ЕДНО НЕОБХОДИМО И ДОСТАТЪЧНО УСЛОВИЕ ЗА ПРЕДСТАВИМОСТ НА АНАЛИТИЧНА ФУНКЦИЯ ЧРЕЗ РЕД ПО ФУНКЦИИТЕ НА ЛАГЕР ОТ ВТОРИ РОД

Петър Русев

Функциите на Лагер от втори род с параметър $\alpha > -1$ се дефинират в областта $\mathbf{C}-[0,+\infty)$ чрез равенствата

$$(1) \qquad M_n^{(\alpha)}(z) = -\int_0^\infty \frac{t^\alpha e^{-t} L_n^{(\alpha)}(t)}{t-z}\, dt \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\cdots),$$

където $\{L_n^{(\alpha)}(z)\}_{n=0}^\infty$ са полиномите на Лагер с параметър α. Като имаме пред вид, че за тези полиноми е налице формула от типа на Родриг, а именно $L_n^{(\alpha)}(z) = (n!)^{-1} z^{-\alpha} e^z \{z^{n+\alpha} e^{-z}\}^{(n)}$, от (1) чрез интегриране по части получаваме следното интегрално представяне на функциите на Лагер от втори род:

$$(2) \qquad M_n^{(\alpha)}(z) = -\int_0^\infty \frac{t^{n+\alpha} e^{-t}}{(t-z)^{n+1}}\, dt \quad (n=0,\ 1,\ 2,\cdots).$$

Да предположим, че $\operatorname{Re} z < 0$ и да означим с $l(z)$ лъча, изхождащ от началото и минаващ през точката $-z$. Като имаме пред вид (2), с помощта на интегралната теорема на Коши не е трудно да се убедим, че

$$M_n^{(\alpha)}(z) = -\int_{l(z)} \frac{\zeta^{n+\alpha} e^{-\zeta}}{(\zeta - z_n)^{n+1}}\, d\zeta.$$

Ако положим $\zeta = -zt\ (0 \leq t < +\infty)$, от горното равенство получаваме, че

$$(3) \qquad M_n^{(\alpha)}(z) = -(-z)^\alpha \int_0^\infty \frac{t^{n+\alpha} e^{zt}}{(1+t)^{n+1}}\, dt \ (n=0,\ 1,\ 2,\cdots).$$

В следващото изложение с помощта на (3) е получено едно необходимо и достатъчно условие за представимост на аналитична функция чрез ред по функциите на Лагер от втори род, т. е. чрез ред от вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n M_n^{(\alpha)}(z). \tag{4}$$

Преди всичко, както е указано примерно в [1, стр. 281], ако $0 \leqq \mu = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} (2\sqrt{n})^{-1} \ln |b_n| < +\infty$, областта на сходимост на реда (4) е $\Delta^*(\mu_0) = \{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Re}(-z)^{1/2} > \mu_0\}$. По-точно редът (4) е абсолютно равномерно и даже нормално сходящ върху всяко компактно подмножество на областта $\Delta^*(\mu_0)$ и е разходящ във всяка точка от областта $\{\mathbf{C} - \overline{\Delta^*(\mu_0)}\} - [0, +\infty)$.

Преди да формулираме главния резултат, ще установим едно помощно твърдение, за доказателството на което са необходими някои факти, отнасящи се до полиномите на Лагер. Обикновено полиномите $\{L_n^{(\alpha)}(z)\}$ се дефинират като (подходящо нормирана) ортогонална система полиноми върху лъча $[0, +\infty)$ с тегло $t^\alpha e^{-t}$ $(\alpha > -1)$. По-горе беше привлечена формулата на Родриг за тези полиномн, която може да бъде използувана за определението им, когато параметърът α е произволно комплексно число, отлично от $-1, -2, \ldots$. Най-сетне явният вид [2, (5.1.6)] на тези полиноми дава възможност те да бъдат определени и когато параметърът α е цяло отрицателно число. Нещо повече, в сила е равенството [2, (5.2.1)] $(k = 1, 2, 3, \ldots \quad n \geqq k)$

