ВЪРХУ ИНТЕГРИРАНЕТО НА ХИПЕРГЕОМЕТРИЧНОТО ДИФЕРЕНЦИАЛНО УРАВНЕНИЕ С КВАДРАТУРИ

Георги Паскалев, Иван Чобанов

Както е известно, в общия случай — при произволни стойности на параметрите му — хипергеометричното диференциално уравнение

$$x(x-1)y''+((\alpha+\beta+1)x-\gamma)y'+\alpha\beta y=0, \tag{1}$$

или символично

$$H(\alpha,\ \beta,\ \gamma;\ y,\ x)=0, \tag{2}$$

не се интегрира с квадратури. В предишните си работи [1] — [6] се занимахме с някои случаи, когато уравнението (1) допуща интегриране в затворена форма. В настоящата статия по нов и по-кратък начин се дава систематика на известни случаи на стойности на α, β и γ, в които хипергеометричното диференциално уравнение (1) може да се интегрира с квадратури.

Под *H-трансформации* ще разбираме такива крайни или диференциални преобразования над независимата променлива x и над интеграла $y(x)$ на уравнението (2), които трансформират последното отново в хипергеометрично уравнение

$$H(\alpha',\ \beta',\ \gamma';\ \eta,\ \xi)=0, \tag{3}$$

със стойности на параметрите α', β' и γ', изобщо различни от стойностите α, β и γ. H-трансформациите могат да се получат по различни начини, но един метод за намирането им се основава на следния факт, добре известен от теорията на обикновените диференциални уравнения [7].

Нека са дадени двете линейни хомогенни диференциални уравнения от втори ред

$$f_1(x)y''+f_2(x)y'+f_3(x)y=0, \tag{4}$$

$$\varphi_1(\xi)\eta''+\varphi_2(\xi)\eta'+\varphi_3(\xi)\eta=0 \tag{5}$$

при

$$y=y(x),\ \eta=\eta(\xi). \tag{6}$$

Тогава

$$f(x)=\frac{f_3(x)}{f_1(x)}-\frac{1}{4}\left(\frac{f_2(x)}{f_1(x)}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{f_2(x)}{f_1(x)}\right)' \tag{7}$$

и

(8) $$\varphi(\xi)=\frac{\varphi_3(\xi)}{\varphi_1(\xi)}-\frac{1}{4}\left(\frac{\varphi_2(\xi)}{\varphi_1(\xi)}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{\varphi_2(\xi)}{\varphi_1(\xi)}\right)'$$

са инвариантите съответно на уравненията (4) и (5). Нека

(9) $$\{s,\ x\}=\frac{s'''}{s'}-\frac{3}{2}\left(\frac{s''}{s'}\right)^2,$$

където чертичките означават диференциране спрямо x, е диференциалната инварианта на Schwarz.

Необходимо и достатъчно условие, за да съществува трансформация

(10) $$\xi=\xi(x),\quad y(x)=P(x)\,\eta(\xi)$$

с поне трикратно диференцируема функция $\xi(x)$ на x и с

(11) $$\xi'(x)\neq 0,$$

която да преобразува взаимно-еднозначно уравнението (4) в уравнението (5) и интегралите на (4) в интегралите на (5), е $\xi(x)$ да удовлетворява диференциалното уравнение

(12) $$\frac{1}{2}\{\xi,\ x\}+\xi'^2\,\varphi(\xi)=f(x).$$

Когато (10) съществува, между $y(x)$ и $\eta(\xi)$ е налице релацията

(13) $$y\sqrt{|\xi'|}\,\exp\frac{1}{2}\int f_1(x)\,dx=\eta\,\exp\frac{1}{2}\int\varphi_1(\xi)\,d\xi.$$

За хипергеометричното диференциално уравнение (1) е в сила

(14) $$f(x)=\frac{1-\lambda^2}{4x^2}+\frac{1-\mu^2}{4(x-1)^2}+\frac{\lambda^2+\mu^2-\nu^2-1}{4x(x-1)},$$

където

(15) $$\lambda^2=(\gamma-1)^2,\ \mu^2=(\alpha+\beta-\gamma)^2,\ \nu^2=(\alpha-\beta)^2,$$

или още

(16) $$f(x)=\frac{Lx^2+Mx+N}{4x^2(x-1)^2},$$

където

(17) $$L=1-\nu^2,\quad M=\lambda^2+\nu^2-\mu^2-1,\quad N=1-\lambda^2.$$

Аналогичен израз се получава за $\varphi(\xi)$ чрез параметрите α', β' и γ' на уравнението (3), ако го идентифицираме с (5).

Измежду познатите H-трансформации, които се получават като интеграли на уравнението (12), където $f(x)$ и $\varphi(\xi)$ са диференциалните инварианти съответно на уравненията (2) и (3), ще разгледаме следните четири:

1. Трансформацията

(T1) $$y(x)=|x|^{1-\gamma}\,\eta(x),$$

която преобразува уравнението (2) в уравнението

(H1) $$H(\alpha-\gamma+1,\ \beta-\gamma+1,\ 2-\gamma;\ \eta,\ x)=0.$$

2. Трансформацията

(T2) $$y(x)=|x-1|^{\gamma-\alpha-\beta}\,\eta(x),$$

която преобразува уравнението (2) в уравнението

(H2) $$H(\gamma-\alpha,\ \gamma-\beta,\ \gamma;\ \eta,\ x)=0.$$

3. Трансформацията

(T3) $$\xi=1/x,\quad y(x)=|x|^{-\alpha}\,\eta(\xi),$$

която преобразува уравнението (2) в уравнението

(H3) $$H(\alpha,\ \alpha-\gamma+1,\ \alpha-\beta+1;\ \eta,\ \xi)=0.$$

4. Трансформацията

(T4) $$\xi=x/(x-1),\ y(x)=|x-1|^{-\alpha}\,\eta(\xi),$$

която преобразува уравнението (2) в уравнението

(H4) $$H(\alpha,\ \gamma-\beta,\ \gamma;\ \eta,\ \xi)=0.$$

Познати са и други H-трансформации, интеграли на уравнението (12) очевидно е например, че произведението на две H-трансформации е пак H-трансформация и е решение на уравнението (12), понеже цитираното по-горе условие за трансформачна зависимост между две линейни хомогенни диференциални уравнения от втори ред е не само достатъчно, но и необходимо. Оказва се обаче, че известните като решения на уравнението (12) H-трансформации образуват крайна група, чиито елементи могат да се получат като произведения на трансформациите T1—T4; последните от своя страна са в този смисъл независими помежду си.

Към H-трансформациите се причислява и трансформацията

(T5) $$\eta(x)=\frac{d^n y(x)}{dx^n}\qquad (n+1\in N)$$

където N означава множеството на естествените числа; тя преобразува уравнението (2) в уравнението

(H5) $$H(\alpha+n,\ \beta+n,\ \gamma+n;\ \eta,\ x)=0.$$

Трансформацията (T5) се различава от трансформациите T1—T4 по това че бидейки диференциално преобразование, не може да се получи като квадратура на уравнението (12) за уравненията (2) и (3).

Нека Г означава групата на трансформациите, които се получават от T1—T5 чрез последователното им прилагане, а I да означава множеството на целите числа.

Докато трансформациите T1, T2 и T5 запазват областите на независимата променлива, трансформациите T3 и T4 ги променят, както следва T3 преобразува $|x|<1$ в $|\xi|>1$ и $|x|>1$ в $|\xi|<1$, а T4 преобразува

$|x|<1$ в $\xi<1/2$ и $|x|>1$ съответно в $1/2<\xi<1$ за $x<-1$ и в $\xi>1$ за $x>1$: с други думи, T4 преобразува $x<1$ в $\xi<1$ и $x>1$ в $\xi>1$.

В резултат на всичко казано получаваме табл. 1.

