НОВО ДОКАЗАТЕЛСТВО И ОБОБЩЕНИЕ НА ТЕОРЕМАТА НА ТУРАН ЗА БРОЯ НА РЪБОВЕТЕ НА ЕДИН ГРАФ

Никола Мартинов

Туран [1], [2] е доказал следната

Теорема 1. Ако графът G с n върха и e ръба не съдържа (като подграф) пълен граф с $s+1$ върха, то

$$e \leqq \frac{(n^2-r^2)(s-1)}{2s} + \binom{r}{2}, \tag{1}$$

където $n \equiv r \pmod s$, $0 \leqq r < s$. Равенство в (1) се достига точно когато върховете на G могат да се разделят на s класа по такъв начин, че r от тях да имат по $\frac{n-r}{s}+1$ върха, останалите $s-r$ да имат по $\frac{(n-r)}{s}$ върха и два върха да са съседни точно когато принадлежат на различни класове.

Тук, съгласувано с [3], ще дадем подробно изложение на едно обобщение и ново доказателство на теорема 1.

В областта на естествените числа въвеждаме целочислената функция

$$\tau(x, y) = \frac{(x^2-z^2)(y-1)}{2y} + \binom{z}{2}, \tag{2}$$

където $x \equiv z \pmod y$, $0 \leqq z < y$.

Лема 1. Ако n, n_1 и $s > 1$ са естествени числа, то

$$\tau(n, s) - \tau(n_1, s-1) \geqq (n-n_1)\, n_1.$$

Доказателство. Ще въведем следните означения:

$$\begin{gathered} n \equiv r \pmod s,\ 0 \leqq r < s;\ n_1 \equiv r_1 \pmod{s-1},\ 0 \leqq r_1 < s-1, \\ \alpha = \left| n_1 - \frac{n(s-1)}{s} \right|,\ \Delta = \tau(n, s) - \tau(n_1, s-1) - (n-n_1)\, n_1. \end{gathered} \tag{3}$$

Съгласно (2) след съответни преобразувания получаваме

$$\Delta = \frac{1}{2s(s-1)} \left(\alpha^2 s^2 + (s-1-r_1)\, r_1 s - (s-r)\, r\, (s-1)\right). \tag{4}$$

Ако $\alpha = 0$, от (3) следва $r = 0$, което съгласно (4) дава $\Delta \geqq 0$. Поради това по-нататък ще предполагаме $\alpha \neq 0$, т. е. $n_1 \neq n(s-1)/s$.

I. Нека $n_1 > n(s-1)/s$. Тогава съгласно (3) имаме $\alpha s = n_1 s - n(s-1)$. Следователно

(5′) $$\alpha s = ms + r,$$

(6′) $$\alpha s = m_1(s-1) + r_1,$$

където m и m_1 са цели неотрицателни числа. От (4) и (5′) получаваме

(4′) $$\Delta = \frac{1}{2(s-1)}\left((m^2-r)s + 2mr + r^2 + r + (s-1-r_1)r_1\right),$$

откъдето следва, че $\Delta \geqq 0$ при $m^2 \geqq r$. Поради това предполагаме

(7′) $$r > m^2.$$

От (5′) и (6′) получаваме

$$ms < ms + r = m_1(s-1) + r_1 \leqq m_1(s-1) + s - 2 < (m_1+1)s.$$

Следователно

(8′) $$m < m_1 + 1.$$

Освен това, като вземем под внимание и (7′), по-точно, че $m \leqq m^2 < r \leqq s-1$, получаваме

$$m_1(s-1) \leqq m_1(s-1) + r_1 = ms + r < (m+2)(s-1).$$

Следователно

(9′) $$m_1 < m + 2.$$

Съгласно (8′) и (9′) за m_1 са възможни само случаите $m_1 = m$ и $m_1 = m+1$.

I1. Нека $m_1 = m$. От (5′) и (6′) получаваме

$$r_1 = r + m.$$

Тогава

$$(s-1-r_1)r_1 = sm + sz - m - m^2 - r - r^2 - 2mr$$

и от (4′) намираме

$$\Delta = \binom{m+1}{2} \geqq 0.$$

I2. Нека $m_1 = m+1$. Сега от (5′) и (6′) получаваме

$$r_1 = r + m + 1 - s.$$

Оттук намираме

$$(s-1-r_1)r_1 = 3sr + 3sm + 4s - 3r - 2mr - r^2 - 3m - m^2 - 2s^2 - 2$$

и като заместим в (4′), получаваме

$$\Delta = \frac{m^2 + m + 2r_1}{2} \geqq 0.$$

С това случаят I е изчерпан.