$$L_n^{(-k)}(z) = (-z)^k \frac{(n-k)!}{n!} L_{n-k}^{(k)}(z). \tag{5}$$

От (5) следва в частност, че $L_n^{(-1)}(z) = -zn^{-1} L_{n-1}^{(1)}(z)$ $(n \geqq 1)$. Тогава, като вземем пред вид релацията $-zL_{n-1}^{(\alpha+1)}(z) = nL_n^{(\alpha)}(z) - (n+\alpha) L_{n-1}^{(\alpha)}(z)$ [2, (5.1.14)], ще получим, че за $n \geqq 1$

$$L_n^{(-1)}(z) = L_n^{(0)}(z) - L_{n-1}^{(0)}(z). \tag{6}$$

Полиномите на Лагер с параметър $\alpha \neq -1, -2, \ldots$ се дефинират още и чрез пораждаща функция, а именно, ако $|\zeta| < 1$, в сила е равенството

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(\alpha)}(z) \zeta^n = (1-\zeta)^{-\alpha-1} \exp\left(-\frac{z\zeta}{1-\zeta}\right). \tag{7}$$

Ще се убедим сега, че горното представяне запазва своята валидност и при $\alpha = -1$, ако считаме, че $L_0^{(-1)}(z) = 1$. Наистина, като имаме пред вид (6) и (7), намираме, че

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(-1)}(z) \zeta^n = L_0^{(-1)}(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \{L_n^{(0)}(z) - L_{n-1}^{(0)}(z)\} \zeta^n \tag{8}$$

$$=(1-\zeta)\sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(0)}(z)\zeta^n = \exp\left(-\frac{z\zeta}{1-\zeta}\right).$$

Нека $\sigma \geqq 0$ и да означим с $G(\sigma)$ множеството на комплексните функции φ, аналитични в кръга $|\zeta|<1$ и такива, че каквото и да е $\varepsilon>0$,

$$\varphi(\zeta)=O\left(\exp\frac{(\sigma+\varepsilon)^2|\zeta|}{1-|\zeta|}\right). \tag{9}$$

Лема 1. За да принадлежи функцията $\varphi(\zeta)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n\zeta^n$ на $G(\sigma)$, е необходимо и достатъчно $\overline{\lim_{n\to+\infty}}(2\sqrt{n})^{-1}\ln|b_n|\leqq\sigma$.

Доказателство. Необходимостта на условието се установява със стандартни разсъждения, като се има пред вид интегралното представяне на коефициентите на един степенен ред чрез сумата му. За пълнота ще приведем съответния извод, който е почти идентичен с този от [3, стр. 151]. Преди всичко, каквото и да е $\varepsilon>0$, ако положим $r_n=1-(\sigma+\varepsilon)/\sqrt{n}$, $r_n^{-n}=O(\exp(\sigma+\varepsilon)\sqrt{n})$. Наистина $\ln r_n^{-n}=-n\ln\{1-(\sigma+\varepsilon)/\sqrt{n}\}=-n\{1-(\sigma+\varepsilon)/\sqrt{n}+O(n^{-1})\}=(\sigma+\varepsilon)\sqrt{n}+O(1)$. Тогава

$$|b_n| \leqq \frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta|=r_n}\frac{|\varphi(\zeta)|}{|\zeta|^{n+1}}|d\zeta|=O\left(r_n^{-n}\exp\frac{(\sigma+\varepsilon)^2 r_n}{1-r_n}\right)=O(\exp[2(\sigma+\varepsilon)]\sqrt{n})$$

и следователно $\overline{\lim_{n\to\infty}}(2\sqrt{n})^{-1}\ln|b_n|\leqq\sigma+\varepsilon$, каквото и да е $\varepsilon>0$.

Достатъчността на условието на лема 1 по всяка вероятност е също добре известно твърдение, но тъй като се затрудняваме да приведем съответен цитат, ще си позволим да изложим едно доказателство, което пряко ангажира изтъкнатите по-горе свойства на полиномите на Лагер и по-специално разложението (8).

