perpendicular axis, covered with equal distributed sources of constant strength, and discuss closed form solutions of the Navier-Stokes equations of the fluid motion, expressed essentially as the ratio of two polynomials. Reducing the solvability of the Navier-Stokes equations to the solvability of the hypergeometric differential equation (84) with initial conditions, corresponding to the hydrodynamical problem discussed, they give exact solutions of (84) only in the case when the hypergeometric series (94) reduces to a polynomial. By using some results from the article [5], which contains a number of relations between the parameters of the hypergeometric differential equation, when it may be solved by closed form solutions, the authors of the present article find new cases, in which the equation (84) and together with it the Navier-Stokes equations of the hydrodynamical problem of Schmieden und Müller admit closed form solutions. A summary of this paper, printed years ago, is the article [6].