
ГОДИШНИК
НА
СОФИЙСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ
„КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“
ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА
КНИГА 1 — МАТЕМАТИКА

ANNUAIRE *457*
DE
L'UNIVERSITÉ DE SOFIA
„KLIMENT OHRIDSKI“
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES ET MÉCANIQUE
LIVRE 1 — MATHÉMATIQUES

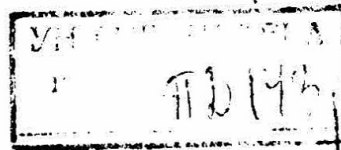
СОФИЯ. 1988. SOFIA

ИЗДАТЕЛСТВО НА БЪЛГАРСКАТА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ
ÉDITIONS DE L'ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES

Този том на Годишника на Факултета по математика и механика е посветен на паметта на проф. д-р ИВАН РАЧЕВ ПРОДАНОВ

РЕДАКЦИОННА КОЛЕГИЯ

Акад. Боян Петканчин (главен редактор), акад. *Благовест Сендов*, проф. *Иван Чобанов*, проф. *Рачо Денчев*, ст. н. с. *Йордан Денев*, доц. *Недю Попиванов* (научен секретар), *Росица Докова* (административен секретар)



© Софийски университет „Климент Охридски“, Факултет по математика и механика
1988
с/о Jusautor, Sofia

51(05)

Редактор *М. Печева* Техн. редактор *К. Иванова* Коректор *Х. Дуков*

Дадена за набор на 22. I. 1987 г.	Подписана за печат на 4. XI. 1988 г.
Печатни коли 13,50	Издателски коли 17,50 УИК 17,90
Формат 70/100/16 Изд. индекс 10698	Тираж 500 Код 28
	<u>953222211</u> 2204-7-88

Цена 2,87 лв.

Печатница при Софийския университет „Климент Охридски“, пор. 569

**ВЛИЯНИЕ НА ВТОРИЯ КОЕФИЦИЕНТ ВЪРХУ РАДИУСА
НА ИЗПЪКНАЛОСТ НА ЕДНА КОМБИНАЦИЯ
ОТ АНАЛИТИЧНИ ФУНКЦИИ**

Донка Пашкулева

Донка Пашкулева. Влияние второго коэффициента на радиус выпуклости одной комбинации аналитических функций. Определяется точный радиус выпуклости одного класса функций с фиксированным вторым коэффициентом. Для определения этого радиуса доказывается и применяется теорема 1, которая дает минимум вещественной части функционала (2) в классе $P_b(\alpha)$.

Donka Paskuleva. The Influence of the Second Coefficient on the Radius of Convexity of a Combination of Analytic Functions. The sharp radius of convexity of a class of functions with prescribed second coefficient is found. To determine this radius Theorem 1 is proved and applied, and it gives the minimum of the real part of the functional (2) in the class $P_b(\alpha)$.

Нека Ω е класа от функции $w(z)$ —регулярни в единичния кръг $E = \{z: |z| < 1\}$ и удовлетворяващи условията $w(0) = 0$, $|w(z)| < 1$, $z \in E$. За произволно фиксирано α , $\alpha > 1/2$, да означим с $P(\alpha)$ класа от функции

$$p(z) = 1 + p_1 z + p_2 z^2 + \dots,$$

регулярни в E и такива, че $p(z) \in P(\alpha)$ тогава и само тогава, когато се представя във вида

$$p(z) = \frac{1 + w(z)}{1 + w(z)(1 - \alpha)/\alpha}$$

за някои функция $w(z) \in \Omega$ и всяко $z \in E$. Лесно се проверява, че $p(z) \in P(\alpha)$ тогава и само тогава, когато $|p(z) - \alpha| < \alpha$. Нека $p(z) = 1 + p_1 z + p_2 z^2 + \dots$ принадлежи на $P(\alpha)$ и да положим $\theta = \arg p_1$. Тогава $p(e^{-i\theta} z) = 1 + |p_1| z + \dots$ принадлежи на $P(\alpha)$ и без загуба на общността можем да се ограничим до функции с неотрицателен първи коефициент. Известно е, че $|p_1| \leq (2\alpha - 1)/\alpha$.

Дефинираме още и класовете $P_b(\alpha)$ и $R_b'(\alpha)$ по следния начин:

$$\mathbf{P}_b(\alpha) = \left\{ p(z) \in \mathbf{P}(\alpha) : p'(0) = \frac{b(2\alpha-1)}{\alpha}, 0 \leq b \leq 1 \right\},$$

$$R_b'(\alpha) = \left\{ f(z) = z + \frac{b}{2} \frac{2\alpha-1}{\alpha} z^2 + \dots; f'(z) \in \mathbf{P}_b(\alpha) \right\}.$$

За фиксирано λ , $0 < \lambda \leq 1$, да разгледаме класа $R_{\lambda,b}(\alpha)$ от функции $h_\lambda(z)$ от вида

$$h_\lambda(z) = (1-\lambda)z + \lambda f(z), \quad f'(z) \in R_b'(\alpha).$$

Ще определим радиуса на изпъкналост за класа $R_{\lambda,b}(\alpha)$. Нека $f(z) \in R_b'(\alpha)$.
Тогава

$$(1) \quad 1 + \frac{zh_\lambda''(z)}{h_\lambda'(z)} = 1 + \frac{zp'(z)}{p(z) + (1-\lambda)/\lambda}, \text{ където } p(z) \in \mathbf{P}_b(\alpha).$$

Да положим $(1-\lambda)/\lambda = a$. Предвид на (1) ще ни е необходимо да определим

$$(2) \quad \min_{|z|=r < 1} \operatorname{Re} \left\{ \frac{zp'(z)}{p(z) + a} \right\}, \quad a \geq 0, \text{ в класа } \mathbf{P}_b(\alpha).$$

Тъй като $p(z) \in \mathbf{P}_b(\alpha)$, то

$$p(z) = \frac{1+w(z)}{1+w(z)(1-\alpha)/a}$$

и лесно се вижда, че $p(z)$ изобразява кръга $|z| \leq r$ върху кръга $|p(z) - a_b| \leq d_b$, където

$$a_b = \frac{(1+br)^2 - Br^2(r+b)^2}{(1+br)^2 - B^2r^2(r+b)^2}, \quad d_b = \frac{(1-B)r(r+b)(1+br)}{(1+br)^2 - B^2r^2(r+b)^2}, \quad B = \frac{1-\alpha}{a}.$$

Оттук следва, че

$$\frac{1-r^2}{1+br-Br(r+b)} \leq \operatorname{Re} p(z) \leq |p(z)| \leq \frac{1+2br+r^2}{1+br+Br(r+b)}.$$

Първото неравенство е точно за функцията

$$p(z) = \frac{1-z^2}{1+b(B-1)z-Bz^2}$$

в точката $z=r$, а третото неравенството е точно за функцията

$$p(z) = \frac{1+2bz+z^2}{1+b(1+B)z+Bz^2} \quad \text{в точката } z=r.$$

Освен това, ако означим $M = a_b - d_b$ и $N = a_b + d_b$, то

$$\frac{dM}{db} = - \frac{(1-B)r(1-r^2)}{(1+br-Br^2-Bbr)^2} < 0,$$

$$\frac{dN}{db} = \frac{(1-B)r(1-r^2)}{(1+br+Br^2+Bbr)^2} > 0.$$

Така за фиксирано $r \in (0, 1)$ имаме

$$a_b - d_b \geq a_1 - d_1, \quad a_b + d_b \geq a_0 + d_0.$$

Л е м а 1 [1]. Нека $w(z) \in \Omega$. Тогава за $|z| < 1$ е изпълнено

$$|zw'(z) - w(z)| \leq \frac{|z|^2 - |w(z)|^2}{1 - |z|^2}.$$

Т е о р е м а 1. Нека $p(z) \in \mathbf{P}_b(\alpha)$, $\alpha \geq 0$. Тогава върху $|z| = r < 1$ е изпълнено

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{zp'(z)}{p(z) + a} \right\} \geq \begin{cases} \frac{1 + (2a+1)B}{1-B} + \frac{1}{(1-B)(1-r^2)} \frac{D_1}{D_2} & \text{за } R_1 \leq R_2, \\ \frac{1 + (2a+1)B}{1-B} + \frac{2}{(1-B)(1-r^2)} \{ \sqrt{D_3} - [a+1 - (1+aB)Br^2] \} & \text{за } R_2 \leq R_1, \end{cases}$$

където

$$B = \frac{1-\alpha}{\alpha},$$

$$D_1 = a(1-B)[a+1 + (1+aB)r^2][1+br(1-B) - Br^2]^2 + (1-B)(1+Br^2)[a+1 + a(1-B)br - (1+aB)r^2]^2 - 2[a+1 + a(1-B)br - (1+aB)r^2][1+br(1-B) - Br^2][a+1 - (1+aB)Br^2],$$

$$D_2 = [a+1 + a(1-B)br - (1+aB)r^2][1+br(1-B) - Br^2],$$

$$D_3 = a(1-B)^2(1+Br^2)[a+1 + (1+aB)r^2],$$

$$R_1 = \sqrt{\frac{a[a+1 + (1+aB)r^2]}{1+Br^2}}, \quad R_2 = \frac{a+1 + a(1-B)br - (1+aB)r^2}{1+b(1-B)r - Br^2}.$$

Доказателство. Доказателството ще извършим с обичайната за такива случаи техника. Нека $p(z) \in \mathbf{P}_b(\alpha)$. Тогава

$$p(z) = \frac{1+w(z)}{1+Bw(z)}, \quad B = \frac{1-\alpha}{\alpha}, \quad w(z) \in \Omega,$$

$$\begin{aligned} \frac{zp'(z)}{p(z) + a} &= \frac{1-B}{a+1} \left\{ \frac{w(z)}{(1+Bw(z))[1+((1+aB)/(a+1))w(z)]} \right. \\ &+ \left. \frac{zw'(z) - w(z)}{(1+Bw(z))[1+((1+aB)/(a+1))w(z)]} \right\} = \frac{1+(2a+1)B}{1-B} \\ &+ \frac{1}{1-B} \left[-Bp(z) - Ba - \frac{(a+1)(1+aB)}{p(z) + a} \right. \\ &+ \left. \frac{1-B}{a+1} \frac{zw'(z) - w(z)}{(1+Bw(z))[1+((1+aB)/(a+1))w(z)]} \right]. \end{aligned}$$

Прилагаме лема 1 и получаваме

$$(3) \quad \operatorname{Re} \frac{zp'(z)}{p(z)+a} \geq \frac{1+(2a+1)B}{1-B} + \frac{1}{1-B} \operatorname{Re} \left[-Bp(z) - Ba - \frac{(a+1)(1+aB)}{p(z)+a} \right] - \frac{r^2 |Bp(z)-1|^2 - |1-p(z)|^2}{(1-B)(1-r^2) |p(z)+a|}.$$

Полагаме $p(z) = a_b + u + iv$, $|p(z)| = R$. Тогава

$$r^2 |Bp(z)-1|^2 - |1-p(z)|^2 = -(1-B^2r^2)R^2 + 2(1-Br^2)(a_b+u) - (1-r^2) = -(1-B^2r^2)R^2 + 2a_1(1-B^2r^2)(a_b+u) - (1-B^2r^2)(a_1^2-d_1^2).$$

Като означим дясната страна на (3) с $F(u, v)$, получаваме

$$F(u, v) = \frac{1+(2a+1)B}{1-B} + \frac{1}{1-B} \left\{ \left[-B(a_b+u+a) - \frac{(a+1)(1+aB)(a_b+u+a)}{R^2+2a(a_b+u)+a^2} \right] + \frac{1-B^2r^2}{1-r^2} \frac{R^2-2a_1(a_b+u)+a_1^2-d_1^2}{\sqrt{R^2+2a(a_b+u)+a^2}} \right\},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(u, v)}{\partial v} &= \frac{v}{(1-B)[R^2+2a(a_b+u)+a^2]^2} \left\{ 2(a+1)(1+aB)(a_b+u+a) \right. \\ &+ \left. \frac{1-B^2r^2}{1-r^2} [R^2+2(2a+a_1)(a_b+u)+2a^2-a_1^2+d_1^2] \sqrt{R^2+2a(a_b+u)+a^2} \right\} \\ &= \frac{vS(u, v)}{(1-B)[R^2+2a(a_b+u)+a^2]^2}. \end{aligned}$$

Лесно се проверява, че $S(u, v) > 0$. Следователно минимумът се достига за $v=0$, $u \in [-d_b, d_b]$:

$$F(u, 0) = \frac{1+(2a+1)B}{1-B} + \frac{1}{1-B} \left[-B(a_b+u+a) - \frac{(a+1)(1+aB)}{a_b+u+a} + \frac{1-B^2r^2}{1-r^2} \frac{(a_b+u)^2-2a_1(a_b+u)+a_1^2-d_1^2}{a_b+u+a} \right],$$

$$a_1 = \frac{1-Br^2}{1-B^2r^2}, \quad d_1 = \frac{(1-B)r}{1-B^2r^2},$$

$$F(u, 0) = \frac{1+(2a+1)B}{1-B} + \frac{1}{(1-B)(1-r^2)} \left\{ (1-B)(1+Br^2)(a_b+u+a) + \frac{a(1-B)[a+1+(1+aB)r^2]}{a_b+u+a} - 2[1+a-B(1+aB)r^2] \right\},$$

$$\frac{dF(u, 0)}{du} = \frac{1}{(1-B)(1-r^2)} \left\{ -\frac{a(1-B)[a+1+(1+aB)r^2]}{(a_b+u+a)^2} + (1-B)(1+Br^2) \right\}.$$

Абсолютният минимум на $F(u, 0)$ се достига в точката

$$u_0 = \sqrt{\frac{a(1-B)[a+1+(1+aB)r^2]}{(1-B)(1+Br^2)}} - a_b - a,$$

ако u_0 лежи в интервала $[-d_b, d_b]$ и стойността му е

$$F(u_0, 0) = \frac{1+(2a+1)B}{1-B} + \frac{2}{(1-B)(1-r^2)} \left\{ \sqrt{D_3} - [a+1-(1+aB)Br^2] \right\}.$$

Лесно се проверява, че $u_0 < d_b$. За случая $u_0 \leq -d_b$, т. е. когато $R_1 \leq R_2$, абсолютният минимум на $F(u, 0)$ се достига в точката $u = -d_b$ и стойността му е

$$F(-d_b, 0) = \frac{1+(2a+1)B}{1-B} + \frac{1}{(1-B)(1-r^2)} \frac{D_1}{D_2}.$$

Резултатът е точен за функцията

$p(z) = \frac{1-z^2}{1+b(B-1)z-Bz^2}$ в точката $z = -r$ за $R_1 \leq R_2$ и в точката $z = re^{i\theta}$ за $R_2 \leq R_1$, където θ се определя от

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{1-r^2e^{2i\theta}}{1+b(B-1)re^{i\theta}-Br^2e^{2i\theta}} \right\} = R_1.$$

Теорема 2. Ако $h_\lambda(z) \in R_{\lambda,b}(a)$, то $h_\lambda(z)$ е изпъкнала при

$$|z| < \begin{cases} r_1 & \text{за } R_1 \leq R_2, \\ r_2 & \text{за } R_2 \leq R_1, \end{cases}$$

където r_1 е най-малкият корен в интервала $(0, 1)$ на уравнението

$$(B+\lambda-B\lambda)Br^4 - 2b(B+\lambda-B\lambda)(1-B)r^3 + [b^2(1-B)^2(1-\lambda) + 3B\lambda - 2B - 3\lambda]r^2 + 2b(1-B)(1-\lambda)r + 1 = 0,$$

а r_2 е най-малкият корен в интервала $(0, 1)$ на уравнението

$$(B+\lambda-B\lambda)r^4 + (1-B)(1-\lambda)r^2 - (1-\lambda) = 0.$$

Резултатът е точен за функцията $f_1(z) = \int_0^z p(\xi) d\xi$, където $p(z)$ е екстремалната функция в теорема 1.

Доказателство. Прилагаме теорема 1 с $a = (1-\lambda)/\lambda$. При $b = 1$ получаваме резултата на Наср [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Singh, V., R. M. Goel. On radii of convexity and starlikeness of some classes of functions. — J. Math. Soc. Japan, 23, 1971, 323—339.
2. Nasr, M. On the radius of convexity of convex combination of certain analytic functions. — Glasnik Math., 30, 1975, No 10, 257—262.

Постъпила на 7. 5. 1984 г.

**POLYNOME VOM GRAD m ALS ALLGEMEINE
INTEGRALE EINER KLASSE DER LINEAREN
DIFFERENTIALGLEICHUNGSSYSTEME DER ORDNUNG n**

Ilija Šapkarev

Илия Шапкарев. Многочлены степени m как общие решения одного класса систем линейных дифференциальных уравнений n -того порядка. В работе рассматривается система (1.2), где A, B — матрицы n -того порядка. Доказывается, что эта система имеет общее решение многочлен степени m тогда и только тогда, когда выполнено (1.5).

Ilija Šapkarev. **Polynomials of Degree m as General Solutions of a System of n Linear Differential Equations.** The system (1.2), where A and B are $n \times n$ matrices, is considered. It is proved that its general solution is a polynomial of degree m if and only if (1.5) holds.

0. Es bedeute P ein Polynom vom Grad $n+1$; Q und R aber Polynome in x , deren Ordnungen n , bzw. $n-1$ nicht übersteigen. Wenn P und Q gegebene Polynome in x sind, findet E. Heine [1] durch direktes algebraisches Rechnen, daß es im allgemeinen

$$[m, n] = \frac{(m+1)(m+2)\dots(m+n-1)}{1 \cdot 2 \dots (n-1)}$$

verschiedene Bestimmungen von R gibt, so daß die Differentialgleichung

$$(0.1) \quad Py'' + Qy' + Ry = 0$$

eine Polynomlösung vom Grad m besitzt.

Setzt man nämlich voraus, daß die Polynome P und Q reell sind, daß die Gleichung $P=0$ lauter getrennte reelle Wurzeln $a_0 < a_1 < \dots < a_n$ hat, und ferner, daß, wenn man Q/P in Partialbrüche zerlegt.

$$\frac{Q}{P} = \frac{\alpha_0}{x-a_0} + \frac{\alpha_1}{x-a_1} + \dots + \frac{\alpha_n}{x-a_n}$$

die α_i ($i=0, 1, \dots, n$) sämtlich positiv (nicht Null) sind, so beweist Stieltjes [2], daß es stets $[m, n]$ verschiedene reelle Polynome R gibt, für welche die Differentialgleichung (0.1) ein Polynom vom Grad m als Lösung besitzt; daß diese Polynomlösung vom Grad m sämtlich reelle Wurzeln hat, die in dem Intervall $a_0 a_n$ liegen, und daß sie sich gerade durch die Verteilungsweise dieser Wurzeln in den einzelnen Intervallen $a_0 a_1, a_1 a_2, \dots, a_{n-1} a_n$ unterscheidet.

In [3] hat Abbé Lainé bewiesen, daß die Differentialgleichung

$$(0.2) \quad \alpha(x)y'' + \beta(x)y' + Fy = 0,$$

mit $\alpha(x) = Ax^2 + Bx + C$, $\beta(x) = Dx + E$, wobei A, B, C, D, E, F Konstanten sind, eine Polynomlösung vom Grad m besitzt, wenn die Relation

$$Am(m-1) + Dm + F = 0$$

erfüllt ist.

Diese Polynomlösung wird mit der Rodriguesformel

$$y^* = e^{-\Phi} \frac{d^m}{dx^m} (\alpha^{m-1} e^{\Phi}) \quad \left(\Phi = \int \frac{\beta}{\alpha} dx \right)$$

gegeben.

Wenn die Differentialgleichung (0.2) noch eine Polynomlösung vom Grad k besitzt, so beweist Gonsalves [4], daß diese Polynomlösung mit der Formel

$$\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}} y^{**} = \alpha^{-k} e^{-\Phi}$$

erhalten werden kann.

In [5] hat Faiziev durch direktes algebraisches Rechnen bewiesen, daß die Vektorgleichung

$$\sum_{k=0}^n x^k (A_k + B_k x^s) \frac{d^k y}{dx^k} = 0,$$

wo A_k, B_k quadratische Matrizen der Ordnung q sind, Polynomlösungen der Gestalt

$$y = x^p (y_0 + x^s y_1 + x^{2s} y_2 + \dots + x^{ms} y_m)$$

besitzt, wenn einige Bedingungen ausgefüllt sind.

1. Hier betrachten wir das folgende Differentialgleichungssystem

$$(1.1) \quad \sum_{k=1}^n A_{ik} x_k' + B_i x_i = 0 \quad (i=1, \dots, n),$$

wo $A_{ik} = a_{ik}^1 t + a_{ik}^2$ ($i, k=1, \dots, n$), $a_{ik}^1, a_{ik}^2, b_1, \dots, b_n$ Konstanten sind, so daß $b_1 b_2 \dots b_n \neq 0$ ist.

Wenn wir jetzt

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & b_n \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad X' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix}$$

setzen, erhalten wir die Vektorgleichung

$$(1.2) \quad AX' + BX = 0.$$

Weiter voraussetzen wir, daß $\det A \neq 0$ ist.

Das Funktionssystem $x_1(t), \dots, x_n(t)$ werden wir eine Polynomlösung vom Grad m der Gleichung (1.2) nennen, wenn wenigstens eine Funktion x_i ($i=1, \dots, n$) ein Polynom vom Grad m darstellt und wenn die übrigen Funktionen Polynome vom Grad nicht größer als m sind.

Jetzt nehmen wir an, daß die Gleichung (1.2) n Polynomlösungen vom Grad m besitzt, d. h. daß sie die allgemeine Polynomlösung vom Grad m besitzt.

Wenn wir $X^m = U$ setzen, erhalten wir [6, 7] die Differentialgleichung

$$(1.3) \quad AU' + (mA' + B)U = 0.$$

Da die allgemeine Polynomlösung der Gleichung (1.2) den Grad m besitzt, folgt es, daß $U' = 0$ ist.

In diesem Fall erhalten wir von (1.3)

$$(1.4) \quad (mA' + B)U = 0.$$

Aus der Relation (1.4) folgt es unmittelbar, daß der Rang der Matrix $mA' + B$ gleich Null sein muß, d. h. daß die Matrix $mA' + B$ verschwinden muß:

$$(1.5) \quad mA' + B = 0,$$

weil der Vektor

$$U = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}.$$

wo $u_i = \text{const} \neq 0$ ($i=1, \dots, n$) sind, mit einer Konstante gleich ist.

Also, wenn die Gleichung (1.2) eine allgemeine Polynomlösung vom Grad m besitzt, muß die Relation (1.5) ausgefüllt werden.

Umgekehrt, wenn wir jetzt annehmen, daß die Relation (1.5) ausgefüllt ist, erhalten wir Gleichung (1.3) $U' = 0$, weil $\det A \neq 0$ ist. Da der Vektor $U' = 0$ ist, folgt es unmittelbar, daß die Gleichung (1.2) eine allgemeine Polynomlösung vom Grad m besitzt.

In Verbindung damit können wir jetzt das folgende Theorem aussagen.

Theorem 1. Die Differentialgleichung (1.2) besitzt eine allgemeine Polynomlösung vom Grad m dann und nur dann, wenn die Relation (1.4) erfüllt ist.

2. Wenn wir jetzt der adjungierten Gleichung

$$(2.1) \quad A^T B^{-1} Y' - Y = 0$$

der Gleichung (1.2) $Y = V^{(m-1)}$ setzen, erhalten wir die Gleichung

$$A^T B^{-1} V' - [(m-1)(A^T B^{-1})' + I] V = 0,$$

die in der Gestalt

$$(2.2) \quad (A^T B^{-1} V)' - [m(A^T B^{-1})' + I] V = 0$$

aufgeschrieben werden kann. Hier ist mit I die Einheitsmatrix der Ordnung n bezeichnet.

Da die Matrix A die Relation $(A^T)' = A'$ erfüllt, erhalten wir nach (1.4)

$$m(A^T B^{-1})' + I = m(A^T)' B^{-1} + I = mA' B^{-1} + I = (mA' + B) B^{-1} = 0.$$

In Verbindung damit erhalten wir die Gleichung (2.2) $A^T B^{-1} V = K$, wo K ein Konstantvektor bezeichnet.

Hieraus bekommen wir für V

$$(2.3) \quad V = B(A^T)^{-1} K = B \frac{\text{adj } A}{\det A} K.$$

Jetzt kann der Vektor Y mit der Relation

$$(2.4) \quad Y = B \left(\frac{\text{adj } A}{\det A} \right)^{(m-1)} K$$

bestimmt werden.

Wenn wir mit $\Phi(t)$ die fundamentale Matrix der Gleichung (2.1) bezeichnen, erhalten wir dann

$$(2.5) \quad \Phi(t) = B \left(\frac{\text{adj } A}{\det A} \right)^{(m-1)}$$

Der Vektor X kann jetzt der folgenden Relation

$$(2.6) \quad \Phi^T(t) X(t) = C^*$$

bestimmt werden, wo C^* ein Konstantvektor bezeichnet.