Нека $\delta>0$ и да положим $\varphi_\delta(\xi)=\exp[\delta^2\zeta/(1-\zeta)]$. Като имаме пред вид (8), можем да заключим, че $\varphi_\delta(\zeta)=\sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(-1)}(-\delta^2)z^n$. Да обърнем внимание, че коефициентите на последния степенен ред са всички положителни, което следва почти непосредствено от определението на функцията $\varphi_\delta(\zeta)$. От зависимостта $L_n^{(-1)}(z)=-zn^{-1}L_{n-1}^{(1)}(z)$, която беше използувана по-горе, и от асимптотичната формула [2, (8.22.3)] за полиномите на Лагер следва, че за $n\geqq 2$

$$L_n^{(-1)}(-\delta^2)=\frac{\delta^{1/2}}{2n\sqrt{\pi}}e^{-\delta^2/2}(n-1)^{1/4}e^{2\delta\sqrt{n-1}}\{1+0(1)\} \tag{10}$$

и следователно $\lim_{n\to+\infty}(2\sqrt{n})^{-1}\ln L_n^{(-1)}(-\delta^2)=\delta$.

Ако $\varepsilon>0$ е произволно, от неравенството

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}(2\sqrt{n})^{-1}\ln|b_n/L_n^{(-1)}[-(\sigma+\varepsilon)^2]|$$

$$=\overline{\lim_{a\to+\infty}}(2\sqrt{n})^{-1}\ln|b_n|-\lim_{n\to+\infty}(2\sqrt{n})^{-1}\ln L_n^{(-1)}[-(\sigma+\varepsilon)^2]\leqq-\varepsilon$$

следва, че $|b_n|=O\{L_n^{(-1)}[-(\sigma+\varepsilon)^2]\}$. Тогава, като имаме пред вид направената по-горе забележка за коефициентите на степенното развитие на функцията $\varphi_\delta(\zeta)$, ще получим, че за $|\zeta|<1$

$$|\varphi(\zeta)|\leqq\sum_{n=0}^{\infty}|b_n|\,|\zeta|^n=O\left(\sum_{n=0}^{\infty}L_n^{(-1)}[-(\sigma+\varepsilon)^2]\,|\zeta|^n\right)$$

$$=O(\varphi_{\sigma+\varepsilon}(|\zeta|))=O\left(\exp\frac{(\sigma+\varepsilon)^2|\zeta|}{1-|\zeta|}\right).$$

З а б е л е ж к а. Класът $G(\sigma)$ очевидно съвпада с класа на функциите $\varphi(\zeta)$, аналитични в единичния кръг и такива, че

$$\overline{\lim_{|\zeta|\to1-0}}(1-|\zeta|)\ln|\varphi(\zeta)|\leqq\sigma^2, \tag{11}$$

т. е. лема 1 може да бъде формулирана, като условието (9) се замести с (11). Ние предпочетохме обаче да докажем лема 1 във формата, в която тя беше изказана, тъй като това даде възможност да използуваме развитието (8), респективно асимптотичната формула (10).

Да означим с D полуравнината $\operatorname{Re} w>-1/2$ с разрез по отсечката $(-1/2, 0]$. Ако $0\leqq\mu_0<+\infty$ и $\alpha>-1$, с $E(\mu_0, \alpha)$ да означим множеството на комплексните функции $F(w)$, аналитични в D и такива, че $F(w)=(1+w)^{-1}w^\alpha\Phi(w)$, където $\Phi(w)$ е аналитична в полуравнината $\operatorname{Re} w>-1/2$ и освен това, каквото и да е $\tau>0$,

$$\Phi(w)=O\left(\exp\frac{(\mu_0+\tau)^2|w|}{|1+w|-|w|}\right) \tag{12}$$

при $|w|\to+\infty$.

Да отбележим, че всяка функция $F(w)$ от класа $E(\mu_0, \alpha)$ може да се представи в областта D, както следва:

$$F(w)=(1+w)^{-1}w^\alpha\sum_{n=0}^{\infty}b_n\left(\frac{w}{1+w}\right)^n. \tag{13}$$

При това редът от дясната страна на горното равенство е абсолютно равномерно и даже нормално сходящ върху всяко компактно подмножество на полуравнината $\operatorname{Re} w>-1/2$. За да се убедим в това, достатъчно е да отбележим, че тази полуравнина чрез трансформацията $\zeta=w/(1+w)$ се преобразува в кръга $|\zeta|<1$. Същата тази трансформация дава възможност почти непосредствено лема 1 да бъде „пренесена“ за функциите от класа $E(\mu_0, \alpha)$. По-точно в сила е следното твърдение:

Лема 2. За да принадлежи функцията $F(w)$, определена с (13), към класа $E(\mu_0, \alpha)$, е необходимо и достатъчно $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} (2\sqrt{n})^{-1} \ln|b_n| \leqq \mu_0$.

