ЕНТРОПИЙНО УСЛОВИЕ ЗА ЕКВИВАЛЕНТНОСТ НА МАРКОВСКИ МЕРКИ

Васил Зашев

В настоящата работа се разглежда ентропията като условие за еквивалентност на мерки, породени от редици случайни величини (случайни процеси с дискретно време). Особено внимание е отделено на марковски процес с краен брой състояния (марковска верига). Доказано е едно достатъчно условие за еквивалентност на мерки, породени от такива процеси. Показани са някои случаи, в които това условие е и необходимо.

1°. ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Нека са дадени пространствата с мярка $(X, \mathbf{A}, \mu)$ и $(X, \mathbf{A}, \tilde{\mu})$. Мярката $\tilde{\mu}$ се нарича абсолютно непрекъсната относно мярката μ, ако за всяко измеримо $A \in \mathbf{A}$, за което $\mu(A)=0$, и $\tilde{\mu}(A)=0$. Означаваме с $\tilde{\mu} \ll \mu$. Ако и μ е абсолютно непрекъсната относно $\tilde{\mu}$, то мерките се наричат взаимно абсолютно непрекъснати или еквивалентни; означаваме с $\mu \sim \tilde{\mu}$. Ако съществува измеримо множество $B \in \mathbf{A}$, такова, че $\mu(B)=0$, а $\tilde{\mu}(B)=0$, то μ и $\tilde{\mu}$ се наричат сингулярни. Ако мярката $\tilde{\mu}$ е абсолютно непрекъсната относно мярката μ, то по теоремата на Радон—Никодим съществува функция $p(x)$, такава, че $p(x)\,d\mu = d\tilde{\mu}$ (вж. напр. [2]).

Ако $\mu \sim \tilde{\mu}$, то под ентропия на мярката $\tilde{\mu}$ спрямо мярката μ ще разбираме

$$H(\tilde{\mu}/\mu) = -\int_x \log p(x)\,d\mu$$

и под ентропийно разстояние между μ и $\tilde{\mu}$

$$H(\mu, \tilde{\mu}) = H(\mu/\tilde{\mu}) + H(\tilde{\mu}/\mu).$$

Ако мерките μ и $\tilde{\mu}$ се задават съответно с векторите $\{p_i\}_{i=1}^N$ и $\{q_i\}_{i=1}^N$, то

$$H(\mu, \tilde{\mu}) = -\sum_{i=1}^{N} (p_i - q_i) \log \frac{q_i}{p_i}.$$

По-нататък ентропийното разстояние ще използуваме само в такъв вид. За неговите свойства ще отбележим следното: $H(\mu, \tilde{\mu}) \geqq 0$,

$$H(\mu, \tilde{\mu}) = 0 \Leftrightarrow \mu \equiv \tilde{\mu}, \quad \text{и} \quad H(\mu, \tilde{\mu}) < \infty \Leftrightarrow \mu \sim \tilde{\mu}.$$

Ако ни е дадена редицата от случайни величини $\xi_1, \xi_2, \ldots$, то за нея съществува вероятностна мярка μ в пространството R^∞, еднозначно определена от n-мерните функции на разпределение $F_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P(\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, \ldots, \xi_n < x_n)$. Това ни гарантира известната в теорията на вероятностите фундаментална теорема на Колмогоров (вж. напр. [2]).

Нека $\{\xi_t, t \in T\}$, $T = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ е марковски процес с дискретно време и μ е мярката върху този процес. n-мерните проекции μ_n на μ върху R_n се задават с

$$\int_{A_1} d\mu_1 \int_{A_2} P_1(x_1, dx_2) \cdots \int_{A_n} P_{n-1}(x_{n-1}, dx_n),$$

$x_i \in A_i$, $A_i \in \mathbf{B}$ — бореловата σ-алгебра в R. Тук μ_1 е началното разпределение, а $P_i(x_i, A)$ — преходните вероятности на марковския процес.

Да означим с U_i σ-алгебрата, породена от цилиндричните множества от вида $\{x;\ x_i \in A_i,\ A_i \in \mathbf{B}\}$, $x = \{x_1, x_2, \ldots\} \in R^\infty$.

Ще казваме, че за някаква мярка ν е изпълнен законът за нулата и единицата, ако σ-алгебрата $\mathbf{T} = \bigwedge_{n=1}^{\infty} \bigvee_{i=n}^{\infty} U_i$ е тривиална (mod ν), т. е. тя се състои от множества с мярка 0 или 1.

Ще разгледаме марковски процеси, за които е изпълнен законът за нулата и единицата.