Таблица 1

				$\eta(\xi)$	ξ
T0	α	β	γ	$y(x)$	x
T1	$\alpha-\gamma+1$	$\beta-\gamma+1$	$2-\gamma$	$\lvert x\rvert^{\gamma-1}y(x)$	x
T2	$\gamma-\alpha$	$\gamma-\beta$	γ	$\lvert x-1\rvert^{\alpha+\beta-\gamma}y(x)$	x
T3	α	$\alpha-\gamma+1$	$\alpha-\beta+1$	$\lvert x\rvert^{\alpha}y(x)$	$\frac{1}{x}$
T4	α	$\gamma-\beta$	γ	$\lvert x-1\rvert^{\alpha}y(x)$	$\frac{x}{x-1}$
T5 (n)	$\alpha+n$	$\beta+n$	$\gamma+n$	$y^{(n)}(x)$	x

H-*точка* ще наричаме наредената тройка (α, β, γ) от стойности на параметрите на хипергеометричното диференциално уравнение (2). Докато на всяка H-точка съответствува напълно определено уравнение (2), обратното не е вярно: на всяко хипергеометрично уравнение (2) съответствуват двете H-точки (α, β, γ) и (β, α, γ) поради симетричната роля на параметрите α и β: тези две H-точки ще наричаме *симетрични* една на друга. Ако параметърът γ зависи от α и β, симетричността на тези два параметъра се проявява по по-комплициран начин. Нека е дадено хипергеометричното диференциално уравнение

$$H(\alpha, \beta, \varphi(\alpha, \beta); y, x)=0, \tag{18}$$

което е еквивалентно на уравнението

$$H(\beta, \alpha, \varphi(\alpha, \beta); y, x)=0. \tag{19}$$

При $\alpha'=\beta$, $\beta'=\alpha$ уравнението (19) става

$$H(\alpha', \beta', \varphi(\beta', \alpha'); y, x)=0, \tag{20}$$

или като се върнем отново към буквите α и β вместо α' и β',

$$H(\alpha, \beta, \varphi(\beta, \alpha); y, x)=0. \tag{21}$$

Уравнението (21) се различава от уравнението (18) по това, че в израза за параметъра γ ролите на буквите α и β са разменени. Хипергеометрич-

ните уравнения от вида (18) и (21), както и съответните им H-точки ще наричаме за краткост *дупликати*.

Хипергеометричното диференциално уравнение (1) се удовлетворява в интервала $(-1, 1)$ от хипергеометричния ред

$$F(\alpha, \beta, \gamma; x) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\binom{\alpha+\nu-1}{\nu}\binom{\beta+\nu-1}{\nu}}{\binom{\gamma+\nu-1}{\nu}} x^{\nu}, \tag{22}$$

който няма смисъл за $\gamma = -n$ при $n+1 \in N$, освен ако α или β е равно на $-m$ при $m \in N$ и $m < n$. Редът (22) е сходящ в целия единичен кръг $|z| \leq 1$ с изключение на точката $z = 1$ при

$$0 \leq \mathrm{Re}\,(\alpha+\beta-\gamma) < 1 \tag{23}$$

и на $z = -1$ при

$$\mathrm{Re}\,(\alpha+\beta-\gamma) < 0. \tag{24}$$

При

$$1 \leq \mathrm{Re}\,(\alpha+\beta-\gamma) \tag{25}$$

редът е разходящ за всяко $z \neq 0$.

Ако C_1 и C_2 означават произволни константи, множеството на интегралите на уравнението (1) в интервала $(0, 1)$ се задава, както следва:

а) при $\gamma \notin I$ с

$$C_1 F(\alpha, \beta, \gamma; x) + C_2 x^{1-\gamma} F(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, 2-\gamma; x); \tag{26}$$

б) при $\gamma = -p$ $(p+2 \in N)$ с

$$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \tag{27}$$

където

$$y_1(x) = x^{p+1} F(\alpha+p+1, \beta+p+1, 2+p; x) \tag{28}$$

и

$$y_2(x) = \lim_{\gamma \to -p} \left\{ F(\alpha, \beta, \gamma; x) - \frac{\lambda_\gamma}{\gamma+p} x^{1-\gamma} F(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, 2-\gamma; x) \right\} \quad (p \geq 0), \tag{29}$$

$$y_2(x) = \lim_{\gamma \to 1} \frac{1}{\gamma-1} \left\{ F(\alpha, \beta, \gamma; x) - x^{1-\gamma} F(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, 2-\gamma; x) \right\} \quad (p = -1), \tag{30}$$

$$\lambda_\gamma = \begin{cases} \binom{\alpha+p}{p+1} \dfrac{\beta(\beta+1)\cdots(\beta+p)}{\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+p-1)} & (p \geq 1), \\ \alpha\beta & (p = 0), \\ 1 & (p = -1); \end{cases} \tag{31}$$

в) при $\gamma = p$ $(p-1 \in N)$, както в случая б), като върху уравнението (2) се извърши трансформацията T2.

Понеже трансформацията T3 преобразува $x > 1$ в $0 < \xi < 1$, а трансформацията T4 преобразува $x < 0$ в $0 < \xi < 1$, направеното по-горе ограничение $0 < x < 1$ не е съществено.

Чрез хипергеометричния ред (22) напълно се решава въпросът за интегрирането на хипергеометричното диференциално уравнение (1) в произволна Н-точка. В общия случай интегралите на (1) не могат да се представят в затворена форма. Но в редица случаи на конкретни стойности на параметрите α, β и γ на (1) или на връзки между тях съществуват квадратури на това уравнение. Следващите бележки от принципно естество биха могли да послужат за въвеждане на известна класификация на квадратурите на хипергеометричното уравнение.

Нека най-напред един от параметрите α или β на уравнението (1) има такава стойност, че хипергеометричният ред (22) да се редуцира до полином. За параметъра α например това условие е равносилно с $1-\alpha \in N$, т. е. с

$$\alpha = 1-n \qquad (n \in N). \tag{32}$$

При (32) въпросният полином е

$$H_n(x) = F(1-n, \beta, \gamma; x) = 1 + \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{\binom{\nu-n}{\nu}\binom{\beta+\nu-1}{\nu}}{\binom{\gamma+\nu-1}{\nu}} x^\nu \tag{33}$$

и той удовлетворява уравнението

$$H(1-n, \beta, \gamma; y, x) = 0 \qquad (n \in N) \tag{34}$$

тъждествено спрямо x. Следователно общият интеграл на (34) може да се изрази чрез квадратура. Такава квадратура на хипергеометричното диференциално уравнение (1) ще наричаме *тривиална*.

Да предположим, че уравнението (1) допуща тривиална квадратура в дадена Н-точка. Ако приложим върху него трансформациите от Г, ще получим трансформирани на (1) уравнения в съответно трансформираните Н-точки. Понеже общият интеграл на уравнението (1) е познат като тривиална квадратура, могат да бъдат намерени и общите интеграли на получените по описания начин трансформирани уравнения на (1). Такива квадратури на хипергеометричното диференциално уравнение (1) ще наричаме *почти тривиални*. Очевидно дефиницията на почти тривиалните квадратури на (1) съществено зависи от групата Г на известните Н-трансформации на (1). Тази дефиниция следва естествено и задължително да се обобщи с намирането на нови, непринадлежащи на старата група Г Н-трансформации. С други думи, съвкупността на Н-точките с почти тривиални квадратури се разширява при намиране на нови Н-трансформации. Това определя важността на трансформациите от Г.

Ако хипергеометричното диференциално уравнение (1) притежава квадратура, която не е почти тривиална, наричаме я *нетривиална*. Дефиницията на нетривиалните квадратури на уравнението (1) очевидно също зависи от групата Г на Н-трансформациите, като евентуално след разширяване на Г с нови Н-трансформации една нетривиална преди това квадратура може да се окаже почти тривиална. По-долу се показва, че хипергеометричното диференциално уравнение (1) притежава нетривиални квадратури.

Нека сега уравнението (1) допуща нетривиална квадратура в някоя H-точка. Ако приложим върху (1) трансформациите от Г, ще получим трансформирани на (1) хипергеометрични уравнения, които също притежават нетривиални квадратури в трансформираните на изходната H-точка. Естествено е всичките тези квадратури на (1) да не се считат за същевено различни. Ето защо такива квадратури ще отличаваме, като ги наричаме H-*идентични* нетривиални квадратури на хипергеометричното диференциално уравнение.

