АНАЛИТИЧЕСКАЯ ПРЕНЕБРЕЖИМОСТЬ МНОЖЕСТВ

Петър Г. Бояджиев

1. Всюду в этой работе через S^2 обозначаем расширенную комплексную плоскость, а через $\Delta(z, \delta)$ — круг радиуса δ с центром в точке z. Если $V \subset S^2$ открыто, то $A(S^2, V)$ — множество функций, непрерывных на S^2 и аналитических на V. Если $D \subset S^2$ — некоторое множество, то „f аналитична на D" означает, что функция f аналитична на некотором открытом множестве D_f, содержащем D.

Пусть $V \subset S^2$ — фиксированное открытое множество. Множество $E \subset S^2$ будем называть аналитически пренебрежимым относительно V, если для любой $f \in A(S^2, V)$ существует последовательность V_n открытых окрестностей множества E и последовательность функций $f_n \in A(S^2, V \cup V_n)$ такие, что $\|f - f_n\|_{S^2} = \max\{|f)z) - f_n(z)| : z \in S^2\} \to 0$; иными словами, если любую $f \in A(S^2, V)$ можно равномерно на S^2 аппроксимировать функциями, непрерывными на S^2 и аналитическими на $V \cup E$.

Цель настоящей работы — исследовать условия, при которых компактное подмножество E (конечной) комплексной плоскости $\mathbf{C}$ является аналитически пренебрежимым относительно $V \subset S^2$. Полученные результаты похожи по форме на известные результаты витушкинской теории приближения аналитических функций рациональными функциями (развернутое изложение этой теории можно найти например в [2], гл. VIII или в [1]). Техника доказательств тоже заимствована из этой теории, поэтому некоторые основные понятия и факты мы приведем ниже.

2. Пусть F — произвольное подмножество комплексной плоскости $\mathbf{C}$. Функция $f(z)$ называется допустимой для F, если она непрерывна на S^2, аналитична вне некоторого компактного подмножества $K_f \subset F$, $\|f\|_{S^2} \leq 1$ и $f(\infty) = 0$. Множество всех допустимых для F функций будем обозначать через $\mathrm{AC}(F)$. Если $f \in \mathrm{AC}(F)$, то через $f'(\infty)$ обозначается первый коэффициент развития $f(z)$ в окрестности бесконечно удаленной точки по степеням $1/(z - z_0)$, где $z_0 \in \mathbf{C}$; этот коефициент от z_0 не зависит. Если Γ окружность, охватывающая K_f, то

$$f'(\infty) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z)\, dz.$$

Число $\alpha(F) = \sup\{|f'(\infty)| : f \in \mathrm{AC}(F)\}$ называется непрерывной аналитической емкости множества F. Ясно, что $\alpha(\cdot)$ — монотонная функция множеств: если $F_1 \subset F_2$, то $\alpha(F_1) \leq \alpha(F_2)$.

Пусть $f(\zeta)$ — функция, аналитическая в окрестности ∞. Если $z \in \mathbf{C}$, то вне некоторого круга имеет место развитие

$$f(\zeta)=f(\infty)+\frac{f'(\infty)}{\zeta-z}+\frac{\beta(f,z)}{(\zeta-z)^2}+\dots,$$

где теперь второй коефициент $\beta(f,z)$ зависит не только от f, но и от z. Определим функцию $\tilde{\beta}(F,z)$ от z следующим образом:

$$\tilde{\beta}(F,\ z)=\frac{1}{\alpha(F)}\sup\{|\beta(f,z)|:f\in AC(F)\}$$

при $\alpha(F)\neq 0$ и $\tilde{\beta}(F,z)=0$ при $\alpha(F)=0$ (см. [1], стр. 174, или [2], гл. VIII, § 6). Она непрерывна на $\mathbf{C}$ и стремится к ∞ при $z\to\infty$. Тем самым существует число w, такое, что $\tilde{\beta}(F,w)=\min\{\tilde{\beta}(F,z):z\in\mathbf{C}\}=\tilde{\beta}(F)$. Число $\tilde{\beta}(F)$ называется непрерывным аналитическим диаметром, а w — непрерывным аналитическим центром множества F.

