ПОСТРОЯВАНЕ НА КОНГРУЕНЦИЯ ПРАВИ ОТ ДАДЕН ВИД, СВЪРЗАНА С КИНЕМАТИКАТА НА ТВЪРДО ТЯЛО

Васил Диамандиев

В някои предишни работи показахме, че при специални движения на твърдо тяло конгруенцията, образувана от витловите оси на хеликоидалното движение, принадлежи на даден вид според класификацията в диференциалната геометрия. В настоящата работа ще разгледаме подробно как става построението на такава конгруенция.

1. Единичен вектор на конгруенцията. Нека движението на една твърда координатна система е определено от полюса $O_1(x_0, y_0, z_0)$ и ойлеровите ъгли φ, ψ, θ. Ако между ойлеровите ъгли съществуват релациите

$$\theta=\theta_0=\text{const},\quad \dot{\varphi}=k\dot{\psi}, \tag{1}$$

получаваме едно специално хеликоидално движение, което е прецесионно, тъй като ъгълът на нутацията е постоянен. При движението на твърдо тяло около неподвижна точка това движение съответствува на един от класическите случаи на Ойлер.

Компонентите на ротационния вектор спрямо неподвижната координатна система, като вземем пред вид (1), имат вида

$$\begin{aligned} \omega_x &= k\dot{\varphi}\sin\psi\sin\theta_0, \\ \omega_y &= -k\dot{\psi}\cos\psi\sin\theta_0, \\ \omega_z &= \dot{\psi}(1+k\cos\theta_0). \end{aligned} \tag{2}$$

Големината на ъгловата скорост е

$$\omega=\dot{\psi}\sqrt{1+k^2+2k\cos\theta_0}\ . \tag{3}$$

Величината k е независима от времето, следователно подвижната витлова ос зависи от два параметъра — времето и коефициента k. Нека с v означим ъгъла между хеликоидалната ос и оста Oz. Тогава имаме очевидно

$$\bar{\omega}.\bar{k}=\omega\cos v=\dot{\psi}\sqrt{1+k^2+2k\cos\theta_0}\cos v=\dot{\psi}(1+k\cos\theta_0)$$

и оттук

$$\cos v=\frac{1+k\cos\theta_0}{\sqrt{1+k^2+2k\cos\theta_0}}. \tag{4}$$

Решаваме (4) обратно относно k и получаваме

$$k=\frac{\sin v}{\sin(\theta_0-v)}. \tag{5}$$

Избираме v за втори параметър на конгруенцията. Тогава (2) и (3) добиват вида

$$\begin{aligned}
\omega_x&=\dot\psi\sin\psi\sin\theta_0\frac{\sin v}{\sin(\theta_0-v)},\\
\omega_y&=-\dot\psi\cos\psi\sin\theta_0\frac{\sin v}{\sin(\theta_0-v)},\\
\omega_z&=\dot\psi\frac{\sin\theta_0\cos v}{\sin(\theta_0-v)},\\
\omega&=\frac{\dot\psi\sin\theta_0}{\sin(\theta_0-v)}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Оттук за единичния вектор на конгруенцията витлови оси получаваме

$$\bar e=\sin\psi\sin v\,\bar i-\cos\psi\sin\bar j+\cos v\,\bar k. \tag{7}$$

2. Точка на конгруенцията. От кинематиката на твърдо тяло е известно, че при даден полюс $\bar r_0$ и ротационен вектор $\bar\omega$ точка от витловата ос се определя от формулата

$$\bar A=\bar r_0+\frac{1}{\omega^2}(\bar\omega\times\bar v_0). \tag{8}$$

За простота в изчисленията ще изберем полюса от вида

$$\bar r_0=r\cos\psi\,\bar i+r\sin\psi\,\bar j+z_0\bar k, \tag{9}$$

където r зависи само от втория параметър, а z_0 е константа. Геометрически това означава, че проекцията на полюса върху равнината xOy пада върху линията на възлите (g). Замествайки (9) в (8), получаваме

$$\bar A=r\cos\psi\,\bar i+r\sin\psi\,\bar j+z_0k+\frac{\dot\psi}{\omega}\begin{vmatrix}\bar i & \bar j & \bar k\\ \sin\psi\sin v & -\cos\psi\sin v & \cos v\\ -r\sin\psi & r\cos\psi & 0\end{vmatrix}.$$