За да намерим почти тривиалните квадратури на уравнението (1), изхождаме от уравнението (34) с частен интеграл (33). Познаването на последния позволява да се намери и общият интеграл

$$(35)\qquad y(x)=H_n(x)\left(C_1+C_2\int H_n^{-2}(x)\,|x|^{-\gamma}\,|x-1|^{\gamma+n-\beta-2}\,dx\right)$$

на уравнението (34). Прилагаме върху (34) трансформацията T1. След очевидни пресмятания се получава уравнението

$$(36)\qquad H(\alpha,\ \beta,\ \alpha+n;\ \ y,\ x)=0 \qquad (n\in N)$$

с общ интеграл

$$(37)\qquad y(x)=I_n(x)\,|x|^{1-n-\alpha}\left(C_1+C_2\int \overline{I_n^{-2}(x)\,|x|}^{\,\alpha-2+n}\,|x-1|^{n-1-\beta}\,dx\right),$$

където

$$(38)\qquad I_n(x)=1+\sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{\binom{\nu-n}{\nu}\binom{\beta-\alpha+\nu-n}{\nu}}{\binom{1+\nu-n-\alpha}{\nu}}x^{\nu},$$

Сега прилагаме върху уравнението (34) трансформацията T2. Получаваме хипергеометричното уравнение

$$(39)\qquad H(\alpha,\ \beta,\ \alpha+1-n;\ \ y,\ x)=0 \qquad (n\in N)$$

с общ интеграл

$$(40)\qquad y(x)=K_n(x)\,|x-1|^{1-n-\beta}\left(C_1+C_2\int K_n^{-2}(x)\,|x|^{n-1-\alpha}\,|x-1|^{n-\beta-2}\,dx\right),$$

където

$$(41)\qquad K_n(x)=1+\sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{\binom{\nu-n}{\nu}\binom{\alpha-\beta+\nu-n}{\nu}}{\binom{\alpha+\nu-n}{\nu}}x^{\nu}.$$

Прилагаме трансформацията T2 върху уравнението (36). Получаваме хипергеометричното уравнение

$$(42)\qquad H(n,\ \beta,\ \gamma;\ y,\ x)=0 \qquad (n\in N)$$

с общ интеграл

$$(43)\quad y(x)=L_n(x)\,|x|^{1-\gamma}\,|x-1|^{\gamma-\beta-n}\left(C_1+C_2\int L_n^{-2}(x)\,|x|^{\gamma-2}\,|x-1|^{n-1-\gamma+\beta}dx\right),$$

където

$$(44)\qquad L_n(x)=1+\sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{\binom{\nu-n}{\nu}\binom{\nu-\beta}{\nu}}{\binom{1+\nu-\gamma}{\nu}}x^{\nu}.$$

Лесно се установява с непосредствена проверка, че с помощта на трансформациите от Г не се получават от (34) други хипергеометрични уравнения освен (36), (39) и (42). При това поради естеството на въпроса симетричните и дупликатните уравнения не се считат за съществено различни.

Уравненията (34) и (42) могат да се запишат общо във вида

$$(45)\qquad H(n,\ \beta,\ \gamma;\ y,\ x)=0 \qquad (n\in I),$$

а уравненията (35) и (39) — във вида

$$(46)\qquad H(\alpha,\ \beta,\ \alpha+n;\ y,\ x)=0 \qquad (n\in I).$$

Следователно хипергеометричното диференциално уравнение (1) допуща интегриране с почти тривиални квадратури в случаите 1 и 2 от табл. 2.

Таблица 2

$(m,\ n\in I)$

	α	β	γ
1	n	β	γ
2	α	β	$\alpha+n$
3	α	$m+n-\alpha$	$n+\frac{1}{2}$
4	α	$\alpha-m+\frac{1}{2}$	$n+\frac{1}{2}$
5	α	$\alpha-n+\frac{1}{2}$	$2\alpha-m-n+1$

Ще установим, че хипергеометричното уравнение (1) допуща нетривиални квадратури в случаите 3, 4 и 5 от табл. 2 и ще намерим съответните интеграли. Това може да се извърши по няколко начина [1, 2], но този, който излагаме по-долу, води може би най-непосредствено до целта.

Както е известно [7], при

(47) $$f(x)>0$$

трансформацията

(48) $$\xi=\int f^{a}(x)\,dx,\quad y(x)=\eta(\xi)$$

преобразува уравнението

(49) $$y''-a\frac{f'(x)}{f(x)}\,y'+b\,f^{2a}(x)\,y=0$$

в

(50) $$(\eta''+b\,\eta)\,f^{2a}(x)=0,$$

т. е. в

(51) $$\eta''+b\,\eta=0.$$

За хипергеометричното диференциално уравнение

(52) $$H\left(\alpha,\ -\alpha,\frac{1}{2};\ y,\ x\right)=0$$

е в сила

(53) $$a=-1/2$$

и

(54) $$b=-\alpha^2,\quad f(x)=x(x-1)$$

при

(55) $$x<0$$

и

(56) $$1<x,$$

а

(57) $$b=\alpha^2,\ f(x)=x(1-x)$$

при

(58) $$0<x<1.$$

От (48) и (53)—(57) следва

(59) $$\xi=\begin{cases}\ln\left|x-\frac{1}{2}+\sqrt{x(x-1)}\right| & \text{при (55) и (56),}\\ \arcsin(2x-1) & \text{при (58).}\end{cases}$$

На първото равенство (59) очевидно може да се даде видът

(60) $$\xi=\varepsilon\ln\left(\sqrt{\varepsilon\,x}+\sqrt{\varepsilon\,(x-1)}\right)$$

при

(61) $$\varepsilon=\begin{cases}1 & \text{при (56),}\\ -1 & \text{при (55).}\end{cases}$$

От (51)—(58) следва

$$\eta(\xi)=\begin{cases} C_1 \operatorname{sh}\alpha\xi+C_2 \operatorname{ch}\alpha\xi & \text{при (55) и (56)},\\ C_1 \sin\alpha\xi+C_2\cos\alpha\xi & \text{при (58)},\end{cases} \tag{62}$$

следователно общият интеграл на уравнението (52) е

$$y(x)=\begin{cases} C_1\left(\sqrt{|x|}+\sqrt{|x-1|}\right)^{2\alpha}+C_2\left(\sqrt{|x|}+\sqrt{|x-1|}\right)^{-2\alpha} & \text{при (55) и (56)},\\ C_1 \sin(\alpha \arcsin(2x-1))+C_2\cos(\alpha\arcsin(2x-1)) & \text{при (58)}.\end{cases} \tag{63}$$

Нека

$$t=2x-1. \tag{64}$$

Тогава

$$1<|t| \tag{65}$$

при (55) и (56), а

$$|t|<1 \tag{66}$$

при (58).

Сега на общия интеграл (63) на уравнението (52) може да се даде видът

$$y(x)=\begin{cases} C_1(|t|+\sqrt{t^2-1})^{\alpha}+C_2(|t|+\sqrt{t^2-1})^{-\alpha} & \text{при (55) и (56)},\\ C_1 \sin(\alpha\arcsin t)+C_2\cos(\alpha\arcsin t) & \text{при (58)}.\end{cases} \tag{67}$$

Ако се положи

$$F_1(t,\ \alpha)=C_1(|t|+\sqrt{t^2-1})^{\alpha}+C_2(|t|+\sqrt{t^2-1})^{-\alpha} \tag{68}$$

при (65) и

$$F_2(t,\ \alpha)=C_1\sin(\alpha\arcsin t)+C_2\cos(\alpha\arcsin t) \tag{69}$$

при (66), се получава общият интеграл на хипергеометричното диференциално уравнение (52):

$$y(x)=\begin{cases} F_1(t,\ \alpha) & \text{при (55) и (56)},\\ F_2(t,\ \alpha) & \text{при (58)},\end{cases} \tag{70}$$

където е положено (64) и (68), (69).

Трансформацията T5 (n) $(n\in N)$, приложена върху уравнението (52), води до следния резултат:

Общият интеграл на хипергеометричното диференциално уравнение

$$H(\alpha,\ 2n-\alpha,\ n+1/2;\ y,\ x)=0 \qquad (n\in N) \tag{71}$$

е

$$y(x)=\begin{cases} \dfrac{d^n F_1(t,\ \alpha-n)}{dt^n} & \text{за (55) и (56)},\\[2ex] \dfrac{d^n F_2(t,\ \alpha-n)}{dt^n} & \text{за (58)},\end{cases} \tag{72}$$

където е положено (64) и (68), (69).

