# ХАРАКТЕРИСТИКИ НА ЕДНОМЕРНО РАВНОМЕРНО НАПОРНО ТУРБУЛЕНТНО ДВИЖЕНИЕ В ЦИЛИНДРИЧНИ ТРЪБОПРОВОДИ

**Иван С. Иванов**

От уравненията на Навие — Стокс за вискозен флуид в интерпретация на Рейнолдс за изследване характеристиките на усредненото по време едномерно равномерно турбулентно движение на слабосвиваем флуид в цилиндрични тръбопроводи се получава уравнението

$$-\frac{r}{2}\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\frac{du_x}{dr}-\rho\overline{u'_x u'_r}=0, \tag{1}$$

където $u_x$ е усреднена по времето проекция на скоростта; $p$ е усреднено по времето налягане, $u'_x$ и $u'_r$ са пулсациите на скоростта, $\mu$ е динамичен коефициент на вискозността, $\rho$ — плътност на флуида, $x$ и $r$ са координатите на една произволна точка от сечението на флуида, перпендикулярно на оста на движението, съвпадаща с оста на тръбопровода.

Не е трудно да се докаже, че при усредненото по време установено равномерно турбулентно движение между градиента на налягането $\frac{\partial p}{\partial x}$ и тангенциалното напрежение $\tau$ съществува връзката

$$\tau=-\frac{\partial p}{\partial x}\frac{r}{2}.$$

Следователно уравнението (1) може да се напише във вида

$$\tau=-\mu\frac{du_x}{dr}+\rho\overline{u'_x u'_r}. \tag{2}$$

Формула (2) показва, че тангенциалното напрежение $\tau$ в коя да е точка на усредненото по време турбулентно движение е сбор от усредненото тангенциално напрежение по закона на Нютон $\mu\frac{du_x}{dr}$ и тангенциалното турбулентно напрежение $\rho\overline{u'_x u'_r}$. Точен аналитичен израз за значението на напреженията $\rho\overline{u'_x u'_r}$ засега не е намерен. Това затруднява използването на (2) за изчисляване на основните закономерности на усредненото по време равномерно турбулентно движение. В известна степен това затруднение е намалено, като на основата на съществуващите опитни данни за значението на $\overline{u'_x u'_r}$ по сечението на движението и на основата на някои предположения за същността и природата на турбулентното движение са предложени начини за определяне на турбулент-

ните напрежения; тези начини имат хипотетичен характер (хипотезата на Прандтл, на Карман, Колмогоров и др.).

На основата на хипотезата на Прандтл [1] с помощта на теорията на размерността може да се докаже, че при движение в цилиндрически тръби

$$\rho \overline{u'_x u'_r} = \chi^2 \rho (r-r_0)^2 \left(\frac{du_x}{dr}\right)^2, \tag{3}$$

където $r_0$ е радиус на тръбата, $\chi$ — някаква безразмерна константа.

При това предположение, като се замести (3) в (2), (2) приема вида

$$\tau = -\mu \frac{du_x}{dr} + \chi^2 \rho (r-r_0)^2 \left(\frac{du_x}{dr}\right)^2, \quad \text{или}$$

$$\frac{\tau}{\rho} = -\nu \frac{du_x}{dr} + \chi^2 (r-r_0)^2 \left(\frac{du_x}{dr}\right)^2. \tag{4}$$

В уравнението (4) напрежението $\tau$ при движение в цилиндрични тръбопроводи се изменя почти линейно, намалявайки от най-голямата стойност $\tau_{ст}$ на стената към нула в центъра на тръбопровода ($r=0$), т. е. $\tau = \tau_{ст} r/r_0$. При това положение, ако се положи $u_x = u$, (4) приема вида

$$\frac{\tau_{ст}}{\rho} \frac{r}{r_0} = -\nu \frac{du}{dr} + \chi^2 (r-r_0)^2 \left(\frac{du}{dr}\right)^2. \tag{5}$$