II. Нека $n_1 < n(s-1)/s$. В този случай съгласно (3) $\alpha s = n(s-1) - n_1 s$. Следователно

$$\alpha s = ms - r, \tag{5''}$$

$$\alpha s = m_1(s-1) - r_1, \tag{6''}$$

където m и m_1 са цели положителни числа. От (4) и (5″) получаваме

$$\Delta = \frac{1}{2(s-1)}((m^2-r)s - 2mr + r^2 + r + (s-1-r_1)r_1). \tag{4''}$$

Ако $m^2 - r \geqq 0$, то $\Delta \geqq 0$, защото $(m^2-r)s - 2mr + r^2 + r \geqq (m^2-r)r - 2mr + r^2 + r = (m-1)^2 r \geqq 0$. Поради това по-нататък предполагаме, че $r > m^2$.

От (5″) и (6″) получаваме

$$ms \leqq ms - r - 1 + s = m_1(s-1) - r_1 - 1 + s < (m_1+1)s.$$

Следователно

$$m < m_1 + 1. \tag{8''}$$

Освен това, като вземем под внимание, че $m \leqq m^2 < r < s$, получаваме

$$m_1(s-1) \leqq m_1(s-1) - r_1 - 2 + s = ms - r - 2 + s \leqq (m+1)(s-1).$$

Следователно

$$m_1 \leqq m + 1. \tag{9''}$$

От (8″) и (9″) получаваме, че или $m_1 = m$, или $m_1 = m+1$. Ако $m_1 = m+1$, съгласно (5″) и (6″) $ms - r = (m+1)(s-1) - r_1$, т. е. $r_1 = s + r - m - 1 > s - 1$, което противоречи на (3). Следователно

$$m_1 = m.$$

От (5″) и (6″) получаваме

$$r_1 = r - m.$$

Тогава

$$(s-1-r_1)r_1 = sr + 2mr + m - r - r^2 - sm - m^2$$

и от (4) намираме

$$\Delta = \binom{m}{2} \geqq 0.$$

С това лемата е доказана. От нея непосредствено получаваме

Следствие 1. Функцията $\tau(x, y)$ расте заедно с y.

Ще приложим лема 1 в теория на графите. Ще разглеждаме неориентирани графи без възли и кратни ръбове и ще се придържаме към терминологията и означенията на Харари [4]. Така например с $V(G)$ и $X(G)$ ще означаваме множествата съответно на върховете и ръбовете, а с $\Delta(G)$ — максималната валентност на върховете на графа G. С K_s ще означаваме пълен граф с s върха, т. е. граф с s върха и $\binom{s}{2}$ ръба.

Нека s, p и $r<s$ са естествени числа. Ако върховете $V(G)$ на графа G могат да се разделят на s класа, така че r от тях да имат по $p+1$ върха, а останалите $s-r$ — по p върха и два върха да са съседни точно когато са от различни класове, то G ще наричаме s-цветен граф на Туран. (В този случай числата p и r се определят еднозначно от $|V(G)|$ и s, защото $|V(G)|=ps+r$.) Ако графът G с $|V(G)|=n$ е s-цветен граф на Туран, ще означаваме $G=T(n, s)$.

Да въведем рекурсивно умножение $m\Gamma$ на естественото число m с графа Γ по следния начин:

$$1\Gamma=\Gamma, \quad m\Gamma=(m-1)\Gamma+\Gamma.$$

Тогава

$$T(n, s)=r\,.\,\overline{K}_{p+1}+(s-r)\,\overline{K}_p, \tag{10}$$

където $n=sp+r$.

Лема 2. $|X(T(n, s))|=\tau(n, s)$.

Доказателство. Съгласно означенията от (10) нека $G_1=r\overline{K}_{p+1}$, $G_2=(s-r)\overline{K}_p$. Тогава

$$\begin{gathered} n_1=|V(G_1)|=r(p+1), \quad n_2=|V(G_2)|=(s-r)p, \quad n=n_1+n_2, \\ |X(G_1)|=\frac{(n_1-p-1)n_1}{2}, \quad |X(G_2)|=\frac{(n_2-p)n_2}{2}. \end{gathered} \tag{11}$$

От $T(n, s)=G_1+G_2$ следва

$$|X(T(n, s))|=|X(G_1)|+|X(G_2)|+n_1n_2.$$

Оттук, като използуваме (11), получаваме

$$|X(T(n, s))|=\frac{1}{2}(n^2-pn-n_1).$$

Но $p=\frac{n-r}{s}$ и $n_1=r(p+1)=\frac{r(p-r+s)}{2}$. Следователно

$$X(T(n, s))|=\frac{n^2(s-1)-(s-r)r}{2s}=\tau(n, s).$$

Теорема 2. Нека графът G с $|V(G)|=n$ има поне един породен подграф G_1 с $|V(G_1)|=\Delta(G)$, който не съдържа K_s. Тогава

I. $|X(G)|\leqq\tau(n, s)$.

II. Твърденията $G=T(n, s)$ и $|X(G)|=\tau(n, s)$ са еквивалентни.

Доказателство. Нека $d=\Delta(G)$. В общия случай, когато $d\neq0$, всеки подграф на G с d върха съдържа K_1 и следователно $s>1$. Ако $d=0$, макар да не се говори за граф с 0 върха, естествено е да се приеме $s=1$ и теорема 2 е изпълнена. Поради това по-нататък ще предполагаме $s>1$. Ще приложим индукция по броя n на върховете на G.