Нека μ се определя от марковския процес $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$, а $\tilde{\mu}$ — от марковския процес $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n, \ldots$

Теорема 1. Да допуснем, че за мярката $\tilde{\mu}$ е изпълнен законът за нулата и единицата. За да е абсолютно непрекъсната тази мярка относно мярката μ, е необходимо и достатъчно да се изпълняват следните условия:

а) $\tilde{\mu}_n \ll \mu_n$, $n = 1, 2, \ldots$;

б) за произволно $q > 1$ $\int_X \rho_n^{1/q} d\mu$ не клони към 0.

Ако за някое (а тогава и за всички) $q > 1$ условие б) не се изпълнява то мерките са сингулярни.

Пояснение. Тук X е пространството от всевъзможните траектории на марковския процес. В случая, когато разглеждаме реални случайни величини, $X = R^\infty$. $\rho_n(X) = \frac{d\tilde{\mu}_n}{d\mu_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$; $x = (x_1, x_2, \ldots) \in R^\infty$ и ако $p_i(x_i, x_{i+1}) = \frac{d\tilde{P}_i(x_i, \cdot)}{dP_i(x_i, \cdot)}(x_{i+1})$, то

$$\rho_n(x) = \rho_1(x_1) \cdot p_1(x_1, x_2) \cdots p_{n-1}(x_{n-1}, x_n).$$

Теорема 1 е доказана в [1] — теорема 2.

2°. ЕНТРОПИЙНО УСЛОВИЕ ЗА ЕКВИВАЛЕНТНОСТ

Да разгледаме марковски процеси с дискретно време и краен брой състояния. Нека мерките μ и $\tilde{\mu}$ се задават съответно с векторите $\{p_0(i)\}_{i=1}^N$ и $\{q_0(i)\}_{i=1}^N$ и матриците $\{p_n(i, j)\}_{i,j=1}^N$ и $\{q_n(i, j)\}_{i,j=1}^N$. По-нататък с μ и $\tilde{\mu}$ ще означаваме именно такива мерки. Да фиксираме n и i. Разглеждаме вероятностите, зададени с $\{p_n(i, j)\}_{j=1}^N$ и $\{q_n(i, j)\}_{j=1}^N$. Ако μ_n и $\tilde{\mu}_n$—n-мерните проекции на μ и $\tilde{\mu}$, са еквивалентни, то $p_n(i, j)=0 \Leftrightarrow q_n(i, j)=0$, и можем да напишем ентропийното разстояние

$$H_i^n = -\sum_{j=1}^N (p_n(i, j)-q_n(i, j)) \log \frac{q_n(i, j)}{p_n(i, j)}$$

и $H_i^n < \infty$.

Ако $\mu_n \sim \tilde{\mu}_n$, то това е изпълнено за всяко i и

$$H^n = \sum_{i=1}^N H_i^n < \infty,$$

а също така

$$H^0 = -\sum_{i=1}^N (p_0(i)-q_0(i)) \log \frac{q_0(i)}{p_0(i)} < \infty.$$

Обратно, ако $\sum_{k=0}^n H_k < \infty$, то и $\mu_n \sim \tilde{\mu}_n$.

Ще дефинираме ентропийното разстояние между μ и $\tilde{\mu}$ като

$$\tilde{H}(\mu, \tilde{\mu}) = \sum_n H_n. \tag{0}$$

Ще покажем, че $\tilde{H}(\mu, \tilde{\mu}) < \infty$ е едно достатъчно (но не и необходимо) условие за еквивалентност на мерките μ и $\tilde{\mu}$. То става необходимо при някои достатъчно общи предположения.

Без доказателство ще формулираме следните две очевидни твърдения:

Лема 1. Нека $a_k > 0$, $b_k > 0$ и $\frac{a_k}{b_k} \to c$, $c < \infty$. Тогава $\sum_n a_n < \infty$ тогава и само тогава, когато $\sum_n b_n < \infty$.

Лема 2. За всяко a, b, $0 < a$, $0 < b$,

$$(a^2-b^2) \log \frac{a}{b} \geqq (a-b)^2.$$

Теорема 2. За да бъдат мерките μ и $\tilde{\mu}$ взаимно абсолютно непрекъснати, е достатъчно

$$\tilde{H}(\mu, \tilde{\mu})<\infty.$$

Доказателство

$$\tilde{H}(\mu, \tilde{\mu})=-\sum_{n}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}(p_n(i, j)-q_n(i, j))\ \log\frac{q_n(i, j)}{p_n(i, j)}<\infty.$$

Това означава, че $p_n(i, j)=0 \Leftarrow\Rightarrow q_n(i, j)=0$, т. е. $\mu_n \sim \tilde{\mu}_n$ — n-мерните проекции на μ и $\tilde{\mu}$ са взаимно абсолютно непрекъснати.