Нека

(73) $$t=(2-x)/x.$$

Тогава е в сила (65) при

(74) $$x<1$$

и (66) при

(75) $$1<x.$$

Сега трансформацията T3, приложена върху уравнението (71), води до следния резултат:

Общият интеграл на хипергеометричното диференциално уравнение

(76) $$H\left(\alpha,\ \alpha-n+\frac{1}{2},\ 2\alpha-2n+1;\ y,\ x\right)=0 \qquad (n\in N)$$

е

77) $$y(x)=|x|^{-\alpha}\begin{cases}\dfrac{d^n F_1(t,\ \alpha-n)}{dt^n} & \text{при (74)},\\[2ex] \dfrac{d^n F_2(t,\ \alpha-n)}{dt^n} & \text{при (75)},\end{cases}$$

където е положено (73) и (68), (69).

Трансформацията T5 $(m-n)$ $(m-n+1\in N)$, приложена върху уравнението (76), води до следния резултат:

Общият интеграл на хипергеометричното диференциално уравнение

(78) $$H\left(\alpha,\ \alpha-n+\frac{1}{2},\ 2\alpha-m-n+1;\ y,\ x\right)=0 \quad (n\in N,\ m-n+1\in N)$$

е

(79) $$y(x)=\begin{cases}\dfrac{d^{m-n}}{dx^{m-n}}\left(|x|^{m-n-\alpha}\dfrac{d^n}{dt^n}F_1(t,\ \alpha-m)\right) & \text{при (74)},\\[2ex] \dfrac{d^{m-n}}{dx^{m-n}}\left(|x|^{m-n-\alpha}\dfrac{d^n}{dt^n}F_2(t,\ \alpha-m)\right) & \text{при (75)},\end{cases}$$

където е положено (73) и (68), (69).

Трансформацията T3, приложена върху уравнението (78), води до следния резултат:

Общият интеграл на хипергеометричното диференциално уравнение

(80) $$H(\alpha,\ m+n-\alpha,\ n+1/2;\ y,\ x)=0 \quad (n\in N,\ m-n+1\in N)$$

е

(81) $$y(x)=|x|^{-\alpha}\begin{cases}\left(x^2\dfrac{d}{dx}\right)^{m-n}\left(|x|^{\alpha+n-m}\dfrac{d^n}{dt^n}F_1(t,\ \alpha-m)\right) & \text{при (55) и (56)},\\[2ex] \left(x^2\dfrac{d}{dx}\right)^{m-n}\left(|x|^{\alpha+n-m}\dfrac{d^n}{dt^n}F_2(t,\ \alpha-m)\right) & \text{при (58)},\end{cases}$$

където е положено (64) и (68), (69).

Нека

(82) $$t=\frac{x+1}{x-1}.$$

Тогава е в сила (65) при

(83) $$0<x$$

и (66) при (55).

Сега трансформацията Т4, приложена върху уравнението (71) с m вместо n, води до следния резултат:

Общият интеграл на хипергеометричното диференциално уравнение

(84) $$H\left(\alpha,\ \alpha-m+\frac{1}{2},\ m+\frac{1}{2};y,\ x\right)=0 \qquad (m\in N)$$

е

(85) $$y(x)=|x-1|^{-\alpha}\begin{cases}\dfrac{d^m F_1(t,\ \alpha-m)}{dt^m} & \text{при (83)},\\[2ex] \dfrac{d^m F_2(t,\ \alpha-m)}{dt^m} & \text{при (55)},\end{cases}$$

където е положено (82) и (68), (69).

Трансформацията Т5 $(n-m)$ $(n-m\in N)$, приложена върху уравнението (84), води до следния резултат:

Общият интеграл на хипергеометричното диференциално уравнение

(86) $$H\left(\alpha,\ \alpha-m+\frac{1}{2},\ n+\frac{1}{2};\ y,\ x\right)=0 \qquad (m\in N,\ n-m\in N)$$

е

(87) $$y(x)=\begin{cases}\dfrac{d^{n-m}}{dx^{n-m}}\left(|x-1|^{n-m-\alpha}\dfrac{d^m}{dt^m}F_1(t,\ \alpha-n)\right) & \text{при (83)},\\[2ex] \dfrac{d^{n-m}}{dx^{n-m}}\left(|x-1|^{n-m-\alpha}\dfrac{d^m}{dt^m}F_2(t,\ \alpha-n)\right) & \text{при (55)},\end{cases}$$

където е положено (82) и (68), (69).

Трансформацията Т4, приложена върху уравнението (86), води до следния резултат:

Общият интеграл на хипергеометричното диференциално уравнение

(88) $$H\left(\alpha,\ m+n-\alpha,\ n+\frac{1}{2};\ y,\ x\right)=0 \qquad (m\in N,\ n-m\in N)$$

е

(89) $$y(x)=|x-1|^{-\alpha}\left((x-1)\frac{d}{dx}\right)^{n-m}\left(|x-1|^{\alpha+m-n}\frac{d^m}{dt^m}\begin{cases}F_1(t,\ \alpha-n)) \\ \text{при (55) и (56)}\\ F_2(t,\ \alpha-n)) \\ \text{при (58)},\end{cases}\right.$$

където е положено (64) и (68), (69).

Уравненията (80) и (88) могат да се запишат общо така:

$$(90)\qquad H\left(\alpha,\ m+n-\alpha,\ n+\frac{1}{2};\ y,\ x\right)=0 \qquad (m\in N,\ n\in N).$$

Наистина нека $m\in N$ и $n\in N$. Тогава или $m\geqq n$, или $n>m$. В първия случай е в сила $m-n+1\in N$ и $n\in N$, т. е. получава се уравнението (80). Във втория случай е в сила $n-m\in N$ и $m\in N$, т. е. получава се уравнението (88).

Трансформацията T1, приложена върху уравнението (80), води до следния резултат:

Общият интеграл на хипергеометричното диференциално уравнение

$$(91)\qquad H\left(\alpha,\ m+(1-n)-\alpha,\ (1-n)+\frac{1}{2};\ y,\ x\right)=0 \qquad (n\in N,\ m-n+1\in N)$$

е

$$(92)\ y(x)=|x|^{-\alpha}\left(x^2\frac{d}{dx}\right)^{m-n}\left(|x|^{\alpha+2n-m-1/2}\frac{d^n}{dt^n}\begin{cases}F_1\left(t,\ \alpha+n-m-\frac{1}{2}\right) & \text{при (55) и (56),}\\ F_2\left(t,\ \alpha+n-m-\frac{1}{2}\right) & \text{при (58),}\end{cases}\right.$$

където е положено (64) и (68), (69).

Трансформацията T1, приложена върху уравнението (88), води до следния резултат:

Общият интеграл на хипергеометричното диференциално уравнение

$$(93)\qquad H\left(\alpha,\ m+(1-n)-\alpha,\ (1-n)+\frac{1}{2};\ y,\ x\right)=0 \qquad (m\in N,\ n-m\in N)$$

е

$$(94)\ y(x)=|x|^{n-1/2}|x-1|^{1/2-\alpha-n}\left((x-1)^2\frac{d}{dx}\right)^{n-m}\left(|x-1|^{\alpha+m-1/2}\frac{d^m}{dt^m}\begin{cases}F_1(t,\alpha-1/2) & \text{при (55) и (56),}\\ F_2(t,\alpha-1/2) & \text{при (58),}\end{cases}\right.$$

където е положено (64) и (68), (69).

Уравненията (91) и (93) могат да се запишат общо във вида

$$(95)\qquad H\left(\alpha,\ m+(1-n)-\alpha,\ (1-n)+\frac{1}{2};\ y,\ x\right)=0 \qquad (m\in N,\ n\in N),$$

а уравненията (90) и (95) — във вида

$$(96)\qquad H\left(\alpha,\ m+n-\alpha,\ n+\frac{1}{2};\ y,\ x\right)=0 \qquad (m\in N,\ n\in I).$$

Трансформацията T2, приложена върху уравнението (80), води до следния резултат:

Общият интеграл на хипергеометричното диференциално уравнение

$$(97)\qquad H\left(\alpha,\ (1-m)+n-\alpha,\ n+\frac{1}{2};\ y,\ x\right)=0 \qquad (n\in N,\ m-n+1\in N)$$

е

(98) $$y(x)=|x-1|^{m-1/2}|x|^{\alpha-n-1/2}\left(x^2\frac{d}{dx}\right)^{m-n}\left(|x|^{2n+1/2-m-\alpha}\frac{d^n}{dx^n}\begin{cases}F_1(t,\ n+1/2-m-\alpha)\\ \text{при (55), (56),}\\ F_2\left(t,\ n+1/2-m-\alpha\right)\\ \text{при (58),}\end{cases}\right)$$

където е положено (64) и (68), (69).