Auf diese Weise erhalten wir die letzte Relation

$$X(t) = (\Phi^T(t))^{-1} C^*.$$

Weiter haben wir

$$(\Phi^T)^{-1} = \frac{\text{adj } \Phi}{\det \Phi}.$$

Da die Determinante der fundamentalen Matrix Φ der Gleichung (2.1)

$$\det \Phi = \det \Phi(t_0) \exp \int_{t_0}^t \text{Spur}(B(A^T)^{-1}) dt$$

ist, erhalten wir nach (1.5)

$$\det \Phi = \det \Phi(t_0) \exp \int_{t_0}^t \text{Spur}[-mA'(A^T)^{-1}] dt$$

$$\begin{aligned}
&= \det \Phi(t_0) \exp \left[-m \int_{t_0}^t \text{Spur} \left(\frac{A \text{ adj } A}{\det A} \right) dt \right] \\
&= \det \Phi(t_0) \exp \left[-m \int_{t_0}^t \frac{(\det A)'}{\det A} dt \right] = \frac{\det \Phi(t_0) (\det A(t_0))^m}{(\det A(t))^m}.
\end{aligned}$$

Also, die allgemeine Polynomlösung vom Grad m der Gleichung (1.2) lautet jetzt

$$(2.7) \quad X = (\det A(t))^m \text{adj} \left(B \left(\frac{\text{adj } A}{\det A} \right)^{(m-1)} \right) C,$$

wo C ein Konstantvektor ist.

Wenn wir aber mit $\psi(t)$ die fundamentale Matrix der Gleichung bezeichnen, erhalten wir

$$(2.8) \quad \psi(t) = (\det A)^m \text{adj} \left(B \left(\frac{\text{adj } A}{\det A} \right)^{(m-1)} \right).$$

Jetzt können wir das folgende Theorem aussagen.

Theorem 2. Die allgemeine Polynomlösung vom Grad m der Gleichung (1.2) wird mit (2.7) gegeben, wenn die Relation (1.5) ausgefüllt ist.

Beispiel 1. Für $n=2$ haben wir das folgende Differentialgleichungssystem

$$(2.9) \quad \begin{aligned} A_{11}x_1' + A_{12}x_2' + b_1x_1 &= 0, \\ A_{21}x_1' + A_{22}x_2' + b_2x_2 &= 0. \end{aligned}$$

Dieses System wird, nach (1.5), zwei Polynomlösungen vom Grad m besitzen, wenn die folgenden Relationen

$$mA_{11}' + b_1 = 0, \quad mA_{12}' = 0, \quad mA_{21}' = 0, \quad mA_{22}' + b_2 = 0$$

ausgefüllt sind.

Die Matrizen A , $\text{adj } A$ und B sind hier

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad \text{adj } A = \begin{bmatrix} A_{22} & -A_{21} \\ -A_{12} & A_{11} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix}.$$

Die fundamentale Matrix $\psi(t)$ dieses Systems ist jetzt

$$\begin{aligned}
\psi(t) &= (\det A)^m \text{adj} \left(B \left(\frac{\text{adj } A}{\det A} \right)^{(m-1)} \right) \\
&= (\det A)^m \begin{bmatrix} b_2 \left(\frac{A_{11}}{\det A} \right)^{(m-1)} & b_2 \left(\frac{A_{12}}{\det A} \right)^{(m-1)} \\ b_1 \left(\frac{A_{21}}{\det A} \right)^{(m-1)} & b_1 \left(\frac{A_{22}}{\det A} \right)^{(m-1)} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Beispiel 2. Für $n=3$ haben wir das folgende Differentialgleichungssystem

$$(2.11) \quad \begin{aligned} A_{11}x_1' + A_{12}x_2' + A_{13}x_3' + b_1x_1 &= 0, \\ A_{21}x_1' + A_{22}x_2' + A_{23}x_3' + b_2x_2 &= 0, \\ A_{31}x_1' + A_{32}x_2' + A_{33}x_3' + b_3x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Dieses System wird, nach (1.5), drei Polynomlösungen vom Grad m besitzen, wenn die folgenden Relationen

$$\begin{aligned} mA_{11}' + b_1 &= 0, & mA_{12}' &= 0, & mA_{13}' &= 0, \\ mA_{21}' &= 0, & mA_{22}' + b_2 &= 0, & mA_{23}' &= 0, \\ mA_{31}' &= 0, & mA_{32}' &= 0, & mA_{33}' + b_{33} &= 0 \end{aligned}$$

ausgefüllt sind.

Die Matrizen A , B und $\text{adj } A$ sind jetzt

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \end{bmatrix},$$

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} A_{22}A_{33} - A_{23}A_{32} & -(A_{21}A_{33} - A_{23}A_{31}) & A_{21}A_{32} - A_{22}A_{31} \\ -(A_{12}A_{33} - A_{13}A_{32}) & A_{11}A_{33} - A_{13}A_{31} & -(A_{11}A_{32} - A_{12}A_{31}) \\ A_{12}A_{23} - A_{13}A_{22} & -(A_{11}A_{23} - A_{13}A_{21}) & A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} \end{bmatrix}.$$

Die fundamentale Matrix dieses Systems ist hier

$$(2.12) \quad \begin{aligned} \psi(t) &= (\det A)^m \text{adj} \left(B \left(\frac{\text{adj } A}{\det A} \right)^{(m-1)} \right) \\ &= (\det A)^m \text{adj} \begin{bmatrix} y_{11} - y_{12} & y_{13} \\ -y_{21} & y_{22} - y_{23} \\ y_{31} - y_{32} & y_{33} \end{bmatrix} \\ &= (\det A)^m \begin{bmatrix} y_{22}y_{33} - y_{23}y_{32} & y_{21}y_{33} - y_{23}y_{31} & y_{21}y_{32} - y_{22}y_{31} \\ y_{12}y_{33} - y_{13}y_{32} & y_{11}y_{33} - y_{13}y_{31} & y_{11}y_{32} - y_{12}y_{31} \\ y_{12}y_{23} - y_{13}y_{22} & y_{11}y_{23} - y_{13}y_{21} & y_{11}y_{22} - y_{12}y_{21} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

wo

$$\begin{aligned} y_{11} &= b_1 \left(\frac{A_{22}A_{33} - A_{23}A_{32}}{\det A} \right)^{(m-1)}, & y_{12} &= b_1 \left(\frac{A_{21}A_{33} - A_{23}A_{31}}{\det A} \right)^{(m-1)}, \\ y_{13} &= b_1 \left(\frac{A_{21}A_{32} - A_{22}A_{31}}{\det A} \right)^{(m-1)}, & y_{21} &= b_2 \left(\frac{A_{12}A_{33} - A_{13}A_{32}}{\det A} \right)^{(m-1)}, \\ y_{22} &= b_2 \left(\frac{A_{11}A_{33} - A_{13}A_{31}}{\det A} \right)^{(m-1)}, & y_{23} &= b_2 \left(\frac{A_{11}A_{32} - A_{12}A_{31}}{\det A} \right)^{(m-1)}, \end{aligned}$$

$$y_{31} = b_3 \left(\frac{A_{12}A_{23} - A_{13}A_{22}}{\det A} \right)^{(m-1)}, \quad y_{32} = b_3 \left(\frac{A_{11}A_{23} - A_{13}A_{21}}{\det A} \right)^{(m-1)}$$

$$y_{33} = b_3 \left(\frac{A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}}{\det A} \right)^{(m-1)}$$

ist.

LITERATUR

1. Heine, E. Über lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung sowie über die Existenz und Anzahl der Lameschen Functionen erster Art. — Akad. Wiss. Berlin, 1864, 13—22.
2. Stieltjes, T. Sur certains polynômes qui vérifient une équation différentielle linéaire du second ordre et sur la théorie des fonctions de Lamé. — Acta Math., 6, 1885, p. 321.
3. Abbé, L. Sur l'intégration de quelques équations différentielles du second ordre. — L'Enseignement Math., 23, 1924, 163—173.
4. Gonsalves, V. Sur la formule de Rodrigues. — Port. Math., 4, 1934, 52—64.
5. Файзиев, С. Построение полиномиальных решений системы линейных дифференциальных уравнений. — Укр. мат. журн., 35, 1983, № 2.
6. Šapkarev, I. Polynome als allgemeine Integrale der normalen homogenen linearen Differentialgleichungssysteme. — God. Zb. Mat. Fac. Skopje, 28, 1977, 68—72.
7. Šapkarev, I. Polynome als partikuläre Integrale der normalen homogenen linearen Differentialgleichungssysteme. — God. Zb. Mat. Fac. Skopje, 29, 1978, 51—55.

Eingegangen am 18. 12. 1984

ASYMPTOTICS OF SOME SPECTRAL CHARACTERISTICS OF ELLIPTIC SYSTEMS OF DIFFERENTIAL OPERATORS

Georgi S. Popov

Георги С. Попов. Асимптотика некоторых спектральных характеристик эллиптических систем дифференциальных операторов. В работе исследуется асимптотическое поведение спектральной функции эллиптических систем дифференциальных операторов. Получено полное асимптотическое разложение спектральной функции и найдены его первые коэффициенты.

Georgi S. Popov. Asymptotics of Some Spectral Characteristics of Elliptic Systems of Differential Operators. The asymptotic behaviour of the spectral function is studied in the paper. A complete asymptotic expansion of the spectral function as the spectral parameter tends to infinity is obtained and the first coefficients in it are found.

Consider an elliptic formally self-adjoint system of differential operators in R_n

$$P(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} P_\alpha(x) D^\alpha, \quad D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}, \quad D_j = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad m \leq 2,$$

$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, acting in the space $C_0^\infty(R^n; C^k) = C_0^\infty(R^n) \times \dots \times C_0^\infty(R^n)$, where the product is taken k times. The coefficients $P_\alpha(x)$, $|\alpha| \leq m$, are supposed to be smooth $k \times k$ matrix-valued functions defined in R^n and such that $P_\alpha(x) = P_\alpha^0$ are constant matrices outside the ball $B_R = \{x; |x| \leq R\}$ for some $R > 0$ and $P_\alpha^0 = 0$ for $|\alpha| < m$. Then $P(x, D)$ is an essentially self-adjoint operator in $L^2(R^n; C^k) = L^2(R^n) \times \dots \times L^2(R^n)$, where the product is taken k times. The spectral function $e(\lambda; x, y)$ of the operator $P(x, D)$ is determined as the distribution kernel of the spectral projector E_λ of P . Since $E_\lambda: L^2(R^n; C^k) \rightarrow L^2(R^n; C^k)$ is a continuous operator, $e(\lambda; x, y)$ coincides with a matrix-valued function

$$(e_{p,q}(\lambda; x, y))_{p,q=1}^k$$

for any λ fixed. Moreover, the functions $e_{p,q}(\lambda; x, y)$ are smooth for any λ fixed since P is elliptic and $P^N E_\lambda P^M$ is a bounded operator for any $M, N \in R^1$ in view of the spectral theorem.

Denote

$$P_j(x, \xi) = \sum_{\alpha=j}^m P_\alpha(x) \xi^\alpha, \quad 0 \leq j \leq m,$$

and let

$$P'_{m-1}(x, \xi) = P_{m-1}(x, \xi) + \frac{i}{2} \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 P_m}{\partial x_j \partial \xi_j}(x, \xi)$$

be the subprincipal symbol of the operator $P(x, D)$. Throughout this paper we assume that

(H) The roots $\tau_l(x, \xi)$, $l=1, \dots, p$, $p \leq km$, of the equation $\det(\tau^m I - P_m(x, \xi)) = 0$ with respect to τ are real, different from zero and of constant multiplicity in $T^*R^n \setminus 0$.

As a consequence of (H), the functions $\tau_l(x, \xi)$ are smooth in $T^*R^n \setminus 0$ and so are the projectors $\pi_l(x, \xi)$ on the corresponding eigenspaces ($P_m(x, \xi)$ is a self-adjoint matrix since $P(x, D)$ is a self-adjoint operator). The l^{th} bicharacteristic through the point $(y, \eta) \in T^*R^n \setminus 0$ is the curve

$$\Phi_l^t(y, \eta) = (x^l(t, y, \eta), \xi^l(t, y, \eta)) \text{ in } R^n \times (R^n \setminus 0),$$

defined by

$$\dot{x}^l = - \frac{\partial}{\partial \xi} \tau_l, \quad \dot{\xi}^l = \frac{\partial}{\partial x} \tau_l,$$

$$x^l(0, y, \eta) = y, \quad \xi^l(0, y, \eta) = \eta.$$

Throughout this paper we assume that the following non-trapping condition is fulfilled:

(T) The curve $R^1 \ni t \rightarrow x^l(t, y, \eta) \in R^n$ goes to infinity as $t \rightarrow \infty$ for any $(y, \eta) \in T^*R^n \setminus 0$ and $l=1, \dots, p$.

Assuming (H) and (T) to be fulfilled, we investigate the asymptotics of the spectral function $e(\lambda; x, y)$ as $\lambda \rightarrow \infty$. We study also the asymptotic behaviour of the outgoing and the incoming Green's function of the operator $P(x, D)$ as the spectral parameter goes to infinity.

The asymptotics of the spectral function of elliptic operators on compact manifolds was investigated by many authors but for non-compact manifolds there are only a few results. A complete asymptotic expansion of $e(\lambda; x, y)$ as $\lambda \rightarrow \infty$ for scalar second order differential operators with variable coefficients was first derived in [1] provided x sufficiently close to y . More precise results than those in [1] were obtained in [5—8]. Moreover, B. Vainberg proved in [2] that the spectral function of second order, scalar differential operators can be considered as an integral of a family of global oscillatory functions.

The asymptotics of the spectral function and the Green's functions related to boundary value problems for second order scalar elliptic differential operators

in exterior domains were investigated in [6]. In this paper we use essentially some ideas and constructions of [6].

The paper is organized as follows. In § 1 we formulate the main theorems about the asymptotics of the spectral function. These theorems are proved in § 2 and § 3. The asymptotics of the Green's functions are obtained in § 3.

§ 1. ASYMPTOTICS OF THE SPECTRAL FUNCTION

Denote by $\Lambda_e \subset T^*R^{2n} \setminus 0$ the Lagrange manifolds

$$\Lambda_l = \{(x, y; \xi, -\eta); \Phi_l^t(y, \eta) = (x, \xi), (y, \eta) \in S_l^*(y), (x, \xi) \in S_l^*(x)\},$$

where $S_l^*(y) = \{\eta \in R^n; |\tau_l(y, \eta)| = 1\}$. These manifolds can be viewed as flow-outs of the isotropic manifold $\Lambda^0 = \{(x, x; \eta, -\eta); (x, \eta) \in T^*R^{2n} \setminus 0\}$ along the bicharacteristics of $\tau_l(x, \xi)$, $l=1, \dots, p$. Let $i: \Lambda_l \rightarrow T^*R^{2n}$ be the inclusion map. Denote by O_l^s the space of global oscillatory functions of order $s \in R^1$ defined by the Lagrange immersion $i: \Lambda_l \rightarrow T^*R^{2n}$ (for definition see [9, § 1. 3]). First we prove

Theorem 1. Suppose the conditions (H) and (T) fulfilled. Then

$$(1) \quad e(\lambda; x, y) = \sum_{l=1}^p f_l(\lambda; x, y),$$

where $f_l(\lambda; x, y) = (f_{llj}(\lambda; x, y))_{j=1}^k$ and f_{llj} are global oscillatory functions $f_{llj} \in O_l^{(n+1)2-m}$ for any $l=1, \dots, p$.

To obtain more precise asymptotics of the spectral function at infinity we impose some additional conditions on the geodesics $R^1 \ni t \rightarrow x^l(t, y, \eta)$. Namely, for $(x_0, y_0) \in R^{2n}$ given we suppose that

$$(C) \quad \text{rank}(d_{t,\eta} x^l)(t, y_0, \eta) = n-1 \text{ for any } (t, \eta) \in (R^1 \setminus 0) \times (R^n \setminus 0) \\ \text{such that } x^l(t, y_0, \eta) = x_0.$$

Remark 1. The Condition (C) means that the points x_0 and y_0 are not conjugated along any geodesic arc $[0, 1] \ni t \rightarrow \gamma(t)$, $\gamma(0) = x_0$, $\gamma(1) = y_0$ related to the metric $P_{ij}(x)\xi^i\xi^j$ on T^*R^n when $k=1$ (see [6]).

Remark 2. The points (x, y) that do not satisfy the Condition (C) form a closed and nowhere dense set in R^{2n} .

In view of (T), (C) and the implicit function theorem there exist finitely many smooth vector-functions

$$(2) \quad (T_{l,j}(x, y), \eta_{l,j}(x, y)) \in (R^1 \setminus 0) \times S_l^*(y), j=1, \dots, J_l,$$

which solve the equation $x^l(t, y, \eta) = x$ for (x, y) close to (x_0, y_0) . Let us set

$$(3) \quad \pi_{l,j}(x, y) = \pi_l(x, \xi^i(T_{l,j}, y, \eta_{l,j}))$$

and

$$(4) \quad \Phi_{l,j}^t(x, y) = \Phi_l^t(x, \eta_{l,j}(x, y)).$$

Consider the functions

$$(5) \quad b_{j,l}(x, y) = \exp \left(\frac{(-1)^{m_l}}{m} \int_0^{\tau_{l,j}} \text{Tr} (\pi_l P'_{m-1} \pi_l - i \pi_l \{P_m, \pi_l\} \pi_l)_0 \Phi_{l,j}^s ds \right),$$

where

$$\{A, B\}(x, \xi) = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial A}{\partial \xi_j} \frac{\partial B}{\partial x_j} - \frac{\partial A}{\partial x_j} \frac{\partial B}{\partial \xi_j} \right)(x, \xi)$$

is the Poisson bracket of the matrix-valued functions $A(x, \xi)$ and $B(x, \xi)$ and $\text{Tr } C$ means the trace of the linear operator $C: \mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{C}^k$. Denote by ds the elementary Euclidean volume on $S_l^*(y)$ and set $d\omega = ds |\nabla \tau_l(y, \omega)|$.

Theorem 2. Suppose the conditions (H), (T) fulfilled and (C) holds at the point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Then

(i) If $x_0 = y_0$ then

$$(6) \quad \frac{de}{d\lambda}(\lambda^m; x, y) = \sum_{v=0}^{M-1} (\lambda)^{|n-m-v|} b_v^\pm(x) + \sum_{l,j} |\lambda|^{(n+1)/2-m-v} \exp(i\lambda T_{l,j}(x, x)) a_{l,j,v}^\pm(x, x) + O(|\lambda|^{n-m-M})$$

as $\lambda \rightarrow \pm \infty$ for any $M > 0$ and uniformly with respect x in a neighbourhood of x_0 in \mathbb{R}^n .

(ii) If $x_0 \neq y_0$ then

$$(7) \quad \frac{de}{d\lambda}(\lambda^m; x, y) = \sum_{v=0}^{M-1} \sum_{l,j} |\lambda|^{(n+1)/2-m-v} \exp(i\lambda T_{l,j}(x, y)) a_{l,j,v}^\pm(x, y) + O(|\lambda|^{(n+1)/2-m-M})$$

as $\lambda \rightarrow \pm \infty$ for any $M > 0$ and uniformly with respect to (x, y) in a neighbourhood of the point (x_0, y_0) in \mathbb{R}^{2n} .

Moreover

$$(8) \quad b_0^\pm(x) = \frac{(2\pi)^{-n}}{m} \sum_{l \in L^\pm} S_{S_l^*(y)} \pi_l(x, \omega) d\omega,$$

where $L^\pm = \{l; \pm \text{sgn } \tau_l = 1\}$ and

$$(9) \quad a_{l,j,v}^\pm \equiv 0 \text{ when } \pm \tau_l < 0, \quad a_{l,j,0}^\pm(x, y) = b_{l,j,0}^\pm(x, y) \pi_{l,j}(x, y)$$

for some smooth matrices $b_{l,j,0}^\pm(x, y)$. In case when the multiplicity m_l of the root τ_l is equal to 1 the matrix $b_{l,j,0}^\pm(x, y)$ is given by

$$(10) \quad b_{l,j,0}^\pm(x, y) = \frac{2^{-n+1/2} (\pi i)^{1-n/2}}{m\pi} i^{\gamma_{l,j}} T_{l,j}(x, y)^{(1-n)/2} |\det(\partial^2 T_{l,j}^2)|^{1/2} b_{l,j}(x, y) I,$$

where $b_{l,j}(x, y)$ is given by (5), I is the identity map in C^k and $\gamma_{l,j} \in Z/2$ is a Keller-Maslov index.

Remark 3. Results similar to Theorems 1 and 2 were proved in [6] for second order scalar differential operators in R^n as well as for some boundary value problems in exterior domains. A result close to Theorem 1 was announced for first order systems of differential operators with simple characteristics by Vainberg in [3]. Theorem 2 was announced in [7], where a sketch of the proof was given. We present here another proof which is based on some ideas given in [6].

§ 2. INTEGRAL REPRESENTATION OF THE SPECTRAL FUNCTION AND PROOF OF THEOREM 1

We begin with a brief description of the spectrum of the operator P in $L^2(R^n, C^k)$. First note that the point spectrum of the operator P is finite counted with its multiplicity. Indeed, the operator $D_x^m - P(x, D)$ satisfies the Conditions (A)–(D) in [4, § 10, p. 232], for example (D) follows from the non-trapping condition (T) and the theorems about the propagation of the singularities for systems of differential operators [11]. According to Theorem 2 in [4, § 10], the cut-off resolvent $\chi(P - \lambda^m I)\chi$ can be extended as an analytical function of operators in $\text{Hom}(L^2(R^n, C^k))$ with respect to k in the region $\{k \in C; |\text{Im } k| < \alpha \ln |\text{Re } k| - \beta\}$ for any $\chi \in C_0^\infty(R^n)$. Remark 3 in [4, p. 248] now yields that the operator P has no eigenvalues in $R^1 \setminus (-\lambda_0, \lambda_0)$ for some $\lambda_0 > 0$. Moreover, the point spectrum of P in $[-\lambda_0, \lambda_0]$ is finite in view of the apriory estimate

$$\|u\|_{H^s(R^n; C^k)} \leq C(\|Pu\|_{L^2(R^n; C^k)} + \|u\|_{L^2(|x| \leq R)}), \quad u \in C_0^\infty,$$

where $H^s(R^n; C^k)$ is the usual Sobolev space of vector-functions. Therefore P is a direct sum $P = P_p \oplus P_c$ of an operator P_p of finite rank and an operator P_c with continuous spectrum. In case when $m=2$ we suppose that $P_2(x, \xi) > 0$, then $P_c > 0$, $P_p < 0$. Let $U(t, x, y)$ be the distribution kernel of the operator $\exp(-it\sqrt{P})$, $\sqrt{-1} = i$, given by the functional calculus. Denote by $\int e^{i\lambda t} U(t, x, y) dt$ the partial Fourier transform of the distribution U with respect to t .

Proposition 1. Suppose the Conditions (H) and (T) are fulfilled. Then for any compact $K = K_1 \times K_2$ there exists a number T_K such that for any $\varphi \in C_0^\infty(R^1)$, $\varphi(t) = 1$ on $(-T_K, T_K)$ we have

$$\frac{d}{d\lambda} (\lambda^m; x, y) = \frac{(2\lambda)^{1-m}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} \varphi(t) U(t, x, y) dt + r_\varphi(\lambda; x, y),$$

where $|r_\varphi(\lambda; x, y)| \leq C\lambda^{-N}$ for any $N > 0$ in $(x, y) \in K$ and $\lambda > \lambda_0$ when $m=2$, $\lambda \in R^1 \setminus (-\lambda_0, \lambda_0)$ when $m=1$.

Proof. Consider the case $m=2$. We have

$$(11) \quad \frac{d}{d\lambda} \langle E_\lambda f, g \rangle = \frac{1}{2\pi i} \{ \langle (P - \lambda + i0)^{-1} f, g \rangle - \langle (P - \lambda - i0)^{-1} f, g \rangle \},$$

for any $f, g \in C_0^\infty(R^n; C^k)$, where $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denotes the scalar product in C^k . Arguing as in [6, § 1] we get

$$(12) \quad \chi(P - \lambda^2 \pm i0)^{-1} \chi = \pm \int e^{i\lambda t} \chi \varphi(t) Y(\pm t) P^{-1/2} \sin(t \sqrt{P}) \chi dt + R_\chi^\pm(\lambda),$$

where $\chi \in C_0^\infty(R^n)$, $\chi(x) = 1$ on $K_1 \cup K_2$; $Y(t) = 1$ for $t > 0$, $Y(t) = 0$ for $t < 0$ and

$$(13) \quad \|R_\chi^\pm(\lambda)\|_{\text{Hom}(H^{-s}(R^n; C^k), H^s(R^n; C^k))} \leq C_{N,S} \lambda^{-N}$$

holds for any $N > 0$, $s > 0$ and $|\lambda| > \lambda_0$. Integrating by parts in (12) and substituting in (11) we obtain

$$-\frac{d}{d\lambda} \chi E_\lambda \chi = \frac{i}{\lambda} \int e^{i\lambda t} \varphi(t) \cos(t \sqrt{P}) dt + R_{1,\chi}(\lambda),$$

where $R_{1,\chi}(\lambda)$ satisfies (13). Moreover,

$$-\frac{d}{d\lambda} \chi E_\lambda \chi = \frac{i}{2\lambda} \int e^{i\lambda t} \varphi(t) \exp(-it \sqrt{P}) dt + \frac{i}{2\lambda} \int e^{i\lambda t} \varphi(t) \exp(it \sqrt{P}) dt + R_{1,\chi}(\lambda).$$

Using the spectral theorem we prove that the second integral satisfies (13) in $\lambda \in [\lambda_0, \infty)$. Therefore

$$-\frac{d}{d\lambda} \chi E_\lambda \chi = \frac{i}{2\lambda} \int e^{i\lambda t} \varphi(t) \exp(-it \sqrt{P}) dt + R(\lambda),$$

where $R(\lambda)$ satisfies (13) in $[\lambda_0, \infty)$. Taking the kernels of the operators in the last equality we prove the proposition when $m=2$. When $m=1$ we proceed in the same way.