Кроме эти понятия нам понадобятся и следующие предложения:

Лемма 1 ([2], гл. VIII, лемма 6.3). Пусть F — ограниченное множество, w_0 — непрерывный аналитический центр F. Если a и b такие комплексные числа, то $|a|\leqq\alpha(F)$, $|b|\leqq\alpha(F).\tilde{\beta}(F)$, то существует функция f, такая, что $f'(\infty)=a$, $\beta(f,w_0)=b$ и $f/20\in AC(F)$.

Лемма 2 ([2], гл. VIII, лемма 7.1). Пусть $g(z)$ — непрерывно дифференцируемая функция с носителем в диске $\Delta(z_0,\delta)$ и пусть $f\in A(S^2,V)$. Тогда функция

$$G(\zeta)=\frac{1}{\pi}\iint\frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}\,\frac{\partial g}{\partial\bar{z}}\,dxdy$$

обладает следующими свойствами:

1°. $G\in A(S^2,V\cup(S^2\setminus\overline{\Delta(z_0,\ \delta)}))$ и $G(\infty)=0$.

2°. $G'(\infty)=-\frac{1}{\pi}\iint f(z)\,\frac{\partial g}{\partial\bar{z}}\,dxdy$.

3°. $|G'(\infty)|\leqq 2\delta\,.\,\omega(f,2\delta)\,.\,\|\frac{\partial g}{\partial\bar{z}}\|_{S^2}\,.\,\alpha(\Delta(z_0,\delta)\setminus V)$.

Здесь $\frac{\partial g}{\partial\bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g}{\partial x}+i\frac{\partial g}{\partial y}\right)$, а $\omega(f,\cdot)$ — модуль непрерывности $f(z)$.

Лемма 3 (о разбиении единицы; [1], стр. 150). Существуют такие положительные абсолютные постоянные M и M_1, что для любого $\delta>0$ найдется последовательность непрерывно дифференцируемых функций $g_{k\delta}(z)$ и последовательность дисков $\Delta(z_k,\delta)$, в совокупности покрывающих $\mathbf{C}$ так, чтобы

1°. Носитель $g_{k\delta}(z)$ содержится в $\Delta(z_k,\delta)$.

2°. $\sum\limits_k g_{k\delta}(z)\equiv 1$.

3°. $\left\|\frac{\partial g_{k\delta}}{\partial\bar{z}}\right\|_{S^2}\leqq\frac{M}{\delta}$.

4°. Любой круг $\Delta(z, \delta)$ пересекается с не более чем M_1 кругов $\Delta(z_k, \delta)$.

3. Мы переходим к основной части работы. Имеет место

Теорема 1. Пусть $V \subset S^2$ — открытое множество, $E \subset \mathbf{C}$ — компакт и $f \in A(S^2, V)$ — фиксирована. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1°. Функцию f можно приблизить равномерно на S^2 функциями, непрерывными на S^2 и аналитическими на $V \cup E$.

2°. Для некоторого открытого множества D, содержащего E, найдутся число $r \geqq 1$ и положительная функция $a(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$, $\delta > 0$, такие, что для любой финитной, непрерывно дифференцируемой функций $g(z)$, носитель которой содержится в круге $\Delta(z_0, \delta) \subset D$, имеет место неравенство

$$(1) \quad \left| \iint f(z) \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} dxdy \right| \leqq \delta \cdot a(\delta) \left(\left\| \frac{\partial g}{\partial x} \right\|_{S^2} + \left\| \frac{\partial g}{\partial y} \right\|_{S^2} \right) \alpha(\Delta(z_0, r\delta) \setminus (V \cup E)).$$

Доказательство. 1° → 2°. Пусть $g(z)$ такая, как в 2°, и пусть сначала f аналитична в окрестности V_f множества $V \cup E$. Если

$$G(\zeta) = \frac{1}{\pi} \iint \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta} \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} dxdy,$$