Доказателство. Да допуснем, че условието на лемата е изпълнено. Тогава, каквото и да е $\tau>0$, $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} (2\sqrt{n})^{-1} \ln|b_n| < \mu_0+\tau$. Функцията $\varphi(\zeta) = \Phi(\zeta/(1-\zeta)) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n \zeta^n$ съгласно лема 1 принадлежи на класа $G(\mu_0+\tau)$ и следователно

$$\Phi(w) = \Phi(\zeta/(1-\zeta)) = \varphi(\zeta) = O\left(\exp\frac{(\mu_0+\tau)^2|\zeta|}{1-|\zeta|}\right) = O\left(\exp\frac{(\mu_0+\tau)^2|w|}{|1+w|-|w|}\right).$$

Да допуснем, че функцията $F(w)$, определена с (13), принадлежи на $E(\mu_0, \alpha)$. Тогава, каквото и да е $\tau>0$,

$$\varphi(\zeta) = \Phi(\zeta/(1-\zeta)) = O\left(\exp\frac{(\mu_0+\tau)^2|\zeta/(1-\zeta)|}{|1+\zeta/(1-\zeta)|-|\zeta/(1-\zeta)|}\right)$$

$$= O\left(\exp\frac{(\mu_0+\tau)^2|\zeta|}{1-|\zeta|}\right)$$

и от лема 1 следва, че $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} (2\sqrt{n})^{-1} \ln|b_n| \leqq \mu_0+\tau$.

Следствие. Ако функцията F, дефинирана с (13), принадлежи на класа $E(\mu_0, \alpha)$, то и функцията F^*, дефинирана с равенството

$$F^*(w) = (1+w)^{-1} w^{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} |b_n| \left(\frac{w}{1+w}\right)^n, \tag{14}$$

също принадлежи на $E(\mu_0, \alpha)$.

Представянето (3) може да бъде изтълкувано по следния начин: функцията $-(-z)^{-\alpha} M_n^{(\alpha)}(z)$ е (ляво) преобразование на Лаплас на функцията $t^{n+\alpha}(1+t)^{-n-1}$. Следователно логично е да се очаква, че ако една аналитична функция се представя чрез ред от вида (4) по функциите на Лагер от втори род, тази функция трябва да бъде (с точност до множителя $-(-z)^{\alpha}$) лапласова трансформация на подходяща комплексна функция. В това се състои именно главният резултат в тази работа, който ще изкажем под формата на следната

Теорема 1. Нека $0 \leqq \mu_0 < +\infty$ и $\alpha > -1$. Комплексната функция $f(z)$, аналитична в областта $\Delta^*(\mu_0)$, се развива в тази област в ред по функциите на Лагер от втори род $\{M_n^{(\alpha)}(z)\}_{n=0}^{\infty}$ тогава и само тогава, когато в полуравнината $\operatorname{Re} z < -\mu_0^2$ е в сила представянето

$$f(z) = -(-z)^{\alpha} \int_0^{\infty} F(t) e^{zt}\, dt, \tag{15}$$

където функцията $F \in E(\mu_0, \alpha)$.

Доказателство. Да предположим, че функцията $f(z)$ се представя в областта $\Delta^*(\mu_0)$ чрез реда (4). От казаното в началото за такива редове следва, че $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\,(2\sqrt{n})^{-1}\ln|b_n|\leqq\mu_0$. От лема 2 следва тогава, че функцията $F(w)$, определена с (13), принадлежи на класа $E(\mu_0, \alpha)$. Съгласно следствието от лема 2 и функцията $F^*(w)$, определена с (14), ще принадлежи на този клас. В частност, ако $w=t>0$, каквото и да е $\tau>0$, от (12), (13) и (14) следва, че $F(t)=O\{\exp[(\mu_0+\tau)^2 t]\}$, а също така и $F^*(t)=O\{\exp[(\mu_0+\tau)^2 t]$. Следователно интегралът от дясната страна на (15) дефинира функция, аналитична в полуравнината $\operatorname{Re} z<-\mu_0^2$. Нека z принадлежи на тази полуравнина и да образуваме разликата

$$\eta_\nu(z)=-(-z)^\alpha\int\limits_0^\infty F(t)\,e^{zt}\,dt-\sum_{n=0}^{\nu} b_n M_n^{(\alpha)}(z).$$

