ЕДНА ТЕОРЕМА ОТ ТОПОЛОГИЧНАТА ДИНАМИКА

Тома В. Тонев

1. Науката, носеща краткото название топологична динамика, възникна отпреди двадесетина години в „стиковете" на теорията на локално компактните абелеви групи, класическата динамика, функционалния анализ и топологията. Въпросите, с които тя се занимава, са свързани с изучаването в негладки ситуации на задачи от класическата динамика. С това в същност се изчерпва и общото на топологичната с класическата динамика — методите ѝ принадлежат вече на други области.

Нека X е хаусдорфово топологично пространство. За топологичната група G се казва, че действува непрекъснато върху X, ако е зададено представяне $T: g \cdots \to T(g) = T(X, g)$ на групата G в групата на хомеоморфизмите на X, при което съответствието $(g, x) \cdots \to T(g)x$ е непрекъснато по двете си променливи. При това X се нарича топологична система или G-пространство. Ще отбележим изрично, че в общия случай не се изисква никаква гладкост нито за пространството X, нито за „времето" G за разлика от класическата динамика, където реалната права $\mathbf{R}$ (времето) действува върху гладки многообразия винаги гладко.

Действието на една група G върху X се нарича ефективно, ако равенството $T(g)x = x$ е възможно само в случай, че $g = e$. Орбита на точката $x \in X$, както и в класическия случай, се нарича множеството $[x] = \{y \in X \mid y = T(g)x, g \in G\}$. Хомеоморфизмът $F: X \to X$ се нарича: от тип G_0, ако запазва орбитите, т. е. ако $F([x]) = [F(x)]$ за всяко $x \in X$; от тип G_1 — ако съществува такъв непрекъснат автоморфизъм $\gamma: G \to G$, че $F(T(g)x) = T(\gamma(g))Fx$. За по-голяма точност G_1-хомеоморфизмите се означават чрез двойки (γ, F), като към F се прибавя съответният му автоморфизъм γ. В случай, че γ съвпада с идентитета, G_1-хомеоморфизмът F се нарича още от тип G. В алгебричната топология G-хомеоморфизмите са обект на детайлно изучаване от определена гледна точка. За хомеоморфизма $F: X \to X$ се казва, че сплита хомеоморфизмите $A: X \to X$ и $B: X \to X$, ако върху X тъждествено е изпълнено условието $FA = BF$. В такъв случай F се нарича още подобие, а A и B — подобни хомеоморфизми.

Една от задачите, с които се занимава топологичната динамика в момента, е да се изучат условията, при които два хомеоморфизма A и B допускат за сплитащи само подобията от вид G_1. Тази задача, тясно свързана със задачите за устойчивост, е формулирана отдавна за частния случай, когато динамичната система има само една орбита, а именно, когато $X = G$. За групи на Ли още в началото на века Поанкаре доказа, че само G_1-подобията, т. е. суперпозициите на автоморфизми и трансла-

ции (т. нар. „афинни“ съответствия) могат да сплитат G-хомеоморфизмите (т. е. автоморфизмите). За произволни свързани компактни групи същият въпрос бе разглеждан от Аров [1] през 1963 г. Той намери система от достатъчни условия, за да бъде от тип G_1 (т. е. афинно) всяко подобие, сплитащо два произволни G_1-хомеоморфизма. Освен условието за крайномерност на групата той налагаше някои ергодични условия за G_1-хомеоморфизмите. Ще припомним, че един автоморфизъм A на компактната група G се нарича ергодичен, ако всяка инвариантна (т. е. удовлетворяваща условието $f(A(g))=f(g)$) и непрекъсната реална функция върху G е постоянна (вж. и [4]). В частност Аров доказа, че само G_1-подобия могат да сплитат ергодичните хомеоморфизми от тип G. Валтерс [2], използувайки L^p-техника, първо за тора, а после и за произволна свързана компактна група намери други достатъчни условия за решаване на задачата за подобието. Неговите ограничения се отнасят до спектъра на афинните съответствия.

Тези резултати бяха обобщавани в различни направления. Сред многобройните публикации на тази тема ще споменем работите на Хоури и Пери [6], Раджагопалан и Шрайбер [7], Валтерс [5], които разглеждат специални динамични системи — т. нар. килмногообразия, и използват главно методи от теорията на L^p-пространствата. Колкото и странно да е, но тези автори изглежда не са познавали една класическа вече теорема на Ван Кампен, с чиято помощ се съкращават голяма част от разсъжденията им. Става дума за факта, че всяка непрекъсната и неанулираща се комплексна функция, дефинирана върху свързана компактна група, се представя еднозначно като произведение на характер на групата и логаритмуема функция.

