СПЕЦИАЛНИ ДВУПАРАМЕТРИЧНИ СИСТЕМИ ОТ n-МЕРНИ ЛИНЕЙНИ ПОДПРОСТРАНСТВА В БИПЛАНАРНО ПРОСТРАНСТВО ОТ ХИПЕРБОЛИЧЕН ТИП

Грозьо Станилов, Стефана Стефанова

Означаваме с B_{2n+1} $(n>1)$ $(2n+1)$-мерното реално проективно пространство с абсолют две n-мерни линейни подпространства J и K без общи точки. Петканчин [1] изучава еднопараметрична система от n-мерни линейни подпространства в B_{2n+1}, а Ганчев [3] разглежда n^2+2n-параметрична система от n-мерни линейни подпространства. В [5] е построен каноничен репер на двупараметрична система от n-мерни линейни подпространства в B_{2n+1}.

В [2] се доказва, че през всяка крайна точка M на B_{2n+1} минава точно една безкрайна права на същото пространство. Общите точки на единствената безкрайна права през M с абсолютните подпространства J и K ще наричаме абсолютни проекции на M върху J и K.

В настоящата работа разглеждаме двойка двупараметрични системи от n-мерни линейни подпространства, всяка от които е определена с точките A_i $(i=1, 2, \cdots, n+1)$, съответно $\bar{A}_i$, като точките A_i и $\bar{A}_i$ $(i=1, 2, \cdots n+1)$ имат съвпадащи абсолютни проекции върху J и K. Аналогична задача за двойка роеве прави в тримерното биаксиално пространство от хиперболичен тип за пръв път е разглеждана от автора на [1] в една непубликувана работа, която той докладва на годишната научна сесия на сектора по геометрия в ЕЦНПКММ през декември 1975 г.

Ще използуваме проективни координатни системи (репери) с координатни върхове $A_1, A_2, \cdots, A_{n+1}$ $B_1, B_2, \cdots, B_{n+1}$, E, като точките A_i+B_i $(i=1, 2, \cdots, n+1)$, лежат в J, а B $(i=1, 2, \cdots, n+1)$ — в K. Произволна реална колинеация в B_{2n+1}, запазваща J и K, има спрямо фиксиран B-репер в хомогенни точкови координати следното представяне:

$$\rho\bar{x}^j=\tilde{a}_i^j x^i,$$

$$\rho\bar{y}^j=(\tilde{a}_i^j-\tilde{b}_i^j)x^i+\tilde{b}_i^j y^i,$$

където $\det|\tilde{a}_i^j|\neq 0$, $\det|\tilde{b}_i^j|\neq 0$, $\rho\neq 0$ $(i, j=1, 2, \cdots, n+1)$.

За индексите, които ще използуваме, правим следната уговорка, $i, j, k=1, 2, \cdots, n+1$; $\alpha, \beta=2, 3, \cdots, n+1$.

Деривационните уравнения за репер от избраното семейство репери са

$$dA_i=\omega_i^j A_j+(\omega_i^j-\theta_i^j)B_j,$$

$$dB_i=\theta_i^j B_j, \tag{1}$$

където ω_i^j, θ_i^j са линейни диференциални форми, подчинени на следните структурни уравнения на бипланарното пространство:

$$D\omega_i^j=\omega_i^k\wedge\omega_k^j,\ D\theta_i^j=\theta_i^k\wedge\theta_k^j.$$

Всяка двупараметрична система от n-мерни линейни подпространства се определя от $(n+1)$ линейно независими точки $E_i(x_i^j(u, v), y_i^j(u, v))$, където функциите $x_i^j(u, v)$, $y_i^j(u, v)$ са достатъчно пъти непрекъснато диференцируеми в област $V\subset R^2$. Ще предполагаме, че всяко n-мерно линейно подпространство от разглежданата двупараметрична система е кръстосано с абсолютните линейни подпространства J и K. Това означава $\det|x_i^j|\neq 0$, $\det|x_i^j-y_i^j|\neq 0$ за всяко (u, v) от разглежданата област. За краткост означаваме с $\varepsilon_n(u, v)$ двупараметрична система от n-мерни линейни подпространства.