Оттук след несложни пресмятания за точката на витловата ос намираме

$$\bar A=\frac{r\sin v\cos(\theta_0-v)}{\sin\theta_0}\left[\cos\psi\,\bar i+\sin\psi\,\bar j\right]+z_0\bar k. \tag{10}$$

Понеже на конгруенцията гледаме като на съвкупност от витлови оси, точката $\bar A$ е точка от построяваната конгруенция.

3. Инварианти на конгруенцията. Известно е, че с всяка конгруенция са свързани редица инвариантни величини, които от своя страна опре-

делят нейните забележителни точки и повърхнини. Според С. П. Фиников тези величини са метричният тензор

(11) $$\gamma_{11}=\bar{e}_t^2,\ \gamma_{12}=\bar{e}_t\cdot\bar{e}_v,\ \gamma_{22}=\bar{e}_v^2$$

и инвариантите

(12) $$e=\bar{e}_t\cdot\bar{A}_t,\ g=\bar{e}_v\cdot\bar{A}_v,\ f=\bar{e}_t\cdot\bar{A}_v,\ f'=\bar{e}_v\cdot\bar{A}_t.$$

В разглеждания случай конгруенцията е построена с векторите

(13) $$\bar{e}=\sin\psi\sin v\ \bar{i}-\cos\psi\sin v\ \bar{j}+\cos v\ \bar{k},$$
$$\bar{A}=\frac{r\sin v\cos(\theta_0-v)}{\sin\theta_0}\left[\cos\psi\ \bar{i}+\sin\psi\bar{j}\right]+z_0\bar{k}.$$

За тази конгруенция съгласно (11) и (12) получаваме

(14) $$\gamma_{11}=\dot{\psi}^2\sin^2 v,\ \gamma_{12}=0,\ \gamma_{22}=1,$$
$$e=0,\ g=0,$$
$$f=\frac{\dot{\psi}\sin v}{\sin\theta_0}(r\sin v\cos(\theta_0-v))',$$
$$f'=-\frac{\dot{\psi}}{\sin\theta_0}\ r\sin v\ \cos v\cos(\theta_0-v).$$

въвеждаме величината

(15) $$\lambda=r\sin v\cos(\theta_0-v),$$

откъдето (14) добиват вида

(16) $$f=\frac{\dot{\psi}\sin v}{\sin\theta_0}\lambda',\quad f'=-\frac{\dot{\psi}}{\sin\theta_0}\ \lambda\cos v.$$

4. Забележителни точки и повърхнини на конгруенциите. Във връзка с околността на лъч от конгруенцията, свързана със стрикционната точка, се въвеждат следните забележителни точки:

а) средна точка

$$\bar{M}=\bar{A}+\frac{\gamma_{12}(f+f')=e\gamma_{22}-g\gamma_{11}}{2(\gamma_{11}\gamma_{22}-\gamma_{12}^2)}\ \bar{e}\ ;$$

б) гранични точки

(17) $$\bar{\Gamma}_1=\bar{A}+m_1\ \bar{e},\ \bar{\Gamma}_2=A+m_2\ \bar{e},$$

където m_1, m_2 са корени на уравнението

(18) $$(\gamma_{11}\gamma_{22}-\gamma_{12}^2)m^2+[g\gamma_{11}+e\gamma_{22}-\gamma_{12}(f+f')]\,m+eg-\frac{(f+f')^2}{4}=0\ ;$$

в) фокални точки

(19) $$\bar{\varphi}_1=\bar{A}+\rho_1\bar{e},\ \bar{\varphi}_2=\bar{A}+\rho_2\bar{e},$$