Лин [8], използувайки полученото от него обобщение на теоремата на Ван Кампен, доказва теоремата за подобието на G_1-хомеоморфизмите за произволни свързани компактни групи, действуващи на себе си, и за специални ергодични сплитащи хомеоморфизми, наречени от него почти крайномерни. Малко преди това, през 1969 г., Горин и Лин [9], които първи обърнаха внимание на значението на теоремата на Ван Кампен за анализа, разпространиха теоремите на Д. Аров за компактни G-пространства с ефективно действие. Техните резултати бяха усилени от Гордон [10], ученик на Горин. Той замени ефективното с по-слабо, макар и все още доста ограничително действие (така например едно от неговите изисквания беше да бъдат навсякъде гъсто в X точките, върху чиито орбити групата действува ефективно). В [12, 13, 14 и 16] са обобщени резултатите на Аров, Горин, Лин и Гордон чрез въвеждането на т. нар. насочено действие на групата, което обхваща като частни случаи както ефективното, така и действието на Гордон, и което не изисква съществуването на ефективни компоненти.

Ние ще се освободим от изискването за запазване на орбитите от непрекъснатите съответствия, като докажем съответна структурна теорема за случая на метрични динамични системи. За простота ще разглеждаме само ефективни действия на фиксирана група.

2. Нека G е свързана компактна абелева група, която действува ефективно на свързаното метрично пространство X с метрика ρ.

Дефиниция. Непрекъснатото съответствие $F: X \to X$ ще наричаме правилно, ако за всяко g от G и за всяко x от X в орбитата на елемента Fx има точно една най-близка до елемента $F(T(g)x)$ точка по отношение на ρ.

Теорема 1. Ако F е правилно съответствие на X, най-близката точка до елемента $F(T(g)x)$ в орбитата на Fx се представя във вида $T(\gamma(g).v(g, x))Fx$, за някакъв непрекъснат хомоморфизъм $\gamma: G \to G$ и за някакво непрекъснато съответствие $v: G \times X \to G$, което се свива към единицата за всяко фиксирано x от X, т. е.

$$\rho(F(T(g)x), [Fx]) = \rho(F(T(g)x), T(\gamma(g).v(g, x))Fx).$$

Доказателство. По дефиниция $\inf\limits_{h \in G} \rho(FT(g)x, T(h)Fx) = \rho(FT(g)x, Fx])$ се достига само за точката $T(u(g, x))Fx$, $u(g, x) \in G$, т. е. $\rho(FT(g)x, [Fx]) = \rho(FT(g)x, T(u(g, x))Fx)$. Ще покажем, че $u(g, x) \in C(G \times X, G)$. Ако $x_\alpha \to x_0$ и $g_\alpha \to g_0$, то $F(T(g_\alpha)x_\alpha \to FT(g_0)x_0$ и понеже $\rho(FT(g_0)x_0, [Fx_0]) = \rho(FT(g_0)x_0, T(u(g_0, x_0)Fx_0)$, то $\rho(FT(g_\alpha)x_\alpha, [Fx_\alpha]) \to \rho(FT(g_0)x_0, [Fx_0]) = \rho(FT(g_0)x_0, T(u(g_0, x_0))Fx_0)$ поради непрекъснатостта на ρ. Нека $u(g_\beta, x_\beta) \in G$ е една сходяща подредица и $u(g_\beta, x_\beta) \to u_0$. Тогава $T(u(g_\beta, x_\beta))Fx_\beta \to T(u_0)Fx_0$ и следователно $\rho(F(T(g_\beta)x_\beta), T(u(g_\beta, x_\beta)), Fx_\beta) \to \rho(FT(g_0)x_0, T(u_0)Fx_0)$, т. е. $\rho(FT(g_\beta)x_\beta, [Fx_\beta]) \to \rho(FT(g_0)x_0, T(u_0)Fx_0)$. Но по условие $u(g_0, x_0)$ е единственият елемент, в който се достига $\inf\limits_{h \in G} \rho(FT(g_0)x_0), T(h)Fx_0)$, което означава, че $T(u_0)Fx_0 = T(u(g_0, x_0))Fx_0$, или поради ефективността на действието на G, че $u(g_0, x_0) = u_0$. Следователно $u(g_\beta, x_\beta) \to u(g_0, x_0)$ за всяка сходяща подредица за редицата $u(g_\alpha, x_\alpha)$, което поради компактността на G означава, че самата редица $u(g_\alpha, x_\alpha)$ е сходяща и границата ѝ е $u(g_0, x_0)$. И така $u(g, x)$ е непрекъсната функция на $G \times X$ в X. Да фиксираме за момент $x \in X$. Тогава $u(g, x)$ е непрекъснато съответствие на G в себе си и съгласно обобщението на теоремата на Ван Кампен, направено от Лин [8], $u(g, x) = \gamma_x(g).v(g, x)$ за някакъв хомоморфизъм γ_x на G и за свиващото се към e съответствие $v(g, x)$. Непрекъснатото съответствие $x \to \gamma_x$ на X в $\mathrm{Hom}(G)$ има за образ едноточково множество поради свързаността на X и поради пълната несвързаност на $\mathrm{Hom}(G)$ [8]. Като означим този образ с γ, получаваме, че $u(g, x) = \gamma(g) \times v(g, x)$. Следователно $\rho(FT(g)x, [Fx]) = \rho(FT(g)x, T(\gamma(g).v(g, x))Fx)$.