Denote by $C_l \subset T^*(R^{2n+1}) \setminus 0$ the Lagrange manifolds

$$C_l = \{(t, x, y; \tau, \xi, \eta); \tau + \tau_l(y, \eta) = 0, \Phi_l^t(y, \eta) = (x, \xi)\}$$

and let $S^s(R^{2n+1}; C_l)$ be the space of Fourier distributions of order s associated with C_l [10]. Note that Λ_l is the projection of C_l under the map $(t, x, y; \tau, \xi, -\eta) \rightarrow (x, y; \xi/\tau, -\eta/\tau)$.

Proposition 2. The distribution U has the form $U = \sum_{l=1}^r U_l$, where

$$U_l \in I^{-1,4}(R^{2n+1}; C_l).$$

This proposition was proved in [11] by Petkov.

Now Theorem 1 follows immediately from Propositions 1 and 2 using the arguments given in [6, § 4]. We shall give the details for sake of completeness.

Suppose the $\rho^0 = (t_0, x_0, y_0; \tau^0, \xi^0, \eta^0) \in C_l$ for some l . Let $\Phi(t, x, y, \theta)$, $\theta \in R^N$, $N > 0$, be a non-degenerated phase function at some point $g^0 = (t_0, x_0, \theta_0) \in \sum_\Phi = \{g; d_\theta \Phi = 0\}$ which defines C_l near ρ^0 , i. e. $\text{rank } d_{(t,x,y,\theta)} d_\theta \Phi(g^0) = N$ and $C_\Phi \subset C_l$, where C_Φ is defined by

$$C_\Phi = i_\Phi(\sum \Phi), \quad i_\Phi(t, x, y, \theta) = (t, x, y; d_t \Phi, d_x \Phi, d_y \Phi), \quad i_\Phi(q^0) = \rho^0.$$

Since $\tau \neq 0$ on C_Φ we have $\frac{\partial \Phi}{\partial t} \neq 0$. Thus

$$\Phi(t, x, y, \theta) = |\theta| (\psi(x, y, \theta) - t) a(t, x, y, \theta)$$

for some homogeneous of order zero functions a and ψ , $a(q^0) > 0$, and $\psi|_{|\theta|=1}$ is a non-degenerated phase function at $(x_0, y_0, \theta^0/|\theta^0|)$. It is easy to see that $\Phi_1(t, x, y, \theta) = |\theta| (\psi(x, y, \theta) - t)$ defines C_1 near ρ^0 and that $\psi(x, y, \alpha)$, $\alpha \in S^{N-1} = \{\theta \in R^N; |\theta| = 1\}$ defines Λ_1 near the point $(x_0, y_0; \xi^0/\tau^0, \eta^0/\tau^0)$. Let K be a compact set in R^{2n} . Using a finite partition of the unity we pick up some phase functions $\Phi_{l,j}(t, x, y, \theta) = |\theta| (\psi_{l,j}(x, y, \theta/|\theta|) - t)$, $\theta \in R^{N_j}$, and some amplitudes $a_{l,j} \in S^{(n-N_j-1) \cdot 2}(R^{2n+1} \times R^{N_j}; C^k)$ such that

$$U_l(t, x, y) = \sum_{j=1}^J \int e^{i\Phi_{l,j}(t, x, y, \theta)} a_{l,j}(t, x, y, \theta) d\theta + Q_l(t, x, y)$$

and

$$\text{sing supp } \{\varphi(t) Q_l(t, x, y)\} \cap (R^1 \times K) = \emptyset.$$

Here we used essentially the definition of Fourier distributions given in [9] and Proposition 2. According to Proposition 1 we have

$$\frac{de}{d\lambda}(\lambda^m; x, y) =$$

$$(2\lambda)^{1-m} \sum_{l=1}^p \sum_{j=1}^{J_l} \int_{S^{N_j-1}} e^{i\lambda\psi_{l,j}(x, y, \alpha)} d\alpha \int \int e^{i\lambda(r-1)(t-\psi_j)} \varphi a_{l,j} r^{N_j-1} dr dt + R(\lambda; x, y).$$

Applying the stationary phase method we obtain

$$\frac{de}{d\lambda}(\lambda^m, x, y) = \sum_{l=1}^p \sum_{j=1}^{J_l} \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^{(N_j-1) \cdot 2} \int_{S^{N_j-1}} e^{i\lambda\psi_{l,j}(x, y, \alpha)} b_{l,j}(x, y, \alpha, \lambda) d\alpha,$$

where $\psi_{l,j}$ defines Λ_l near some points $p^j \in \Lambda_l$ and

$$b_{l,j}(x, y, \alpha, \lambda) \sim \sum_{v=0}^{\infty} b_{l,j,v}(x, y, \alpha) \lambda^{(n+1) \cdot 2 - m - v}$$

as $|\lambda| \rightarrow \infty$, $b_{l,j,v} \in C^\infty$. Thus theorem 1 is proved.

§ 3. PROOF OF THEOREM 2

Throughout this chapter we shall denote by $K(x_0, y_0)$ a compact neighbourhood of the point (x_0, y_0) in R^{2n} . According to Propositions 1 and 2 we can write

$$\frac{de}{d\lambda}(\lambda^m; x, y) = \frac{(2\lambda)^{1-m}}{2\pi} \sum_{l=1}^r \int e^{i\lambda t} \varphi(t) U_l(t, x, y) dt + R(\lambda; x, y),$$

where $U_l \in I^{-1/4}(R^{2n+1}; C_l)$ and $R(\lambda; x, y)$ is estimated as in Proposition 1 for $K=K(x_0, y_0)$. We shall prove the theorem when $m=2$ and $\lambda \rightarrow +\infty$ (the proof in the case $m=1$ and $\lambda \rightarrow -\infty$ is the same).

Suppose that $\tau_l(x_0, \xi^0) < 0$ for some $(x_0, \xi^0) \in R^n \times (R^n \setminus 0)$. Then $\tau_l(x, \xi) < 0$ for any $(x, \xi) \in R^n \times (R^n \setminus 0)$ since P is an elliptic operator and we have

$$WF(U_l) \subset C_l \subset \{(t, x, y; \tau, \xi, \eta); \tau > 0\}.$$

Therefore

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} \varphi(t) U_l(t, x, y) dt = O(\lambda^{-N}), \quad N > 0,$$

uniformly in $[\lambda_0, \infty) \times K(x_0, y_0)$. Thus we obtain

$$(14) \quad \frac{de}{d\lambda}(\lambda^m; x, y) = \frac{(2\lambda)^{1-m}}{2\pi} \sum_{l \in L^+} \int e^{i\lambda t} U_l(t, x, y) \varphi(t) dt + O(\lambda^{-N})$$

for any $N > 0$ uniformly in $[\lambda_0, \infty) \times K(x_0, y_0)$, where $L^+ = \{l; \tau_l(x, \xi) > 0 \text{ for any } (x, \xi) \in R^n \times (R^n \setminus 0)\}$. Since $\text{sing supp } U_l$ is contained in the projection of C_l on $R_t^1 \times R_x^n \times R_y^n$ we have

$$\text{sing supp } U_l \subset \{(t, x, y); x(t, y, \eta) = x \text{ for some } \eta \in R^n \setminus 0\}.$$

First suppose $x_0 \neq y_0$. Then $t \neq 0$ on $\text{sing supp } U_l$ for any $(x, y) \in K(x_0, y_0)$ provided $K(x_0, y_0)$ is small enough and in view of (C) we have

$$(\text{sing supp } U_l) \cap (R^1 \times K(x_0, y_0)) \subset \bigcup_{j=1}^J \{(T_{l,j}(x, y), x, y)\}.$$

Then Proposition 3.1 in [6] yields

$$(15) \quad \begin{aligned} & \varphi(t) U_l(t, x, y) \\ &= \sum_{j=1}^J (2\pi)^{-(n+1)/2} (1-n)/2 \int_0^{\infty} e^{i[\theta(T_{l,j}(x,y)) - t + \gamma_{l,j} \pi/2]} b_{l,j}(t, x, y, \theta) \theta^{(n-1)/2} d\theta \end{aligned}$$

in $R^1 \times K(x_0, y_0)$ where $\gamma_{l,j} \in \mathbb{Z}$ is a Keller-Maslov index and $b_{l,j} \in S^0(R^{2n+2}; C^k)$ is a classical amplitude. Applying Fourier transform with respect to t and using the stationary phase method we obtain (7). Moreover,

$$(16) \quad b_{l,j,0}^+(x, y) = 2^{-m+1} (2\pi)^{-\frac{n+1}{2}} i^{(1-n)/2 - \gamma_{l,j}} b_{l,j,0}(T_{l,j}, x, y, 1),$$

where $b_{l,j,0}$ is described in Proposition 3.1 in [6]. Now consider the case $x_0 = y_0$. We have

$$(\text{sing supp } U_l) \cap (R^1 \times K(x_0, x_0)) \subset \bigcup_{j=0}^J \{(T_{l,j}(x, y), x, y)\},$$

where $T_{l,0}(x, y) = \inf \{t; x(t, y, \eta) = x \text{ for some } \eta \in R^n\}$ and $T_{l,j}, j > 0$, are determined using the Condition (C). Moreover,

$$T^0 = \sup_{(x, y) \in K(x_0, x_0)} T_{l,0}(x, y) < T_{l,j}(x, y)$$

for any $j \geq 1, (x, y) \in K(x_0, y_0)$, provided $K(x_0, y_0)$ sufficiently small. Let $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, $\varphi_1 \in C_0^\infty(-T_0, T_0)$, $\varphi_1(t) = 1$ in a neighbourhood of $t=0$. Consider the functions

$$G_s(\lambda; x, y) = \frac{(2\lambda)^{1-m}}{2\pi} \sum_{l \in L^+} \int e^{i\lambda t} U_l(t, x, y) \varphi_s(t) dt, \quad s=1, 2,$$

for $(x, y) \in K(x_0, y_0)$. Then

$$\frac{d}{d\lambda} (\lambda^m; x, y) = G_1(\lambda; x, y) + G_2(\lambda; x, y) + O(\lambda^{-N})$$

for any $N > 0$, uniformly in $[\lambda_0, \infty) \times K(x_0, x_0)$. Moreover, the asymptotics of $G_2(\lambda; x, y)$ gives the second sum in (6). To investigate $G_1(\lambda; x, y)$ we write $\varphi_1(t)U_l$ in the form

$$\varphi_1(t) U_l(t, x, y) = (2\pi)^{-n} \int e^{i\Phi_l(t, x, y, \theta)} a_l(t, x, y, \theta) d\theta,$$

where $\Phi_l = \varphi(x, y, \theta) - t\tau_l(y, \theta)$, $\varphi(x, x, \theta) = 0$ and $a_l \sim \sum_{j=0}^{\infty} a_{l,j}$, $a_{l,j}$ are

homogeneous symbols of order $-j$. For $\lambda > \lambda_0$ we have

$$\begin{aligned} G_1(\lambda; x, x) &= \frac{(2\lambda)^{1-m}}{(2\pi)^{n+1}} \sum_{l \in L^+} \int \int e^{i\lambda t} e^{-it\tau_l(y, \theta)} a_l(t, x, x, \theta) \varphi_1(t) dt d\theta \\ &= \frac{(2\lambda)^{1-m}}{(2\pi)^{n+1}} \sum_{l \in L^+} \int_{S_l^*(y)} d\omega \int_0^\infty \int e^{i\lambda t(r-1)} \varphi_1(t) a_l(t, x, x, \lambda r\omega) \lambda^n r^{n-1} dt dr. \end{aligned}$$

Applying the stationary phase method ones more we obtain the first sum in (6) which proves (i). Moreover, (9) follows directly from (14).

It remains to prove (8) and (10). The first coefficient in the asymptotic expansion of $G_1(\lambda; x, x)$ as $\lambda \rightarrow +\infty$ is equal to

$$b_l^+(x) = \frac{2^{1-m}}{(2\pi)^n} \sum_{l \in L^+} \int_{S_l^*(y)} a_{l,0}(0, x, x, \omega) d\omega,$$

where $d\omega = |\nabla \tau_l(y, \omega)|^{-1} ds$. Moreover, the initial condition $U(0, x, y) = \delta(x-y)I$ yields $a_{l,0}(0, x, x, \omega) = \pi_l(x, \omega)$ ([11]). Thus (8) is proved.

To prove (10) we use some additional information about the principle symbol σ_l of U_l (U_l can be considered as a half-density after multiplying it by the standart half-density $dt^{1/2} \otimes dx \wedge dy^{1/2}$ in R^{2n+1}). Note that $\sigma_l \in S^{n,2}(C_l; \Omega_{1,2} \otimes \mathbf{L})$ where $\Omega_{1,2}$ is the half-density bundle over C_l and \mathbf{L} denotes the Keller-Maslov line bundle. Let

$$\sigma_\Omega = \pi_{C_l}^* (|dt|^{1/2} \otimes |dy \wedge d\eta|^{1/2}),$$

where $\pi_{C_l} : C_l \rightarrow R^1 \times T^*(R^n)$, $\pi_{C_l}(t, x, y; \tau, \xi, \eta) = (t, y, \eta)$. Then σ_Ω is a nowhere vanishing half-density over C_l which is invariant under the map

$$C_l \ni (t, x, y; \tau, \xi, -\eta) \rightarrow \{(t+s, x_s, y; \tau, \xi_s, -\eta); (x_s, \xi_s) = \Phi_l^{s+t}(y, \eta)\} \in C_l.$$

Let G_L be a nowhere vanishing section of \mathbf{L} which is constant along the bicharacteristics $t \rightarrow \{(t(x, y; -\tau_l, \xi, -\eta); (x, \xi)) = \Phi_l^t(y, \eta)\}$. Suppose that $\sigma_L|_{C_l \cap \{t=0\}}$ coincides with the Keller-Maslov part of the principal symbol of $\delta(x-y)$. Then the principal symbol σ_l of U_l can be written in the form $\sigma_l = b_l(\sigma_\Omega \otimes \sigma_L)$. Proposition 3.1 in [6] yields

$$(17) \quad b_{l,j,0}(T_{l,j}, x, y, 1) = 2^{-n,2} T_{l,j}(x, y)^{(1-n)/2} \partial^2 T_{l,j}^2 \partial x \partial y^{1/2} b(x, y),$$

where $\tilde{b}(x, y) = b_l(T_{l,j}, x, y; -1, \xi^l(T_{l,j}, x, \eta_{lj}), -\eta_{lj}(x, y))$.

The function b_l will be obtained from the transport equation given in [11]. Note that $A(x, D) = \sqrt[m]{P(x, D)}$, $m=2$, is an elliptic pseudodifferential operator (we have supposed $P_2(x, \xi) > 0$) with a principal symbol $A_1(x, \xi) = \sqrt{P_2(x, \xi)}$ and a subprincipal symbol $A'_0(x, \xi)$. According to the transport equation derived in [11] we have

$$\frac{1}{i} \pi_l L_{H_{A_1, \pi_l}} \sigma_l + \left[\pi_l A'_0 \pi_l + \frac{\pi_l}{2i} \{A_1, \pi_l\} \right] \sigma_l = 0,$$

where A_1, A_0 and π_l are lifted on C_l as constants on the fibres of the map $C_l \ni (t, x, y; \tau, \xi, \eta) \rightarrow (x, \xi)$. Since

$$L_{H_{\tau+\tau_l}} (\sigma_\Omega \otimes \sigma_L) = 0$$

we obtain

$$\frac{1}{i} \pi_l H_{\tau+\tau_l} (b_l \pi_l) + \left[\pi_l A'_0 \pi_l + \frac{\pi_l}{2i} \{A_1, \pi_l\} \right] b_l \pi_l = 0.$$

Suppose that the eigenspace of $P_2(x, \xi)$ corresponding to the eigenvalue $\tau_l^2(x, \xi)$ is onedimensional. Let $R(x, \xi)$ be a unit eigenvector of $P_2(x, \xi)$ corresponding to $\tau_l^2(x, \xi)$ and suppose that b_l is a scalar function. Then

$$\langle R(x, \xi), \left(\frac{1}{i} \pi_l H_{(\tau+\tau_l)} (b_l \pi_l) + [\pi_l A'_0 \pi_l + \frac{\pi_l}{2i} \{A_1, \pi_l\} \pi_l] b_l R(x, \xi) \right) \rangle = 0$$

and the initial condition $U_l(0, x, y) = \delta(x-y) \pi_l$ gives $b_{l=0} = 1$. The last two equalities give

$$-\frac{1}{i} H_{\tau+\tau_l} b_l + \text{Tr} [\pi_l A_0' \pi_l + \frac{\pi_l}{2i} \{A_1, \pi_l\} \pi_l] b_l = 0,$$

$b_l|_{t=0} = 1.$

Moreover,

$$\pi_l \{A, \pi_l\} \pi_l = (2\tau_l(x, \xi))^{-1} \pi_l \{P_2(x, \xi), \pi_l\} \pi_l$$

and

$$\pi_l A_0' \pi_l = (2\tau_l(x, \xi))^{-1} \pi_l P_1' \pi_l$$

since $P_0' = A_1 A_0' + A_0' A_1$. Note that $\tau_l(x, \xi) = -1$ on the curve

$$s \rightarrow \gamma(s) = (s, x^l(s, y, \eta_{l,j}(x, y)), y; -1, \xi^l(s, y, \eta_{l,j}), -\eta_{l,j}).$$

Thus we obtain

$$\frac{d}{ds} b_l(\gamma(s)) - \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\pi_l P_1' \pi_l + \frac{\pi_l}{2i} \{P_2, \pi_l\} \pi_l \right] b_l(\gamma(s)) = 0,$$

$$b_l(\gamma(0)) = 1$$

which proves (10). The proof of Theorem 2 is completed.

In a similar way one can investigate the asymptotics of the outgoing (incoming) Green's functions $G^+(\lambda; x, y)$ ($G^-(\lambda; x, y)$) for $\lambda \rightarrow \infty$. The distributions $G^\pm(\lambda; x, y)$ are determined as the distribution kernels of the operators $(P - \lambda^m \pm i0)^{-1}$.

Theorem 3. Suppose (H) and (T) are satisfied and (C) is fulfilled at a point (x_0, y_0) , $x_0 \neq y_0$. Then

$$G^\pm(\lambda; x, y) \sim \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{l \in L^\pm} \sum_{j \in J^+} \lambda^{(n+1)2-m-v} \exp(i\lambda T_{l,j}) a_{l,j,v}^{\pm,+}$$

as $\lambda \rightarrow +\infty$, $J^+ = \{j \in J; T_{l,j} > 0\}$.

To prove Theorem 3 one can use (12) and the arguments given in the prove of point (ii) of Theorem 2.

REFERENCES

1. Попов, Г., М. Шубин. Асимптотическое разложение спектральной функции для эллиптических операторов второго порядка в R^n . — Функци. анализ и прилож., **17**, 1983, № 3, 37—45.
2. Вайнберг, Б. Полное асимптотическое разложение спектральной функции для эллиптических операторов второго порядка в R^n . — Мат. сборник, **123**, 1983, 195—212.
3. Вайнберг, Б. О параметрике и асимптотике спектральной функции дифференциальных операторов в R^n — Докл. АН СССР, **282**, 1985, 265—269.
4. Вайнберг, Б. Асимптотические методы в уравнениях математической физики. Москва, Изд. Моск. унив., 1982.
5. Попов, Г. Spectral asymptotics for elliptic second order differential operators. — C. R. Acad. Bulg. Sci., **36**, 1983, 413—415.

6. P o p o v, G. Spectral asymptotics for elliptic second order differential operators. — J. Math. Kyoto Univ., **25**, 1985, 659—681.
7. P o p o v, G. Asymptotic behaviour of the spectral function of elliptic systems. — C. R. Acad. Bulg. Sci., **37**, 1984, 737—740.
8. P o p o v, G. Asymptotics of Green's functions of elliptic differential operators. — C. R. Acad. Bulg. Sci., **37**, 1984, No 4, 449—452.
9. D u i s t e r m a a t, J. Oscillatory integrals. Lagrange immersions and unfolding of singularities. — Comm. Pure Appl. Math., **28**, 1974, 207—281.
10. H ö r m a n d e r, L. Fourier integral operators. I. — Acta Math., **127**, 1971, 79—183.
11. P e t k o v, V. Propagation of singularities for pseudodifferential operators. Berlin, Akademie der Wissenschaften der DDR, 1977.

Received 20. 3. 1985

О СУЩЕСТВОВАНИИ ПЕРИОДИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ

Неко Георгиев

Неко Георгиев. О существовании периодического решения. На основании теории вращения векторного поля доказывается известная теорема о существовании периодического решения системы дифференциальных уравнений.

Neko Georgiev. On the Existence of a Periodical Solution. A new proof of the well-known existence theorem for periodical solutions of systems of differential equation is obtained. The approach is based on the theory of rotation for the vector field.

Рассмотрим систему

$$(1) \quad \dot{x} = Ax + f(t) + \varepsilon g(t, x, \varepsilon),$$

где ε — параметр, x — n -мерный вектор; отображения f и g — непрерывные и периодические по t с периодом 2π , при этом g непрерывно дифференцируемое по x , а линейный оператор $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ не имеет собственных значений вида ki ($k=0, 1, 2, \dots$, i — мнимая единица).

Рассмотрим и систему

$$(2) \quad \dot{x} = Ax + f(t),$$

которая получена из системы (1) при $\varepsilon=0$.

Система (2) имеет единственное 2π -периодическое решение $\varphi_0(t)$. Пуанкаре доказал следующее утверждение:

Т е о р е м а. Система (1) при достаточно малых $|\varepsilon|$ имеет единственное 2π -периодическое решение $\varphi(t, \varepsilon)$, непрерывное по совокупности переменных (t, ε) и такое, что $\lim \varphi(t, \varepsilon) = \varphi_0(t)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Эта теорема доказывается обычно теоремой о неявной функции или принципом сжимающих отображений (см., например, [1] и [2]).

Мы докажем эту теорему на основании вращения векторного поля.

Доказательство. Так как ki не является собственным значением оператора A , то $\det(e^{2\pi A} - E) \neq 0$, где E — единичный оператор, отображающий \mathbf{R}^n на себя. Отсюда следует, что существует линейный оператор $(e^{2\pi A} - E)^{-1}$. Положим $l = \|(e^{2\pi A} - E)^{-1}\|$.

Очевидно имеем

$$(3) \quad \|x_0\| = \|(e^{2\pi A} - E)^{-1}(e^{2\pi A} - E)x_0\| \leq l \|(e^{2\pi A} - E)x_0\|$$

при $x_0 \in \mathbf{R}^n$.

Пусть число δ удовлетворяет условию

$$(4) \quad \delta > 4\pi l \sup \|e^{At}\| \sup \|f(t)\| \quad \text{при } 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Через $\varphi(t, x_0, \varepsilon)$ будем обозначать решение системы (1) с начальным условием $0, x_0$, где $\|x_0\| \leq \delta$.

Обозначим через $g^t: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ однопараметрическую группу диффеоморфизмов, определяемую равенством

$$g^t x_0 = \varphi(t, x_0, \varepsilon), \quad \|x_0\| \leq \delta.$$

Пусть точка $x_0 \in \mathbf{R}^n$ лежит в шаре $\|x_0\| \leq \delta$. Легко видно, что решение $g^t x_0$ системы (1) определено при $0 \leq t \leq 2\pi$, если $|\varepsilon|$ достаточно малое число. В самом деле, это непосредственно следует из теоремы об интегральной непрерывности, если ее применим к решению $(x(t, x_0, \varepsilon), y(t, \varepsilon))$ системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + f(t) + yg(t, x, y), \\ \dot{y} &= 0 \end{aligned}$$

с начальным условием $(0, x_0, \varepsilon)$ при $\varepsilon = 0$. Отсюда следует, что существует положительное число ε_0 , такое, что при $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ и $\|x_0\| \leq \delta$ любое решение $g^t x_0$ системы (1) определено на промежутке $[0, 2\pi]$. Итак, определено векторное поле $g^{2\pi} x_0 - x_0$ при $\|x_0\| \leq \delta$, $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$.