Това уравнение е нелинейно диференциално уравнение и за определяне на закона за разпределението на скоростта $u(r)$ може да бъде решено числово. За теоретични изследвания на съществуващите закономерности по дължината на турбулентното движение значително по-просто е да се приеме, че по сечението на целия поток тангенциалните напрежения имат постоянна стойност $\tau(r) = \tau_{ст} = \text{const}$. При това предположение уравнение (4) добива вида

$$V_*^2 + \frac{\nu}{r_0} \frac{du}{dy} - \chi^2 (y-1)^2 \left(\frac{du}{dy}\right)^2 = 0, \tag{6}$$

където $V_* = \sqrt{\tau_{ст}/\rho}$ е динамичната скорост, $y = r/r_0$ се изменя от нула (по оста на тръбопровода) до единица (по стената).

При приетите предположения уравнение (6) дава възможност да се намери законът за разпределението на скоростта $u(y)$ по сечението, като се взема пред вид влиянието както на молекулното триене по цялото сечение на потока, така и на турбулентните напрежения.

Ако (6) се разглежда като квадратно спрямо производната $\frac{du}{dy}$, то след решаването му ще се получи

$$\frac{du}{dy} = \frac{\frac{\nu}{r_0} \pm \sqrt{\left(\frac{\nu}{r_0}\right)^2 + 4\chi^2 (y-1)^2 V_*^2}}{2\chi^2 (y-1)^2}$$

или като се интегрира,

$$(7)\qquad u(y)=-\frac{\nu}{2r_0\chi^2(y-1)}\pm\frac{V_*}{\chi}\int\frac{\sqrt{\frac{1}{4\chi^2\mathrm{Re}_*^2}+(y-1)^2}}{(y-1)^2}\,dy,$$

където $\mathrm{Re}_*=r_0V_*/y$ е число на Рейнолдс по динамичната скорост.

Като се пресметне интегралът в (7), по физически съображения се изследва кой от знака пред него има реален смисъл и се направят някои преобразования, за скоростта $u(y)$ се получава

$$\frac{u(y)}{V_*}=\frac{2\mathrm{Re}_*(y-1)}{1+\sqrt{1+4\chi^2\mathrm{Re}_*^2(y-1)^2}}-\frac{1}{\chi}\ln\left|\frac{2\mathrm{Re}_*\chi(y-1)+\sqrt{1+4\chi^2\mathrm{Re}_*^2(y-1)^2}}{2\chi\,\mathrm{Re}_*}\right|+c.$$

От условието $u=0$ при $y=1$ за константата $c$ се намира

$$c=\frac{1}{\chi}\ln\left|\frac{1}{2\chi\,\mathrm{Re}_*}\right|.$$

Следователно за закона на разпределението на скоростта се получава

$$(8)\qquad \frac{u}{V_*}=\frac{2\mathrm{Re}_*(y-1)}{1+\sqrt{1+4\chi^2\mathrm{Re}_*^2(y-1)^2}}-\frac{1}{\chi}\ln\left|2\mathrm{Re}_*\chi(y-1)+\sqrt{1+4\chi^2\mathrm{Re}_*^2(y-1)^2}\right|.$$

От (8) при $y=0$ за максималната скорост по оста на тръбопровода се получава

$$(9)\qquad \frac{u_{\max}}{V_*}=\frac{2\mathrm{Re}_*}{1+\sqrt{1+4\chi^2\mathrm{Re}_*^2}}-\frac{1}{\chi}\ln\left|-2\mathrm{Re}_*\chi+\sqrt{1+4\chi^2\mathrm{Re}_*^2}\right|.$$