Трансформацията Т2, приложена върху уравнението (88), води до следния резултат:

Общият интеграл на хипергеометричното диференциално уравнение

(99) $$H\left(\alpha,\ (1-m)+n-\alpha,\ n+\frac{1}{2};\ y,x\right)=0 \qquad (m\in N,\ n-m\in N)$$

е

(100) $$y(x)=|x-1|^{\alpha-n-(1-m)}\left((x-1)^2\frac{d}{dx}\right)^{n-m}\left(|x-1|^{m+1/2-\alpha}\frac{d^m}{dt^m}\begin{cases}F_1(t,\ 1/2-\alpha))\\ \text{при (55) и (56),}\\ F_2(t,\ 1/2-\alpha)),\\ \text{при (58),}\end{cases}\right.$$

където е положено (64) и (68), (69).

Уравненията (97) и (99) могат да се запишат общо във вида

(101) $$H(\alpha,\ (1-m)+n-\alpha,\ n+1/2;\ y,\ x)=0 \qquad (m\in N,\ n\in N).$$

Трансформацията Т2, приложена върху уравненията (91), води до следния резултат:

Общият интеграл на хипергеометричното диференциално уравнение

(102) $$H\left(\alpha,\ (1-m)+(1-n)-\alpha,\ (1-n)+\frac{1}{2};\ y,\ x\right)=0 \quad (n\in N,\ m-n+1\in N)$$

е

(103) $$y(x)=|x-1|^{m-1/2}|x|^{\alpha-1/2-(1-n)}\left(x^2\frac{d}{dx}\right)^{m-n}\left(|x|^{n+(1-m)-\alpha}\frac{d^n}{dt^n}\begin{cases}F_1(t,\ 1-m-\alpha))\\ \text{при (55), (56),}\\ F_2(t,\ 1-m-\alpha))\\ \text{при (58),}\end{cases}\right.$$

където е положено (64) и (68), (69),

Трансформацията Т2, приложена върху уравнението (93), води до следния резултат:

Общият интеграл на хипергеометричното диференциално уравнение

(104) $$H\left(\alpha,\ (1-m)+(1-n)-\alpha,\ (1-n)+\frac{1}{2};\ y,\ x\right)=0 \qquad (m\in N,\ n-m\in N)$$

е

$$(105)\quad y(x)=|x-1|^{\alpha-1/2-(1-m)}|x|^{n-1/2}\left((x-1)^2\frac{d}{dx}\right)^{n-m}\left(|x-1|^{m+(1-n)-\alpha}\frac{d^m}{dt^m}\begin{cases}F_1(t,\ 1-n-\alpha))\\ \text{при (55) и (56),}\\ F_2(t,\ 1-n-\alpha))\\ \text{при (58),}\end{cases}\right.$$

където е положено (64) и (68), (69).

Уравненията (102) и (104) могат да се запишат общо във вида

$$(106)\qquad H\left(\alpha,\ (1-m)+(1-n)-\alpha,\ (1-n)+\frac{1}{2};\ y,\ x\right)=0\qquad (m\in N,\ n\in N).$$

Уравненията (101) и (106) могат да се запишат общо във вида

$$(107)\qquad H\left(\alpha,\ 1-m+n-\alpha,\ n+\frac{1}{2};\ y,x\right)=0\qquad (m\in N,\ n\in I).$$

Уравненията (96) и (107) могат да се запишат общо във вида

$$(108)\qquad H\left(\alpha,\ m+n-\alpha,\ n+\frac{1}{2};y,\ x\right)=0\qquad (m\in I,\ n\in I),$$

с което е доказана възможността хипергеометричното диференциално уравнение (1) да се интегрира с квадратури в случая 3 от табл. 2.

За да установим аналогична възможност в случая 4 от табл. 2, да приложим най-напред трансформацията T4 над уравнението (80). Така стигаме до следния резултат:

Общият интеграл на хипергеометричното диференциално уравнение

$$(109)\qquad H\left(\alpha,\ \alpha-m+\frac{1}{2},\ n+\frac{1}{2},\ y,\ x\right)=0\qquad (n\in N,\ m-n+1\in N$$

е

$$(110)\quad y(x)=x^{-\alpha}\left(x^2\frac{d}{dx}\right)^{m-n}\left(|x|^{\alpha+n-m}|x-1|^{m-n-\alpha}\frac{d^n}{dt^n}\begin{cases}F_1(t,\ \alpha-m))\\ \text{при (83),}\\ F_2(t,\ \alpha-m))\\ \text{при (55),}\end{cases}\right.$$

където е положено (82) и (68), (69).

Трансформацията T4, приложена върху уравнението (88), води до следния резултат:

Общият интеграл на хипергеометричното диференциално уравнение

$$(111)\qquad H\left(\alpha,\ \alpha-m+\frac{1}{2},\ n+\frac{1}{2};\ y,\ x\right)=0\qquad (m\in N,\ n-m\in N)$$

е

$$(112)\qquad y(x)=\frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}}\left(|x-1|^{n-m-\alpha}\frac{d^m}{dt^m}\begin{cases}F_1(t,\ \alpha-n))\ \text{при (83)}\\ F_2(t,\ \alpha-n))\ \text{при (55),}\end{cases}\right.$$

където е положено (82) и (68), (69).

Уравненията (109) и (111) могат да се запишат общо във вида

$$(113)\qquad H\left(\alpha,\ \alpha-m+\frac{1}{2},\ n+\frac{1}{2};\ y,x\right)=0\qquad (m\in N,\ n\in N).$$

Трансформацията T4, приложена върху уравнението (91), води до следния резултат:

Общият интеграл на хипергеометричното диференциално уравнение

$$(114)\quad H\left(\alpha,\ \alpha-m+\frac{1}{2},\ (1-n)+\frac{1}{2};\ y,\ x\right)=0 \qquad (n\in N,\ m-n+1\in N)$$

е

$$(115)\quad y(x)=|x|^{-\alpha}\left(x^2\frac{d}{dx}\right)^{m-n}\left(|x|^{\alpha+2n-m-1/2}\,|x-1|^{m+1/2-2n-\alpha}\,\frac{d^n}{dt^n}\left\{\begin{array}{l} F_1\left(t,\ \alpha+n-m-\frac{1}{2}\right) \\ \text{при (83)}, \\ F_2\left(t,\ \alpha+n-m-\frac{1}{2}\right) \\ \text{при (55)}, \end{array}\right.\right)$$

където е положено (82) и (68), (69).

Трансформацията T4, приложена върху уравнението (93), води до следния резултат:

Общият интеграл на хипергеометричното диференциално уравнение

$$(116)\quad H\left(\alpha,\ \alpha-m+\frac{1}{2},\ (1-n)+\frac{1}{2};\ y,\ x\right)=0 \qquad (m\in N,\ n-m\in N)$$

е

$$(117)\quad y(x)=|x|^{n-1/2}\frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}}\left(|x-1|^{1/2-m-\alpha}\,\frac{d^m}{dt^m}\left\{\begin{array}{l} F_1\left(t,\ \alpha-\frac{1}{2}\right) \text{ при (83)}, \\ F_2\left(t,\ \alpha-\frac{1}{2}\right) \text{ при (55)}, \end{array}\right.\right)$$

където е положено (82) и (68), (69).