Так как образ компакта $K: 0 \leq t \leq \delta, \|x_0\| \leq \delta, |\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ при непрерывном отображении φ есть компакт, то существует

$$(5) \quad \sup \|\varphi(t, x_0, \varepsilon)\| = L \quad \text{при } (t, x_0, \varepsilon) \in K.$$

Решение $\varphi(t, x_0, \varepsilon)$ системы (1) удовлетворяет интегральному уравнению (см. [1])

$$(6) \quad \varphi(t, x_0, \varepsilon) = e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} f(\tau) d\tau + \varepsilon \int_0^t e^{A(t-\tau)} g(\tau, x(\tau, x_0, \varepsilon), \varepsilon) d\tau.$$

Из (6) на основании (5) при $0 \leq t \leq 2\pi$ получаем

$$(7) \quad \|g^t x_0 - e^{At} x_0\| \leq 2\pi \sup \|e^{At}\| \sup \|f(t)\| + 2\pi |\varepsilon| C_1 M,$$

где $C_1 = \sup \|e^{At}\|$ при $0 \leq t \leq 2\pi$ и $M = \sup \|g(t, x, \varepsilon)\|$ при $0 \leq t \leq 2\pi, \|x\| \leq L, |\varepsilon| \leq \varepsilon_0$.

Из (7) в силу (4) имеем

$$(8) \quad \|g^t x_0 - e^{At} x_0\| \leq \frac{\delta}{2l} + 2\pi C_1 |\varepsilon| M.$$

Выберем теперь ε таким образом, чтобы выполнялось неравенство

$$4\pi/c_1|\varepsilon|M < \delta.$$

Тогда на сфере $S: \|x_0\| = \delta$ в силу (3) из (8) окончательно получаем

$$(9) \quad \|g^{2\pi}x_0 - x_0 - (e^{2\pi A} - E)x_0\| < \|(e^{2\pi A} - E)x_0\|.$$

Из (9) следует, что поле $g^{2\pi}x_0 - x_0$ невырожденно на сфере S и, следовательно, определено вращение этого поля на S . Из (9) еще следует, что поля $g^{2\pi}x_0 - x_0$ и $(e^{2\pi A} - E)x_0$ гомотопны на S . Следовательно, эти два поля имеют одинаковые вращения на сфере S . Но вращение поля $(e^{2\pi A} - E)x_0$ равняется индексу $\gamma(x_0)$ особой точки $x_0 = 0$ этого поля. А, как известно, $\gamma(x_0) = (-1)^\beta$, где β -сумма кратностей вещественных отрицательных собственных значений линейного отображения $e^{2\pi A} - E$. Итак, вращения поля $g^{2\pi}x_0 - x_0$ на сфере S отлично от нуля. Следовательно, поле $g^{2\pi}x_0 - x_0$ имеет внутри шара $\|x_0\| \leq \delta$ по крайней мере одну особую точку x , т. е. $g^{2\pi}x - x = 0$. И так как x является неподвижной точкой оператора $g^{2\pi}$, то решение $g^t x$ уравнения (1) является периодическим.

В частности при $\varepsilon = 0$ следует, что система (2) имеет 2π -периодическое решение $\varphi_0(t)$, единственность которого очевидна.

Предельное соотношение $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g^t x = \varphi_0(t)$ следует из непрерывной зависимости решения от параметра.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коддингтон, Э. А., Н. Левинсон. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1958.
2. Хейл, Дж. Колебания в нелинейных системах. М., 1966.

Поступила 20. 5. 1985 г.

A CLASS OF PSEUDODIFFERENTIAL OPERATORS

Toshko Boev

Т о ш к о Б о е в. Один класс псевдодифференциальных операторов. Изучается один класс псевдодифференциальных операторов с негладкими символами, который является расширением одного класса Фридрикса. Рассмотрены основные операции традиционного для операторов такого типа исчисления. Получен результат об эллиптических операторах.

T o s h k o B o e v. A Class of Pseudodifferential Operators. A class of pseudodifferential operators with nonsmooth symbols is studied. It is an extension of a class of Friedrichs. The main operations of the calculus traditional for such operators are considered. A result for elliptic operators is obtained.

§ 1. INTRODUCTION

As it is well-known the pseudodifferential operators are integral operators of the following type:

$$(1) \quad P(\cdot, D)\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \sigma(x, \xi) e^{i(x, \xi)} \hat{\varphi}(\xi) d\xi, \quad \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n),$$

where $i(x, \xi) = i(x^1 \xi^1 + \dots + x^n \xi^n)$, $i = \sqrt{-1}$, the vectors $x = (x^1, \dots, x^n)$, $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^n)$ belong to \mathbb{R}^n and $\hat{\varphi}(\xi) = \int e^{-i(x, \xi)} \varphi(x) dx$ is the Fourier transformation of φ . (\mathbb{R}^n , C^∞ , C_0^∞ , C^l , C_0^l are the spaces with the traditional meaning — see e. g. [1].) The function $\sigma(x, \xi)$ (belonging for instance to $C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$) is called a symbol of the operator $P(x, D)$. When $\sigma(x, \xi) \in C^\infty$ with respect to the argument (x, ξ) we say $P(x, D)$ has a regular symbol. The theory of the operators with regular symbols has been intensively studied and applied for several aims (see e. g. [2, 3, 4, 5]). But there is a special interest to the operators with nonregular symbols. For instance recently operators with symbols in C^∞ on ξ but little regular on x have been applied to nonlinear problems ([6,

7]). Recall that the singular integral operators of Zygmund—Calderon [8, 9] are the first class of such operators essentially used for linear problems. The investigation of the nonregular case has an interesting evolution which can be felt by the papers of Calderon—Vaillancourt [10], Cordes [11], Kato [12], Coifman—Meyer [13], Nagase [14]. A feature of most of the symbols $\sigma(x, \xi)$ in these papers are requirements for the derivatives $\partial_{\xi}^{\alpha}, \partial_x^{\beta} \sigma(x, \xi)$ only of finite order — $|\alpha| \leq k, |\beta| \leq N$. The x -regularity of $\partial_{\xi}^{\alpha} \sigma(x, \xi)$ can be too small ([14]), but k is at least $[n/2]+1$, where $\alpha=(\alpha^1, \dots, \alpha^n), \beta=(\beta^1, \dots, \beta^n)$ are multiindices ($\alpha^i, \beta^j \geq 0$ are integers), $|\alpha|=\alpha^1 + \dots + \alpha^n, \partial_{\xi}^{\alpha}=\partial_{\xi^1}^{\alpha^1} \dots \partial_{\xi^n}^{\alpha^n}, [r]$ is the integer part of r . On the other hand, Friedrichs [15] (see also Kumano-go [16]) has showed that k can be essentially lower than $[n/2]+1$ (and $\partial_{\xi}^{\alpha} \sigma(x, \xi)$ may be weak regular with respect to x also). In [15, 16] a basic calculus is given under conditions of the form

$$(2) \quad \int_{\xi} \sup |(1+|\xi|)^{-r} \hat{\sigma}(\theta, \xi)| (1+|\theta|)^{\mu} d\theta < \infty,$$

where $\hat{\sigma}(\cdot, \xi)$ is the x -Fourier transformation of $\sigma(x, \xi)$, and r, μ are real numbers. But as we shall see in § 2 there exist symbols with the low regularity of those of Friedrichs which do not satisfy (2). In spite of this a traditional calculus can be established for the associated operators (1). So the purpose of the present paper is to give an extension of the Friedrichs pseudodifferential operators. This article is a preparation for studying of certain uniqueness problems when nonregular symbols arise.

§ 2. OPERATORS OF A GENERALIZED FRIEDRICHS TYPE

We suppose know (see e. g. [1]) the main properties of the space $D(\Omega)$ (equal to $C_0^{\infty}(\Omega)$ with the corresponding topology), the distribution space $D'(\Omega)$ and the Schwartz classes $S(\mathbb{R}^n)$ (of rapidly decreasing functions), $S'(\mathbb{R}^n)$ (of tempered distributions); $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ is an open set. We suppose also know the notion "trace" of a distribution. Denote by $\lambda_s(x)$ the tempered distribution satisfying: $\hat{\lambda}_s(\xi) = (1+|\xi|^2)^{s/2}, s \in \mathbb{R}^1$.

Definitions. We say a distribution $f(x, \xi)$ (from $D'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$) belongs to the Friedrichs class $(F_{\mu, r})^0, \mu \geq 0, r$ are real numbers, if $\text{ess sup} |(1+|\xi|)^{-r} f(\xi)| < \infty$ (when f does not depend on x) or the following requirements (3), (4) are satisfied (when f depends on x):

(3) f has a trace f_{η} belonging to $S'(\mathbb{R}^n)$ for almost every $\eta \in \mathbb{R}^n$;

$$(4) \quad \int_{\xi} \sup |(1+|\xi|)^{-r} \hat{f}(\theta, \xi)| (1+|\theta|)^{\mu} d\theta < \infty,$$

where $\hat{f}(\theta, \xi)$ is the Fourier transformation of the trace f_{ξ} .

Denote by $F_{\mu, r}' (\mu \geq 0, r \in \mathbb{R}^1)$ the subspace of $D'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ containing all finite products $s'_1 \dots s'_N$, where $s'_j = s'_j(x, \xi)$ is a distribution of the form

$$(5) \quad h_r(\xi) \prod_{j=1}^n \omega_j(\xi) (\omega_1(\xi)^{\alpha_1}, \dots, \omega_n(\xi)^{\alpha_n}) * \lambda_{-\mu}(\cdot)(x),$$

where h_r, ω_j, κ are arbitrary functions such that $\text{ess sup } |h_r(\xi)| (1+|\xi|)^{-r}$ and $\text{ess sup } |\omega_j(\xi)|$ are finite, $\omega_j(\xi)$ does not depend on ξ^j ($j=1, 2, \dots, n$), and the Fourier transformation $\hat{\kappa}(\theta)$ of $\kappa(y)$ belongs to $L_1(\mathbb{R}^n)$.

We say a distribution $\sigma(x, \xi)$ is a symbol belonging to the generalized Friedrichs class $F_{\mu, r}$ ($\mu \geq 0, r \in \mathbb{R}^1$) if $\sigma(x, \xi) = \sum_{v=1}^N s_v^0(x, \xi) s'_v(x, \xi)$, where

$s_v^0 \in (F_{\mu_v, r_v})^0$ and $s'_v \in F'_{\mu_v, r_v}$, N is arbitrary.

Proposition 1. $F_{\mu, r}$ is an essentially larger class than $(F_{\mu, r})^0$.

Proof. Let $\sigma' \in F'_{\mu, r}$. Then we have

$$\hat{\sigma}'(\theta, \xi) = h_r(\xi) (1+|\theta|^2)^{-\mu/2} \hat{\kappa} \left(\frac{\theta^1}{\omega_1(\xi)}, \dots, \frac{\theta^n}{\omega_n(\xi)} \right).$$

Take h_r and ω_j such that $\text{ess inf } |h_r(\xi)| (1+|\xi|)^{-r} = c_r > 0$, ω_j are continuous near some point ξ_0 and (for instance) $\omega_j(\xi_0) \neq 0$ ($j=2, 3, \dots, n$) but $\omega_1(\xi_0) = 0$. Let in addition $\hat{\kappa}(\eta) = \hat{\kappa}_1(\eta^1) \hat{\kappa}''(\eta'')$, $\eta'' = (\eta^2, \dots, \eta^n)$, and $|\hat{\kappa}_1|$ takes one and the same value $c^1 > 0$ for a sequence η_v^1 , $|\eta_v^1| \rightarrow \infty$ when $v \rightarrow \infty$. Now we obtain

$$\sup_{\xi} |\hat{\sigma}'(\theta, \xi) (1+|\xi|)^{-r}| \geq c_r (1+|\theta|^2)^{-\mu/2} \left| \hat{\kappa} \left(\frac{\theta^1}{\omega_1(\xi)}, \dots, \frac{\theta^n}{\omega_n(\xi)} \right) \right|;$$

consequently

$$\begin{aligned} \sup_{\xi} |\hat{\sigma}'(\theta, \xi) (1+|\xi|)^{-r}| &\geq c_r (1+|\theta|^2)^{-\mu/2} \sup_{\xi} \left| \hat{\kappa} \left(\frac{\theta^1}{\omega_1(\xi)}, \dots, \frac{\theta^n}{\omega_n(\xi)} \right) \right| \\ &\geq c_r (1+|\theta|^2)^{-\mu/2} \limsup_{\xi \rightarrow \xi_0} \left| \hat{\kappa} \left(\frac{\theta^1}{\omega_1(\xi)}, \dots, \frac{\theta^n}{\omega_n(\xi)} \right) \right|. \end{aligned}$$

But because $\omega_1(\xi_0) = 0$ and $|\theta^1|/|\eta_v^1| \rightarrow 0$ ($v \rightarrow \infty$) we can find a sequence $\xi_v(\theta)$ tending to ξ_0 , such that $|\omega_1(\xi_v(\theta))| = |\theta^1|/|\eta_v^1|$ (for v big enough). Now taking $\hat{\kappa}_1$ such that $\hat{\kappa}_1(\eta^1) = \hat{\kappa}_1(\eta^1)$ and supposing $\hat{\kappa}$ continuous we have

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \left| \hat{\kappa} \left(\frac{\theta^1}{\omega_1(\xi_v(\theta))}, \dots, \frac{\theta^n}{\omega_n(\xi_v(\theta))} \right) \right| = c^1 \left| \hat{\kappa}'' \left(\frac{\theta^2}{\omega_2(\xi_0)}, \dots, \frac{\theta^n}{\omega_n(\xi_0)} \right) \right|.$$

Then we see that

$$\sup_{\xi} |\hat{\sigma}'(\theta, \xi) (1+|\xi|)^{-r}| \geq c_r c^1 (1+|\theta|^2)^{-\mu/2} \left| \hat{\kappa}'' \left(\frac{\theta^2}{\omega_2(\xi_0)}, \dots, \frac{\theta^n}{\omega_n(\xi_0)} \right) \right|.$$

But

$$\int \left| \hat{\kappa}'' \left(\frac{\theta^2}{\omega_2(\xi_0)}, \dots, \frac{\theta^n}{\omega_n(\xi_0)} \right) \right| d\theta^2 \dots d\theta^n > 0$$

when $\kappa \neq 0$. Consequently $\hat{\kappa}''(\theta^2/\omega_2, \dots, \theta^n/\omega_n)$ does not belong to $L_1(\mathbb{R}^n)$, i. e. the above symbol $\sigma'(x, \xi)$ does not belong to the Friedrichs class $(F_{\mu, r})^0$.

Definition. $\text{Op } \mathbf{F}_{\mu, r}$ is the set of the operators (1) with σ belonging to $\mathbf{F}_{\mu, r}$.

§ 3. ELEMENTS OF THE CALCULUS

It can be seen that any operator $P \in \text{Op } \mathbf{F}_{\mu, r}$ is a continuous operator from $D(\mathbb{R}^n)$ into $D'(\mathbb{R}^n)$. More general the following assertion is true.

Proposition 2. $P: \hat{L}^{t+r, \infty} \rightarrow \hat{L}^{t, \infty}$ is a bounded operator $\forall t: 0 \leq t \leq \mu$, where

$$\hat{L}^{s, \infty} = \{f \in \mathbf{S}'(\mathbb{R}^n): \|f\|_{s, \infty} = \text{ess sup} |(1+|\eta|)^s \hat{f}(\eta)| < \infty\}, \quad s \in \mathbb{R}^1.$$

Proof. We shall consider two cases for P : P has a symbol in $(\mathbf{F}_{\mu, r})^0$ ($P = P^0$) or P has a symbol satisfying (5) ($P = P'$). For $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$ we have:

$$\begin{aligned} \widehat{P^0\varphi}(\eta) &= \int \hat{\sigma}^0(\eta - \xi, \xi) \hat{\varphi}(\xi) d\xi, \\ \widehat{P'\varphi}(\eta) &= \int h_r(\xi) (1+|\eta - \xi|^2)^{-\mu/2} \hat{\chi} \left(\frac{\eta^1 - \xi^1}{\omega_1(\xi)}, \dots, \frac{\eta^n - \xi^n}{\omega_n(\xi)} \right) \hat{\varphi}(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Now we obtain:

$$\begin{aligned} (1+|\eta|)^t |\widehat{P^0\varphi}(\eta)| &\leq \int \frac{(1+|\eta|)^t}{(1+|\xi|)^t} \frac{|\hat{\sigma}^0(\eta - \xi, \xi)|}{(1+|\xi|)^r} (1+|\xi|)^{r+t} |\hat{\varphi}(\xi)| d\xi \\ &\leq \text{const} \|\varphi\|_{t+r, \infty} \int (1+|\eta - \xi|)^\mu g^0(\eta - \xi) d\xi = \text{const} \|\varphi\|_{t+r, \infty} \end{aligned}$$

using the well-known Peetre inequality (see e. g. [2]);

$$\begin{aligned} g^0(\eta) &= \sup |(1+|\xi|)^{-r} \hat{\sigma}^0(\eta, \xi)|; (1+|\eta|)^t |\widehat{P'\varphi}(\eta)| \\ &\leq \text{const} \int \frac{(1+|\eta|)^t}{(1+|\xi|)^t} (1+|\eta - \xi|)^{-\mu} \left| \hat{\chi} \left(\frac{\eta^1 - \xi^1}{\omega_1(\xi)}, \dots, \frac{\eta^n - \xi^n}{\omega_n(\xi)} \right) \right| (1+|\xi|)^{r+t} |\hat{\varphi}(\xi)| d\xi \\ &\leq \text{const} \|\varphi\|_{r+t, \infty} \int \left| \hat{\chi} \left(\frac{\eta^1 - \xi^1}{\omega_1(\xi)}, \dots, \frac{\eta^n - \xi^n}{\omega_n(\xi)} \right) \right| d\xi \\ &= \text{const} \|\varphi\|_{r+t, \infty} \int |\hat{\chi}(\theta)| |\omega_1(\eta - \theta)| \dots |\omega_n(\eta - \theta)| d\theta \leq \text{const} \|\varphi\|_{r+t, \infty}. \end{aligned}$$

The general case can be treated analogously to the above by additional using of the Peetre inequality. The next proposition is the main result in this section.

Proposition 3. Let $P \in \text{Op } \mathbf{F}_{\mu_P, r}$, $Q \in \text{Op } \mathbf{F}_{\mu_Q, s}$ are operators associated to the symbols $\sigma_P \in \mathbf{F}_{\mu_P, r}$ and $\sigma_Q \in \mathbf{F}_{\mu_Q, s}$ respectively.

(a) The inequality $\|P\varphi\|_0 \leq \text{const} \|\varphi\|_r$ is valid for every $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$ (the constant does not depend on φ), where $\|\varphi\|_s = \left(\int (1+|\xi|^2)^s |\hat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}$.

(b) Let us have in addition: $\mu_P \geq 1 + |s - 1|$, $\mu_Q \geq 1 + |r - 1|$, $\partial_\xi^\alpha \sigma_P$, $\partial_\xi^\alpha \sigma_Q$ satisfy

$$(6) \quad \sup_{-1 < \tau < 1} \sup_{\xi} |\hat{f}(\theta + \tau \eta, \xi) (1+|\xi|)^{-a}| \leq g(\theta + \eta), \quad g(\theta) \in L_1(\mathbb{R}^n),$$

with $q=r-1$ and $s-1$ respectively, $\forall \alpha: |\alpha| = 1$.

Then the composition $QP = Q \circ P$ ($QP\varphi = Q \circ P\varphi = Q(P\varphi)$) exists, QP belongs to $\mathbf{OpF}_{0,r+s}$ and has a symbol σ_{QP} such that $\sigma_{QP} = \sigma_Q \sigma_P \in \mathbf{F}_{0,r+s-1}$. An analogous assertion is true for PQ .

(c) If $\partial_\xi^\alpha \sigma_P \in (\mathbf{F}_{1,r-1})^0 \forall \alpha: |\alpha| = 1$ the following equality holds:

$$P^* \varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \overline{\sigma_P(x, \xi)} e^{i(x, \xi)} \widehat{\varphi}(\xi) d\xi + R_* \varphi,$$

$\forall \varphi \in D(\mathbf{R}^n)$, where P^* is the adjoint operator of P (in the traditional L_2 — since), $\overline{\sigma_P}$ is the complex conjugated of σ_P , and R_* is an operator bounded in the Sobolev space $H^{r-1}(\mathbf{R}^n) = \{f \in \mathbf{S}'(\mathbf{R}^n): \|f\|_{r-1} < \infty\}$.

Proof. We begin with the proof of (b). By the Proposition 2 we see that QP exists if $P\varphi \in L^{t+s}$, $t \leq \mu_Q$, which is valid when $t+s \leq \mu_P$; analogously from PQ we obtain $t \leq \mu_P$, $t+r \leq \mu_Q$. Now taking $0 \leq t \leq \min\{r-1, s-1, \mu_P - (r-1) - (s-1)\}$ we establish the existence of both QP and PQ . Consider the distribution

$$Q_N P_\nu \varphi(x) = \int e^{i(x, \xi)} \sigma_Q(x, \xi) \varphi^0 \left(\frac{\xi}{N} \right) \widehat{\varphi_\nu P \varphi}(\xi) d\xi,$$

where N, ν are integers, $\varphi^0 \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, $\varphi^0 \equiv 1$, near the origin, and $\varphi_\nu(x) = \varphi^0(x/\nu)$. It is not difficult to see that

$$Q_N P_\nu \varphi = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{i(x, \eta)} \sigma_{QP}^{N, \nu}(x, \eta) \widehat{\varphi}(\eta) d\eta,$$

where

$$\sigma_{QP}^{N, \nu}(x, \eta) = \int \int e^{i(x-z, y-\eta)} \varphi^0 \left(\frac{\xi}{N} \right) \sigma_Q(x, \xi) \sigma_P(z, \eta) \varphi^0 \left(\frac{z}{\nu} \right) dz d\xi.$$

Let $F_\varepsilon(x, \xi) = (F * \Phi_0^\varepsilon)(x, \xi) \stackrel{\text{def}}{=} \langle F, \Phi_0^\varepsilon(x - \cdot, \xi - \cdot) \rangle$, $\varepsilon > 0$; $F \in D'(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$ is an arbitrary distribution and $\Phi_0^\varepsilon(x, \xi) = (1/\varepsilon^{2n}) \Phi_0(x/\varepsilon, \xi/\varepsilon)$ with $\Phi_0 \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$ satisfying the conditions $\Phi_0(0, 0) > 0$, $\int \int \Phi_0 = 1$. (Take for the sake of simplicity $\Phi_0(x, \xi) = \Psi_0(x) \Psi_0(\xi)$.) It is known ([1]) that $F_\varepsilon \in C^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$. By the Taylor formula we obtain

$$\sigma_{Q, \varepsilon}(x, \xi) = \sigma_{Q, \varepsilon}(x, \eta) + \sum_{|\alpha|=1} (\xi - \eta)^\alpha h_\alpha^\varepsilon(x, \xi, \eta)$$

with $h_\alpha^\varepsilon(x, \xi, \eta) = \int_0^1 \partial_\xi^\alpha \sigma_{Q, \varepsilon}(x, \zeta(t)) dt$, $\zeta(t) = t(\xi - \eta) + \eta$ ($\theta^\alpha = (\theta^1)^{\alpha_1} \dots (\theta^n)^{\alpha_n}$).