където ρ_1, ρ_2 са корени на уравнението

(20) $$(\gamma_{11}\gamma_{22}-\gamma_{12}^2)\rho^2+[g\gamma_{11}+e\gamma_{22}-\gamma_{12}(f+f')]\rho+eg-ff'=0.$$

За построената конгруенция (13) тези точки добиват вида

(21) $$\bar{M}_0=\bar{A},\ \bar{\Gamma}_{1,2}=\bar{A}+\varepsilon m\bar{e},\ \bar{\varphi}_{1,2}=\bar{A}+\varepsilon\rho\bar{e}\ (\varepsilon=\pm 1),$$

където

(22) $$m=\frac{f+f'}{2\sqrt{\gamma_{11}\gamma_{22}}},$$

(23) $$\rho=\sqrt{\frac{ff'}{\gamma_{11}\gamma_{22}}}=\frac{1}{\sin\theta_0}\sqrt{-\lambda\lambda'\operatorname{cotg}v}.$$

Геометричното място на тези точки дефинират съответно средната повърхнина, граничните повърхнини и фокалните повърхнини на конгруенцията.

5. Нормален вектор на фокалните повърхнини. Фокалните повърхнини на една конгруенция са тясно свързани с нейните геометрични свойства. За построената конгруенция (13) те съгласно (21) имат вида

(24) $$\bar{\varphi}=\frac{\lambda}{\sin\theta_0}(\cos\varphi\bar{i}+\sin\psi\bar{j})+z_0\bar{k}+\varepsilon\rho[\sin\psi\sin v\bar{i}-\cos\psi\sin v\bar{j}+\cos v\bar{k}],$$

където величината ρ се дава от (23). Оттук намираме

(25) $$\begin{aligned}\bar{\varphi}_t&=\frac{\lambda\dot{\varphi}}{\sin\theta_0}(-\sin\psi\bar{i}+\cos\psi\bar{j})+\varepsilon\rho\sin v\dot{\psi}(\cos\psi\bar{i}+\sin\psi\bar{j}),\\ \bar{\varphi}_v&=\frac{\lambda'}{\sin\theta_0}(\cos\psi\bar{i}+\sin\psi\bar{j})+\varepsilon\rho'(\sin\psi\sin v\bar{i}-\cos\psi\sin v\bar{j}+\cos v\bar{k})\\ &\quad+\varepsilon\rho[\sin\psi\cos v\bar{i}-\cos\psi\cos v\bar{j}-\sin v\bar{k}].\end{aligned}$$

Единичният нормален вектор на (24), който се определя от формулата

$$\bar{l}=\frac{1}{W}(\bar{\varphi}_t\times\bar{\varphi}_v),\ W=|\bar{\varphi}_t\times\bar{\varphi}_v|,$$

добива вида съгласно (25)

(26) $$\begin{aligned}\bar{l}=\frac{1}{W}\Big[&-\frac{\lambda\lambda'}{\sin^2\theta_0}\bar{k}+\frac{\varepsilon\lambda}{\sin^2\theta_0}(\rho\cos v)'(\cos\psi\bar{i}+\sin\psi\bar{j})\\ &-\rho^2\sin^2 v(\sin\psi\sin v\bar{i}-\cos\psi\sin v\bar{j}+\cos v\bar{k})\\ &+\rho\rho'\sin v(\sin\psi\cos v\bar{i}-\cos\psi\cos v\bar{j}-\sin v\bar{k})\Big].\end{aligned}$$

6. Първа основна форма на фокалните повърхнини. От формулите (25) намираме последователно

$$E=\bar{\varphi}_t^2=\dot{\psi}^2\left[\frac{\lambda^2}{\sin^2\theta_0}+\rho^2\sin^2 v\right],$$

(27) $$G=\bar{\varphi}_v^2=\frac{\lambda'^2}{\sin^2\theta_0}+\rho'^2+\rho^2,$$

$$F=\frac{\varepsilon\dot{\psi}}{\sin^2\theta_0}\left[\lambda'\rho\sin v-\lambda(\rho\sin v)'\right]$$