Уравненията (114) и (116) могат да се запишат общо във вида

$$(118)\quad H\left(\alpha,\ \alpha-m+\frac{1}{2},\ (1-n)+\frac{1}{2};\ y,\ x\right)=0 \qquad (m\in N,\ n\in N).$$

Уравненията (113) и (118) могат да се запишат общо във вида

$$(119)\quad H\left(\alpha,\ \alpha-m+\frac{1}{2},\ n+\frac{1}{2};\ y,\ x\right)=0 \qquad (m\in N,\ n\in I).$$

Трансформацията T4, приложена върху уравнението (97), води до следния резултат:

Общият интеграл на хипергеометричното диференциално уравнение

$$(120)\quad H\left(\alpha,\ \alpha-(1-m)+\frac{1}{2},\ n+\frac{1}{2};\ y,\ x\right)=0 \qquad (n\in N,\ m-n+1\in N)$$

е

$$(121)\qquad y(x)=|x|^{\alpha-n-1/2}|x-1|^{n+(1-m)-2\alpha}\left(x^2\frac{d}{dx}\right)^{m-n}$$

$$\times\left(|x|^{2n+1/2-m-\alpha}|x-1|^{m+\alpha-2n-1/2}\frac{d^n}{dt^n}\begin{cases}F_1\left(t,\ n+\frac{1}{2}-m-\alpha\right) & \text{при (83)},\\ F_2\left(t,\ n+\frac{1}{2}-m-\alpha\right) & \text{при (55)},\end{cases}\right.$$

където е положено (82) и 68), (69).

Трансформацията T4, приложена върху уравнението (99), води до следния резултат:

Общият интеграл на хипергеометричното диференциално уравнение

$$(122)\qquad H\left(\alpha,\ \alpha-(1-m)+\frac{1}{2},\ n+\frac{1}{2};\ y,\ x\right)=0\quad (m\in N,\ n-m\in N)$$

е

$$(123)\quad y(x)=|x-1|^{n+(1-m)-2\alpha}\frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}}\left(|x-1|^{\alpha-m-1/2}\frac{d^m}{dt^m}\begin{cases}F_1\left(t,\ \frac{1}{2}-\alpha\right) & \text{при (83)},\\ F_2\left(t,\ \frac{1}{2}-\alpha\right) & \text{при (55)},\end{cases}\right.$$

където е положено (82) и (68), (69).

Уравненията (120) и (122) могат да се запишат общо във вида

$$(124)\qquad H\left(\alpha,\ \alpha-(1-m)+\frac{1}{2},\ n+\frac{1}{2};\ y,\ x\right)=0\quad (m\in N,\ n\in N).$$

Трансформацията T4, приложена върху уравнението (102), води до следния резултат:

Общият интеграл на хипергеометричното диференциално уравнение

$$(125)\qquad H\left(\alpha,\ \alpha-(1-m)+\frac{1}{2},\ (1-n)+\frac{1}{2};\ y,\ x\right)=0\quad (n\in N,\ m-n+1\in N)$$

е

$$(126)\qquad y(x)=|x-1|^{(1-m)+(1-n)-2\alpha}|x|^{\alpha-1/2-(1-n)}\left(x^2\frac{d}{dx}\right)^{m-n}$$

$$\times\left(|x|^{n+(1-m)-\alpha}|x-1|^{\alpha-n-(1-m)}\frac{d^n}{dt^n}\begin{cases}F_1(t,\ 1-m-\alpha) & \text{при (83)},\\ F_2(t,\ 1-m-\alpha) & \text{при (55)},\end{cases}\right.$$

където е положено (82) и (68), (69).

Трансформацията T4, приложена върху уравнението (104), води до следния резултат:

Общият интеграл на хипергеометричното диференциално уравнение

$$(127)\qquad H\left(\alpha,\ \alpha-(1-m)+\frac{1}{2},\ (1-n)+\frac{1}{2};\ y,\ x\right)=0\qquad (m\in N,\ n-m\in N)$$

е

$$(128)\qquad y(x)=|x|^{n-1/2}|x-1|^{(1-m)+(1-n)-2\alpha}\frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}}(|x-1|^{\alpha-m-(1-n)}$$

$$\times\frac{d^m}{dt^m}\begin{cases}F_1(t,\ 1-n-\alpha)) & \text{при (83).}\\ F_2(t,\ 1-n-\alpha)) & \text{при (55),}\end{cases}$$

където е положено (82) и (68), (69).

Уравненията (125) и (127) могат да се запишат общо във вида

$$(129)\qquad H\left(\alpha,\ \alpha-(1-m)+\frac{1}{2},\ (1-n)+\frac{1}{2};\ y,x\right)=0\quad (m\in N,\ n\in N),$$

Уравненията (124) и (129) могат да се запишат общо във вида

$$(130)\qquad H\left(\alpha,\ \alpha-(1-m)+\frac{1}{2},\ n+\frac{1}{2};\ y,x\right)=0\quad (m\in N,\ n\in I).$$

Уравненията (119) и (130) могат да се запишат общо във вида

$$(131)\qquad H\left(\alpha,\ \alpha-m+\frac{1}{2},\ n+\frac{1}{2};\ y,x\right)=0\quad (m\in I,\ n\in I),$$

с което е доказана възможността хипергеометричното диференциално уравнение (1) да се интегрира с квадратури и в случая 4 от табл. 2.

За да установим най-после аналогична възможност и в случая 5 от табл. 2, да приложим най-напред трансформацията Т3 над уравнението (80). Така стигаме до следния резултат:

Общият интеграл на хипергеометричното диференциално уравнение

$$(132)\qquad H\left(\alpha,\ \alpha-n+\frac{1}{2},\ 2\alpha-m-n+1;y,x\right)=0\quad (n\in N,\ m-n+1\in N)$$

е

$$(133)\qquad y(x)=\frac{d^{m-n}}{dx^{m-n}}(|x|^{m-n-\alpha}\frac{d^n}{dt^n}\begin{cases}F_1(t,\ \alpha-m)) & \text{при (74),}\\ F_2(t,\ \alpha-m)) & \text{при (75),}\end{cases}$$

където е положено (73) и (68), (69).

Трансформацията Т3, приложена върху уравнението (88), води до следния резултат:

Общият интеграл на хипергеометричното диференциално уравнение

$$(134)\qquad H\left(\alpha,\ \alpha-n+\frac{1}{2},\ 2\alpha-m-n+1;\ y,\ x\right)=0\quad (m\in N,\ n-m\in N)$$

е

$$(135)\qquad y(x)=|1-x|^{-\alpha}\left((x-1)^2\frac{d}{dx}\right)^{n-m}(|x-1|^{\alpha+m-n}|x|^{n-\alpha-m}$$

$$\times\frac{d^m}{dt^m}\begin{cases}F_1(t,\ \alpha-n)) & \text{при (74),}\\ F_2(t,\ \alpha-n)) & \text{при (75),}\end{cases}$$

където е положено (73) и (68), (69).

Уравненията (132) и (134) могат да се запишат общо във вида

$$H\left(\alpha,\ \alpha-n+\frac{1}{2},\ 2\alpha-m-n+1;\ y,\ x\right)=0 \quad (m\in N,\ n\in N). \tag{136}$$

Трансформацията T3, приложена върху уравнението (91), води до следния резултат:

Общият интеграл на хипергеометричното диференциално уравнение

$$H\left((\alpha,\ \alpha-(1-n)+\frac{1}{2},\ 2\alpha-m-(1-n)+1;\ y,\ x\right)=0 (n\in N,\ m-n+1\in N) \tag{137}$$

е

$$y(x)=\frac{d^{m-n}}{dx^{m-n}}\left(|x|^{m+1/2-2n-\alpha}\frac{d^n}{dt^n}\begin{cases}F_1\left(t,\ \alpha+n-m-\frac{1}{2}\right)\right) & \text{при (74)},\\ F_2\left(t,\ \alpha+n-m-\frac{1}{2}\right)\right) & \text{при (75)},\end{cases} \tag{138}$$

където е положено (73) и (68), (69).

Трансформацията T3, приложена върху уравнението (93), води до следния резултат:

Общият интеграл на хипергеометричното диференциално уравнение

$$H\left(\alpha,\ \alpha-(1-n)+\frac{1}{2},\ 2\alpha-m-(1-n)+1;\ y,\ x\right)=0 \quad (m\in N,\ n-m\in H) \tag{139}$$

е

$$y(x)=|x-1|^{1/2-\alpha-n}\left((x-1)^2\frac{d}{dx}\right)^{n-m}\left(|x-1|^{\alpha+m-1/2}|x|^{1/2-\alpha-m}\right| \tag{140}$$

$$\times\frac{d^m}{dt^m}\begin{cases}F_1\left(t,\ \alpha-\frac{1}{2}\right)\right) & \text{при (74)},\\ F_2\left(t,\ \alpha-\frac{1}{2}\right)\right) & \text{при (75)},\end{cases}$$

където е положено (73) и (68), (69).