We can easily verify that the function

$$s_{N, \nu}^\varepsilon(x, \eta) = \int \int e^{i(x-z, y-\eta)} \varphi^0 \left(\frac{\xi}{N} \right) \sigma_{Q, \varepsilon}(x, \xi) \sigma_P(z, \eta) \varphi^0 \left(\frac{z}{\nu} \right) dz d\xi$$

satisfies the equality

$$s_{N, \nu}^\varepsilon(x, \eta) = p_{N, \nu}^\varepsilon(x, \eta) + \sum_{|\alpha|=1} s_{N, \nu}^{\alpha, \varepsilon}(x, \eta),$$

where

$$p_{N, \nu}^\varepsilon = \sigma_{Q, \varepsilon}(x, \eta) \int e^{i(x, \zeta)} \varphi^0\left(\frac{\zeta + \eta}{N}\right) \widehat{\varphi_\nu \sigma_P}(\zeta, \eta) d\zeta$$

and

$$S_{N, \nu}^{\alpha, \varepsilon} = \int e^{i(x, \zeta)} \varphi^0\left(\frac{\zeta + \eta}{N}\right) h_a^\varepsilon(x, \zeta + \eta, \eta) \zeta^\alpha \widehat{\varphi_\nu \sigma_P}(\zeta, \eta) d\zeta.$$

The symbols $\sigma_{Q, \varepsilon}$, $\partial_\xi^\alpha \sigma_{Q, \varepsilon}$ are bounded almost everywhere (a. e.) in the compacts of $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ and tend (a. e. in such compacts) to σ_Q , $\partial_\xi^\alpha \sigma_Q$ respectively (when $\varepsilon \rightarrow 0$). Then we have $S_{N, \nu}^\varepsilon \rightarrow S_{Q, \nu}^N$ and $p_{N, \nu}^\varepsilon \rightarrow p_{N, \nu}$ in $D'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ ($\varepsilon \rightarrow 0$), where

$$p_{N, \nu}(x, \xi) = \sigma_Q(x, \xi) \int e^{i(x, \eta)} \varphi^0\left(\frac{\xi + \eta}{N}\right) \widehat{\varphi_\nu \sigma_P}(\eta, \xi) d\eta.$$

Simple observation show that there exists $h_a(x, \xi, \eta) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h_a^\varepsilon(x, \xi, \eta)$ in $D'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Let us give an estimate for $\widehat{h}_a^\varepsilon(\theta, \xi + \eta, \xi)$, where $\widehat{h}_a^\varepsilon$ is the x -Fourier transformation of h_a^ε :

$$\begin{aligned} \widehat{h}_a^\varepsilon(\theta, \xi + \eta, \xi) &= \int_0^1 \partial_\xi^\alpha \widehat{\sigma_{Q, \varepsilon}}(\theta, t\eta + \xi) dt, \\ \partial_\xi^\alpha \widehat{\sigma_{Q, \varepsilon}}(\theta, \xi) &= \widehat{\Psi}_0(\varepsilon\theta) \int \partial_\xi^\alpha \widehat{\sigma_Q}(\theta, \xi - \varepsilon\lambda) \Psi_0(\lambda) d\lambda, \\ &= (1 + |\xi|)^{1-s} |\widehat{h}_a^\varepsilon(\theta, \xi + \eta, \xi)| \\ &\leq \text{const} \int_0^1 \int \Psi_0(\lambda) \frac{|\partial_\xi^\alpha \widehat{\sigma_Q}(\theta, t\eta + \xi - \varepsilon\lambda)|}{(1 + |t\eta + \xi - \varepsilon\lambda|)^{s-1}} \left(\frac{1 + |t\eta + \xi - \varepsilon\lambda|}{1 + |\xi|}\right)^{s-1} d\lambda d\theta \\ &\leq \text{const} \int_0^1 \int \Psi_0(\lambda) g_Q^\alpha(\theta) \left(\frac{1 + |t\eta - \varepsilon\lambda|}{1 + |\varepsilon\lambda|}\right)^{s-1} (1 + |\lambda|)^{s-1} d\lambda dt \\ &\leq (1 + |\eta|)^{s-1} g_Q^\alpha(\theta), \end{aligned}$$

where the constant does not depend on ε and $g_Q^\alpha(\theta) = \sup_\xi |(1 + |\xi|)^{1-s} \partial_\xi^\alpha \widehat{\sigma_Q}(\theta, \xi)|$ the Peetre inequality has been used. Now it is easy to see that

$$|\widehat{h}_a(\theta, \xi + \eta, \xi)| \leq \text{const} (1 + |\xi|)^{s-1} (1 + |\eta|)^{s-1} g_Q^\alpha(\theta)$$

(a. e. in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$). Then we have $S_{N, \nu}^{\alpha, \varepsilon} \rightarrow S_{N, \nu}^\alpha$ in $D'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ ($\varepsilon \rightarrow 0$) and

$$S_{N, \nu}^\alpha(x, \xi) = \int e^{i(x, \eta)} \varphi^0\left(\frac{\xi + \eta}{N}\right) h_a(x, \xi + \eta, \xi) \widehat{\varphi_\nu \sigma_P}(\eta, \xi) d\eta.$$

in addition: $\sigma_{Q,P}^{N,v} = p_{N,v} + \sum_{a=1}^s s_{N,v}^a$. Note that $\widehat{\varphi}_v \sigma_P(n, \xi) = \int \widehat{\sigma}_P(\eta - \lambda/v,$

$\xi) \widehat{\varphi}^0(\lambda) d\lambda$. Using again Peetre's inequality (by the estimate for h_a) we can find $|s_{N,v}^a| \leq c_a (1 + |\xi|)^{r+s-1}$ with a constant c_a nondepending on N, v .

So we have $\lim_{N,v \rightarrow \infty} s_{N,v}^a = s^a = \int e^{i(x,\eta)} h_a(x, \xi + \eta, \xi) \eta^\sigma \widehat{\sigma}_P(\eta, \xi) d\eta$ (in $D'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$).

Observe also that $\lim_{N,v \rightarrow \infty} p_{N,v} = \sigma_Q \sigma_P$. Consequently there exists $\sigma_{QP} = \lim_{N,v \rightarrow \infty} \sigma_{QP}^{N,v}$

$= \sigma_Q \sigma_P + \sum_{|a|=1} s^a$. As a more essential corollary of the above estimate for

\widehat{h}_a we show below that $s^a \in (\mathbf{F}_{0, r+s-1})^0$, consequently $\sigma_{QP} \in \mathbf{F}_{0, r+s}$. Leave $N, v \rightarrow \infty$ in the equality

$$\langle Q_N P_v \varphi, \psi \rangle = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \int e^{i(x,\eta)} \sigma_{QP}^{N,v}(x, \eta) \widehat{\varphi}(n) \psi(x) d\eta dx, \quad \varphi, \psi \in D(\mathbb{R}^n).$$

Because of the arguments given before we obtain

$$QP\varphi = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{i(x,\eta)} \sigma_{QP}(x, \eta) \widehat{\varphi}(\eta) d\eta \text{ in } D'(\mathbb{R}^n).$$

Now we shall prove that $s^a \in (\mathbf{F}_{0, r+s-1})^0$. We have:

$$\begin{aligned} \widehat{s}^a(\theta, \xi) &= \int \eta^a \widehat{\sigma}_P(\eta, \xi) \widehat{h}_a(\theta - \eta, \xi + \eta, \xi) d\eta; \\ & (1 + |\xi|)^{-r-s+1} \widehat{s}^a(\theta, \xi) \\ & \leq \text{const} \int (1 + |\eta|)^{1+r-s-1} |\widehat{\sigma}_P(\eta, \xi)| (1 + |\xi|)^{-r} g_Q^a(\theta - \eta) d\eta. \end{aligned}$$

Let for instance σ_P satisfies (5). Then we obtain

$$\begin{aligned} \int \sup_{\xi} |(1 + |\xi|)^{1-r-s} \widehat{s}^a(\theta, \xi)| d\theta &\leq \text{const} \int \sup_{\xi} \int |\widehat{\chi}_P\left(\frac{\eta^1}{\omega_1(\xi)}, \dots, \right. \\ & \left. \frac{\eta^n}{\omega_n(\xi)}\right)| g_Q^a(\theta - \eta) d\eta d\theta \\ &\leq \text{const} \int \int |\widehat{\chi}_P(\eta)| \sup_{\xi} g_Q^a(\theta - \omega(\xi)\eta) d\eta d\theta, \end{aligned}$$

where $\omega(\xi)\eta = (\omega_1(\xi)\eta^1, \dots, \omega_n(\xi)\eta^n)$. But it follows from (6) that $\sup_{\xi} g_Q^a(\theta - \omega(\xi)\eta) \leq h_Q(\theta + \eta)$ and $h_Q \in L_1(\mathbb{R}^n)$; we see that $s^a \in (\mathbf{F}_{0, r+s-1})^0$. The same conclusion is true also in the general case for σ_P . We omit the proofs of (a) and (c); they can be given by arguments analogous (but simpler) to those from (b).

§ 4. GARDING'S INEQUALITIES

First we shall establish a traditional estimate for elliptic operators.

Definition. A pseudodifferential operator P is called elliptic if there exist constants $c > 0$ and $\rho \geq 0$ such that $|\sigma(x, \xi)| \geq c|\xi|^\rho$ in $\mathbb{R}^n \times \{|\xi| > \rho\}$ for a symbol $\sigma(x, \xi)$ of P belonging to $C^0(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \cap \mathbf{F}_{\mu, r}$.

We shall use requirements of the type:

(7) $\sigma(x, \xi) = s_0(\xi) + s(x, \xi)$, where $\sup_{\xi} |(1+|\xi|)^{-r} s_0(\xi)| < \infty$, $s_0 \in C^0(\mathbb{R}^n)$, $s_0(\xi) \neq 0$ at $|\xi| > \rho$, $|s(x, \xi)| < |s_0(\xi)|$ in $\mathbb{R}^n \times \{|\xi| > \rho\}$ and $s(x, \xi)$ belongs to $(\mathbf{F}_{\mu, r})^0$ or $(\mathbf{F}_{\mu, r})'$;

(8) $\int \sup_{\xi} |\hat{s}(\theta, \xi) (1+|\xi|)^{-r} (1+|\theta|)^\mu d\theta < 2^{-\mu} \inf |s_0(\xi) (1+|\xi|)^{-r}|$

for $|\xi|$ — sufficiently large, $s \in (\mathbf{F}_{\mu, r})^0$;

(9) $f(x, \xi)$ satisfies (5) and

$\text{ess sup} |(1+|\xi|)^{-r} h_r(\xi) \prod_{j=1}^n \omega_j(\xi) \int |\hat{x}(\theta)| \frac{(1+|\theta|)^\mu}{(1+|\theta|^2)^{\mu/2}} d\theta < 2^{-\mu} (2^{1-\mu} \inf |(1+|\xi|)^{-r} s_0(\xi)|)^{1/N}$ ($|\xi|$ — large).

Proposition 4. Suppose an elliptic operator P has a symbol $\sigma(x, \xi)$ such that the following conditions are fulfilled: (7), (8) (if $s \in (\mathbf{F}_{\mu, r})^0$) or (9) for every component s'_ν of $s = s'_1 \dots s'_N$ when $s \in (\mathbf{F}_{\mu, r})'$, where $\mu \geq \max\{4, 2(1+|r|)\}$. For the derivatives $\partial_\xi^\alpha \sigma(x, \xi)$ we suppose;

(10) $\text{ess sup} |(1+|\xi|)^{1-r} \partial_\xi^\alpha s_0(\xi)| < \infty$,

$\partial_\xi^\alpha s$ satisfies (6) with $q = r - 1$ and $g_\alpha(\theta)$, where $\int g_\alpha(\theta) (1+|\theta|)^\mu d\theta < \infty$, and $\mu \geq 2 + |r|$, $\forall \alpha: |\alpha| = 1$;

(11) $\text{ess sup} |(1+|\xi|)^{2-r} \partial_\xi^\alpha s_0(\xi)| < \infty$,

$\partial_\xi^\alpha s$ satisfies (6) with $q = r - 2$, $\forall \alpha: |\alpha| = 2$.

Then the next estimate is valid:

(12) $\|\varphi\|_r \leq \text{const} (\|P\varphi\|_0 + \|\varphi\|_{r-1}) \forall \varphi \in D(\mathbb{R}^n)$;

the constant does not depend on φ .

Proof. A natural step in the elliptic case is to construct an operator L ("left parametrix") such that $LP = I + R$, where I is the identity and $R \in \mathbf{OpF}_{0, -1}$. Then (12) can be obtained in an obviously manner if the next estimates hold:

(13) $\|L\Psi\|_r \leq \text{const} \|\Psi\|_0, \Psi \in D(\mathbb{R}^n)$;

(14) $\|R\varphi\|_r \leq \text{const} \|\varphi\|_{r-1}, \varphi \in D(\mathbb{R}^n)$.

From the assumptions (7) — (11) it follows (at $|\xi|$ — sufficiently large) that $(1/\sigma) \in \mathbf{F}_{\mu, r}$ ($\mu \geq \max\{4, 2(1+|r|)\}$), $\partial_\xi^\alpha (1/\sigma)$ satisfies (6), where $q = -r - 1$,

$\int \tilde{g}_\alpha(\theta) (1+|\theta|)^\mu d\theta < \infty$ and $\mu \geq 2 + |r|$ ($|\alpha| = 1$); for $|\alpha| = 2$ we have also; $\partial_\xi^\alpha (1/\sigma)$ satisfies (6), where $q = -r - 2$. These assertions can be proved by ar-

guments sketched in the next lemma. When $1/\sigma$ and $\partial_{\xi}^{\alpha}(1/\sigma)$ have the above properties the inequalities (13), (14) can be established similarly to what has been done in (b) of Proposition 3; the analogous properties of σ , $\partial_{\xi}^{\alpha}\sigma$ ((8) — (11)) are taken also into account. An essential step is the estimation of functions of the type

$$\begin{aligned} \hat{a}_{\alpha}(\eta, \xi) &= \int \theta^{\alpha} \hat{\sigma}(\theta, \xi) \left(\int_0^1 \partial_{\xi}^{\alpha} \widehat{(1/\sigma)}(\eta - \theta, \xi + t\theta) dt \right) d\theta, \\ \partial_{\xi}^{\omega} \hat{a}_{\alpha}(\eta, \xi) &= \int \theta^{\alpha} \partial_{\xi}^{\omega} \hat{\sigma}(\theta, \xi) \left(\int_0^1 \partial_{\xi}^{\alpha} \widehat{(1/\sigma)}(\eta - \theta, \xi + t\theta) dt \right) d\theta \\ &+ \int \theta^{\alpha} \hat{\sigma}(\theta, \xi) \left(\int_0^1 \partial_{\xi}^{\gamma} \widehat{(1/\sigma)}(\eta - \theta, \xi + t\theta) dt \right) d\theta, \quad |\alpha| = 1, |\omega| = 1, |\gamma| = 2. \end{aligned}$$

Then using again Peetre's inequality we can obtain

$$\begin{aligned} (1 + |\eta|)^{1+|r-1|} |\hat{a}_{\alpha}(\eta, \xi)| &\leq \text{const} (1 + |\xi|)^{-1} \int (1 \\ &+ |\theta|)^{2+|1+r|+|r-1|} g_{\sigma}(\theta) g_{\alpha}(\eta - \theta) (1 + |\eta - \theta|)^{1+|r-1|} d\theta, \quad |\alpha| = 1, \\ |\partial_{\xi}^{\omega} \hat{a}_{\alpha}(\eta, \xi)| &\leq \text{const} (1 + |\xi|)^{-2} \left(\int (1 + |\theta|)^{1+|r+1|} g_{\sigma}^{\omega}(\theta) \tilde{g}_{\alpha}(\eta - \theta) d\theta \right. \\ &+ \left. \int (1 + |\theta|)^{1+|2+r|} g_{\sigma}(\theta) \tilde{g}_{\gamma}(\eta - \theta) d\theta \right), \quad |\omega| = 1, |\gamma| = 2; \quad g_{\sigma}, \tilde{g}_{\alpha}, g_{\sigma}^{\omega}, \tilde{g}_{\gamma} \end{aligned}$$

are suitable functions (see (6)). It is not difficult to do the rest of the needful details for proving the estimates (13), (14).

Now let us consider the following

L e m m a. Under conditions of the proposition 4 there exists a symbol $\tilde{\sigma}$ coinciding with σ at $|\xi|$ sufficiently large, such that we have:

$$(15) \quad (1/\tilde{\sigma}) \in F_{\mu, -r}, \quad \mu \geq \max \{4, 2(1 + |r|)\};$$

$$\partial_{\xi}^{\alpha} (1/\tilde{\sigma}) \text{ satisfies (6) with } q = -r-1, \int \tilde{g}_{\alpha}(\theta) (1 + |\theta|)^{\mu} d\theta < \infty$$

$$\text{and } \mu \geq 2 + |r|, \quad \forall \alpha: |\alpha| = 1;$$

$$\partial_{\xi}^{\alpha} (1/\tilde{\sigma}) \text{ satisfies (6) with } q = -r-2, \quad \forall \alpha: |\alpha| = 2.$$

Proof. For the sake of simplicity we consider only the proof of (15). Obviously we can take $\tilde{\sigma}$ nonvanishing in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$; we shall write for convenience σ instead of $\tilde{\sigma}$. When the complex variable z varies in the set $\{|z| < |s_0(\xi)|\}$ we have

$$1/(s_0(\xi) + z) = \sum_{v=0}^{\infty} (-1)^v z^v / (s_0(\xi))^{v+1},$$

i. e.

$$1/\sigma(x, \xi) = \sum_{v=0}^{\infty} (-1)^v (s(x, \xi))^v / (s_0(\xi))^{v+1} \quad (|s(x, \xi)| < |s_0(\xi)|).$$

Consider the symbol $f(x, \xi) = \sum_{v=1}^{\infty} (-1)^v (s(x, \xi))^v / (s_0(\xi))^{v+1}$, Suppose for examp-

le that $s \in (F_{\mu, r})^0$. By Peetre's inequality we see that

$$\int \sup_{\xi} \left[\underbrace{\hat{s} \dots \hat{s}}_{v\text{-times}}(\theta, \xi) (1 + |\xi|)^{-vr} (1 + |\theta|)^{\mu} d\theta \leq 2^{\mu(v-1)} \left(\int \sup_{\xi} \hat{s}(\theta, \xi) (1 + |\xi|)^{-r} (1 + |\theta|)^{\mu} d\theta \right)^v < \text{ess inf } |s_0(\xi) (1 + |\xi|)^{-r}|,$$

because of (8). This means that $f(x, \xi) \in (F_{\mu, r})^0$ and then the same is true for $1/\sigma(x, \xi)$.

Proposition 5. (The sharp Garding inequality.) Let $\sigma(x, \xi)$ is a continuous nonnegative symbol in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, homogeneous on ξ of order r at $|\xi| > 1$; in the case $r=1$ we suppose also the conditions: $\sigma \in (F_{2, 1})^0$, $\partial_{\xi}^{\alpha} \sigma \in (F_{0, 1-|\alpha|})^0$ $\forall \alpha: |\alpha| = 1, 2$, there exists $\sigma(\infty, \xi) = \lim_{x \rightarrow \infty} \sigma(x, \xi)$ and $(\partial_{\xi}^{\alpha} \sigma(\infty, \xi)) (1 + |\xi|)^{|\alpha|-r}$ are bounded $\forall \alpha: |\alpha| \leq 2$; in the case $r \neq 1$ we suppose in addition $\sigma \in (F_{\mu, r})^0$, $\mu \geq 1 + |(r/2) - 1|$. Then we have: $\text{Re}(P\phi, \phi) \geq -\text{const} \|\phi\|_{(r-1)/2}^2$, $\forall \phi \in D(\mathbb{R}^n)$. (The constant does not depend on ϕ .)

Proof. After a slight preparation we apply the Lax-Nirenberg theorem [17].

REFERENCES

1. Hörmander, L. The Analysis of Linear Partial Differential Operators. I. Berlin—Heidelberg—New York, 1983.
2. Kohn, J. J., L. Nirenberg. An algebra of pseudodifferential operators. — Comm. Pure Appl. Math., **18**, 1965, 269—305.
3. Hörmander, L. Pseudodifferential operators and hypoelliptic equations. — Proc. Symp. Pure Math., **10**, 1966, 138—183.
4. Nirenberg, L. Lectures on linear partial differential equations. — Conf. Board Math. Texas Univ., **17**, 1972.
5. Treves, F. Introduction to Pseudodifferential and Fourier Integral Operators. I. New York and London, 1982.
6. Beals, M., M. Reed. Microlocal regularity theorems for nonsmooth pseudodifferential operators and applications to nonlinear problems. — Trans. AMS, **285**, 1984, No 1, 159—184.
7. Bony, J.-M. Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles nonlineaires. — Ann. Sci. Ec. Norm. Sup., **14**, 1981, 209—246.
8. Calderon, A. P., A. Zygmund. Singular integral operators and differential equations. — Amer. J. Math., **79**, 1957, 901—921.
9. Calderon, A. P. Uniqueness in the Cauchy problem of partial differential equations. — Amer. J. Math., **80**, 1958, 16—36.
10. Calderon, A. P., R. Vaillancourt. On the boundedness of pseudodifferential operators. — J. Math. Soc. Japan, **23**, 1971, 374—378.
11. Cordes, H. O. On compactness of commutators of multiplications and convolutions, and boundedness of pseudodifferential operators. — J. Funct. Anal., **18**, 1975, 115—131.
12. Kato, T. Boundedness of some pseudodifferential operators. — Osaka J. Math., **13**, 1976, 1—9.
13. Coifman, R. R., Y. Meyer. Au delà des opérateurs pseudodifférentiels. — Asterisque, **57**, 1978.
14. Nagase, M. On a class of L_p -bounded pseudodifferential operators. — Sci. Reports College Gen. Educ. Osaka Univ., **33** 1984, No 1.
15. Friedrichs, K. O. Pseudodifferential operators. — Lecture Notes, Courant Inst. Math. Sci., New York Univ., 1968.
16. Kumano-go, H. Pseudodifferential operators and the uniqueness of the Cauchy problem. — Comm. Pure Appl. Math., **22**, 1969, 73—129.
17. Lax, P. D., L. Nirenberg. On stability for difference schemes; a sharp form of Garding's inequality. — Comm. Pure Appl. Math., **19**, 1966, 473—492.

Received 20. 3. 1985

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ 14-ВЕРШИННОГО ГРАФА С ТРЕМЯ 3-КЛИКАМИ И ОДНОЙ 5-АНТИКЛИКОЙ

Иван Пашов, Николай Хадживанов, Недялко Ненов

Иван Пашов, Николай Хадживанов, Недялко Ненов. **Существование и единственность 14-вершинного графа с тремя 3-кликами и одной 5-антикликой.** Множество из p вершин графа называется p -кликой (соотв., p -антикликой), если любые две из них смежны (соотв., несмежны). Доказано, что существует, притом единственный, 14-вершинный граф с тремя 3-кликами и одной 5-антикликой.

Ivan Pashov, Nikolai Hadjiivanov, Nedyalko Nenov. **The Existence and Uniqueness of a 14-vertex Graph with Three 3-cliques and One 5-anticlique.** A set of p vertices of a graph is called p -clique (resp. a p -anticlique) if any two of them are (resp. are not) joined by an edge. It is proved in this paper that, with the single exception of the graph depicted on figure 6 (which has three 3-cliques), every graph with 14 vertices containing a single anticlique, necessarily contains at least four 3-cliques.

1. Введение. Рассматриваются только обыкновенные графы. Множество из p вершин графа называется p -кликой (респ. p -антикликой), если любые две из них смежны (соотв., несмежны).

Грийнвуд и Глисон [15] доказали, что любой 14-вершинный граф имеет 3-клику или 5-антиклику, т. е. сумма чисел 3-клик и 5-антиклик 14-вершинного графа не меньше единицы. В [1] этот результат усилен — доказано, что минимум этой суммы равен 4. В частности, при фиксированном числе 3-клик — равному трем, получаем, что любой 14-вершинный граф с тремя 3-кликами имеет хотя бы одну 5-антиклику.

В настоящей работе докажем, что существует 14-вершинный граф с тремя 3-кликами и одной 5-антикликой. Кроме того, каждый такой граф изоморфен графу с рис. 6 (см. теорему).

В [2, 3, 4] найден минимум чисел 5-антиклик 14-вершинного графа с k 3-кликами, где $k=0, 1, 2$. Для этого минимума получены соответственно значения 6, 5 и 3.

В [16] получен 14-вершинный граф с четырьмя 3-кликами без 5-антиклик. В этом графе имеется вершина, принадлежащая всем 3-кликам. Позже в [5] доказано, что существует единственный граф с такими свойствами. Там же построен 14-вершинный граф без 5-антиклик с четырьмя 3-кликами, которые попарно не имеют общих вершин, и доказана его единственность.

II. Л е м м а 1. Пусть G — 14-вершинный граф с одной 5-антикликой Δ и тремя 3-кликами Δ_i , $i=1, 2, 3$. Тогда не существует вершины графа G , принадлежащей ровно двум из 3-клик Δ_i и не принадлежащей 5-антиклике Δ .

При доказательстве этой леммы (и остальных утверждений) будем пользоваться следующими обозначениями:

$\hat{A}(v)$ (респ., $A(v)$) — множество всех вершин графа, несмежных (соотв., смежных) вершине v , за исключением самой вершины v ;

$\langle M \rangle$ — подграф, порожденный множеством M из вершин графа;

$G-v$ — граф, который получается из графа G удалением вершины v и всех ребер, инцидентных ей;

$G-[u, v]$ (соотв., $G+[u, v]$) — граф, который получается от графа G удалением (соотв. добавлением) ребра $[u, v]$, где вершины u и v смежны (соотв. несмежны).

Доказательство леммы 1. Допустим, что существует вершина v_0 графа G , принадлежащая Δ_2 и Δ_3 и не принадлежащая Δ_1 и Δ . Тогда выполняются:

- (1) Подграф $\langle A(v_0) \rangle$ имеет ровно два ребра.
- (2) Подграф $\langle A(v_0) \rangle$ не имеет 4-антиклик.

В [6] доказано, что любой 10-вершинный граф без 4-антиклик имеет хотя бы четыре 3-клики, поэтому (см. (2)), $|A(v_0)| \leq 9$, т. е. $|A(v_0)| \geq 4$.

Допустим, что $|A(v_0)| = 4$. Тогда $\langle A(v_0) \rangle$ есть 9-вершинный граф без 4-антиклик (2) с не более одной 3-кликой. В [11] доказано, что выполняется:

- (3) Любой 9-вершинный граф имеет 3-клику или 4-антиклику.

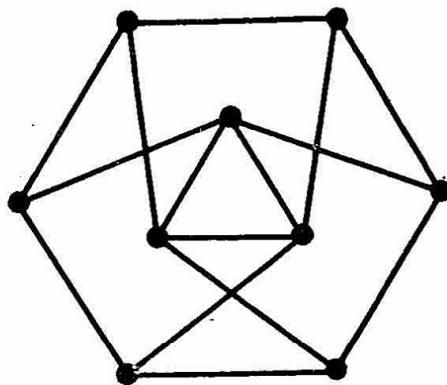


Рис. 1

Этот результат усилен в [7], где доказано:

- (4) Существует единственный 9-вершинный граф без 4-антиклик с одной 3-кликой. Этот граф изображен на рис. 1.