Забележка. В сила е аналогична на горната теорема за съответствия, разстоянието $\rho(T(g)Fx, F([x])$, за които се достига точно на едно място в $F([x])$.

Следствие. Нека F е такова правилно съответствие на X, че за всяко $x \in X$ образът на орбитата на x не се отдалечава от орбитата на образа на кой да е елемент от орбитата на x на разстояние, по-голямо от $\varepsilon > 0$. Тогава точката $T(g)x$ ще се изобразява чрез F в кръговата ε-околност на елемента $T(\gamma(g).v(g, x))Fx$, където γ и v са същите, както в теоремата.

Теорема 2. Нека ергодичният G_1-хомеоморфизъм A удовлетворява условието $\rho(FT(g)Ax, [FAx]) = \rho(FT(g)x, [Fx])$, а G_1-хомеоморфизмът B запазва разстоянието. Ако правилното съответствие F

сплита A и B, то съществуват $\gamma \in \mathrm{Hom}\, G$ и свиващо се съответствие $v: G \to G$, такива, че

$$\rho(FT(g)x, [Fx]) = \rho(FT(g)x, T(\gamma(g) \cdot v(g))Fx).$$

Другояче казано, при горните условия съответствието v от теорема 1 не зависи от втория си аргумент.

Доказателство. Поради сплитащото свойство на F $FA = BF$ и $BFT(g)x = FAT(g)x = FT(g)Ax$. Следователно, от една страна, $\rho(FT(g)x, [Fx]) = \rho(BFT(g)x, B[Fx]) = \rho(BFT(g)x, BT(\gamma(g).v(g, x)Fx) = \rho(FT(g)Ax, T(\gamma(g) \cdot v(g, x))BFx) = \rho(FT(g)Ax, T(\gamma(g) \cdot v(g, x))FAx) = \rho(FT(g)x, [Fx]) = \rho(FT(g)Ax, [FAx]) = \rho(FT(g)Ax, T(u(g, Ax))FAx)$.

Понеже левите страни на двете равенства са равни, то $\rho(FT(g)Ax, T(\gamma(g).v(g, x))FAx) = \rho(FT(g)Ax, T(\gamma(g).v(g, Ax))FAx)$, което поради правилността на F ни дава, че $T(\gamma(g).v(g, x))FAx = T(\gamma(g).v(g, Ax))FAx$. Но G действува ефективно върху X, т. е. $v(g, x) = v(g, Ax)$. Да фиксираме $g_0 \in G$ и да разгледаме непрекъснатата функция $\varphi_\chi(x) = \chi(v(g_0, x))$: $X \to \mathbf{C}$, където χ е някой характер на G. От полученото за v следва, че $\varphi_\chi(x) = \varphi_\chi(Ax)$. Но A е ергодичен по условие, следователно $\varphi_\chi(x) = \chi(v(g_0, x)) = \mathrm{const}$. Понеже това е вярно за всеки характер χ, то и $v(g_0, x) = \mathrm{const}$. Следователно v не зависи от x и

$$\rho(FT(g)x, [Fx]) = \rho(FT(g)x, T(\gamma(g) \cdot v(g))Fx).$$

Като пример да разгледаме безкрайния цилиндър $C = S^1 \times \mathbf{R}$, върху който единичната окръжност S^1 действува ефективно чрез транслациите $T(g)(s, r) = (g \cdot s, r)$, $g, s \in S^1$, $r \in \mathbf{R}$. Ясно е, че всички непрекъснати съответствия на C в себе си са правилни.