Разглеждаме онези репери, за които точките $A_1, A_2, \cdots, A_{n+1}$ лежат в $\varepsilon_n(u, v)$. Линейните диференциални форми $\varphi_i^j=\omega_i^j-\theta_i^j$ са главни и след като е канонизиран реперът за $\varepsilon_n(u, v)$, имаме следните диференциални уравнения [5]:

$$\varphi_1^j=\varphi_1^1,\ \varphi_s^j=b_s^j(-f_s\varphi_1^1+\varphi_2^2),$$

$$\varphi_2^j=b_2^j\ \varphi_2^2\quad (s=3, 4, \cdots, n+1), \tag{2}$$

където φ_1^1, φ_2^2 са базисни диференциални форми, b_2^j, b_s^j — диференциални инварианти от първи ред; f_s — корени на алгебрично уравнение от $(n+1)$-ва степен, чрез което се определят фокусите на $\varepsilon_n(u, v)$. При това $f_1=\infty$, $f_2=0$, което означава, че върховете на координатния репер A_1 и A_2 са фокуси, а останалите фокуси се получават при $f_s\neq 0, \infty$ и съвпадат с координатните върхове $A_3A_4\cdots A_{n+1}$.

Нека $\bar{\varepsilon}_n(u, v)$ е друга двупараметрична система от n-мерни линейни подпространства в B_{2n+1} $((u, v)\in V)$, като съответствието на $\varepsilon_n(u, v)$ в $\bar{\varepsilon}_n(u, v)$ се определя с равенство на параметрите. Да определим $\bar{\varepsilon}_n(u, v)$ чрез точките $\bar{A}_i$ $(i=1, 2, \cdots, n+1)$ на координатния репер $\bar{A}_i$, $\bar{B}_i$, $\bar{E}$ $(i=1, 2, \cdots, n+1)$. Тук ще разгледаме само случая, при който имаме съотношенията

$$\bar{A}_i=A_i+\lambda_i B_i,$$

$$\bar{B}_i=(1-\lambda_i)B_i, \tag{3}$$

където λ_i са функции на (u, v), дефинирани и достатъчно пъти непрекъснато диференцируеми в областта V, като за всяка от тях предполагаме, че е различна от единица. За $\bar{\varepsilon}_n(u, v)$ имаме аналогично

$$d\bar{A}_i=\bar{\omega}_i^j\bar{A}_j+(\bar{\omega}_i^j-\bar{\theta}_i^j)\bar{B}_j,$$

$$d\bar{B}_i=\bar{\theta}_i^j\bar{B}_j. \tag{4}$$

Ще предполагаме, че за $\bar{\varepsilon}_n(u, v)$ е построен каноничен репер, аналогичен на репера за $\varepsilon_n(u, v)$. Точките $\bar{A}_i$ са фокуси за $\varepsilon_n(u, v)$. Непосред-

ствено се вижда, че $\bar{A}_i+\bar{B}_i=A_i+B_i$ и от $\bar{B}_i=(1-\lambda_i)\,B_i$ следва, че фокусите A_i $(i=1, 2, \cdot\cdot\cdot, n+1)$ и $\bar{A}_i$ $(i=1, 2, \cdot\cdot\cdot, n+1)$ имат съвпадащи абсолютни проекции върху J и K. При тези условия между линейните диференциални форми ω_i^j, θ_i^j и $\bar{\omega}_i^j$, $\bar{\theta}_i^j$, като използуваме (1), (3) и (4), получаваме връзките

(5) $$(\lambda_i-1)\,\theta_i^j=(\lambda_j-1)\,\bar{\theta}_i^j \quad (i\neq j \text{ и по } j \text{ не се сумира}),$$

(6) $$\theta_i^i+d\ln|\lambda_i-1|=\bar{\theta}_i^i,$$

(7) $$\bar{\omega}_i^j=\omega_i^j.$$

Да запишем диференциалните уравнения на $\bar{\varepsilon}_n(u, v)$:

(8) $$\bar{\varphi}_1^j=\bar{\varphi}_1^1,\quad \bar{\varphi}_s^j=b_s^j(-\bar{f}_s\,\bar{\varphi}_1^1+\bar{\varphi}_2^2),$$
$$\bar{\varphi}_2^j=b_2^j\,\bar{\varphi}_2^2 \quad (s=3, 4, \cdot\cdot\cdot, n+1).$$

От първите уравнения на (2) и (8), като използуваме (6) за линейните диференциални форми θ_1^α и $\bar{\theta}_1^\alpha$, получаваме освен (5) още и съотношенията

(9) $$\bar{\theta}_1^\alpha=\theta_1^\alpha+d\ln|\lambda_1-1|.$$

Тогава от (5) за $i=1$, $j=\alpha$ и (9) получаваме

(10) $$\left(\frac{\lambda_1-1}{\lambda_\alpha-1}\right)\theta_1^\alpha=\theta_1^\alpha+d\ln|\lambda_1-1|,$$

или

(10′) $$\left(\frac{\lambda_1-1}{\lambda_\alpha-1}-1\right)\theta_1^\alpha=d\ln|\lambda_1-1|.$$

За линейните диференциални форми θ_1^α съществуват следните възможности.