Из (3) и (4) следует, что подграф $\langle \bar{A}(v_0) \rangle$ содержит 3-клику Δ_1 и изоморфен графу с рис. 1.

Очевидно выполняется:

(5) Число e всех ребер подграфа $G - v_0$ получим, сложив число ребер подграфа $\langle A(v_0) \rangle$ и сумму d степеней в $G - v_0$ вершин из $A(v_0)$, из которой вычтено число ребер подграфа $\langle A(v_0) \rangle$ (так как они считаются два раза в сумме d).

В рассматриваемом случае ($|A(v_0)| = 4$) получим $e = 15 + (d - 2)$ (см. рис. 1 и (1)).

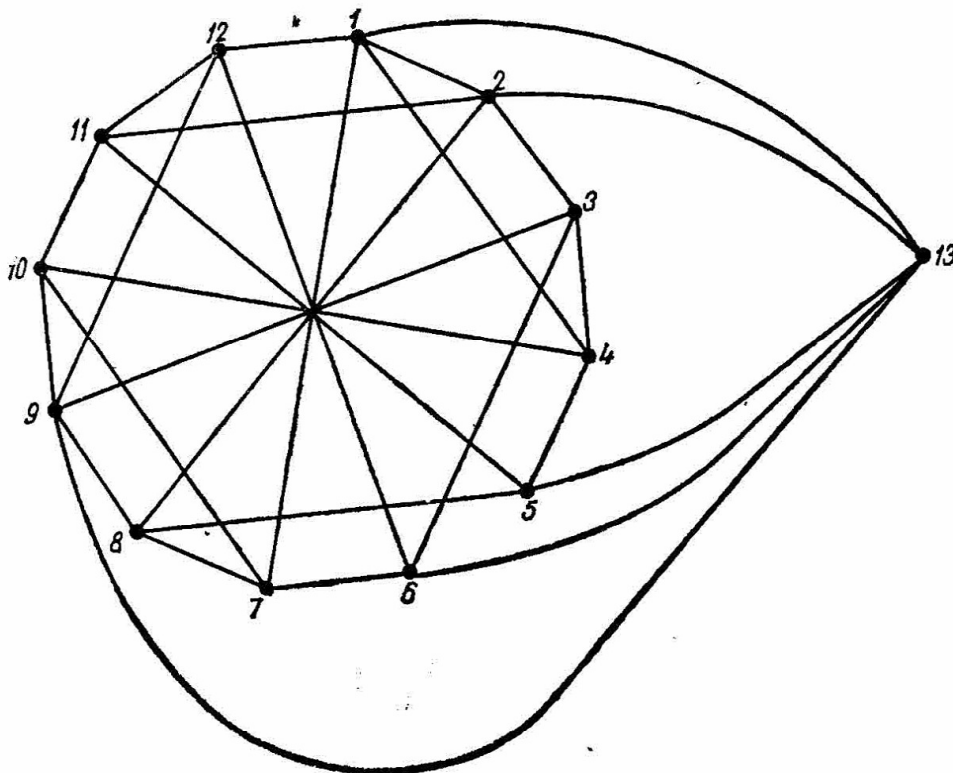


Рис. 2. Граф P

Подграф $G - v_0$ имеет 13 вершин, одну 5-антиклику — Δ , и одну 3-клику — Δ_1 . В [8] доказано, что любой 13-вершинный граф с одной 5-антикликой и одной 3-кликой изоморфен некоторому из графов P (рис. 2), Q (рис. 3), R (рис. 4), $P_1 = P - [1, 7]$, $P_2 = P - [2, 8]$, $P_3 = P - [3, 9]$, $P_4 = P_1 - [2, 8]$, $P_5 = P_2 - [3, 9]$, $Q_1 = Q - [9, 13]$, $R_1 = R - [7, 8]$.

Следовательно, $G - v_0$ изоморфен некоторому из этих графов.

Если $G - v_0$ изоморфен графу P , то $e = 28$, а $d \geq 16$ (так как $|A(v_0)| = 4$ и все вершины P имеют степень, не меньше 4). Если $G - v_0$ изоморфен некоторому из графов P_1, P_2, P_3, Q, R , то $e = 27$, $d \geq 15$. Если же $G - v_0$ изоморфен некоторому из графов P_4, P_5, Q_1, R_1 , то $e = 26$, а $d \geq 14$. Во всяком случае получаем противоречие с $e = 15 + d - 2$.

Таким образом доказано, что $|A(v_0)| \geq 5$.

Из (1) получим, что подграф $\langle A(v_0) \rangle$ имеет хотя бы одну изолированную вершину w . Следовательно, w не принадлежит 3-кликам Δ_2 и Δ_3 . Если w не принадлежит также Δ_1 , то $A(w)$ есть антиклика, содержащая вершину v_0 . Так как $v_0 \notin \Delta$, выполняется:

(6) Если w — изолированная вершина в $\langle A(v_0) \rangle$ и $w \notin \Delta_1$, то степень вершины w в $G - v_0$ не больше 3.

С другой стороны, если $w \in \Delta_1$, то подграф $\langle A(w) \rangle$ имеет единственное ребро. Поскольку 6-вершинный граф с одним ребром содержит две 5-антиклики, выполняется:

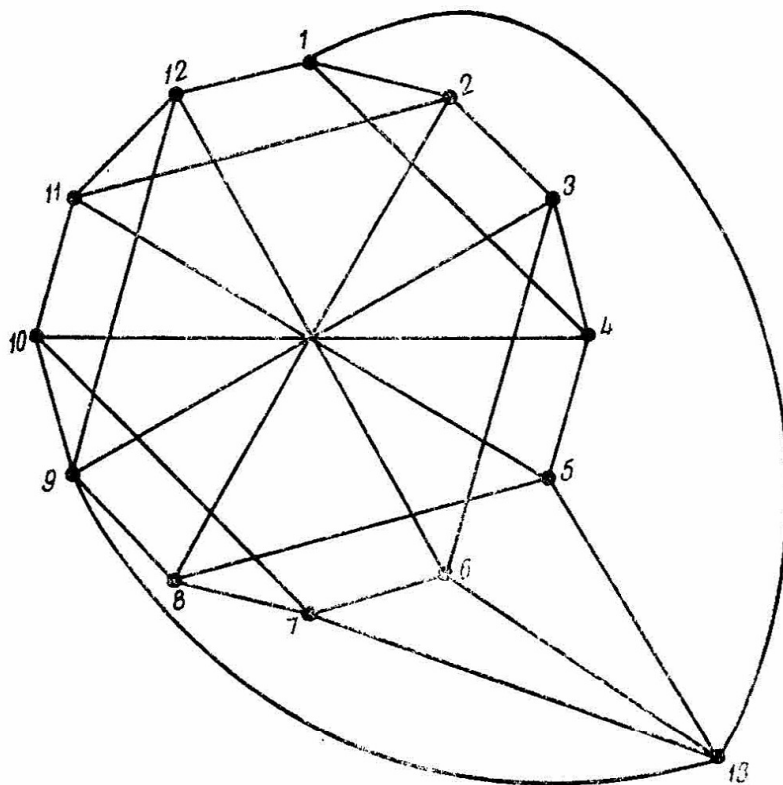


Рис. 3. Граф Q

(7) Если w — изолированная вершина в $\langle A(v_0) \rangle$ и $w \in \Delta_1$, то степень вершины w в $G - v_0$ не больше 4.

Из (6) и (7) следует, что $G - v_0$ не может быть изоморфным графу P (рис. 2).

Допустим, что подграф $G - v_0$ изоморфен некоторому из графов Q (рис. 3), $Q_1 = Q - [9, 13]$, R (рис. 4). Согласно (6) и (7), подграф $\langle A(v_0) \rangle$ имеет ровно одну изолированную вершину, принадлежащую 3-клике Δ_1 подграфа $G - v_0$. Тогда из (1) получим $|A(v_0)| = 5$. Следовательно, $\langle \bar{A}(v_0) \rangle$ есть 8-вершинный граф без 3-клик и без 4-антиклик (см. (2)). В [13] доказано:

(8) Любой 8-вершинный граф без 3-клик и без 4-антиклик имеет хотя бы 10 ребер.

Отсюда и из (1), согласно (5), получим $e \geq 10 + (5 \cdot 4 - 2) = 28$, что является противоречием.

Пусть теперь $G - v_0$ изоморфен некоторому из графов P_1, P_2, P_3, R_1 . Так как G имеет единственную 5-антиклику, из (1) следует $|A(v_0)| \leq 6$, т. е.

$A(v_0)$ содержит пять или шесть вершин.

Предположим, что подграф $\langle A(v_0) \rangle$ имеет шесть вершин. Из (1) получим, что хотя бы две из них изолированные, а из (6), (7) и рис. 2 и 4 — что $\langle A(v_0) \rangle$ имеет ровно две изолированные вершины. Следовательно, $G-v_0$ не может

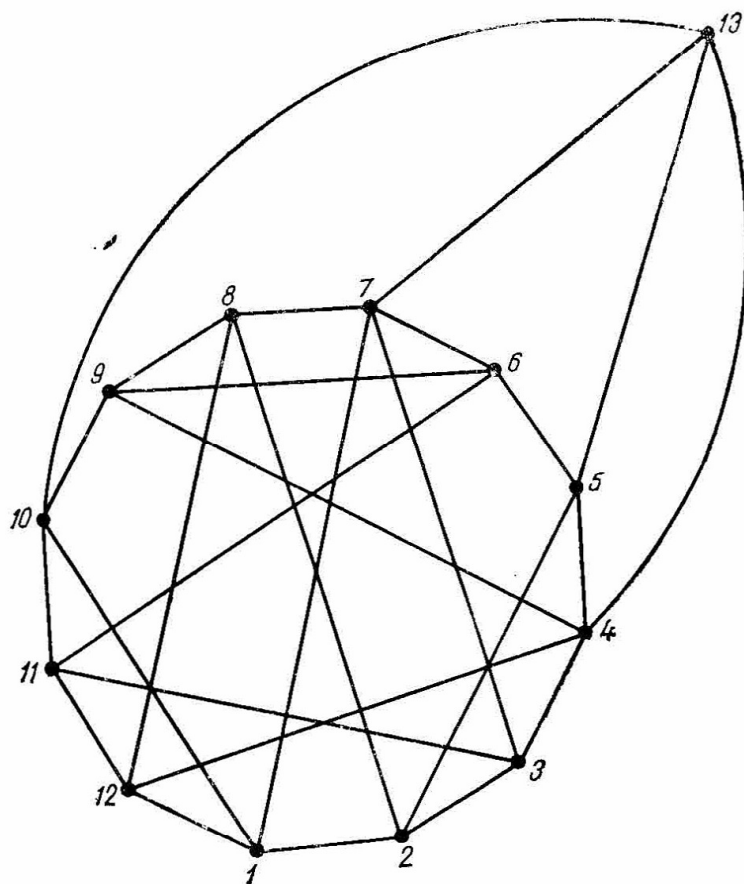


Рис. 4. Граф R

быть изоморфным графу P_3 . Если $G-v_0$ изоморфен некоторому из графов P_1, P_2, R_1 , то (принимая их обозначения для $G-v_0$) получим, что изолированные вершины подграфа $\langle A(v_0) \rangle$ суть соответственно $\{1, 7\}, \{2, 8\}$ и $\{8, 5\}$ или $\{8, 13\}$. Тогда $A(v_0)$ содержит соответственно 4-антиклику $\{8, 10, 12, 13\}, \{3, 7, 11, 13\}$, а в последнем случае — $\{2, 6, 12, 13\}$ или $\{5, 7, 9, 12\}$, что противоречит (2).

Таким образом доказано, что если $G-v_0$ изоморфен некоторому из графов P_1, P_2, P_3, R_1 , то $|A(v_0)|=5$.

Случай 1. Вершина v_0 смежна некоторой вершине из 3-клики Δ_1 подграфа $G-v_0$. Тогда $\langle A(v_0) \rangle$ есть 8-вершинный граф без 3-клик и без 4-антиклик (см. (2)). Из (5), учитывая (8) и (1), получим $e \geq 10 + (d-2)$. Следовательно, $G-v_0$ не может быть изоморфным графу R_1 (иначе $e=26$, а $d \geq 19$) и графу P_3 (иначе $e=27$, а из $A(v_0) \cap \Delta_1 \neq \emptyset$ получим $d \geq 20$). Следовательно, $G-v_0$ изоморфен P_1 или P_2 , т. е. $e=27$ и $d \geq 19$ (см. рис. 2). Полученное выше нестрогое неравенство для e и d удовлетворяется только если $d=19$. Из $A(v_0) \cap \Delta_1 \neq \emptyset$ получим, что когда $G-v_0$ изоморфен P_1 или P_2 , множество $A(v_0)$ содержит соответственно пары вершин $\{1, 7\}$ или $\{2, 8\}$ (принимая для $G-v_0$ обозна-

чений графов P_1 или P_2 , соответственно) и не содержит ни одну из вершин пятой степени в P_1 или P_2 .

Подграф $\langle A(v_0) \rangle$ не может иметь две изолированные вершины. Иначе его ребра смежны, а из (6) и (7) получим, что эти вершины суть $\{1, 7\}$ или $\{2, 8\}$, соответственно. Однако в P_1 (соотв., в P_2) нет пару смежных ребер, неинцидентных ни одной из вершин $\{1, 7\}$ (соотв., $\{2, 8\}$). Так как в рассматриваемом случае $|A(v_0)|=5$, из (1) получим, что $\langle A(v_0) \rangle$ имеет одну изолированную вершину и пару несмежных ребер.

Далше рассмотрим случаи, когда $G-v_0$ изоморфен P_1 или P_2 в отдельности.

Если $G-v_0$ изоморфен P_1 , то изолированная вершина подграфа $\langle A(v_0) \rangle$ есть 7 или 1 (см. (6), (7) и рис. 2). В случае, когда вершина 7 изолированная в $\langle A(v_0) \rangle$, а вершина 1 — не изолированная, одно из ребер подграфа $\langle A(v_0) \rangle$ есть $[1, 4]$ или $[1, 12]$ (напомним, что v_0 несмежна вершинам пятой степени в P_1). Однако в P_1 нет ребра, вершины которого несмежны ни одной из вершин 7, 1, 4 или 7, 1, 12.

В случае, когда вершина 1 изолированная в $\langle A(v_0) \rangle$, а 7 — не изолированная, вершина v_0 несмежна вершинам 2, 4, 12, 13. Если v_0 несмежна еще вершине 8, то получим в $A(v_0)$ 4-антиклику $\{4, 8, 12, 13\}$, что противоречит (2). В противном случае подграф $\langle A(v_0) \rangle$ имеет ребро $[7, 8]$. Так как ребра этого подграфа несмежны, $A(v_0)$ содержит 4-антиклику $\{2, 5, 10, 12\}$, что снова противоречит (2).

Пусть теперь $G-v_0$ изоморфен графу P_2 . Согласно (6) и (7), изолированная вершина подграфа $\langle A(v_0) \rangle$ есть 3 или 2 (см. рис. 2). В первом случае одно из ребер $\langle A(v_0) \rangle$ есть ребро $[2, 3]$ или $[2, 11]$ и получим противоречие как и для графа P_1 . Во втором случае — когда вершина 2 изолированная в $\langle A(v_0) \rangle$, а вершина 8 — неизолированная, вершина v_0 несмежна вершинам 1, 3, 11, 13. Если v_0 несмежна еще вершине 7, то $A(v_0)$ содержит 4-антиклику $\{3, 7, 11, 13\}$. В противном случае подграф $\langle A(v_0) \rangle$ имеет ребро $[7, 8]$. Так как ребра этого подграфа несмежны, множество $A(v_0)$ содержит 4-антиклику $\{1, 5, 6, 9\}$, что снова противоречит (2).

Случай 2. Вершина v_0 несмежна ни одной вершине из 3-клики Δ_1 подграфа $G-v_0$, который изоморфен некоторому из графов P_1, P_2, R_1, P_3 . Согласно (6) и (7), подграф $\langle A(v_0) \rangle$ имеет единственную изолированную вершину. Принимая для $G-v_0$ обозначения изоморфного ему графа, из $\{P_1, P_2, R_1, P_3\}$ получим, что эта вершина имеет соответственно номер 7, 8, 8, 3 (см. рис. 2 и 4). В первых трех случаях $A(v_0)$ содержит соответственно 4-антиклику $\{1, 6, 8, 10\}$, $\{2, 5, 7, 9\}$, $\{2, 9, 12, 13\}$, что противоречит (2). В четвертом случае (когда $G-v_0$ изоморфен графу P_3), если $9 \in A(v_0)$, то $A(v_0)$ имеет 4-антиклику $\{2, 4, 6, 9\}$. В противном случае одно из ребер подграфа $\langle A(v_0) \rangle$ есть $[9, 8]$, $[9, 10]$ или $[9, 12]$. Однако в P_3 нет ребра, вершины которого несмежны ни одной из вершин 3, 9, 8 или 3, 9, 10, или 3, 9, 12, соответственно. Окончательно получаем, что $G-v_0$ не может быть изоморфным ни одному из графов P_1, P_2, P_3, R_1 .

Остается рассмотреть ситуацию, когда подграф $G-v_0$ изоморфен некоторому из графов P_4, P_5 . Так как $P_4 = P_1 - [2, 8] = P_2 - [1, 7]$, а $P_5 = P_2 - [3, 9] = P_3 - [2, 8]$, оба случая рассматриваются аналогично.

Пусть, например, $G-v_0$ изоморфен графу P_4 . Для подграфа $G-v_0$ примем обозначения графа P_4 (см. рис. 2). Если $A(v_0) \supset \{1, 2, 7, 8\}$, то $[1, 2]$ и $[7, 8]$

суть ребра подграфа $\langle A(v_0) \rangle$. Следовательно, этот подграф не может иметь изолированные вершины, что является противоречием.

Если вершина v_0 несмежна некоторой из вершин 1, 2, 7, 8 подграфа $G - v_0 = P_4$, то некоторая из пар $\{2, 8\}$, $\{1, 7\}$ не содержится в $A(v_0)$. Следовательно, некоторый из 14-вершинных графов $G + [2, 8]$, $G + [1, 7]$ останется графом с тремя 3-кликами и одной 5-антикликой, однако с вершиной v_0 , удаление которой приводит к графу, изоморфному соответственно P_1 или P_2 . Это противоречит доказанному выше.

Лемма 1 доказана.

III. Л е м м а 2. Если G — 14-вершинный граф с одной 5-антикликой Δ и тремя 3-кликами $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$, то эти 3-клики попарно не имеют общих вершин, и каждая из них имеет общую вершину с 5-антикликой.

Доказательство. Заметим сначала, что никакие две 3-клики не могут иметь общую вершину v_0 , не принадлежащую Δ . Иначе из леммы 1 получим, что v_0 принадлежит всем 3-кликам. Тогда 13-вершинный подграф $G - v_0$ не имеет 3-клик и содержит ровно одну 5-антиклику. Однако в [9] доказано, что нет таких 13-вершинных графов.

Допустим тогда, что некоторые две 3-клики Δ_1, Δ_2 графа G имеют общую вершину v_0 , принадлежащую 5-антиклике Δ . Имеем две возможности.

Случай 1. Вершина v_0 принадлежит третьей 3-клике Δ_3 графа G . Следовательно, подграф $\langle A(v_0) \rangle$ имеет ровно три ребра. Эти ребра попарно несмежны (иначе получим вершину, общую для двух 3-клик и не принадлежащую Δ). Подграф $G - v_0$ имеет 13 вершин и не имеет ни 3-клик, ни 5-антиклик. В [13] доказано, что любой 13-вершинный граф без 3-клик и без 5-антиклик изоморфен графу G_0 с рис. 5. Граф G_0 не имеет порожденного подграфа, множества ребер которого состоит из трех ребер без попарно общих вершин. Следовательно, случай 1 невозможен.

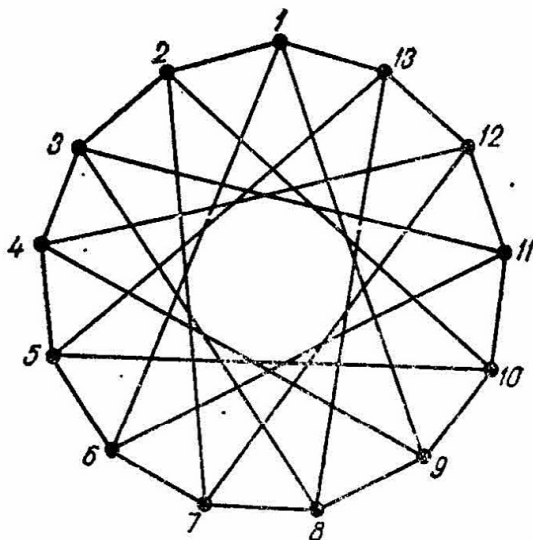


Рис. 5. Граф G_0

Случай 2. Вершина v_0 не принадлежит Δ_3 . Из доказанного в начале следует, что $\Delta_1 \cap \Delta_3 = \Delta_2 \cap \Delta_3 = \emptyset$, а $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \{v_0\}$.

Подграф $G - v_0$ имеет 13 вершин, одну 3-клику — Δ_3 и ни одной 5-антиклики. В [10] доказано, что любой 13-вершинный граф без 5-антиклик с единственной 3-кликой изоморфен графу $G_0 + [1, 3]$ (см. рис. 5). Подграф $\langle A(v_0) \rangle$

графа G имеет ровно две несмежные ребра, неинцидентные ни одной из вершин 3-клики $\Delta_3 = \{1, 2, 3\}$ (для $G - v_0$ принимаем обозначения графа $G_0 + [1, 3]$, рис. 5). В частности получаем, что v_0 несмежна 1 и 3 (иначе $A(1)$ или $A(3)$, соответственно, будет 6-вершинным графом с одним ребром и G будет иметь две 5-антиклики).

Пусть $G' = G - [1, 3]$. Граф G' имеет 14 вершин и ровно две 3-клики. Кроме того, подграф $G' - v_0$ совпадает с графом G_0 (рис. 5). В [4, теорема 1] доказано, что тогда граф G' должен иметь хотя бы 5-антиклик, причем если G' имеет ровно пять 5-антиклик, то он изоморфен графу, получающемуся от G_0 добавлением вершины, смежной вершинам 1, 2, 4, 11, 13. Заметим, что в последнем случае 3-клики графа G' имели бы пару общих вершин — v_0 и 1. Следовательно, граф G' имеет хотя бы шесть 5-антиклик.

Так как $G' - v_0 = G_0$ не имеет 5-антиклик, все 5-антиклики графа G' содержат вершину v_0 . Поскольку $G' = G - [1, 3]$, граф G содержит все 5-антиклики графа G' за исключением тех, которые содержат вершины 1, 3 (и, разумеется, — v_0). Число последних 5-антиклик, однако, не больше числа пар, несмежных в подграфе графа G_0 , порожденном его вершинами 5, 7, 10, 12 (несмежные 1 и 3). Следовательно, G содержит все 5-антиклики графа G' , за исключением не более четырех, что является противоречием.

Таким образом доказано, что 3-клики графа G попарно не имеют общих вершин. Остается доказать, что каждая из 3-клик имеет общую вершину с 5-антикликой. Допустим, например, что $\Delta_1 \cap \Delta = \emptyset$. Тогда каждая вершина из Δ_1 смежна хотя бы двум вершинам из Δ (иначе получим 5-антиклику, отличную от Δ). Следовательно, некоторая вершина из Δ смежна хотя бы

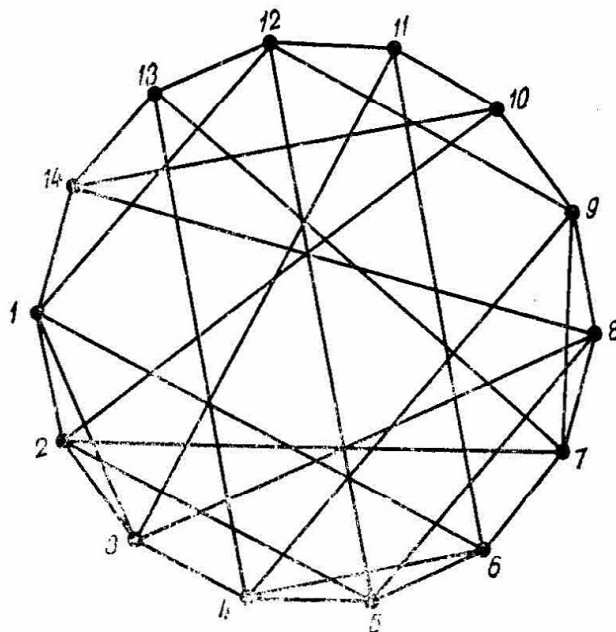


Рис. 6

двум вершинам из Δ_1 и составит с ними новую 3-клику, что является противоречием.

Лемма 2 доказана.

IV. Т е о р е м а. Пусть G — 14-вершинный граф с тремя 3-кликами и одной 5-антикликой. Тогда G изоморфен графу с рис. 6.

Доказательство. Обозначим через Δ 5-антиклику, а через $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ — 3-клики графа G . Согласно лемме 2, можно занумеровать вершины графа G следующим образом: $\Delta_1 = \{1, 2, 3\}$, $\Delta_2 = \{4, 5, 6\}$, $\Delta_3 = \{7, 8, 9\}$, $\Delta = \{1, 5, 9, 11, 13\}$. Остается множество M из трех вершин 10, 12, 14 графа G , не принадлежащих ни 3-клике, ни 5-антиклике.