и съответно

(28) $$W=\dot{\psi}\sqrt{[\lambda\lambda'+\rho\sin v(\rho\sin v)']^2+(\rho\cos v)'^2\left(\rho^2\sin v+\frac{\lambda^2}{\sin^2\theta_0}\right)}\,.$$

7. Втора основна форма на фокалните повърхнини. Съгласно известните формули от диференциалната геометрия имаме

(29) $$L=\bar{l}\,.\,\bar{\varphi}_{tt},\ M=\bar{l}\,.\,\bar{\varphi}_{tv},\ N=\bar{l}\,.\,\bar{\varphi}_{vv}.$$

От (25) намираме последователно

$$\bar{\varphi}_{tt}=\frac{\lambda}{\sin\theta_0}\dot{\psi}^2(-\cos\psi\,\bar{i}-\sin\psi\,\bar{j})+\varepsilon\rho\dot{\psi}^2(-\sin\psi\sin v\,\bar{i}+\cos\psi\sin v\,\bar{j})$$

$$+\frac{\lambda}{\sin\theta_0}\ddot{\psi}(-\sin\psi\,\bar{i}+\cos\psi\,\bar{j})+\varepsilon\rho\ddot{\psi}\sin v(\cos\psi\,\bar{i}+\sin\psi\,\bar{j}),$$

(30) $$\bar{\varphi}_{tv}=\dot{\psi}\frac{\lambda'}{\sin\theta_0}(-\sin\psi\,\bar{i}+\cos\psi\,\bar{j})+\varepsilon(\rho\sin v)'\dot{\psi}(\cos\psi\,\bar{i}+\sin\psi\,\bar{j}),$$

$$\bar{\varphi}_{vv}=\frac{\lambda''}{\sin\theta_0}(\cos\psi\,\bar{i}+\sin\psi\,\bar{j})+\varepsilon\rho''(\sin\psi\sin v\,\bar{i}-\cos\psi\sin v\,\bar{j}+\cos v\,\bar{k})$$

$$+2\varepsilon\rho'(\sin\psi\cos v\,\bar{i}-\cos\psi\cos v\,\bar{j}-\sin v\,\bar{k})$$

$$+\varepsilon\rho(-\sin\psi\sin v\,\bar{i}+\cos\psi\sin v\,\bar{j}-\cos v\,\bar{k}).$$

Умножавайки (26) с (30), получаваме

$$L=-\frac{\varepsilon\dot{\psi}^2}{W_1}(\rho\cos v)'\left(\frac{\lambda^2}{\sin^2\theta_0}+\rho^2\sin^2 v\right),$$

$$M=\frac{\dot{\psi}}{W_1}(\rho\cos v)'\left[\frac{\lambda}{\sin\theta_0}(\rho\sin v)'-\frac{\lambda'}{\sin\theta_0}\rho\sin v\right],$$

(31) $$N=\frac{\varepsilon}{W_1}\left[\frac{\lambda\lambda''}{\sin^2\theta_0}(\rho\cos v)'-\frac{\lambda\lambda'}{\sin^2\rho_0}(\rho\cos v)''+\rho\sin v(\rho^2+2\rho'^2-\rho\rho'')\right],$$

$$W_1=\frac{W}{\dot{\psi}}\,.$$

8. Асимптотични линии на фокалните повърхнини. Известно е, че асимптотичните линии на една повърхнина се определят от втората основна форма

$$L\,dt^2+2M\,dt\,dv+N\,dv^2=0. \tag{32}$$

В разглеждания случай имаме две фокални повърхнини (за $\varepsilon=\pm 1$) и съответно двойка асимптотични линии. Известно е, че една конгруенция е от типа W, когато асимптотичните линии на фокалните ѝ повърхнини си съответствуват, т. е. се изразяват с едно и също диференциално уравнение. В случая, както се вижда от (31), това е възможно, когато

$$M=0. \tag{33}$$

Тогава втората основна форма добива вида

$$\varepsilon(L\,dt^2+N\,dv^2)=0,$$

или асимптотичните линии симетрично си съответствуват. Оттук следва, че построената конгруенция е от типа W, когато е изпълнено условието (33). Това уравнение очевидно има решенията

$$\rho\cos v=C_1=\text{const} \tag{34}$$

и

$$\lambda=C\rho\sin v,\quad C=\text{const}. \tag{35}$$

Уравнението (34) следва да се отхвърли, понеже тогава $L=0$ и кривината на фокалните повърх ни става нула.