1. Съществуват поне две от θ_1^α, които са линейно независими. Нека примерно това са θ_1^2 и θ_1^3. Тогава от (10′) при $\alpha=2$ и $\alpha=3$ следва $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$. Като вземем пред вид (10), за $\alpha=2$ получаваме $\lambda_1=\text{const}$. Щом $\lambda_1=\text{const}$, то (10′) за $\alpha=4, 5, \cdot\cdot\cdot, n+1$ ни дава $\lambda_4=\lambda_5=\cdot\cdot\cdot=\lambda_{n+1}=\lambda_1$. Следователно за двойка ε_n (u, v) и $\bar{\varepsilon}_n$ (u, v), за която са валидни (3), всички функции λ_i (u, v), които участвуват в (3), трябва да са постоянни и равни помежду си. Тогава от (5) имаме, че $\bar{\theta}_i^j=\theta_i^j$. Системите от деривационни уравнения (1) и (4) имат едни и същи линейни диференциални форми. Тогава съгласно [4] съществува бипланарно преобразование, което довежда $\varepsilon_n(u, v)$ в $\bar{\varepsilon}_n$ (u, v). Така доказахме

Теорема 1. Ако за двупараметричните системи от n-мерни линейни подпространства $\varepsilon_n(u, v)$ и $\bar{\varepsilon}_n$ (u, v) в B_{2n+1}, определени от точките A_i $(i=1, 2, \cdot\cdot\cdot, n+1)$ и $\bar{A}_i$ $(i=1, 2, \cdot\cdot\cdot, n+1)$ със съвпадащи абсолютни проекции върху J и K, съществуват поне две линейно независими ди-

ференциални форми измежду θ_1^α ($\alpha=2, 3, \cdots, n+1$), то двете системи са бипланарно еквивалентни, т. е. съществува B-колинеация, което преобразува $\varepsilon_n(u, v)$ в $\bar{\varepsilon}_n(u, v)$.

2. Всеки две от линейните диференциални форми са линейно зависими. Диференцираме външно (2) и прилагаме лемата на Картан. Специално за θ_1^α имаме уравненията

$$(b_\alpha^1 - b_\alpha^\beta)\ \theta_1^\alpha = \mu_\alpha^\beta\ \varphi_1^1 + \nu_1^\beta\ \varphi_2^2. \tag{11}$$

Детерминантата пред θ_1^α е означената с Δ_1 от [5] детерминанта, която е различна от нула. Следователно от (11) θ_1^α се изразяват еднозначно чрез базисните форми φ_1^1 и φ_2^2. Нека

$$\theta_1^\alpha = p_1^\alpha\ \varphi_1^1 + q_1^\alpha\ \varphi_2^2. \tag{12}$$

Тогава от (1) за dB_1 имаме

$$dB_1 = \theta_1^1 B_1 + \varphi_1^1\ (p_1^\alpha B_\alpha) + \varphi_2^2 (q_1^\alpha B_\alpha). \tag{13}$$

Означаваме с

$$T_1 = p_1^\alpha\ B_\alpha,\ T_2 = q_1^\alpha\ B_\alpha \tag{14}$$

пресечните точки на $(n-1)$-мерното линейно подпространство $\bar{K}$, определено от точките $B_2, B_3, \cdots, B_{n+1}$, с допирателните към линиите $\varphi_2^2=0$ и $\varphi_1^1=0$, описани от B_1 в абсолютното n-мерно подпространство K.