Като заместим $F(t)$ от (13) в горното равенство и вземем пред вид 3), ще получим, че

$$\eta_\nu(z)=-(-z)^\alpha\int\limits_0^\infty\frac{t^\alpha}{1+t}\left\{\sum_{n=\nu+1}^{\infty} b_n\left(\frac{t}{1+t}\right)\right\}e^{zt}\,dt. \tag{16}$$

Нека $x=\operatorname{Re} z$ и да изберем $\tau>0$ така, че $(\mu_0+\tau)^2+x<0$. Ако $\varepsilon>0$ е произволно, можем да определим $A=A(\varepsilon)$ така, че

$$\int\limits_A^\infty e^{[(\mu_0+\tau)^2+x]t}\,dt<\varepsilon.$$

Тогава, каквото и да е $\nu=0, 1, 2, \ldots$, ще получим, че

$$\left|\int\limits_A^\infty\frac{t^\alpha}{1+t}\left\{\sum_{n=\nu+1}^{\infty} b_n\left(\frac{t}{1+t}\right)^n\right\}e^{zt}|dt|\leqq\int\limits_A^\infty\frac{t^\alpha}{1+t}\left\{\sum_{n=\nu+1}^{\infty}|b_n|\left(\frac{t}{1+t}\right)^n\right\}e^{xt}\,dt\right. \tag{17}$$

$$\leqq\int\limits_A^\infty F^*(t)\,e^{xt}\,dt=O\left(\int\limits_A^\infty e^{[(\mu_0+\tau)^2+x]\,t}\,dt\right)=O(\varepsilon).$$

Да изберем $N=N(\varepsilon)$ така, че за $\nu>N$ и $0\leqq t\leqq A$ да е изпълнено неравенството $\left|\sum\limits_{n=\nu+1}^{\infty} b_n(t/(1+t))^n\right|<\varepsilon$. Тогава за $\nu>N$ ще бъде в сила неравенството

$$\left|\int\limits_0^A\frac{t^\alpha}{1+t}\left\{\sum_{n=\nu+1}^{\infty} b_n\left(\frac{t}{1+t}\right)^n\right\}e^{zt}\,dt\right|=O\left(\varepsilon\int\limits_0^A\frac{t^\alpha e^{xt}}{1+t}\,dt\right)=O(\varepsilon). \tag{18}$$

От (16}, (17) и (18) следва, че $\eta_\nu(z)=O(\varepsilon)$ $(\nu>N)$ и с това равенството (15) е установено.

Да допуснем, че функцията $f(z)$ е аналитична в областта $\Delta^*(\mu_0)$ и в полуравнината $\operatorname{Re} z<-\mu_0^2$ се представя чрез равенството (15), където $F\in E(\mu_0, \alpha)$. Ако F се представя чрез развитието (13), от лема 2 следва, че $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\,(2\sqrt{n})^{-1}\ln|b_n|\leqq\mu_0$. Следователно редът (4) е сходящ в областта $\Delta^*(\mu_0)$ и дефинира функция $\tilde{f}(z)$, аналитична в тази област. Но тогава съгласно доказаното функцията $\tilde{f}(z)$ се представя чрез равенството (15) именно посредством функцията F и следователно $\tilde{f}=f$, т. е. f се развива в областта $\Delta^*(\mu_0)$ в ред по функциите на Лагер от втори род.

Да обърнем внимание, че разсъжденията, които направихме при доказателството на достатъчността на условието на теорема 1, в същност водят до следното твърдение: Ако функцията $f(z)$ е аналитична в полуравнината $\operatorname{Re} z<-\mu_0^2\,(0\leqq\mu_0<+\infty)$ и се представя в тази полуравнина чрез равенството (15), където функцията $F\in E(\mu_0, \alpha)$, то непременно f се продължава аналитично в цялата област $\Delta^*(\mu_0)$, т. е. имаме тук резултат, който се отнася до аналитичната продължимост на функции, дефинирани като преобразования на Лаплас на функциите от класа $E(\mu_0, \alpha)$. Не е трудно да се убедим, че областта $\Delta^*(\mu_0)$ е в известен смисъл максималната, в която такова аналитично продължение е възможно. Наистина за редове по функциите на Лагер от втори род е в сила теорема от типа на Адамар, т. е. ред от вида