Уравненията (137) и (139) могат да се запишат общо във вида

$$H\left(\alpha,\ \alpha-(1-n)+\frac{1}{2},\ 2\alpha-m-(1-n)+1;\ y,\ x\right)=0 \quad (m\in N,\ n\in N). \tag{141}$$

Трансформацията T3, приложена върху уравнението (97), води до следния резултат:

Общият интеграл на хипергеометричното диференциално уравнение

$$H\left(\alpha,\ \alpha-n+\frac{1}{2},\ 2\alpha-(1-m)-n+1;\ y,\ x\right)=0 \quad (n\in N,\ m-n+1\in N) \tag{142}$$

е

$$y(x)=|x-1|^{m-1/2}|x|^{1-m+n-2\alpha}\frac{d^{m-n}}{dx^{m-n}}\left(|x|^{\alpha+m-2n-1/2}\right. \tag{143}$$

$$\times\frac{d^n}{dt^n}\begin{cases}F_1\left(t, n+\frac{1}{2}-m-\alpha\right)\right) \text{ при } (74),\\ F_2\left(t, n+\frac{1}{2}-m-\alpha\right)\right) \text{ при } (75),\end{cases}$$

където е положено (73) и (68), (69).

Трансформацията Т3, приложена върху уравнението (99), води до следния резултат:

Общият интеграл на хипергеометричното диференциално уравнение

$$(144)\qquad H\left(\alpha, \alpha-n+\frac{1}{2}, 2\alpha-(1-m)-n+1; y, x\right)=0 \quad (m\in N, n-m\in N)$$

е

$$(145)\quad y(x)=|x-1|^{\alpha-n-(1-m)}|x|^{n+(1-m)-2\alpha}\left((x-1)^2\frac{d}{dx}\right)^{n-m}\left(|x-1|^{m+1/2-\alpha}\right.$$

$$\times|x|^{\alpha-m-1/2}\frac{d^m}{dt^m}\begin{cases}F_1\left(t, \frac{1}{2}-\alpha\right)\right) \text{ при } (74),\\ F_2\left(t, \frac{1}{2}-\alpha\right)\right) \text{ при } (75),\end{cases}$$

където е положено (73) и (68), (69).

Уравненията (142) и (144) могат да се запишат общо във вида

$$(146)\qquad H\left(\alpha, \alpha-n+\frac{1}{2}, 2\alpha-(1-m)-n+1; y, x\right)=0 \quad (m\in N, n\in N).$$

Уравненията (136) и (141) могат да се запишат общо във вида

$$(147)\qquad H\left(\alpha, \alpha-n+\frac{1}{2}, 2\alpha-m-n+1; y; x\right)=0 \quad (m\in N, n\in I).$$

Трансформацията Т3, приложена върху уравнението (102), води до следния резултат:

Общият интеграл на хипергеометричното диференциално уравнение

$$(148)\qquad H\left(\alpha, \alpha-(1-n)+\frac{1}{2}, 2\alpha-(1-m)-(1-n)+1; y, x\right)=0$$

$$(n\in N, m-n+1\in N)$$

е

$$(149)\qquad y(x)=|x|^{(1-m)+(1-n)-2\alpha}|x-1|^{m-1/2}\frac{d^{m-n}}{dx^{m-n}}\left(|x|^{\alpha-n-(1-m)}\right.$$

$$\times\frac{d^n}{dt^n}\begin{cases}F_1(t, 1-m-\alpha)) \text{ при } (74),\\ F_2(t, 1-m-\alpha)) \text{ при } (75),\end{cases}$$

където е положено (73) и (68), (69).

Трансформацията Т3, приложена върху уравнението (104), води до следния резултат:

Таблица 3

$(n \in N,\ m-n+1 \in N,\ \mu = m-n,\ \nu = n)$

	β	γ	p	q	r	s	D	a
3	$m+n-\alpha$	$n+\frac{1}{2}$	$-\alpha$	0	$\alpha+n-m$	0	$x^2\frac{d}{dx}$	$\alpha-m$
	$m+(1-n)-\alpha$	$(1-n)+\frac{1}{2}$	$-\alpha$	0	$\alpha+2n-m-\frac{1}{2}$	0	$x^2\frac{d}{dx}$	$\alpha+n-m-\frac{1}{2}$
	$(1-m)+n-\alpha$	$n+\frac{1}{2}$	$\alpha-n-\frac{1}{2}$	$m-\frac{1}{2}$	$2n+\frac{1}{2}-m-\alpha$	0	$x^2\frac{d}{dx}$	$n+\frac{1}{2}-m-\alpha$
	$(1-m)+(1-n)-\alpha$	$(1-n)+\frac{1}{2}$	$\alpha-(1-n)-\frac{1}{2}$	$m-\frac{1}{2}$	$n+(1-m)-\alpha$	0	$x^2\frac{d}{dx}$	$1-m-\alpha$
4	$\alpha-m+\frac{1}{2}$	$n+\frac{1}{2}$	$-\alpha$	0	$\alpha+n-m$	$m-n-\alpha$	$x^2\frac{d}{dx}$	$\alpha-m$
	$\alpha-m+\frac{1}{2}$	$(1-n)+\frac{1}{2}$	$-\alpha$	0	$\alpha+2n-m-\frac{1}{2}$	$m+\frac{1}{2}-2n-\alpha$	$x^2\frac{d}{dx}$	$\alpha+n-m-\frac{1}{2}$
	$\alpha-(1-m)+\frac{1}{2}$	$n+\frac{1}{2}$	$\alpha-n-\frac{1}{2}$	$n+(1-m)-2\alpha$	$2n+\frac{1}{2}-m-\alpha$	$m+\alpha-2n-\frac{1}{2}$	$x^2\frac{d}{dx}$	$n+\frac{1}{2}-m-\alpha$
	$\alpha-(1-m)+\frac{1}{2}$	$(1-n)+\frac{1}{2}$	$\alpha-(1-n)-\frac{1}{2}$	$(1-m)+(1-n)-2\alpha$	$n+(1-m)-\alpha$	$\alpha-n-(1-m)$	$x^2\frac{d}{dx}$	$1-m-\alpha$
5	$\alpha-n+\frac{1}{2}$	$2\alpha-m-n+1$	0	0	$m-n-\alpha$	0	$\frac{d}{dx}$	$\alpha-m$
	$\alpha-(1-n)+\frac{1}{2}$	$2\alpha-m-(1-n)+1$	0	0	$m+\frac{1}{2}-2n-\alpha$	0	$\frac{d}{dx}$	$\alpha+n-m-\frac{1}{2}$
	$\alpha-n+\frac{1}{2}$	$2\alpha-(1-m)-n+1$	$(1-m)+n-2\alpha$	$m-\frac{1}{2}$	$\alpha+m-2n-\frac{1}{2}$	0	$\frac{d}{dx}$	$n+\frac{1}{2}-m-\alpha$
	$\alpha-(1-n)+\frac{1}{2}$	$2\alpha-(1-m)-(1-n)+1$	$(1-m)+(1-n)-2\alpha$	$m-\frac{1}{2}$	$\alpha-n-(1-m)$	0	$\frac{d}{dx}$	$1-m-\alpha$