Если i — вершина из M , то подграф $\langle \bar{A}(i) \rangle$ графа G не имеет 4-антиклик (иначе i принадлежит 5-антиклике) и имеет не больше трех 3-клик. Так как любой 10-вершинный граф без 4-антиклик имеет хотя бы четыре 3-клики [6], должно выполняться $|A(i)| \leq 9$, т. е. степень вершины i в графе G не меньше 4.

С другой стороны, множество $A(i)$ есть антиклика графа G (иначе i принадлежит 3-клике). Так как G имеет только одну 5-антиклику, степень вершины i не больше 5.

Представляются две возможности: либо все вершины из M имеют степень 4, либо множество M содержит хотя бы одну вершину степени 5.

Случай 1. Все вершины из M имеют степень 4 в графе G .

Выясним сначала как устроен подграф $\langle M \rangle$.

Каждая вершина i из M смежна не больше двум вершинам из 3-клик. Иначе 9-вершинный подграф $\langle \bar{A}(i) \rangle$ не имеет 3-клик. Так как $i \notin \Delta$, подграф $\langle \bar{A}(i) \rangle$ не имеет также 4-антиклик, что противоречит (3).

Таким образом каждая изолированная в $\langle M \rangle$ вершина смежна обоим вершинам 11, 13 и двум вершинам из (разных) 3-клик.

Пусть вершины i и j изолированные в $\langle M \rangle$. Подграф $\langle A(i) \cap \bar{A}(j) \rangle$ имеет хотя бы шесть вершин. Этот подграф не имеет 3-антиклик ($i, j \notin \Delta$) и имеет не больше одной 3-клики. В [14] доказано:

(9) Любой 6-вершинный (соотв. 7-вершинный) граф без 3-антиклик имеет хотя бы две (соотв. четыре) 3-клики.

Следовательно, подграф $\langle M \rangle$ имеет не больше одной изолированной вершины.

С другой стороны, если подграф $\langle M \rangle$ вовсе не имеет изолированных вершин, то некоторая его вершина i смежна остальным двум его вершинам — j и k . Вершины j, k несмежны (иначе получим новую 3-клику). Каждая вершина из M смежна хотя бы двум вершинам из Δ (в противном случае образуется 5-антиклика, отличная от Δ). Чтобы не получить новую 3-клику, некоторая вершина l из Δ должна быть смежной обоим вершинам j и k . Если $A(j) \cap A(k) = \{i, l\}$, то некоторая из вершин j, k смежна хотя бы двум вершинам из 3-клик. Тогда подграф $\langle \bar{A}(j) \cap \bar{A}(k) \rangle$ имеет шесть вершин, ни одной 3-антиклики и не больше одной 3-клики, что противоречит (9). Если же $|A(j) \cap A(k)| \geq 3$, то этот подграф имеет хотя бы семь вершин и не больше двух 3-клик, что снова противоречит (9). Следовательно, $\langle M \rangle$ имеет ровно одну изолированную вершину.

Таким образом можно предположить, что вершина 12 изолированная в $\langle M \rangle$, а вершины 10 и 14 смежны. Как было отмечено выше, вершина 12 должна быть смежной обоим вершинам 11, 13. Напомним еще, что любая вершина из M смежна не больше двум вершинам из 3-клик. Следовательно, каждая из вершин 10, 14 смежна хотя бы одной из 11, 13. Если некоторая вершина i из $\{10, 14\}$ смежна обоим вершинам 11, 13, то подграф $\langle A(i) \cap \bar{A}(12) \rangle$ имеет хотя бы шесть вершин, ни одну 3-антиклику и не больше одной 3-клики, что противоречит (9). Следовательно, каждая из вершин 10, 14 смежна ровно

одной из вершин 11, 13. Не теряя общности, можно считать, что 10 смежна 11, и 14 смежна 13. Кроме того, не существует вершины, отличной от 11 и 13 и смежной паре $\{10, 12\}$ или $\{14, 12\}$. Поскольку каждая из смежных вершин 10, 14 смежна хотя бы двум вершинам из Δ , представляются две возможности: либо вершина 12 смежна ровно одной, отличной от 11 и 13, вершине из Δ , либо 12 несмежна ни одной (отличной от 11 и 13) вершине из Δ .

В первой ситуации, не теряя общности, предположим, что вершина 12 смежна вершине 5. Тогда можно считать, что 10 смежна 1, а 14 смежна 9. Вершина 12 смежна еще некоторой вершине из 2, 3, 7, 8. Из-за симметрии можно предположить еще, что вершина 12 смежна вершине 8. Подграфы $\langle A(i) \rangle$, где $i=10, 12, 14$, имеют девять вершин, ни одной 4-антиклики и ровно одну 3-клику. Согласно (4), все они изоморфны графу с рис. 1. В частности для подграфа $\langle \bar{A}(12) \rangle$ это возможно только если смежны вершины 1 и 7 и вершина 14 смежна некоторой из вершин 2, 3. Тогда $\langle A(14) \rangle$ имеет 3-клику $\{4, 5, 6\}$ и изоморфен графу с рис. 1 только если вершина 1 смежна вершине 5, что является противоречием (вершины 1 и 5 принадлежат Δ).

Во второй ситуации, не теряя общности, предположим, что вершина 12 смежна вершинам 2 и 8. Снова подграфы $\langle \bar{A}(i) \rangle$, где $i=10, 12, 14$ изоморфны графу с рис. 1 (см. (4)). Поэтому в $\langle A(12) \rangle$ каждая из вершин 10, 14 смежна некоторой вершине из 3-клики $\{4, 5, 6\}$. Если вершина 5 несмежна ни одной из 10, 14, то она смежна одной из вершин 1, 3 и одной из вершин 7, 9. Тогда вершина 5 несмежна вершинам 2 и 8 (иначе получим новую 3-клику). Следовательно, $A(12)$ вместе с вершиной 5 составит 5-антиклику, отличную от Δ , что является противоречием.

Таким образом доказано, что некоторая из вершин 10, 14 смежна вершине 5. Не теряя общности, предположим, что вершина 10 смежна вершине 5. Тогда в $\langle A(12) \rangle$ вершина 14 смежна 4 или 6. Без потери общности можно предположить, что вершины 14 и 6 смежны. Так как вершина 14 не принадлежит 5-антиклике, она смежна еще некоторой из вершин 1, 9. Из-за симметрии полученной уже части графа G можно предположить, что вершины 14 и 9 смежны. Тогда в $\langle A(12) \rangle$ вершины 5 и 7 смежны. Напомним, что подграф $\langle \bar{A}(14) \rangle$ тоже изоморфен графу с рис. 1. Следовательно, вершины 4 и 2 смежны соответственно вершинам 11 и 5, а некоторая из вершин 1, 3 смежна обоим вершинам 11, 7. Так как вершины 1 и 11 принадлежат Δ , вершина 3 смежна вершинам 7 и 11. Тогда из подграфа $\langle \bar{A}(12) \rangle$ получим, что 6 и 3 смежны. Отсюда следует, что вершина 6 несмежна 1 и 11 (иначе получим новую 3-клику). Вершина 6 несмежна еще вершинам 9 и 13 (иначе получим 3-клику с вершиной 14). Так как вершины 1, 9, 11, 13 принадлежат Δ , они составят вместе с вершиной 6 новую 5-антиклику, что является противоречием.

Случай 2. Множество M содержит хотя бы одну вершину степени 5 в графе G . Пусть, например, $|A(12)|=5$. Так как вершина 12 не является вершиной треугольника, то $A(12)$ есть 5-антиклика и, следовательно, $A(12)=\Delta$, т. е. вершина 12 смежна вершинам 1, 5, 9, 11 и 13. Покажем, что вершины 10 и 14 имеют степени 4. Допустим обратное, и пусть, например, $|A(10)|=5$. Так как $A(10)$ является антикликой, то $A(10)=\Delta$. Из этого вытекает, что вершины 10 и 12 несмежны и что подграф $\langle \bar{A}(10) \cap \bar{A}(12) \rangle$ имеет 7 вершин. Кроме того, этот подграф не содержит 3-клик и 3-антиклик, что противоре-

чит (9). Итак, вершины 10 и 14 имеют степени 4. Каждая из вершин 10, 14 смежна хотя бы двум вершинам из Δ (иначе будет вторая 5-антиклика). Если некоторая из вершин 10, 14 смежна больше двум вершинам из Δ , тогда подграф $\langle A(10) \cap \bar{A}(12) \rangle$, либо подграф $\langle A(14) \cap A(12) \rangle$ будет иметь хотя бы шесть вершин, что, как и выше, приведет к противоречию с (9). Следовательно, каждая из вершин 10, 14 смежна ровно двум вершинам из Δ .

Докажем теперь, что вершины 10 и 14 смежны. Действительно, в противном случае каждая из них смежна ровно двум несмежным вершинам из $\{2, 3, 4, 6, 7, 8\}$, причем из разных 3-клик. Следовательно, вершина i , $i=10, 14$, смежна ровно двум вершинам из 3-клик (иначе $\langle \bar{A}(i) \rangle$ будет 9-вершинным графом без 3-клик и без 4-антиклик, что противоречит (3)). Таким образом, обе вершины 10 и 14 смежны каждой из вершин 11, 13 и подграф $\langle \bar{A}(10) \cap \bar{A}(14) \rangle$ содержит хотя бы шесть вершин. Так как этот подграф не имеет 3-антиклик и содержит не больше одной 3-клики, получаем противоречие с (9).

Итак, вершины 10 и 14 смежны. Каждая из них смежна еще ровно двум вершинам из Δ и одной — из $\{2, 3, 4, 6, 7, 8\}$. Не теряя общности, можно предположить, что вершина 10 смежна вершине 2. Тогда $A(10) \cap A(12) = \{3, 4, 5, 7, 8\}$ и порождает подграф без 3-клик и без 3-антиклик. Хорошо известно и просто доказывается, что такой граф должен быть простым 5-циклом. Не теряя общности, можно считать, что порядок вершин в этом цикле: 3, 4, 6, 7, 8, 3.

Вершина 14 несмежна вершине 2 (иначе будет новый треугольник). Это означает, что подграф $\langle A(12) \cap \bar{A}(14) \rangle$, который тоже является простым 5-циклом, содержит вершину 2 и четыре из вершин 3, 4, 6, 7, 8. Так как подграф $\langle 2, 4, 6, 7, 8 \rangle$ очевидно не является 5-циклом, то вершина $3 \in A(12) \cap A(14)$. Из этого вытекает, что одна из вершин 4, 8 не принадлежит $A(12) \cap A(14)$ (иначе вершина 3 будет иметь степень три в этом подграфе). Без ограничения общности можно предположить, что $8 \notin A(12) \cap A(14)$. Следовательно, $\langle A(12) \cap \bar{A}(14) \rangle$ совпадает с 5-циклом 2, 3, 4, 6, 7, 2.

Напомним, что каждая из вершин 10, 14 смежна ровно двум вершинам из Δ . Докажем, что каждая из вершин 10, 14 смежна ровно одной из вершин 11, 13. В противном случае, так как 10 и 14 смежны, некоторая из них — i , смежна двум вершинам из $\{1, 5, 9\}$, т. е. трем вершинам из 3-клик. Тогда $\langle \bar{A}(i) \rangle$ не имеет ни 3-клик, ни 4-антиклик, что противоречит (3).

Не теряя общности, предположим, что вершина 10 смежна вершине 11, и вершина 14 смежна вершине 13.

Теперь докажем, что ни одна из вершин 10, 14 несмежна вершине 5. Допустим сначала, что 10 смежна 5. Тогда подграф $\langle A(10) \rangle$ имеет 3-клику $\{7, 8, 9\}$. Так как этот 9-вершинный подграф не имеет 4-антиклик, из (4) следует, что его вершина 1 смежна некоторой вершине из 3-клики $\{7, 8, 9\}$. Поскольку 1 и 9 принадлежат Δ , получим новую 3-клику $\{1, 2, 7\}$ или $\{1, 3, 8\}$, что является противоречием.

Если предположим, что вершина 14 смежна вершине 5, то аналогично получим противоречие, так как вершина 9 из $A(14)$ не может быть смежной ни одной вершине из 3-клики $\{1, 2, 3\}$.

Из доказанного следует, что вершина 10 смежна вершине 9 и вершина 14 смежна вершине 1. Следовательно, 9-вершинные подграфы $\langle A(10) \rangle$ и

$\langle \bar{A}(14) \rangle$ содержат ровно одну 3-клику — $\{4, 5, 6\}$. Так как эти подграфы не имеют 4-антиклик, они изоморфны графу с рис. 1. Для подграфа $\langle \bar{A}(10) \rangle$ это возможно только если смежны пары $\{7, 13\}$, $\{1, 6\}$, $\{5, 8\}$, $\{4, 13\}$, а для подграфа $\langle A(14) \rangle$ — только если смежны пары $\{3, 11\}$, $\{2, 5\}$, $\{4, 9\}$, $\{6, 11\}$.

Мы получили граф, который кроме Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 и Δ , не имеет других 3-клик и 5-антиклик. Нетрудно убедиться в том, что этот граф совпадает с графом на рис. 6. Единственность графа рассматриваемого типа вытекает из того, что добавление нового ребра к полученному графу приводит к появлению новой 3-клики.

Теорема доказана.

V. Об отношении полученного результата к кратностям Рамсея. Для данного графа G и натуральных чисел p и q через $\pi(G; p, q)$ обозначим сумму числа p -клик и числа q -антиклик графа G . Число $\pi(n; p, q)$ обозначает минимум чисел $\pi(G; p, q)$ по всем n -вершинным графам G . В [14] доказано

$$\pi(n; 3, 3) = \begin{cases} \frac{1}{3} \cdot 2k(k-1)(k-2), & n=2k, \\ \frac{1}{3} \cdot 2k(k-1)(4k+1), & n=4k+1, \\ \frac{1}{3} \cdot 2k(k+1)(4k-1), & n=4k+3. \end{cases}$$

Напомним, что число Рамсея $R(p, q)$ определяется как наименьшее натуральное число n , для которого $\pi(n; p, q) \geq 1$. Положим $M(p, q) = \pi(R(p, q); p, q)$. Числа $M(p, q)$ называются кратностями Рамсея. Согласно упомянутому выше результату Гудмана из [14], $M(3, 3) = 2$. Этот результат можно рассматривать и как частный случай теоремы, доказанной в [12], согласно которой, если $R(p, q) = R(p-1, q) + R(p, q-1)$, тогда $M(p, q) \geq 2$. Изучению кратностям $M(p, q)$ пока посвящено небольшое количество работ (около двадцати). Тем не менее, в обзорной статье [17] пропущены очень важные публикации, что делает этот обзор мало полезным. По всей видимости, авторы [17] хотели внести ясность в этот круг вопросов, однако эффект оказался обратным. Так, например, теорема 13 этого обзора является хорошо известным результатом из [11], однако, ссылаясь на устное сообщение, теорема 13 объявляется результатом других авторов. То же самое относится и к теореме 15, которая утверждает, что $M(3, 4) = 1$. Она является частью одного результата из [7].

Теперь укажем место полученных результатов в теории кратностей Рамсея. В [1] Пашов доказал, что $M(3, 5) = 4$. Описание всех экстремальных графов, т. е. 14-вершинных графов G , для которых $\pi(G; 3, 5) = 4$, пока нерешенная задача (хотя, как будет ясно, до окончательного ее решения осталось немного). Из результатов в [2, 3, 4] вытекает, что если 14-вершинный граф G содержит хотя бы две 5-антиклики, тогда он не является экстремальным в указанном выше смысле. В настоящей работе доказано, что существует единственный 14-вершинный граф G с одной 5-антикликой, для которого $\pi(G; 3, 5) = 4$. Из этого следует, что для описания экстремальных графов, связанных с кратностью $M(3, 5)$, остается найти все 14-вершинные графы без 5-антиклик и с ровно четырьмя 3-кликами. В этом направлении кое-что уже сделано в [5] и [16].

ЛИТЕРАТУРА

1. П а ш о в, И в. Кратность Рамсея при 2-раскрасках ребер полного графа с четырнадцатью вершинами. — Сердика, **10**, 1982, 192—197.
2. Н е н о в, Н., Н. Х а д ж и и в а н о в. О минимуме числа 5-антиклик 14-вершинных графов без треугольников. — Докл. БАН, **36**, 1983, 1155—1157.
3. Х а д ж и и в а н о в, Н., Н. Н е н о в, И в. П а ш о в. Любой 14-вершинный граф с единственным треугольником имеет не меньше пяти 5-антиклик. — Сердика.
4. Х а д ж и и в а н о в, Н., Н. Н е н о в, И в. П а ш о в. Минимум чисел 5-антиклик 14-вершинных графов с двумя 3-кликами есть 3. — Год. ВПИ Шумен, X Б, 1985, 23—36.
5. П а ш о в, И в. О реализациях кратности Рамсея $M(3, 5)$. — Год. ВПИ Шумен, VIII Б, 1984, 5—10.
6. Х а д ж и и в а н о в, Н., Н. Н е н о в, И в. П а ш о в. О числе 3-клик некоторых графов без 4-антиклик. — Год. ВПИ Шумен, VIII Б, 1984, 11—29.
7. Х а д ж и и в а н о в, Н., Н. Н е н о в. Усиление одной теоремы Грийнвуда и Глиссона о раскрасках ребер полного графа с девятью вершинами. — Докл. БАН, **31**, 1978, № 6, 631—633.
8. Н е н о в, Н., Н. Х а д ж и и в а н о в. Описание 13-вершинных графов с одним треугольником и с одной 5-антикликой. — Год. Соф. унив., Фак. мат. и мех., **76**, 1988, 91—107.
9. Н е н о в, Н., И в. П а ш о в, Н. Х а д ж и и в а н о в. О некоторых экстремальных двухцветных раскрасках ребер полного графа с тринадцатью вершинами. — Год. ВПИ Шумен, VII Б, 1983, 53—65.
10. Х а д ж и и в а н о в, Н., И в. П а ш о в, Н. Н е н о в. Единственность 13-вершинного графа с числом независимости 4 и с одним треугольником. — Докл. БАН, **35**, 1982, № 10, 1363—1366.
11. Н е н о в, Н., Н. Х а д ж и и в а н о в. О графах, содержащих монохроматический треугольник при произвольной двухцветной раскраске ребер. — Сердика, **5**, 1979, 303—305.
12. Н е н о в, Н. Некоторые замечания о Рамсеевских кратностях. — В: Математика и математическое образование. Доклады на Десета пролетна конференция, апрел 1981 г. София, 1981, 176—179.
13. К е r y, G. Ramsey egy graphelméleti teteleröl. — Math. Lapoc, **15**, 1964, 264—286.
14. G o o d m a n, A. On sets of acquaintances and strangers at any party. — Amer. Math. Monthly, **66**, 1959, 778—783.
15. G r e e n w o o d, R., A. G l e a s o n. Combinatorial relation and chromatic graphs. — Canad. J. Math., **7**, 1955, 1—7.
16. J a c o b s o n, M. A note on Ramsey multiplicity. — Discrete Math., **29**, 1980, 201—203.
17. B u r r, S., V. R o s t a. On the Ramsey multiplicities of graphs — problems and recent results. — J. Graph Theory, **4**, 1980, 347—361.

Поступила 26. 3. 1985 г.

ON THE IDENTITIES OF THE THREE-DIMENSIONAL SIMPLE JORDAN ALGEBRA

Vesselin Drensky

Веселин Дренски. **О тождествах в трехмерной простой йордановой алгебре.** Над алгебраически замкнутым полем K нулевой характеристики единственная трехмерная простая йорданова алгебра изоморфна алгебре $H_2(K)$ симметрических матриц второго порядка. Пусть V — T -идеал в свободной специальной йордановой алгебре с единицей $SJ(X)$, состоящий из всех полиномиальных тождеств в $H_2(K)$. Главная цель этой работы — описать все T -идеалы U в $SJ(X)$, содержащие V . Построена решетка $\Lambda(V)$ подмногообразий U многообразия $V = \text{var } H_2(K)$. Показано, что все подмногообразия порождаются конечномерной алгеброй. Доказано, что если $U \neq V$, то U обладает конечным топологическим рангом, а топологический ранг многообразия V бесконечен. Вычислена производящая функция последовательности коразмерностей $c_n(V)$, $n=0, 1, 2, \dots$, T -идеала V и оценены коразмерности $c_n(U)$ для $U \supset V$. Оказывается, что $\lim_{n \rightarrow \infty} (c_n(V))^{1/n} = 3$, а если $U \neq V$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} (c_n(U))^{1/n} = 1$ или 2 .

Vesselin Drensky. **On the Identities of the Three-dimensional Simple Jordan Algebra.** The only three-dimensional simple Jordan algebra over an algebraically closed field K of characteristic zero is isomorphic to the algebra $H_2(K)$ of the symmetric 2×2 matrices. Let $SJ(X)$ be the free special unitary Jordan algebra and let V be the T -ideal in $SJ(X)$, consisting of all polynomial identities for $H_2(K)$. The main purpose of this paper is to describe the T -ideals U of $SJ(X)$ containing V . The lattice $\Lambda(V)$ of the subvarieties U of $V = \text{var } H_2(K)$ is obtained. It is shown that any subvariety is generated by a finite-dimensional algebra. It is proved that the topological rank of U is finite, if $U \neq V$ and V is of infinite topological rank. The generating function of the sequence of the codimensions $c_n(V)$, $n=0, 1, 2, \dots$, of V is calculated and the codimensions $c_n(U)$ for $U \supset V$ are estimated. It turns out that $\lim_{n \rightarrow \infty} (c_n(V))^{1/n} = 3$ and $\lim_{n \rightarrow \infty} (c_n(U))^{1/n} = 1$ or 2 if $U \neq V$.

INTRODUCTION

In this paper we shall consider unitary Jordan algebras over a field K of characteristic 0. Let G be a three-dimensional simple Jordan algebra. It is known that the T -ideal of the polynomial identities for G coincides with the T -ideal V of

the identities for the Jordan algebra H_2 of the symmetric 2×2 matrices. The ideal V satisfies the Specht property for unitary algebras, i. e. the identities of every T -ideal U containing V follow from a finite subset of U [1]. The Specht property of V for algebras without 1 is known as well [2]. Moreover, the GL_m — module structure of the relatively free algebra of the variety $\mathbf{V} = \text{var } H_2$ is established [3]. The problem of describing of the subvarieties of \mathbf{V} is of some interest. Partial information is obtained in [2]: If \mathbf{U} is a proper subvariety of \mathbf{V} , then there exists a positive integer p with the following property. Every algebra R from \mathbf{U} has an ideal I such that $I^p = 0$ and R/I satisfies the same identities as the field K considered as a Jordan algebra. The main purpose of the present paper is to obtain a complete description of the subvarieties of \mathbf{V} . This is given in the language of lattices of varieties. An oriented graph $\text{gr } (\mathbf{V})$ is related to \mathbf{V} . A correspondence ψ is defined from the lattice $\Lambda (\mathbf{V})$ of the subvarieties of \mathbf{V} into the set of subgraphs of $\text{gr } (\mathbf{V})$ and ψ satisfies the property: If $\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2 \subset \mathbf{V}$, then

$$\psi(\mathbf{U}_1 \cap \mathbf{U}_2) = \psi(\mathbf{U}_1) \cup \psi(\mathbf{U}_2), \psi(\mathbf{U}_1 \cup \mathbf{U}_2) = \psi(\mathbf{U}_1) \cap \psi(\mathbf{U}_2).$$

The image of ψ coincides with the set of the subgraphs G of $\text{gr } (\mathbf{V})$ such that: If v is a vertex of G , then all edges $e \in \text{gr } (\mathbf{V})$ beginning from v belong to G , too. This method of describing the subvarieties of a given variety has already been applied for several varieties.

The knowledge of the subvarieties of \mathbf{V} gives the possibility to answer some other questions. It is proved that every subvariety \mathbf{U} of \mathbf{V} is generated by a finite-dimensional algebra $R(\mathbf{U})$ and $R(\mathbf{U})$ is a direct sum of two algebras R_1 and R_2 . The algebra R_1 is obtained by a formal adjunction of 1 to a nilpotent algebra and R_2 is generated as a subalgebra of $H_2(K[t]/(t^s))$ by $e_{11}, e_{22}, t(e_{12} + e_{21})$. Some ideas from [4] are used in the proof.

Pchelintsev [5] has introduced the notion of topological rank of a variety. It turns out that the topological rank of \mathbf{V} is infinite and for every proper subvariety \mathbf{U} of \mathbf{V} this rank is finite.

In principle one can obtain an explicit formula for the codimension sequence of every subvariety of \mathbf{V} . The generating function of the sequence of the codimensions $c_n(\mathbf{V})$ for \mathbf{V} is calculated. Moreover, the codimensions are estimated asymptotically. The result is: If $\mathbf{U} \subset \mathbf{V}$ and $\mathbf{U} \neq \mathbf{V}$, then $\lim_{n \rightarrow \infty} (c_n(\mathbf{U}))^{1/n} = 1$ or 2 , $\lim_{n \rightarrow \infty} (c_n(\mathbf{V}))^{1/n} = 3$. The proofs are based on estimations of some combinatorial sums obtained by Regev [6].