то по лемме 2 имеем

$$\left| \frac{1}{\pi} \iint f(z) \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} dxdy \right| \leqq 2\delta\omega(f, 2\delta) \cdot \left\| \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} \right\|_{S^2} \cdot \alpha(\Delta(z_0, \delta) \setminus V_f).$$

Так как $\left\| \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} \right\| \leqq \frac{1}{2} \left(\left\| \frac{\partial g}{\partial x} \right\| + \left\| \frac{\partial g}{\partial y} \right\| \right)$ и $\alpha(\cdot)$ монотонна, то отсюда получаем (1) при $a(\delta) = \omega(f, 2\delta)$ и $r = 1$.

Если f неаналитична в окрестности E и $\varepsilon > 0$, то по предположению имеется $f_\varepsilon \in A(S^2, V)$, аналитическая на E и такая, что $\|f - f_\varepsilon\|_{S^2} < \varepsilon$ и значит $\omega(f_\varepsilon, 2\delta) \leqq 2\varepsilon + \omega(f, 2\delta)$. Так как (1) имеет место для f_ε, то оно, ввиду произвольности ε, будет иметь место и для f.

2° → 1°. а) Предположим, что f аналитична на ∞. Пусть $\delta > 0$ фиксировано и $g_{k\delta}(z)$ — разбиение единицы, соответствующее δ (лемма 3). Тогда лишь конечное число кругов $\Delta(z_k, \delta)$ пересекается с E. Делая, если нужно, новую нумерацию, можем считать, что это имеет место при $k = 1, 2, \ldots, N(\delta)$.

Рассмотрим функцию

$$G_{k\delta}(\zeta) = \frac{1}{\pi} \iint \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta} \frac{\partial g_{k\delta}(z)}{\partial \bar{z}} dxdy.$$

По лемме 2 она непрерывна на S^2 и аналитична вне $\Delta(z_k, \delta)$ и на множестве аналитичности f, т. е. по крайней мере на V. Так как f аналитична в окрестности ∞, то начиная с некоторого места все $G_{k\delta}(z) \equiv 0$. Таким образом ряд $\sum_k G_{k\delta}(z)$ состоит только из конечного числа слагаемых и как легко увидет, выполняется равенство $f(z) = f(\infty) + \Sigma G_{k\delta}(z)$. Если $k > N(\delta)$, то $G_{k\delta}(z)$ аналитична на $V \cup E$. Значит

функция $\sum_{k>N(\delta)} G_{k\delta}(z)$ аналитична на $V\cup E$ и непрерывна на S^2.

Пусть $\delta<\rho(E,\partial D)/4$ и $k\leqq N(\delta)$ фиксированные. Пусть $E_k=\Delta(z_k,(r+2)\delta)\setminus(V\cup E)$, $\beta=\min(\delta,\tilde{\beta}(E_k))$ и пусть $\Delta(t,\beta)$ — произвольный круг, пересекающийся с $\Delta(z_k,\delta)$. Так как $\Delta(z_k,\delta)$ пересекается с E, то в силу сделанного выбора δ и β, $\Delta(t,\beta)\subset D$. Таким образом, для любой непрерывно дифференцируемой функции $g(z)$ с носителем в $\Delta(t,\beta)$ имеет место (1) (заменой δ на β). Тогда будут выполнятся все условия доказательства теоремы 8.1 из [2], гл. VIII, стр. 280. Повторяя это доказательство, получим, что существует положительная функция $a(\delta)\to 0$ при $\delta\to 0$, такая, что для $\delta<\rho(E,\partial D)/4$ выполняются неравенства

$$|G'_{k\delta}(\infty)|=a(\delta)\,\alpha(E_k),$$

$$|\beta(G_{k\delta},w_k)|\leqq a(\delta)\,.\,\alpha(E_k)\,.\,\tilde{\beta}(E_k),$$