Ако от максималната скорост (9) се извади скоростта в коя да е точка по сечението (8), то за дефицита на скоростта $(u_{\max}-u)/V_*$ ще се получи изразът

$$(10)\qquad \frac{u_{\max}-u}{V_*}=\frac{-2\mathrm{Re}_*}{1+\sqrt{1+4\chi^2\mathrm{Re}_*^2}}-\frac{2\mathrm{Re}_*(y-1)}{1+\sqrt{1+4\chi^2\mathrm{Re}_*^2(y-1)^2}}$$
$$+\frac{1}{\chi}\ln\left|\frac{2\chi\,\mathrm{Re}_*(y-1)+\sqrt{1+4\chi^2\mathrm{Re}_*^2(y-1)^2}}{-2\chi\mathrm{Re}_*+\sqrt{1+4\chi^2\mathrm{Re}_*^2}}\right|.$$

Оттук за дефицита на скоростта се получава

$$(11)\qquad \frac{u_{\max}-u}{V_*}=f(y,\mathrm{Re}_*).$$

В литературата [1] и в досегашната практика [3] при пресмятане на турбулентните равномерни движения се приема, че дефицитът на скоростта не зависи от режимната характеристика, т. е. $(u_{\max}-u)/V_*=f_1(y)$, и е приет като универсален закон за разпределението на скоростта, приложим както за гладки, така и за хидравлически грапави тръби. Този закон на основата на опитни изследвания е бил посочен за първи път от Стентон [4] и потвърден от Прандтл и Карман, които са решили (2), без да държат сметка за влиянието на ламинарното триене върху характеристиките на потока [2]. Макар че приемливостта на закона

$$\frac{u_{max}-u}{V_*}=f_1(y) \tag{12}$$

се обуславя от опитните данни на Никуродзе [1, 2], този закон е приемлив само при големи стойности на Re. Това твърдение може да се докаже и на основата на израза за дефицита на скоростта (10). Ако се определи границата на (10) при $Re \to \infty$, ще се получи

$$\lim_{Re\to\infty}\frac{u_{max}-u}{V_*}=\begin{cases}-\frac{1}{\chi}\ln(y-1) & \text{при } y<1,\\ \infty & \text{при } y=1.\end{cases} \tag{13}$$

Следователно законът (12) е асимптотичен закон, частен случай на закона (11), и е приложим за много големи стойности на режимната характеристика Re. При много големи стойности на Re законът (8) приема вида на закона на Прандтл [2]. При това отклоненията са толкова по-малки, колкото са по-големи стойностите на Re. При $Re\to\infty$ двата закона дават еднакви резултати. При една и съща константа $\chi$ (по изследванията на Прандтл $\chi=0{,}4$) очевидно законът за разпределението на скоростта по сечението (8) съдържа в себе си като частен случай ($Re \to \infty$) закона на Прандтл.

Законът за разпределението на скоростта (8), получен на основата на полуемпиричната теория за определяне на турбулентното триене, създадена от Прандтл, позволява да се държи сметка за влиянието върху характеристиките на движенията не само на турбулентното триене, но и на ламинарното.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Шлихтинг, Г.: Теория пограничного слоя. М., Наука, 1974.
2. Прандтль, Л.: Гидроаэромеханика. М., ИЛ, 1949.
3. Шевалев, Ф. А.: Исследование основных гидравлических закономерностей турбулентного движения в трубах. М., Гос. изд. лит. по строительству и архитектуре, 1953.
4. Stanton, T. E., Pannel, J. R.: Similarity of motion in relation of the surface fraction of fluids. Phil. Trans. Roy. Soc. A 214, 199 (1914).

Постъпила на 13. I. 1977 г.

# CHARACTERISTICS OF ONE-DIMENSIONAL STEADY FLOW IN CYLINDRIC PIPES

I. S. Ivanov

## (SUMMARY)

On the base of Prandtl's semi-empirical theory a law of the velocity distribution and a law of the velocity deficit are found with molecular friction effect being taken into consideration.

Prandtl's relations are found to be a particular case of the new found relations (when $Re \to \infty$).