При $n=3$ непосредствено се проверява, че теорема 2 е изпълнена. От четирите графа (които имат по три върха) три са графите на Туран: $T(3, 1)$, $T(3, 2)$ и $T(3, 3)$, а четвъртият, който има един ръб, не е граф

на Туран; за него $d=1$, $s\geqq 2$ и е в сила строгото неравенство $|(X(G)<\tau(3, 2)$.

Приемаме, че $n>3$ и че теорема 2 е изпълнена за всеки граф Γ с $|V(\Gamma)|<n$. Ще докажем, че тя е в сила и за G.

I. Нека v е връх на G_1 с максимална валентност относно G_1, а G_2 е подграфът на G_1, породен от съседните на v върхове. Ако G_2 съдържа K_{s-1}, то G_1 ще съдържа $K_{s-1}+v=K_s$, което е изключено по условие. Следователно породеният подграф G_2 на G_1 с $|V(G_2)|=\Delta(G_1)$ не съдържа K_{s-1} и $|V(G_1)|=\Delta(G)<n$. Оттук съгласно индукционното предположение получаваме

$$|X(G_1)|\leqq\tau(d, s-1). \tag{12}$$

От друга страна, е изпълнено

$$|X(G)|\leqq|X(G_1)|+(n-d)d. \tag{13}$$

От (12), (13) и лема 1 получаваме

$$|X(G)|\leqq\tau(n, s).$$

II. От $G=T(n, s)$ съгласно лема 2 следва $|X(G)|=\tau(n, s)$.

Обратно, нека е изпълнено условието $|X(G)|=\tau(n, s)$. От него и лема 1 следва, че в (12) и (13) ще има равенства, т. е.

$$|X(G_1)|=\tau(d, s-1), \tag{14}$$

$$|X(G)|=|X(G_1)|+(n-d)d. \tag{15}$$

От (14), като вземем под внимание, че за G_1 е приложима теорема 2 получаваме

$$G_1=T(d, s-1). \tag{16}$$

От (15) лесно се съобразява, че всеки връх от $S_1=V(G_1)-V(G_1)$ има максималната степен d и че никои два върха от S_1 не са съседни. Следователно породеният от S_1 подграф е напълно несвързаният граф $\overline{K}_{n-d}$ и съгласно (16) е изпълнено

$$G=T(d, s-1)+\overline{K}_{n-d}. \tag{17}$$

От (17) следва, че G е пълен s-цветен граф. Остава да докажем, че всеки два класа едноцветни върхове се различават по броя на върховете си най-много с 1. Нека A и B са класове съответно с максимален и минимален брой върхове. Ще докажем

$$|A|-|B|\leqq 1. \tag{18}$$

Ако $s=2$, то $|A|=d$, $|B|=n-d$, $|X(G)|=d(n-d)$, $\tau(n, 2)\geqq(n^2-1)/4$ и следователно $(n-d)d\geqq(n^2-1)/4$. Оттук получаваме $2d-x\leqq 1$, т. е. (18).

Нека $s>2$. В този случай освен A и B G има поне още един клас C от едноцветни върхове. Нека $|C|=c$, а G' е подграфът на G, породен от върховете извън C.

От това, че G е пълен s-цветен граф, следва, че $d \geqq n-c$. Но $|A|+|B|+c \leqq n$. Следователно изпълнено е

$$|A|+|B| \leqq d, \tag{19}$$

като равенство се достига точно когато $s=3$ и $|B|=c$. Ако в (19) има строго неравенство, то поне един връх на G_1 е извън $A \cup B$ и можем да предполагаме, че той е от C. Ако в (19) има равенство, можем да разменяме ролите на B и C. Следователно без ограничение можем да предположим избора на класа C такъв, че

$$C \cap V(G_1) \neq \emptyset .$$

Тогава подграфът G_1' на G_1, породен от върховете извън C, не съдържа K_{s-1} и $|V(G_1')| \geqq d-c = \Delta(G')$. Като приложим първата част на теорема 2 за G', получаваме

$$|X(G')| \leqq \tau(n-c,\ s-1). \tag{20}$$

Освен това, като вземем под внимание, че C е клас едноцветни върхове на пълния s-цветен граф G, получаваме

$$|X(G)| = |X(G')| + c(n-c). \tag{21}$$

От (21) и условието $|X(G)| = \tau(n,\ s)$ съгласно лема 1 намираме

$$|X(G')| \geqq \tau(n-c,\ s-1),$$

което заедно с (20) дава

$$|X(G')| = \tau(n-c,\ s-1).$$

Оттук (и теорема 2, приложена за G') получаваме

$$G' = T(n-c,\ s-1).$$

Но A и B са класове едноцветни върхове и за G'. Следователно изпълнено е (18).