где w_k — непрерывный аналитический центр E_k. Значит числа $G'_{k\delta}(\infty)/a(\delta)$ и $\beta(G_{k\delta},w_k)/a(\delta)$ удовлетворяют условиям леммы 1 и найдутся непрерывные на S^2 функции $H_{k\delta}(z)$, $k=1,2,\ldots,N(\delta)$ такие, что каждая из них аналитична вне некоторого компактного подмножества множества E_k (и тем самым на $V\cup E$), и выполняются условия: $|H_{k\delta}|_{S^2}\leqq 20\,a(\delta)$, $H'_{k\delta}(\infty)=G'_{k\delta}(\infty)$, $\beta(H_{k\delta},w_k)=\beta(G_{k\delta},w_k)$. Тогда, пользуясь методом доказательства леммы 7.2 из [2], гл. VIII, получим, что существует положительная функция $c(\delta)\to 0$ при $\delta\to 0$ такая, что

$$\left\|\sum_{k=1}^{N(\delta)}(G_{k\delta}-H_{k\delta})\right\|_{S^2}\leqq c(\delta).$$

Положим

$$f_\delta(z)=\sum_{k=1}^{N(\delta)}H_{k\delta}(z)+\sum_{k>N(\delta)}G_{k\delta}(z).$$

Тогда

$$f(z)-f_\delta(z)=\sum_{k=1}^{N(\delta)}(G_{k\delta}(z)-H_{k\delta}(z))$$

и значит $\|f-f_\delta\|_{S^2}\leqq c(\delta)\to 0$ при $\delta\to 0$. Так как $f_\delta(z)$ непрерывна на S^2 и аналитична на $V\cup E$, то это неравенство доказывает теорему в случае, когда f аналитична в окрестности ∞.

б) Докажем следующее утверждение: Пусть Γ — произвольная окружность и $f\in A(S^2,V)$ — фиксированная функция. Тогда f можно приблизить равномерно на S^2 функциями из $A(S^2,V)$, аналитическими на Γ. Действительно, так как при дробнолинейном преобразовании окружность переходит в окружность, то мы можем предполагать, что $\infty\in V$. Из оценки интеграла ([1], гл. III) вытекает, что для любого компакта K выполняется

$\alpha(K)\leqq c\,\alpha(K\setminus\Gamma)$, где c — абсолютная постоянная. Если F — произвольное множество и $f\in AC(F)$, то $|f'(\infty)|\leqq\alpha(K_f)\leqq c\,\alpha(K_f\setminus\Gamma)\leqq c\,\alpha(F\setminus\Gamma)$ так, что $\alpha(F)\leqq c\,\alpha(F\setminus\Gamma)$. Полагая $F=\Delta(z_0,\delta)\setminus V$, где z_0 произвольно, получим

$$\alpha(\Delta(z_0,\delta)\setminus V)\leqq c\,\alpha(\Delta(z_0\,\delta)\setminus(V\cup\Gamma)). \tag{2}$$

Пусть $f\in A(S^2, V)$ и $g(z)$ — непрерывно дифференцируемая функция с носителем в $\Delta(z_0,\delta)$. Тогда (см. лемму 2) из (2) вытекает

$$\left|\iint f(z)\frac{\partial g}{\partial\bar z}\,dxdy\right|\leqq 2\pi\delta\,.\,\omega(f,2\delta)\,.\left\|\frac{\partial g}{\partial\bar z}\right\|_{S^2} c\,\alpha(\Delta(z_0,\delta)\setminus(V\cup\Gamma)).$$

Таким образом, условие 2°, в котором нужно заменить E на Γ, выполняется для $D=\mathbf{C}$ и $r=1$. Поскольку $\infty\subset V$, то отсюда и из а) вытекает наше утверждение.