Таблица 4

$m \in N,\ n-m \in N,\ \mu=n-m,\ \nu=m)$

	β	γ	p	q	r	s	D	a
3	$m+n-\alpha$	$n+\frac{1}{2}$	0	$-\alpha$	0	$\alpha+m-n$	$(x-1)^2\frac{d}{dx}$	$\alpha-n$
	$m+(1-n)-\alpha$	$(1-n)+\frac{1}{2}$	$n-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}-\alpha-m$	0	$\alpha+m-\frac{1}{2}$	$(x-1)^2\frac{d}{dx}$	$\alpha-\frac{1}{2}$
	$(1-m)+n-\alpha$	$n+\frac{1}{2}$	0	$\alpha-n-(1-m)$	0	$m+\frac{1}{2}-\alpha$	$(x-1)^2\frac{d}{dx}$	$\frac{1}{2}-\alpha$
	$(1-m)+(1-n)-\alpha$	$(1-n)+\frac{1}{2}$	$n-\frac{1}{2}$	$\alpha-\frac{1}{2}-(1-m)$	0	$m+(1-n)-\alpha$	$(x-1)^2\frac{d}{dx}$	$1-n-\alpha$
4	$\alpha-m+\frac{1}{2}$	$n+\frac{1}{2}$	0	0	0	$n-m-\alpha$	$\frac{d}{dx}$	$\alpha-n$
	$\alpha-m+\frac{1}{2}$	$(1-n)+\frac{1}{2}$	$n-\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}-m-\alpha$	$\frac{d}{dx}$	$\alpha-\frac{1}{2}$
	$\alpha-(1-m)+\frac{1}{2}$	$n+\frac{1}{2}$	0	$n+(1-m)-2\alpha$	0	$\alpha-m-\frac{1}{2}$	$\frac{d}{dx}$	$\frac{1}{2}-\alpha$
	$\alpha-(1-m)+\frac{1}{2}$	$(1-n)+\frac{1}{2}$	$n-\frac{1}{2}$	$(1-m)+(1-n)-2\alpha$	0	$\alpha-m-(1-n)$	$\frac{d}{dx}$	$1-n-\alpha$
5	$\alpha-n+\frac{1}{2}$	$2\alpha-m-n+1$	0	$-\alpha$	$n-\alpha-m$	$\alpha+m-n$	$(x-1)^2\frac{d}{dx}$	$\alpha-n$
	$\alpha-(1-n)+\frac{1}{2}$	$2\alpha-m-(1-n)+1$	0	$\frac{1}{2}-\alpha-n$	$\frac{1}{2}-\alpha-m$	$\alpha+m-\frac{1}{2}$	$(x-1)^2\frac{d}{dx}$	$\alpha-\frac{1}{2}$
	$\alpha-n+\frac{1}{2}$	$2\alpha-(1-m)-n+1$	$n+(1-m)-2\alpha$	$\alpha-n-(1-m)$	$\alpha-m-\frac{1}{2}$	$m+\frac{1}{2}-\alpha$	$(x-1)^2\frac{d}{dx}$	$\frac{1}{2}-\alpha$
	$\alpha-(1-n)+\frac{1}{2}$	$2\alpha-(1-m)-(1-n)+1$	$(1-m)+(1-n)-2\alpha$	$\alpha-\frac{1}{2}-(1-m)$	$\alpha-m-(1-n)$	$m+(1-n)-\alpha$	$(x-1)^2\frac{d}{dx}$	$1-n-\alpha$

Общият интеграл на хипергеометричното диференциално уравнение

$$(150)\qquad H\left(\alpha,\ \alpha-(1-n)+\frac{1}{2},\ 2\alpha-(1-m)-(1-n)+1\ ;\ y,\ x\right)=0$$
$$(m\in N,\ n-m\in N)$$

е

$$(151)\qquad y(x)=x^{2-m-n-2\alpha}\,|x-1|^{\alpha-1/2-(1-m)}\left((x-1)^2\frac{d}{dt}\right)^{n-m}(|x|^{\alpha-m-(1-n}$$
$$\times|x-1|^{m+(1-n)-\alpha}\frac{d^m}{dt^m}\begin{cases}F_1(t,\ 1-n-\alpha)) & \text{при (74)},\\ F_2(t,\ 1-n-\alpha)) & \text{при (75)},\end{cases}$$

където е положено (73) и (68), (69).

Уравненията (148) и (150) могат да се запишат общо във вида

$$(152)\qquad H\left(\alpha,\ \alpha-(1-n)+\frac{1}{2};\ 2\alpha-(1-m)-(1-n)+1;\ y,\ x\right)=0\quad (m\in N,\ n\in N).$$

Уравненията (146) и (152) могат да се запишат общо във вида

$$(153)\qquad H\left(\alpha,\ \alpha-n+\frac{1}{2},\ 2\alpha-(1-m)-n+1;\ y,\ x\right)=0\quad (m\in N,\ n\in I).$$

Уравненията (147) и (153) могат да се запишат общо във вида

$$(154)\qquad H\left(\alpha;\ \alpha-n+\frac{1}{2},\ 2\alpha-m-n+1;\ y,\ x\right)=0\qquad (m\in I,\ n\in I),$$

с което е доказана възможността хипергеометричното диференциално уравнение (1) да се интегрира с квадратури и в случая 5 от табл. 2.

Като обобщим случаите 3—5 от табл. 2, в резюме можем да изкажем следното твърдение:

Общият интеграл на хипергеометричното диференциално уравнение (1) при връзките между параметрите α, β и γ, съответстващи на случаите 3—5 от табл. 2, е

$$(155)\qquad y(x)=|x|^p\,|x-1|^q D^\mu\left(|x|^r\,|x-1|^s\frac{d^\nu}{dt^\nu}\begin{cases}F_1(t,\ \alpha)),\\ F_2(t,\ \alpha)),\end{cases}\right.$$

където p, q, r, s, a и D се пресмятат по табл. 3 в случаите $n\in N$ и $m-n+1\in N$, а по табл. 4 — в случаите $m\in N$ и $m-n\in N$; функциите F_1 и F_2 се определят съгласно табл. 5 според стойностите на x съответно на случаите 3—5 от табл. 2.

Таблица 5

	F_1	F_2
3	$x<0,\ 1<x$	$0<x<1$
4	$0<x$	$x<0$
5	$x<1$	$1<x$

Чрез непосредствена проверка се установява, че останалите трансформации от Г, приложени към случаите 3—5 от табл. 2, не водят до нови Н-точки, в които хипергеометричното диференциално уравнение да допуща нетривиални квадратури.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чобанов, Ив., Паскалев, Г.: Върху хипергеометричното диференциално уравнение. Год. Соф. унив., Физ.-мат. фак., **50** (1955/56), кн. 1, Мат. и физ., ч. I, 33—65.
2. Чобанов, Ив., Паскалев, Г.: Други квадратури на хипергеометричното диференциално уравнение. Год. Соф. унив., Физ.-мат. фак., **50** (1955/56), кн. 1, Мат. и физ., ч. II, 1—31.
3. Чобанов, Ив., Паскалев, Г.: Един метод на Л. Чакалов и хипергеометричното диференциално уравнение. Год. Соф. унив., Физ.-мат. фак., **50** (1955/56), кн. 1, Мат. и физ., ч. II, 43—58.
4. Чобанов, Ив., Паскалев, Г.: Върху сумата на хипергеометричния ред. Год. Соф. унив., Физ.-мат. фак., **51** (1956/57), кн. 1, Мат. и физ., ч. II, 1—5.
5. Диамандиев, В., Паскалев, Г., Чобанов, Ив.: Друго приложение на метода на Л. Чакалов върху хипергеометричното диференциално уравнение. Год. Соф. унив., Физ.-мат. фак., **51** (1956/57), кн. 1, Мат. и физ., ч. II, 79—90.
6. Паскалев, Г., Чобанов, Ив.: Върху хипергеометричното диференциално уравнение и др. Год. Соф. унив., Физ.-мат. фак., **52** (1957/58), кн. 1, Математика, 97—132.
7. Kamke, E.: Differentialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen. Bd. I. Leipzig, 1951.

Постъпила на 14. XII. 1976 г.

ON THE CLOSED FORM SOLUTIONS OF THE HYPERGEOMETRIC DIFFERENTIAL EQUATION

G. Paskalev, I. Chobanov

(SUMMARY)

As it is well known, the transformations, denoted in the present paper by T1—T5, when applied on the hypergeometric differential equation (1) or (2), for the sake ot brevity, transform it in the hypergeometric differential equations, denoted by H1—H5 respectively; the relations between the values of the parameters α, β and γ of the initial hypergeometric differential equation (1) and the transformed equations H1 — H5 are given in Table 1. In this article it is shown how by applying T1 — T5 one obtains the cases of relations between α, β and γ, given in Table 2 (where m and n denote arbitrary integers), in which cases the hypergeometric differential equation (1) admits closed form solutions. The general integrals of (1) in the cases 3 — 5 of Table 2 are given by (155), where the values of p, q, r, s, a and D are calculated from Table 3 in the case, when n and $m-n+1$ are natural numbers, and by the aid of Table 4 in the case, when m and $m-n$ are natural numbers, and the domains of the functions F_1 and F_2, defined by (68) and (69) respectively, are given in Table 5, corresponding to the cases 3—5 of Table 2.