С това доказателството на теорема 2 е завършено

Следствие 2. Нека G е граф с $|V(G)|=n$ и $\Delta(G)=d$. Ако породен подграф G_0 с $|V(G_0)|=m$ не съдържа K_s, то

$$|X(G)| \leqq \tau(n,\ s'), \tag{22}$$

където $s' = \max(s,\ s+d-m)$. Равенство в (22) се достига точно когато $G = T(n,\ s')$.

Доказателство. Ако $m \geqq d$ (т. е. $s'=s$), като отстраним $m-d$ върха от G_0, ще получим породен подграф G_1 на G с d върха, който не съдържа $K_{s'}$; така следствието се привежда към теорема 2. Ако $m<d$ (т. е. $s'=s+d-m$), разглеждаме произволен породен подграф G_1 на G, който съдържа $V(G_0)$ и още $d-m$ върха. Щом G_0 не съдържа K_s, то G_1 не съдържа $K_{s+d-m} = K_{s'}$. Така и в този случай следствието се привежда към теорема 2.

Теоремите 1 и 2 имат едно и също заключение, което при теорема 1 се доказва при предположението

1°) графът G не съдържа K_{s+1}, а при теорема 2 — върху предположението

2°) графът G има поне един породен подграф G_1 с $|V(G_1)|=\Delta(G)$, който не съдържа K_s.

От 1° следва 2°. Наистина нека G не съдържа K_{s+1}, а $v \in V(G)$ и $\deg v=\Delta(G)$. Тогава подграфът G_1, породен от съседните на v върхове, не съдържа K_s, защото, ако G_1 съдържа K_s, то G ще съдържа $K_s+v=K_{s+1}$. Следователно изпълнено е 2°. Това означава, че с теорема 2 се дава ново доказателство на теоремата на Туран (теорема 1).

От 2° не следва 1°. Наистина нека G е звездата $K_{1,n-1}$. Тогава $\Delta(G)=n-1$ и $s=n$ е най-малката стойност на s, удовлетворяваща 1°. Обаче подграфът $G_1=G-v$ (където v е центърът на звездата $K_{1,n-1}$) не съдържа K_2, т. е. 2° се удовлетворява за всяко $s>1$. Следователно от 2° не следва 1°. Това означава, че теорема 2 е приложима за по-широк клас графи, отколкото теоремата на Туран.

ЛИТЕРАТУРА

1. Turán, P.: Eine Extremalaufgabe aus der Graphentheorie. Mat. Fiz. Lapok, **48** (1941) 436—452.
2. Turán, P.: On the theory of graphs. Colloq. Math., **3** (1954), 19—30.
3. Мартинов, Н.: О теореме Турана о числе ребер графа. Докл. БАН, **30**, 1977, №1, 479
4. Харари, Ф.: Теория графов. М., 1973.

Постъпила на 11. I. 1977 г.

A NEW PROOF AND GENERALIZATION OF THE TURÁN'S THEOREM ABOUT THE NUMBER OF THE EDGES OF A GRAPH

N. Martinov

(SUMMARY)

Let n and s be natural numbers and $n \equiv r \pmod s$, $0 \leq r < s$. We denote by $T(n, s)$ a graph, in which the vertices can be divided into s classes of which r contain $(n-r)/s+1$ vertices and the other $n-r$ contain $(n-r)/s$ vertices with two vertices adjacent if and only if they belong to different classes. Then for the number $\tau(n, s)$ of the edges of $T(n, s)$ we have

$$\tau(n, s)=\frac{(n^2-r^2)(s-1)}{2s}+\binom{r}{2}.$$

For the function τ it is proved the next

Lemma. If n, n_1 and $s>1$ are natural numbers, then

$$\tau(n, s)-\tau(n_1, s-1)\geqq(n-n_1)n_1.$$

Using that lemma the next theorem is proved by induction.

Theorem. Let the graph G with n vertices and e edges has at least one maximal subgraph with $\Delta(G)$ vertices, which does not contain K_s. Then

1. $e\leqq\tau(n, s)$.
2. The statements $G=T(n, s)$ and $e=\tau(n, s)$ are equivalent.