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_{n_k} M_{n_k}^{(\alpha)}(z)\ \left(n_{k+1}/n_k\geqq 1+\theta,\ \theta>0 \text{ и } \overline{\lim_{k\to\infty}}\,(2\sqrt{n_k})^{-1}\ln|b_{nk}|=\mu_0,\ \ 0<\mu_0<+\infty\right)$$

дефинира функция, която е аналитично непродължима вън от областта $\Delta^*(\mu_0)$. В нашата публикация [4] такъв резултат е установен за редове по полиномите на Лагер като следствие от теорема за свръхсходимост от типа на Островски за такива редове, но техниката на доказателството се пренася без изменение и за редове от вида (4).

Непосредствено следствие от теорема 1 и от формулата за обръщане на трансформацията на Лаплас е следният резултат, който може да бъде наречен теорема за единственост на представянето на аналитична функция чрез ред по функциите на Лагер от втори род, а именно

Теорема 2. Ако редът (4) е сходящ в областта $\Delta^*(\mu_0)$ и сумата му е равна на нула в тази област, то $b_n=0$ за всяко $n=0, 1, 2, \ldots$

ЛИТЕРАТУРА

1. Русев, П.: Функции на Лагер от втори род. Год. Соф. унив., Фак. мат. и мех., **67** (1972/73), 269—283.
2. Сеге, Г.: Ортогональные многочлены, М., 1962.
3. Привалов, И. И.: Граничные свойства аналитических функции, М., 1950.
4. Rusev, P.: Some boundary properties of a series in Laguerre's polynomials, Serdica, 1 (1975), 64—76.

Постъпила на 14. I. 1977 г.

A NECESSARY AND SUFFICIENT CONDITION AN ANALYTIC FUNCTION TO BE REPRESENTED BY A SERIES IN THE LAGUERRE FUNCTIONS OF SECOND KIND

P. Rusev

(SUMMARY)

The system $\{M_n^{(\alpha)}(z)\}_{n=0}^{\infty}$ $(\alpha>-1)$ of the Laguerre functions of second kind is defined in the paper by the equalities (1). We consider the problem of representation of analytic functions by means of series of the kind

$$(*) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} b_n M_n^{(\alpha)}(z).$$

Let D be the half-plane $\operatorname{Re} w>-1/2$ cut along the segment $(-1/2, 0]$ If $0\leqq\mu_0<+\infty$ and $\alpha>-1$, with $E(\mu_0, \alpha)$ we denote the class of the complex functions F analytic in D and such that $F(w)=(1+w)^{-1}w^{\alpha}\Phi(w)$, where $\Phi(w)$ is analytic in the half-plane $\operatorname{Re} w>-1/2$ and satisfies the condition

$$\Phi(w)=O\left(\exp\frac{(\mu_0+\tau)^2\,|w|}{|1+w|-|w|}\right)$$

for every positive τ. The class $E(\mu_0, \alpha)$ is described in the paper as follows (Lemma 2): the complex function

$$F(w)=(1+w)^{-1}w^{\alpha}\sum_{n=0}^{\infty} b_n\left(\frac{w}{1+w}\right)^n$$

belongs to the class $E(\mu_0, \alpha)$ iff $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\,(2\sqrt{n})^{-1}\ln|b_n|\leqq\mu_0$. Using this last statement, we prove the main result of the paper, namely

Theorem 1. Let $0\leqq\mu_0<+\infty$ and $\alpha>-1$. The complex function $f(z)$, analytic in the region $\Delta^*(\mu_0)=\{z\in C: \operatorname{Re}(-z)^{1/2}>\mu_0\}$, can be represented in this region by a series of the kind (*) iff in the half-plane $\operatorname{Re} z<-\mu_0^2$ the function $-(-z)^{-\alpha}f(z)$ is the Laplace transform of a function $F\in E(\mu_0, \alpha)$, i. e.

$$f(z)=-(-z)^{\alpha}\int_0^{\infty} F(t)\,e^{zt}\,dt.$$

As an application of the inverse-transform formula for the Laplace transformation and the above result we get

Theorem 2. If the series (*) is convergent in the region $\Delta^*(\mu_0)$ and its sum is identically zero, then $b_n=0$ for every $n=0, 1, 2, \ldots$