в) Теперь можем закончить доказательство теоремы 1. Пусть $f(z)$ удовлетворяет 2°, но необязательно аналитична в окрестности ∞. Пусть $\Delta(0, R)$ — произвольный круг, содержащий E, и пусть $\Gamma=\partial\Delta(0,R)$. Поскольку согласно б) f равномерно на S^2 приближается функциями, аналитическими на Γ, то можем предполагать, что сама f аналитична на кольце $R-\varepsilon<|z|<R+\varepsilon$, $\varepsilon>0$ — достаточно мало. Тогда, пользуясь интегральной формулы Коши, ее можно представить в виде $f(z)=f_1(z)+f_2(z)$, где f_1 и f_2 непрерывны на S^2, f_1 аналитична на $V\cup\Delta(0,R)$, f_2 — на $V\cup\{|z|>R-\varepsilon\}$. Таким образом, f_1 уже аналитична на $V\cup E$ и нам достаточно показать, что f_2 можно равномерно на S^2 приблизить функциями из $A(S_2,V)$ аналитическими на E. Ввиду а) (f_2 — аналитична в ∞) для этого достаточно показать, что для f_2 имеет место 2°.

Пусть $D_1=D\cap\Delta(0,R)$. Пусть $\Delta(z_0,\delta)\subset D_1$ и $g(z)$ — непрерывно дифференцируемая функция, сосредоточенная в $\Delta(z_0,\delta)$. Положим

$$G(\zeta)=\frac{1}{\pi}\iint\frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}\,\frac{\partial g}{\partial\bar z}\,dxdy=G_1(\zeta)+G_2(\zeta),$$

где

$$G_i(\zeta)=\frac{1}{\pi}\iint\frac{f_i(z)-f_i(\zeta)}{z-\zeta}\,\frac{\partial g}{\partial\bar z}\,dxdy,\quad i=1,2.$$

Так как $\Delta(z_0,\delta)\subset\Delta(0,R)$ и f_1 аналитична в $\Delta(0,R)$, то $G_1(\zeta)\equiv 0$. Таким образом, $G(\zeta)=G_2(\zeta)$ и значит $G'(\infty)=G'_2(\infty)$. Но по лемме 2

$$\iint f(z)\frac{\partial g}{\partial\bar z}\,dxdy=-\pi G'(\infty)=-\pi G_2'(\infty)=\iint f_2(z)\frac{\partial g}{\partial\bar z}\,dxdy.$$

Из этого равенства вытекает, что для f_2, так же как и для f, имеет 2° с заменой D на D_1. Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть E — компактное подмножество комплексной плоскости $\mathbf{C}$ и $V\subset S^2$ — открытое множество. Тогда следующие четыри утверждения эквивалентны и любое из них вытекает из 5°. Если $E\subset S^2\setminus\Sigma$, то все пять условия эквивалентны:

1°. E аналитически пренебрежимо относительно V.

2°. Если D любое открытое множество, то $\alpha(D\setminus V)=\alpha(D\setminus(V\cup E))$.

3°. Существуют постоянные $c>0$ и $r\geqq 1$, такие, что для любого комплексного z и любого $\delta>0$ имеет место неравенство

$$\alpha(\Delta(z,\delta)\setminus V)\leqq c\,\alpha(\Delta(z,r\delta)\setminus(V\cup E)).$$

4°. Для любого z из E найдутся числа $c=c(z)>0$, $r(z)\geqq 1$, $\delta_0=\delta_0(z)>0$, такие, что при $\delta\leqq\delta_0$ имеет место неравенство

$$\alpha(\Delta(z,\delta)\setminus V)\leqq c\,\alpha(\Delta(z,r\delta)\setminus(V\cup E)).$$

5°. $R(E)=\mathbf{C}(E)$ и условие 4° выполняется для всех $z\in E\cap\partial V$. Здесь $\mathbf{C}(E)$ — множество всех непрерывных на E функции, а $R(E)$ — множество всех равномерных на E пределов рациональных функций с полюсами вне E.

Доказательство. 1° $\to$ 2°. Пусть D произвольное открытое множество. Ввиду монотонности $\alpha(\cdot)$ мы должны доказать только неравенство $\alpha(D\setminus V)\leqq\alpha(D\setminus(V\cup E))$.