Да фиксираме i и j и разгледаме реда

$$-\sum_{n}(p_n(i, j)-q_n(i, j))\log\frac{q_n(i, j)}{p_n(i, j)}.$$

По лема 2

$$(1)\qquad -\sum_{n}(p_n(i, j)-q_n(i, j))\log\frac{q_n(i, j)}{p_n(i, j)}\geqq\sum_{n}(\sqrt{p_n(i, j)}-\sqrt{q_n(i, j)})^2.$$

Да означим в теорема 1 $\int\limits_X \rho_n^{1/2}(x)d\mu=I_n$.

Лесно се проверява верността на следната верига от твърдения:

$$\mu\sim\tilde{\mu}\Leftarrow\Rightarrow\Pi\frac{I_{n+1}}{I_n}\ \text{е сходящо}\ \Leftarrow\Rightarrow\sum_{n}\left(1-\frac{I_{n+1}}{I_n}\right)<\infty,$$

като използуваме, че в дискретния случай $\int\limits_X \rho_n^{1/2}(x)d\mu=\int\limits_X\left(\frac{1}{\rho_n(x)}\right)^{1/2}d\tilde{\mu}$.

Тук

$$a_i^n=\sum_{x_1x_2\ldots x_{n-1}}\sqrt{q_0(x)p_0(x)p_1(x_1, x_2)q_1(x_1, x_2)\ldots p_{n-1}, x_{n-1}, i)q_{n-1}(x_{n-1}, i)}$$

(това означение принадлежи на Лодкин [1]). И

$$(2)\qquad 1-\frac{I_{n+1}}{I_n}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\frac{a_i^n}{\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^n}\sum_{j=1}^{N}(\sqrt{p_n(i, j)}-\sqrt{q_n(i, j)})^2.$$

Тъй като $a_i^n/\sum\limits_{k=1}^{N}a_k^n<1$, то поради (1) $\sum\limits_{n}(1-I_{n+1}/I_n)<\infty$, което означава $\mu\sim\tilde{\mu}$. С това теоремата е доказана.

Ще отбележим, че ако съществува $\delta>0$ такова, че

(3) $$p_n(i, j)\geqq\delta, \quad q_n(i, j)\geqq\delta, \quad p_0(i)\geqq\delta, \quad q_0(i)\geqq\delta$$

за всяко $i=1, 2, \ldots, N$, $j=1, 2, \ldots, N$ и $n=1, 2, \ldots,$ то необходимо и достатъчно условие за еквивалентност между μ и $\tilde{\mu}$ е $\tilde{H}(\mu, \tilde{\mu})<\infty$.

Достатъчността следва от теорема 2.

Необходимост. Да разгледаме

$$a_i^n=\sum_{x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}} \sqrt{p_0(x_1) q_0(x_1) p_1(x_1, x_2) q_1(x_1, x_2) \ldots p_{n-1}(x_{n-1}, i) q_{n-1}(x_{n-1}, i)}$$

$$\geqq\delta \sum_{x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}} \sqrt{p_0(x_0) q_0(x_1) p_1(x_1, x_2) q_1(x_1, x_2) \ldots p_{n-2}(x_{n-2}, x_{n-1}) q_{n-2}(x_{n-2}, x_{n-1})}=\delta I_{n-1}$$

Тогава

$$1-\frac{I_{n+1}}{I_n}\geqq\frac{\delta}{2} \frac{I_{n-1}}{I_n} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=}^{N} (\sqrt{p_n(i, j)}-\sqrt{q_n(i, j)})^2.$$

Тъй като $\mu\sim\tilde{\mu}$, то $I_{n+1}/I_n \to 1$ и от известно място нататък

(4) $$\frac{I_{n-1}}{I_n}\geqq\frac{1}{2}.$$

Тогава е сходящ редът

$$\sum_n \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} p_n(i, j) \left(1-\sqrt{\frac{q_n(i, j)}{p_n(i, j)}}\right)^2 \geqq\delta \sum_n \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \left(1-\sqrt{\frac{q_n(i, j)}{p_n(i, j)}}\right)^2.$$

Последното показва, че $q_n(i, j)/p_n(i, j) \to 1$ при фиксирани i и j. Но тогава

$$\frac{-p_n(i, j)\left(1-\frac{q_n(i, j)}{p_n(i, j)}\right) \log \frac{q_n(i, j)}{p_n(i, j)}}{p_n(i, j)\left(1-\sqrt{\frac{q_n(i, j)}{p_n(i, j)}}\right)^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} c=4$$

и по лема 1 е сходящ редът

$$-\sum_n (p_n(i, j)-q_n(i, j)) \log \frac{q_n(i, j)}{p_n(i, j)},$$

т. е. $\tilde{H}(\mu, \tilde{\mu})<\infty$.