9. Построяване на W-конгруенция. Да разгледаме системата уравнения (23) и (35), т. е.

$$\rho=\frac{1}{\sin\theta_0}\sqrt{-\lambda\lambda'\operatorname{cotg} v}, \tag{36}$$

$$\lambda=C\rho\sin v.$$

От тази система следва

$$\lambda=(\operatorname{cotg} v)^n,\quad \rho=\frac{(\operatorname{cotg} v)^n}{\sin v},\quad n>0. \tag{37}$$

Елементите на първата и на втората квадратична форма добиват сега вида

$$\begin{aligned}
&E=(n+1)\dot{\psi}^2(\operatorname{cotg} v)^{2n},\\
&G=\frac{n(n+1)(n+\cos^2 v)}{\sin^4 v\cos^2 v}(\operatorname{cotg} v)^{2n},\quad F=0,\\
&L=\varepsilon\dot{\psi}^2\frac{(n+1)\cos v}{\sqrt{n+\cos^2 v}}(\operatorname{cotg} v)^n,\quad M=0,\\
&N=\frac{\varepsilon n(n+1)(\operatorname{cotg} v)^n}{\sin^2 v\cos v\sqrt{n+\cos^2 v}}.
\end{aligned} \tag{38}$$

Оттук за гаусовата кривина на фокалните повърхнини получаваме

$$K=\frac{\sin^2 v\cos^2 v}{\operatorname{cotg}^{2n} v\,(n+\cos^2 v)^2}. \tag{39}$$

От (16) и (22) намираме за разстоянието между граничните точки величината

$$d=\frac{\operatorname{cotg}^n v}{\sin v\cos v}(n+\cos^2 v). \tag{40}$$

Релациите (39) и (40) показват, че построената конгруенция отговаря на условието

$$K_1 K_2 d^4=1,$$

което е необходимо и достатъчно условие за W-конгруенция.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фиников, С. П.: Теория конгруэнций. М., 1950.
2. Петканчин, Б.: Диференциална геометрия, С., 1955.
3. Диамандиев, В.: Конгруенция W от хеликоидалните оси на клас прецесионни движения. Год. Соф. унив., Мат. фак., 60 (1967/68), 9—15.

Постъпила на 28. I. 1977 г.

CONSTRUCTION OF LINE CONGRUENCE OF A GIVEN TYPE RELATED TO THE KINEMATICS OF RIGID BODIES

V. Diamandiev

(SUMMARY)

In the present paper a congruence of straight lines is introduced, considered as a set of the helical axes of a given motion. The helical motion is defined by a constant angle of nutation θ_0 and the relation $\varphi=k\psi$. As another parameter of the congruence the angle between the helical axis and the fixed axis Oz is taken. Thus the unit vector of the congruence is uniquely defined. Using the well-known formula for a point on the helical axis the point of the line of the congruence is found. It turns out to be expressed in terms of a function $r(v)$ of the second parameter.

All the basic elements of the congruence — metric tensor, Finikov's coefficient, boundary and focal points and midpoint — are found in terms of the introduced function. The focal surfaces of the congruence determined by the focal points are two and they define a pair of asymptotic lines on them. Now the following question is considered: when the asymptotic lines

of the two focal surfaces will have the same differential equations, i. e. when will they have the same form? From the second quadratic form of the focal surfaces is clear that for the case under consideration that would happen if the second element of the quadric vanishes. The equation of the asymptotic lines then takes the form

$$\varepsilon[Ldt^2+Ndv^2]=0, \quad \varepsilon=\pm 1.$$

Thus, a W-congruence for the particular kinematic example has been constructed.