Пусть $\varepsilon>0$ произвольно. Существует функция $f\in AC(D\setminus V)$, такая, что $\|f\|_{S^2}<1$ и $\alpha(D\setminus V)-\varepsilon\leqq|f'(\infty)|$. Она аналитична вне некоторого компакта $K_f\subset D\setminus V$. Пусть $\delta_0>0$ настолько мало, что $2\delta_0<\rho(K_f,\partial D)$ (через $\rho(P,Q)$ обозначается расстояние между P и Q) и пусть для $\delta\leqq\delta_0$, $\{g_{k\delta}(z)\}$ разбиение единицы, соответствующее δ. Тогда, поскольку $f(\infty)=0$ и f аналитична в окрестности ∞, выполняется равенство $f(z)=\sum_k G_{k\delta}(z)$, где

$$G_{k\delta}(z)=\frac{1}{\pi}\iint\frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}\,\frac{\partial g_{k\delta}}{\partial\bar z}\,dxdy.$$

Так как K_f — компакт, то лишь конечное число кругов $\Delta(z_k,\delta)$, в которых сосредоточена $g_{k\delta}(z)$ (смотри лемму 3), пересекаются с K_f. Без ограничения общности будем считать, что это имеет место для $k=1,2,\ldots,N(\delta)$. Тогда, если $k>N(\delta)$, круг $\Delta(z_k,\delta)$ будет содержатся в $S^2\setminus K_f$ так, что $G_{k\delta}(z)$ аналитична на S^2 и значит тождественно равна нулю ($G_{k\delta}(\infty)=0$). Таким образом,

$$f(z)=\sum_{k=1}^{N(\delta)}G_{k\delta}(z).$$

Пусть $\{\varepsilon_n\}$ — последовательность положительных чисел, сходящаяся к нулю и такая, что $\|f\|_{S^2}+\varepsilon_n\leqq 1$. По предположению, для любого $n=1,2,\ldots$ имеется функция $f_n(z)$, непрерывная на S^2 и аналитическая на $V\cup E$, для которой

$$\|f-f_n\|_{S^2}\leqq\varepsilon_n/4\,MN(\delta), \tag{3}$$

где M — постоянная из леммы 2. Положим

$$\varphi_n(\zeta)=\sum_{k=1}^{N(\delta)}\frac{1}{\pi}\iint\frac{f_n(z)-f_n(\zeta)}{z-\zeta}\,\frac{\partial g_{k\delta}(z)}{\partial\bar z}\,dxdy.$$

Поскольку любое $\overline{\Delta(z_k, \delta)} \subset D$ для $k=1, 2, \ldots, N(\delta)$, то $\varphi_n(z)$ аналитична вне компакта $\bigcup_{k=1}^{N(\delta)} \overline{\Delta(z_k, \delta)} \subset D$. Дальше, из аналитичности $f_n(z)$ на $V \cup E$ и леммы 2 следует, что $\varphi_n(z)$ аналитична в некоторой окрестности V_n множества $V \cup E$. Таким образом, φ_n непрерывна на S^2 и аналитична вне компакта $\bigcup_{k=1}^{N(\delta)} \overline{\Delta(z_k, \delta)} \setminus V_n \subset D \setminus (V \cup E)$. Очевидно

$$f(\zeta) - \varphi_n(\zeta) = \sum_{k=1}^{N(\delta)} \frac{1}{\pi} \iint \frac{f(z) - f_n(z) - f(\zeta) - f_n(\zeta))}{z - \zeta} \frac{\partial g_{k\delta}}{\partial \bar{z}} dxdy. \tag{4}$$

Кроме того (см. леммы 2 и 3), имеем

$$\left\| \frac{1}{\pi} \iint \frac{f(z) - f_n(z) - (f(\zeta) - f_n(\zeta))}{z - \zeta} \frac{\partial g_{k\delta}}{\partial \bar{z}} dxdy \right\|_{S^2}$$
$$\leqq 2\delta\omega(f - f_n, 2\delta) \left\| \frac{\partial g_{k\delta}}{\partial \bar{z}} \right\|_{S^2} \leqq 4M \| f - f_n \|_{S^2}.$$