Ние допуснахме, че всеки две от θ_1^α са линейно зависими. Можем да запишем тази линейна зависимост по следния начин:

$$\theta_1^s = \sigma^s\ (u, v)\ \theta_1^2 \qquad (s=3, 4, \cdots, n+1). \tag{15}$$

Тогава от (12) и (15) следват

$$p_1^s = \sigma^s\ p_1^2,\ q_1^s = \sigma^s\ q_1^2 \qquad (s=3, 4, \cdots, n+1). \tag{16}$$

Заместваме (15) в (14) и получаваме

$$T_1 = p_1^2 (B_2 + \sigma^3 B_3 + \cdots + \sigma^{n+1} B_{n+1}),$$

$$T_2 = q_1^2 (B_2 + \sigma^3 B_3 + \cdots + \sigma^{n+1} B_{n+1}).$$

Следователно точките T_1 и T_2 съвпадат, т. е. линиите $\varphi_2^2=0$ и $\varphi_1^1=0$, описани от B_1 в K, имат обща допирателна, определена от точките B_1 и T_1. Правата, определена от B_1 и T_1, е допирателна и към всяка крива в K, описана от B_1 и определена с уравнение $\lambda\varphi_1^1 + \mu\varphi_2^2 = 0$.

Обратното твърдение е също вярно, а именно: Ако кривите в K, описани от B_1 и определени с уравнения $\lambda\varphi_1^1 + \mu\varphi_2^2 = 0$, имат обща допирателна, то всеки две от линейните диференциални форми θ_1^α са линейно зависими.

Условието кривите с уравнения $\lambda\varphi_1^1 + \mu\varphi_2^2 = 0$ да имат обща допирателна е равносилно със съвпадането на точките T_1 и T_2 от (14). И наистина допирателните към кривите $\lambda\varphi_1^1 + \mu\varphi_2^2 = 0$ се определят от точките B_1

и $\mu T_1+\lambda T_2$ за произволни стойности на λ и μ. Тогава съществува функция $\tau(u, v)$ така, че $T_1=\tau(u, v)\, T_2$, т. е.

$$p_1^\alpha B_\alpha=\tau(u, v)\,(q_1^\alpha B_\alpha).$$

Поради линейната независимост на точките B_α следва, че

$$p_1^\alpha=\tau q_1^\alpha.$$

Ако всички функции $q_1^\alpha=0$, то линейната зависимост на всеки две от линейните диференциални форми θ_1^α следва от (12). Ако поне една от q_1^α не е нула, примерно q_1^2, то линейната зависимост на всеки две от θ_1^α се дава от следните представяния:

$$q_1^2\theta_1^s-q_1^s\theta_1^2=0 \quad (s=3, 4, \cdots, n+1).$$

Така доказахме

Теорема 2. Необходимото и достатъчно условие всеки две от линейните диференциални форми θ_1^α $(\alpha=2, 3, \cdots, n+1)$ да са линейно зависими е кривите $\lambda\varphi_1^1+\mu\varphi_2^2=0$, описани от B_1 в абсолютното n-мерно подпространство K за произволни λ и μ, да имат обща допирателна.

ЛИТЕРАТУРА

1. Петканчин, Б.: Върху един аналог в нечетномерно проективно пространство на двуосната геометрия. Год. Соф. унив., Мат. фак., 60 (1965/66), 33—60.
2. Станилов, Гр.: Върху интегралната геометрия на обобщени двуосни пространства. Изв. Мат. инст. БАН, X, 1970, 39—53.
3. Ганчев, Г.: Върху хиперкомплексите от линейни автодуални подпространства на бипланарното пространство от хиперболичен тип. Изв. Мат. инст. БАН, XIV, 1974, 277—285.
4. Фиников, С.: Метод внешних форм Картана. М, 1948.
5. Стефанова, Ст.: Двупараметрични системи от n-мерни линейни подпространства в бипланарно пространство от хиперболичен тип. Научни тр. ВИХВП, св. 3, XXIII (1976).

Постъпила на 2. II. 1977 г.

SPEZIELLE ZWEIPARAMETRIGE SYSTEME VON n-DIMENSIONALEN LINEAREN UNTERRÄUMEN IM HYPERBOLISCHEN BIPLANAREN RAUM

G. Stanilov, S. Stefanova

(ZUSAMMENFASSUNG)

In der Arbeit werden Paare von zweiparametrigen Systemen, von n-dimensionalen linearen Unterräumen mit zusammenfallenden absoluten Projektionen der bestimmenden Punkte der Unterräume untersucht. Im allgemeinen Falle wird bewiesen, dass zwei solche Systeme biplanar-äquivalent sind. Es werden auch spezielle Systeme geometrisch charakterisiert, die diese Bedingung nicht notwendig erfüllen.