Едно по-слабо условие, при което $H(\mu, \tilde{\mu})<\infty$ става необходимо условие за еквивалентност, е следното.

Нека за мерките μ и $\tilde{\mu}$ е изпълнено

$$(5)\qquad \sum_{i=1}^{N}\sqrt{p_{n-1}(x_{n-1},i)\,q_{n-1}(x_{n-1},i)}\sum_{j=1}^{N}\left(\sqrt{p_n(i,j)}-\sqrt{q_n(i,j)}\right)^2\geq\delta_1 H^n$$

за някакво $\delta_1>0$. Тогава

Теорема 3. Ако за мерките μ и $\tilde{\mu}$ е изпълнено условие (5), то необходимо и достатъчно условие за тяхната еквивалентност е

$$\tilde{H}(\mu,\tilde{\mu})<\infty.$$

Доказателство. Достатъчността следва от теорема 2.

Необходимост. Да развием (2):

$$1-\frac{I_{n+1}}{I_n}=\frac{1}{2I_n}\sum_{x_1}\sqrt{p_0(x_1)\,q_0(x_1)}\sum_{x_2}\sqrt{p_1(x_1,x_2)\,q_1(x_1,x_2)}$$

$$\cdots\sum_{i=1}^{N}\sqrt{P_{n-1}(x_{n-1},i)\,q_{n-1}}\sum_{j=1}^{N}\left(\sqrt{p_n(i,j)}-\sqrt{q_n(i,j)}\right)^2$$

$$\geq\frac{1}{2I_n}\sum_{x_1}\sqrt{p_0(x_1)\,q_0(x_1)}\sum_{x_2}\sqrt{p_1(x_1,x_2)\,q_1(x_1\,x_2)}$$

$$\cdots\sum_{x_{n-1}}\sqrt{p_{n-2}(x_{n-2},x_{n-1})\,q_{n-2}(x_{n-2},x_{n-1})}\,.\,\delta H^n=\frac{\delta H^n}{2}\,\frac{I_{n-1}}{I_n}=B_n$$

и поради (4) от известно място нататък

$$B_n\geq\frac{\delta}{4}H^n,$$

т. е. $\frac{\delta}{4}\sum_n H_n<\infty$ и следователно

$$\tilde{H}(\mu,\tilde{\mu})<\infty,$$

с което теоремата е доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лодкин, А. А.: Абсолютная непрерывность мер, соответствующих марковским процессам с дискретным временем. ТВ и ее применения, 16 (1971).
2. Обретенов, А.: Теория на вероятностите. С., 1974.

Постъпила на 28. I. 1977 г.

ENTROPIEBEDINGUNG FÜR DIE ÄQUIVALENZ VON MARKOWSCHEN MASSEN

W. Saschew

(ZUSAMMENFASSUNG)

Es seien zwei Räume $(X, \mathbf{A}, \mu)$, $(X, \mathbf{A}, \tilde{\mu})$ mit entsprechenden Massen μ, $\tilde{\mu}$ gegeben. $\tilde{\mu}$ wird absolut stetig bez. μ genannt, falls für jedes messbare $A \in \mathbf{A}$ mit $\mu(A)=0$ auch $\tilde{\mu}(A)=0$ gilt. Wenn jedes der Masse μ, $\tilde{\mu}$ absolut stetig bez. des anderen ist, μ und $\tilde{\mu}$ werden als äquivalent bezeichnet $(\mu \sim \tilde{\mu})$. Weiter betrachtet man Markowsche Prozesse mit diskretem Zeitablauf und endlichem Zustandssystem. Für die beiden Systeme definiert man durch (0) die Entropieentfernung $\tilde{H}(\mu, \tilde{\mu})$ zwischen μ und $\tilde{\mu}$.

Das Hauptergebnis ist Theorem 2, wonach $\tilde{H}(\mu, \tilde{\mu}) < \infty$ eine hinreichende Bedingung für die Äquivalenz von μ und $\tilde{\mu}$ ist. Falls (5) gilt, ist diese Bedingung zugleich notwendig (Theorem 3).