Тогда из (3) и (4) получим $\| f - \varphi_n \|_{S^2} \leqq \varepsilon_n$. Таким образом, φ_n равномерно на S^2 стремится к f. Кроме того $\| \varphi_n \|_{S^2} \leqq \varepsilon_n + \| f \|_{S^2} \leqq 1$ в силу выбора ε_n. Тем самым $\varphi_n \in A(D \setminus (V \cup E))$ и значит $\alpha(D \setminus V) - \varepsilon \leqq |f'(\infty)| = \lim |\varphi_n'(\infty)| \leqq \alpha(D/(V \cup E))$. Отсюда, ввиду произвольности ε следует наше утверждение.

Ясно, что из 2° следует 3° при любыми $c \geqq 1$ и $r \geqq 1$ и что из 3° вытекает 4°.

Покажем, что из 3° вытекает 1°. Действительно, пусть $f \in A(S^2, V)$ произвольна и $g(z)$ — непрерывно дифференцируемая функция с носителем в круге $\Delta(z_0, \delta)$. Тогда, по лемме 2 будем иметь

$$\left| \iint f(z) \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} dxdy \right| < 2\pi\delta\, \omega(f, 2\delta) \left\| \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} \right\|_{S^2} \alpha(\Delta(z_0, \delta) \setminus V).$$

Заменяя здесь, в силу 3°, $\alpha(\Delta(z_0, \delta) \setminus V)$ на $c\alpha(\Delta(z_0, r\delta) \setminus (V \cup E))$, получим, что для f удовлетворяется условие 2° теоремы 1, где вместо D взята вся плоскость $\mathbf{C}$. По теореме 1 f приближается на S^2 функциями из $A(S^2, V)$, аналитическими на E, откуда, ввиду произвольности f, следует утверждение.

Из 4° следует 1°. Доказательство этого утверждения аналогично доказательству одной теоремы Витушкина ([2], стр. 283), поэтому мы не будем его подробно приводить, а только наметим те места, которые делают его применимым в нашей ситуации.

Допустим, что 1° неверно. Тогда неверно 3° и значит для $c = r = 10$ найдутся z_1 и $\delta_1 > 0$, такие, что

$$\alpha(\Delta(z_1, \delta_1) \setminus V) > 10\alpha(\Delta(z_1, 10\delta_1) \setminus (V \cup E)). \tag{5}$$

Положим $V_1 = V \cap \Delta(z_1, 2\delta_1)$, $E_1 = E \cap \overline{\Delta(z_1, 2\delta_1)}$. Тогда $\Delta(z_1, \delta_1) \setminus (V \cup E) = \Delta(z_1, \delta_1) \setminus (V_1 \cup E_1)$ и из (5) и монотонности $\alpha(\cdot)$ получим

6) $$\alpha(\Delta(z_1, \delta_1)\setminus V_1) > 10\,\alpha(\Delta(z_1, \delta_1)\setminus(V_1 \cup E_1)).$$

Но тогда E_1 не является аналитически пренебрежимым относительно V_1, так как в противном случае согласно 2° имели бы $\alpha(\Delta(z_1, \delta)\setminus V_1 = \alpha(\Delta(z_1, \delta_1\setminus(V_1 \cup E_1))$. Значит, для V_1 и E_1 нарушается условие 3° и при $c = r = 10^2$ найдутся точка z_2 и число $\delta_2 > 0$, такие, что

$$\alpha(\Delta(z_2, \delta_2)\setminus V_1)) > 10^2\,\alpha(\Delta(z_2, 10^2\delta_2)\setminus(V_1 \cup E_1)).$$

Повторяя рассуждения упомянутого выше доказательства теоремы Витушкина, получим, что имеют место соотношения $\delta_2 < \delta_1/2$, $\Delta(z_2, \delta_2) \subset \Delta(z_1, 2\delta_1)$ $\alpha(\Delta(z_2, \delta_2)\setminus V > 10^2\,\alpha(\Delta(z_2, 10^2\delta_2)\setminus(V \cup E))$.