3. Изучаването на системи с полугрупово време представлява друго направление в развитието на топологичната динамика, което все още се намира в начален стадий. По-голямата част от публикациите на тази тема не излизат от рамките на изучаването на самите полугрупови действия. Така например в [11] се изучава структурата на орбитите на такива динамични системи, а в [16] — структурата на S_0-хомеоморфизмите. Затрудненията при изучаването на тези системи се дължат на липсата на обратни елементи във времето. За полугрупови действия е в сила следният резултат, подобен на теорема 1:

Теорема 3. Нека върху свързаното метрично пространство Y действува ефективно групата G, а върху топологичното пространство X действува свързана компактна полугрупа S с групово ядро K, за което $H^1(S, K; \mathbf{Z}) = 0$. Тогава за правилното съответствие $F: X \to Y$ ще имаме, $\rho(F(T(X, s)x), [Fx]) = \rho(F(T(X, s)x), T(X, \gamma(s) \cdot v(s, x))Fx)$, където $\gamma \in \mathrm{Hom}(S, G)$, а v е както в теорема 1.

Ще отбележим само, че вместо теоремата на Лин доказателството на тази теорема използува полугруповото ѝ обобщение (вж. [15]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Аров, Д.: О топологическом подобии автоморфизмов и сдвигов компактных коммутативных групп. УМН, XVIII, 5 (1963), 133—138.
2. Walters, P.: Topological conjugacy of affine transformations of tori. Trans. Amer. Math. Soc., 131 (1968), 40—50.
3. Adler, P., Palais, R.: Homeomorphic conjugacy of automorphisms on the torus. Proc. Amer. Math. Soc.. 16 (1965), 1222—1225.
4. Халмош, П.: Лекции по ергодической теории, М., 1959.
5. Walters, P.: Topological conjugacy of affine transformations of compact Abelian groups. Trans. Amer. Math. Soc., 140 (1969), 95—107.
6. Hoare, H., Parry, W.: Affine transformations with quasidiscrete spectrum. J. Lond. Math. Soc., 41 (1966), 88—96.
7. Rajagopalan, M., Schreiber, B.: Ergodic automorphisms and affine transformations of locally compact groups. Pacific J. Math., 38 (1971), 167—176.
8. Лин, В.: Полуинвариантное интегрирование со значениями в группе и некоторые его применения. Матем. сб., 82 (1970), 233—259.
9. Горин, Е., Лин, В.: О топологическом подобии G-линейных преобразований компактов. II Тираспольский симпозиум по общей топологии и ее приложениям. Кишинев, 1969, 24—26.
10. Гордон, А.: О линейном подобии гомеоморфизмов компактных пространств. УМН, XXV, 6 (1970), 221—222.
11. Borego, J., De Vun, E.: Maximal semigroup orbits. Semigroup forum, 4 (1972), 61—72.
12. Тонев, Т.: Некоторые вопросы гармонического анализа на полугруппе и абстрактные динамические системы. Кандидатская диссертация, МГУ, 1973.
13. Тонев, Т.: Об алгебраических подобиях гомеоморфизмов абстрактных динамических систем. УМН, XXIX, 1 (1974), 191—192.
14. Тонев, Т.: Алгебраические подобия динамических гомеоморфизмов при компактном времени. Math. Balcanica, 4 (1974), 609—616.
15. Тонев, Т.: Каноническое разложение отображений полугруппы в алгебре, Докл. БАН, 28 (1975), 291—294.
16. Тонев, Т.: Сохраняющие орбиты гомеоморфизмы абстрактных динамических систем. Год. Соф. унив., Мат. фак., 68 (1973/74), 217—225.

Постъпила на 28. I. 1977 г.

A THEOREM FROM TOPOLOGICAL DYNAMICS

T. V. Tonev

(SUMMARY)

The paper gives a brief review of topological dynamics research for the past fifteen years. The following result is proved for the metrisable dynamic G-systems X: Let the continouous map $F: X \to X$ is such that for every $x \in X$ and for every g from the group G in the orbit of Fx there exists exactly one nearest point to the element $F(T(g)x)$. (Note, that F is not obliged to preserve the orbits of X.) Then the nearest point, described above, has the form $T(\gamma(g) . v(g, x))Fx$, where $\gamma \in \mathrm{Hom}(G)$ and $v(g, x)$ goes to the unit for every fixed $x \in X$. This result is used to solve a G_1-homeomorphism similarity problem. A semigroup version of the main theorem is given.