Продолжая таким образом, получим последовательности $\delta_n > 0$ и z_n такие, что

(7) $$\delta_{n+1} < \delta_n/2,\ \Delta(z_{n+1}, \delta_{n+1}) \subset \Delta(z_n, 2\delta_n),$$
$$\alpha(\Delta(z_n, \delta_n)\setminus V) > 10^n\,\alpha(\Delta(z_n, 10^n\delta_n)\setminus(V \cup E)).$$

Последовательность z_n сходится и если z_0 ее предел, то для любого n имеет место неравенство $|z_n - z_0| < 4\delta_n$. Тем самым имеем включения $\Delta(z_n, \delta_n) \subset \Delta(z_0, 5\delta_n)$ и $\Delta(z_0, (10^n - 4)\delta_n) \subset \Delta(z_n, 10^n\delta_n)$. Тогда, ввиду (7) и монотонности $\alpha(\cdot)$ получим

(8) $$\alpha(\Delta(z_0, 5\delta_n)\setminus V) > 10^n\,\alpha(\Delta(z_0, (10^n - 4)\delta_n)\setminus(V \cup E)).$$

Отсюда следует, что $z_0 \in E$. Действительно, если это не так, то найдется n_0, что при $n \geq n_0$ будем иметь $\Delta(z_0, 5\delta_n) \cap E = \varnothing$ и $10^n - 4 > 5$. Тогда из (8) вытекает $\alpha(\Delta(z_0, 5\delta_n)\setminus V) > 10^n\alpha(\Delta(z_0, 5\delta_n)\setminus(V \cup E)) = 10^n\,\alpha(\Delta(z_0, 5\delta_n)\setminus V)$, что невозможно, ввиду неотрицательности $\alpha(\cdot)$.

Из (8) следует, что для z_0 условие 4° нарушается. Действительно, пусть $c > 0$, $\delta_0 > 0$, $r \geq 1$ произвольны. Если n достаточно большое, то $10^n > c$, $10^n - 4 > r$, $5\delta_n < \delta_0$ и значит для $\delta = 5\delta_n < \delta_0$ будем иметь

$$\alpha(\Delta(z_0, \delta)\setminus V) > c\,\alpha(\Delta(z_0, r\delta)\setminus(V \cup E)),$$

что противоречит 4°.

Из 5° следует 4°. Действительно, если $R(E) = \mathbf{C}(E)$, то, как известно, для любого $z \in E$ будем иметь

(9) $$\lim_{\delta \to 0} \frac{\alpha(\Delta(z, \delta)\setminus E)}{\delta} = a(z) > 0.$$

Пусть теперь $z \in E$ произвольно. Если $z \in \partial V \cap E$, то условие 4° имеет место по предположению. Если $z \in V$, то $\alpha(\Delta(z, \delta)\setminus V) = 0$ при достоточно малом δ и 4° снова имеет место. Если $z \in S^2\setminus\overline{V}$, то при достаточно малом δ $\Delta(z, \delta)\setminus V = \Delta(z, \delta)$ и тогда выполнения 4° следует из (9).

Обратно, пусть выполняется 4° и $E \subset S^2/\overline{V}$. Тогда для $z \in E$ при достаточно малом δ $\Delta(z, \delta)\setminus V = \Delta(z, \delta)$ и 4° совпадает с (9), что достаточно, как известно, для равенства $R(E) = \mathbf{C}(E)$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Витушкин, А. Г.: Аналитическая емкость множеств в задачах теории приближения. Усп. мат. наук, XXII, вып. 6 (138), (1967), 142 — 198.
2. Гамелин, Т.: Равномерные алгебры. М., 1973.

Постъпила на 28. I. 1977 г.

ANALYTIC NEGLIGEABLE SETS

P. G. Boyadžiev

(SUMMARY)

Let V be an open set in the Riemann sphere S^2 and $E \subset S^2$ be a compact set. We study, in terms of the Vytushkin's approximation theory, the conditions under which every analytic in V function can be approximated uniformly in S^2 by functions, which are analytic in the neighbourhood of $E \cup V$.