The proofs of all these results use combinatorial methods, the representation theory of the symmetric groups and the description of the identities for H_2 , established in [3].

1. PRELIMINARIES

We fix a field K of characteristic 0. All associative and Jordan algebras will be unitary and over K . Any associative algebra R can be considered as a Jordan algebra $R^{(+)}$ with a new multiplication $a \circ b = (ab + ba)/2$. The subalgebras of $R^{(+)}$ are called special Jordan algebras. For $R = M_2(K)$, the algebra of 2×2 matrices, the linear subspace $H_2 = H_2(K)$ of all symmetric matrices forms a subalgebra of $M_2^{(+)}$. Over an algebraically closed field K , H_2 is the only three-dimensional simple Jordan algebra.

Let $A_m = K \langle x_1, \dots, x_m \rangle$ be the free associative algebra of rank m and let $SJ_m = SJ(x_1, \dots, x_m)$ be the special Jordan algebra generated as a subalgebra of

$A_m^{(+)}$ by x_1, \dots, x_m , let $A=A_\infty$, $SJ=SJ_\infty$. We denote P_n the set of all multilinear elements of degree n in A_n and B_m the vector space of proper (or commutator) polynomials in A_m , B_m is spanned by products of commutators $[x_{i_1}, \dots] \dots [\dots, x_{i_n}]$. The set B_m consists of all polynomials $f(x_1, \dots, x_m) \in A_m$ which vanish under the formal derivations: $\partial f / \partial x_i = 0$, $i=1, \dots, m$. We denote $\Gamma_n = P_n \cap B_n$ the set of proper multilinear elements besides, $PJ_n = P_n \cap SJ_n$, $BJ_m = B_m \cap SJ_m$, $\Gamma J_n = \Gamma_n \cap SJ_n$.

The polynomial $f(x_1, \dots, x_m) \in A$ is a weak identity for the pair $(M_2(K), H_2(K))$ if $f(a_1, \dots, a_m) = 0$ in $M_2(K)$ for every $a_1, \dots, a_m \in H_2(K)$. Let W be the ideal of all weak identities for this pair. Then $V = W \cap SJ = T(H_2)$ is the T -ideal of the polynomial identities in SJ satisfied by $H_2(K)$. Usually we shall work in the algebra $A_2/(W \cap A_2)$ and in $F_2(\mathbf{V})$ — the relatively free algebra of rank 2 in the variety of Jordan algebras \mathbf{V} generated by $H_2(K)$. Clearly, $F_2(\mathbf{V}) = SJ_2/(V \cap SJ_2)$ and $F_2(\mathbf{V})$ is a subalgebra of $(A_2/(W \cap A_2))^{(+)}$.

Let $\text{Sym}(n)$ be the symmetric group acting on the set of symbols $\{1, \dots, n\}$. The representations of $\text{Sym}(n)$ are described by partitions and Young diagrams [7, 8]. Let $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ be a partition of n and let $[\lambda]$ be the corresponding Young diagram. We denote $M(\lambda)$ the irreducible $\text{Sym}(n)$ -module related to λ . The space P_n is a left $\text{Sym}(n)$ -module with the action of $\text{Sym}(n)$ defined by

$$\sigma(x_{i_1} \dots x_{i_n}) = x_{\sigma(i_1)} \dots x_{\sigma(i_n)}, \quad \sigma \in \text{Sym}(n), \quad x_{i_1} \dots x_{i_n} \in P_n.$$

A generator of $M(\lambda) \subset P_n$ can be obtained by the following device. We define a right action of $\text{Sym}(n)$ on the homogeneous component of degree n of $K \langle X \rangle$ by

$$(x_{i_1} \dots x_{i_n}) \rho^{-1} = x_{i_{\rho(1)}} \dots x_{i_{\rho(n)}}, \quad \rho \in \text{Sym}(n), \quad x_{i_1} \dots x_{i_n} \in K \langle X \rangle.$$

Assume that the columns of the diagram $[\lambda]$ are of length $p = p_1, p_2, \dots, p_k$, respectively. Let

$$S_\lambda(x_1, \dots, x_p) = S_{p_1}(x_1, \dots, x_{p_1}) \dots S_{p_k}(x_1, \dots, x_{p_k}),$$

where $S_p(x_1, \dots, x_p) = \sum (\text{sign } \sigma) x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(p)}$ is the standard polynomial.

Then $M(\lambda)$ is generated by the linearization of the polynomial

$$(1) \quad S_\lambda(x_1, \dots, x_p) \sum a_\rho \rho$$

for appropriate $a_\rho \in K$, $\rho \in \text{Sym}(n)$.

It is known that $\Gamma_n, PJ_n, \Gamma J_n$ are $\text{Sym}(n)$ -submodules of P_n . If U is a T -ideal of SJ , then $U \cap PJ_n$ is also a submodule of P_n . Therefore, the action of $\text{Sym}(n)$ is inherited by the sets of the multilinear elements $PJ_n(\mathbf{U}) = PJ_n / (PJ_n \cap U)$ and the proper multilinear elements $\Gamma J_n(\mathbf{U}) = \Gamma J_n / (\Gamma J_n \cap U)$ of the relatively free algebra $FJ(\mathbf{U})$ in the variety \mathbf{U} , defined by the identities from U . For every T -ideal $U \subset SJ$ the variety of unitary Jordan algebras \mathbf{U} can be determined by its identities from $\Gamma J_n \cap U$, $n=3, 4, \dots$.

We shall consider all products left-normed: $x_1 \circ x_2 \circ x_3 = (x_1 \circ x_2) \circ x_3$, $[x_1, x_2] = x_1(adx_2) = x_1x_2 - x_2x_1$, $[x_1, x_2, x_3] = [x_1, x_2](adx_3)$.

2. THE DESCRIPTION OF THE SUBVARIETIES

We recall the description of $\Gamma J_n(\mathbf{V})$ given in [3]. For $n > 0$, $\Gamma_n/(\Gamma_n \cap W) = \sum M(q+r, q)$, where the summation runs over all pairs (q, r) such that $2q+r=n$, $q \neq 0$. Then $\Gamma J_n(\mathbf{V})$ is a submodule of $\Gamma_n/(\Gamma_n \cap W)$ and $\Gamma J_n(\mathbf{V}) = \Gamma_n/(\Gamma_n \cap W)$ for n odd. For n even, $\Gamma J_n(\mathbf{V})$ is a sum of the modules $M(q+r, q)$ such that both q and r are even. We fix a basis of $H_2(\mathbf{K})$

$$e = e_{11} + e_{22}, \quad a = -\frac{1}{2}(e_{11} - e_{22})\sqrt{-1}, \quad b = \frac{1}{2}(e_{12} + e_{21})\sqrt{-1}.$$

One can easily see that

$$(2) \quad a^2 = b^2 = [a, b]^2 = -e/4, \quad [a, b, b] = -a, \quad [b, a, a] = -b.$$

The generators of $M(q+r, q)$ are obtained by the following device. We use a polynomial $f_{qr}(x_1, x_2) \in B_2$ of the form (1) for $\lambda = (q+r, q)$. If $f_{qr}(a, b) \neq 0$, then the linearization $\text{lin } f_{qr}(x_1, x_2)$ generates the only submodule $M(q+r, q) \subset \Gamma_n/(\Gamma_n \cap W)$. If $(q, r) \equiv (1, 0) \pmod{2}$, then $\text{lin } f_{qr}(x_1, x_2)$ is a generator of the corresponding submodule of $\Gamma J_n(\mathbf{V})$. We shall use the following polynomials

$$(3) \quad f_{qr}(x_1, x_2) = [x_1, x_2] (adx_1)^r [x_1, x_2]^{q-1}.$$

The next theorem allows to obtain the complete description of the subvarieties of \mathbf{V} .

Theorem 2.1. Let $M(\lambda) \subset \Gamma J_n(\mathbf{V})$, $M(\mu) \subset \Gamma J_m(\mathbf{V})$. Then the polynomials from $M(\mu)$ are consequences of the polynomials from $M(\lambda)$ if and only if the diagram $[\mu]$ contains the diagram $[\lambda]$. In other words, for $M(q_i+r_i, q_i) \subset \Gamma J_{n_i}(\mathbf{V})$, $i=1, 2$, $f_{q_2, r_2}(x_1, x_2)$ follows from $f_{q_1, r_1}(x_1, x_2)$ in $FJ(\mathbf{V})$ if and only if $q_1 \leq q_2$, $q_1+r_1 \leq q_2+r_2$ (equivalently $n_1 \leq n_2$, $q_1 \leq q_2 \leq n_2 - n_1 + q_1$).

On the plane with coordinates (n, q) we shall indicate the points (n, q) such that $n=2q+r$ and $M(q+r, q) \subset \Gamma J_n(\mathbf{V})$. We shall draw arrows for the "immediate" consequences of higher degree of $M(q+r, q)$ (Fig. 1). In this way we obtain an oriented graph $\text{gr}(\mathbf{V})$. Let $\Lambda(\text{gr}(\mathbf{V}))$ be the set of all subgraphs G of $\text{gr}(\mathbf{V})$ satisfying the property: If v is a vertex of G , then all edges beginning from v belong to G as well. We relate a subgraph $\psi(\mathbf{U})$ of $\text{gr}(\mathbf{V})$ to any T -ideal $U \subset SJ$ such that $U \supset V$ (and to any variety $U \subset \mathbf{V}$). The point (n, q) belongs to $\psi(\mathbf{U})$ if and only if the submodule $M(q+r, q)$ of $\Gamma J_n(\mathbf{V})$ is contained in $(U \cap \Gamma J_n)/(V \cap \Gamma J_n)$ (i. e. $f_{qr}(x_1, x_2) = 0$ is an identity for \mathbf{U}). The set of edges for $\psi(\mathbf{U})$ consists of all edges from $\text{gr}(\mathbf{V})$ which connect vertices from $\psi(\mathbf{U})$. Obviously, $\psi(\mathbf{U}) \in \Lambda(\text{gr}(\mathbf{V}))$, $\text{Im } \psi = \Lambda(\text{gr}(\mathbf{V}))$ and if $\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2 \subset \mathbf{V}$, then $\psi(\mathbf{U}_1 \cap \mathbf{U}_2) = \psi(\mathbf{U}_1) \cup \psi(\mathbf{U}_2)$, $\psi(\mathbf{U}_1 \cup \mathbf{U}_2) = \psi(\mathbf{U}_1) \cap \psi(\mathbf{U}_2)$.

Hence, the correspondence $\psi : \Lambda(\mathbf{V}) \rightarrow \Lambda(\text{gr}(\mathbf{V}))$ is a dual isomorphism of the lattice of varieties $\Lambda(\mathbf{V})$ onto the lattice of graphs $\Lambda(\text{gr}(\mathbf{V}))$.

Example 2.2. Let \mathbf{U}_1 and \mathbf{U}_2 be defined as subvarieties of \mathbf{V} respectively by the identities

$$f_{17} = [x_1, x_2] (adx_1)^7 = 0,$$

$$f_{31} = [x_1, x_2, x_1] [x_1, x_2]^2 = 0.$$

Then the graphs $\psi(\mathbf{U}_1)$ and $\psi(\mathbf{U}_2)$ are "generated" by the vertices $(9, 1)$ and $(7, 3)$, respectively. Therefore, the variety $\mathbf{U}_1 \cup \mathbf{U}_2$ is determined by the identity

$$f_{35} = [x_1, x_2](adx_1)^5 [x_1, x_2]^2 = 0 \quad (\text{Fig. 2}).$$

We shall prove Theorem 2.1 in several steps.

Lemma 2.3. Let $n_1 = 2q_1 + r_1$, $n_2 = 2q_2 + r_2$ and $q_1 > q_2$. Then the polynomial from (3) $f_{q_2, r_2}(x_1, x_2) \in BJ_2(V)$ is not a consequence of $f_{q_1, r_1}(x_1, x_2)$ (i. e. there are no arrows drawn to the left in Fig. 1).

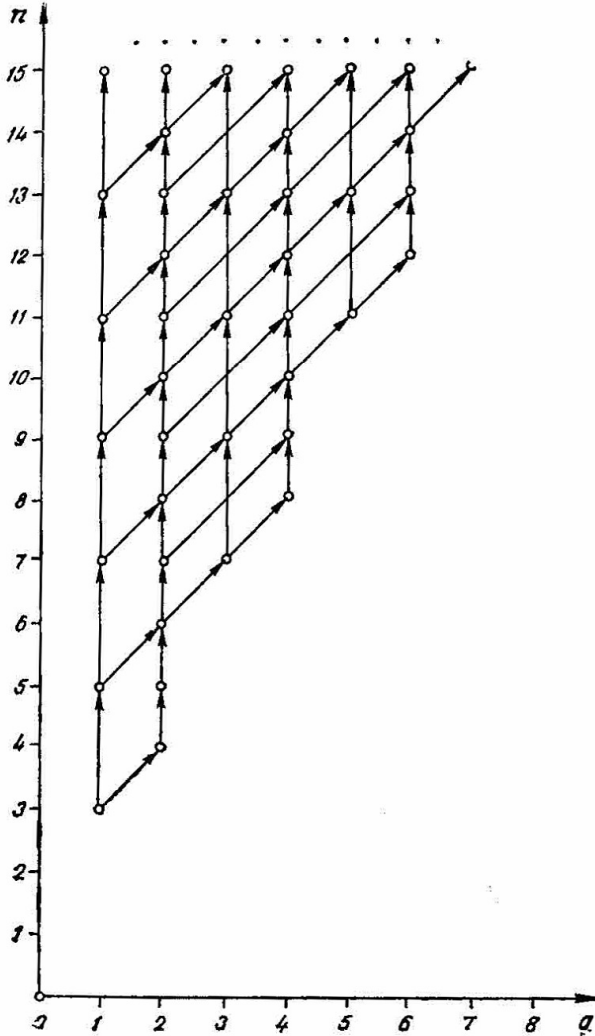


Fig. 1

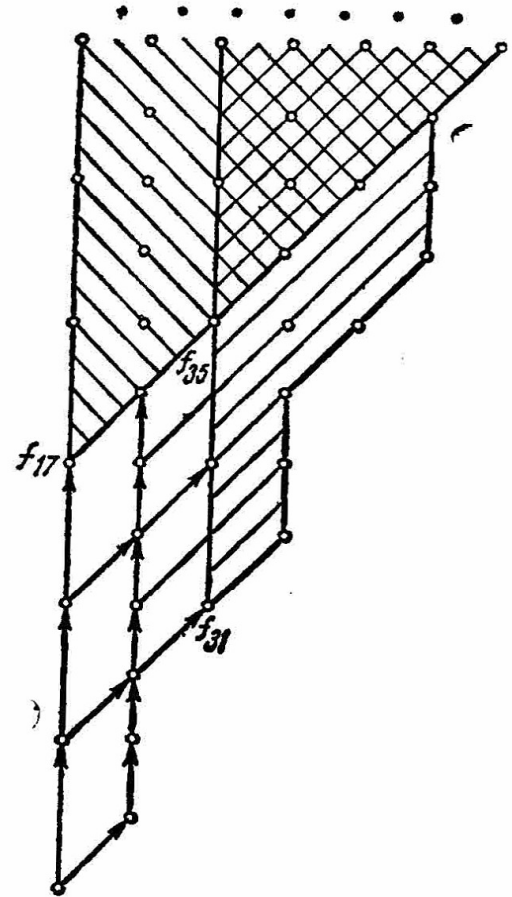


Fig. 2

Proof. The polynomial $f_{q_1, r_1}(x_1, x_2)$ is written as a linear combination of products of q_1 commutators. Hence, all consequences of $f_{q_1, r_1}(x_1, x_2)$ are in the ideal $(A_2')^{q_1}$, where A_2' is the commutator ideal of A_2 . Obviously, if $g(x_1, x_2) \in (A_2')^{q_1}$, then $\deg_{x_2} g \geq q_1$. On the other hand, $\deg_{x_2} f_{q_2, r_2} = q_2 < q_1$ and f_{q_2, r_2} does not belong to $(A_2')^{q_1}$. Therefore f_{q_2, r_2} does not follow from f_{q_1, r_1} .

Lemma 2.4. The non-zero polynomials among

$$f_{q, r+1}(x_1, x_2), f_{q, r+2}(x_1, x_2), f_{q+1, r-1}(x_1, x_2), f_{q+2, r-2}(x_1, x_2) \in BJ_2(V)$$

follow from $f_{qr}(x_1, x_2)$ (i. e. the arrows drawn in Fig. 1 do exist).

Proof. Denote $f(x_1, x_2) = f_{qr}(x_1, x_2)$ and $n = 2q + r$. Let $f(x_1, u_1, \dots, u_k | x_2, v_1, \dots, v_l)$ be the partial linearization of f in x_1 and x_2 . This is the linear in u_i, v_j component of

$$f(x_1 + u_1 + \dots + u_k, x_2 + v_1 + \dots + v_l). \text{ Let}$$

$$g(x_1, x_2, u) = f(x_1, x_1 \circ u | x_2) + f(x_1 | x_2, x_2 \circ u).$$

(i) It was proved in [2] that the complete linearization $\text{lin } g_1$ of

$$g_1(x_1, x_2) = g(x_1, x_2, x_1) - (3q + 2r)f(x_1, x_2) \circ x_1$$

is a commutator polynomial generating the irreducible $\text{Sym}(n + 1)$ -module $M(q + r + 1, q)$ and if $q \equiv 0 \pmod{2}$, then $g_1(x_1, x_2) \neq 0$ in \mathbf{V} . Therefore $g_1(x_1, x_2)$ is proportional of $f_{q, r+1}(x_1, x_2)$ in $BJ_2(\mathbf{V})$. Clearly, $g_1(x_1, x_2)$ is a consequence of $f(x_1, x_2)$. In this way we have established that the edge from (n, q) to $(n + 1, q)$ really belongs to the graph $\text{gr}(\mathbf{V})$.

(ii) By analogy with [2], we deduce that

$$g_2(x_1, x_2) = rg(x_1, x_2, x_2) - g(x_1, x_2 | x_2 | x_1)$$

$$- (3q + r - 1)(rf(x_1, x_2) \circ x_2 - f(x_1, x_2 | x_2) \circ x_1)$$

is a non-zero element of $BJ_2(\mathbf{V})$ and its linearization generates $M(q + r, q + 1)$. Hence, we have "drawn" all arrows from (n, q) to $(n + 1, q)$.

(iii) It is known that $[x_1, x_2, x_3] \in SJ$, i. e. $f(x_1, [x_3, x_4, x_5] | x_2) \in BJ$. Arguments similar to those from (i) and (ii) show that the linearization of

$$g_3(x_1, x_2) = f(x_1, [x_1, x_1, x_1] | x_2) + f(x_1 | x_2, [x_2, x_1, x_1])$$

generates $M(q + r + 2, q)$. The relations (2) give that $g_3(a, b) \neq 0$ if $f(a, b) \neq 0$.

(iv) Let n be odd and let q be even, i. e. $(q, r) \equiv (0, 1) \pmod{2}$. Having in mind that $f(x_1, x_2) \in SJ$, we obtain that

$$[f(x_1, x_2), x_3, x_4] \in BJ.$$

Then the linearization of the polynomial

$$h(x_1, x_2) = r(r - 1)[f(x_1, x_2), x_2, x_2] + [f(x_1, x_2, x_2 | x_2), x_1, x_1]$$

$$- (r - 1)\{[f(x_1, x_2 | x_2), x_1, x_2] + [f(x_1, x_2 | x_2), x_2, x_1]\}$$

generates an irreducible submodule $M(q + r, q + 2)$ in Γ_{n+2} . A direct verification shows that $h(a, b) \neq 0$. This completes the proof of the lemma.

Now we begin the proof of the most difficult part of Theorem 2.1. We shall show that $\text{gr}(\mathbf{V})$ has no edges beginning from (n_0, q_0) and ending into a vertex which is on the right side of the straight line $n - n_0 = q - q_0$.

The cartesian product of symmetric groups $\text{Sym}(k) \times \text{Sym}(l)$ is embedded canonically into $\text{Sym}(k + l)$ assuming that $\text{Sym}(k)$ and $\text{Sym}(l)$ act respectively on the sets $\{1, \dots, k\}$ and $\{k + 1, \dots, k + l\}$. Besides, if $k < m$, then we consider $\text{Sym}(k)$ as a subgroup of $\text{Sym}(m)$ and $\text{Sym}(k)$ fixes the symbols $k + 1, \dots, m$. For a $\text{Sym}(k)$ -module M and a $\text{Sym}(l)$ -module N , the tensor product $M \otimes_K N$ has a structure of a $\text{Sym}(k) \times \text{Sym}(l)$ -module. If G is a group and H is a subgroup of G and if R and S are respectively G - and H -modules, then we denote $R \downarrow H$ the module R considered as an H -module and $S \uparrow G$ the induced by S G -module.

L e m m a 2.5. Let M be a $\text{Sym}(n)$ -submodule of PJ_n and let Q be the set of the multilinear consequences of degree $n+1$ of the polynomial identities of M . Then Q is a $\text{Sym}(n+1)$ -submodule of PJ_{n+1} and Q is a factor-module of the $\text{Sym}(n+1)$ -module

$$(M \downarrow \text{Sym}(n-1) \otimes_K M(2)) \uparrow \text{Sym}(n+1) + (M \otimes_K M(1)) \uparrow \text{Sym}(n+1).$$

Proof. We shall follow the exposition of [9]. The consequences of degree $n+1$ of M can be derived in two ways — by substitution and by multiplication. The consequences of substitution are obtained by the following device:

- (i) We fix x_n (and consider M as a $\text{Sym}(n-1)$ -module).
- (ii) We replace x_n by $x_n \circ x_{n+1}$ (and obtain a factor-module of the $\text{Sym}(n-1) \times \text{Sym}(2)$ -module $M \downarrow \text{Sym}(n-1) \otimes_K PJ_2$, where $PJ_2 \cong M(2)$).
- (iii) We generate a $\text{Sym}(n+1)$ -module by $f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n \circ x_{n+1})$ for $f \in M$ (this module is a homomorphic image of the induced one).

The consequences of multiplication are derived similarly from $f(x_1, \dots, x_n) \circ x_{n+1}$, $f \in M$, and correspond to $(M \otimes_K M(1)) \uparrow \text{Sym}(n+1)$.

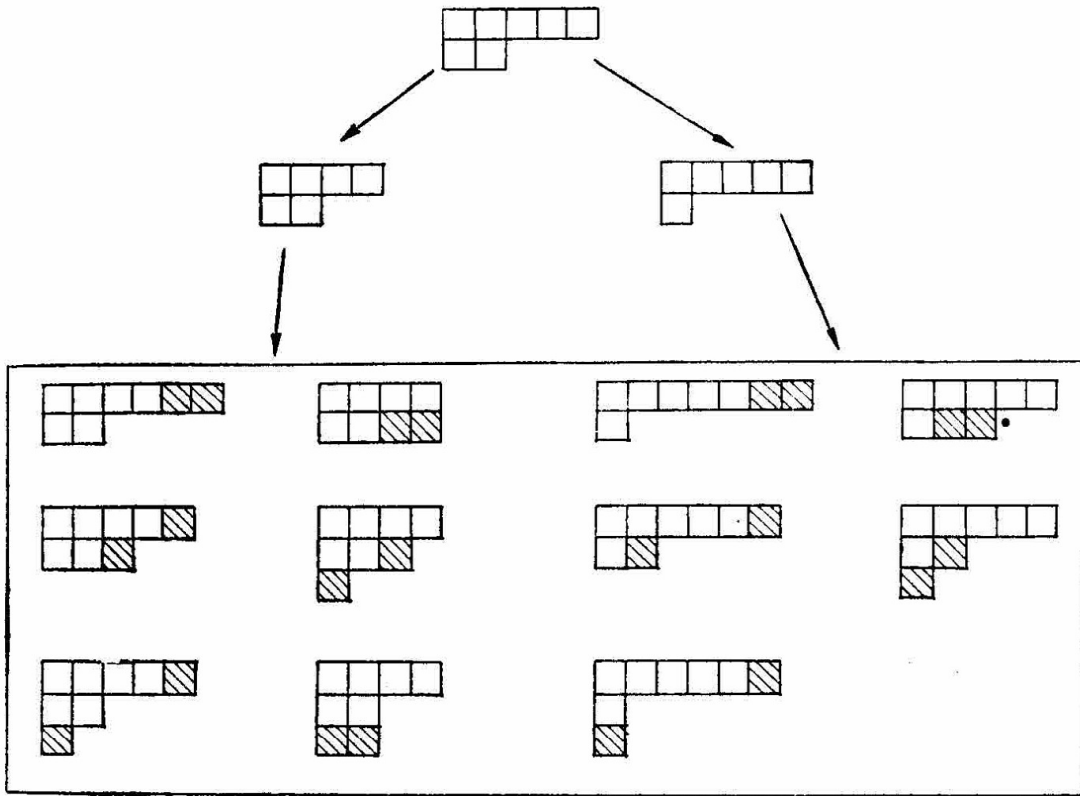


Fig. 3

L e m m a 2.6. Let $M(\lambda) \subset PJ_n$ and let M_1, M_2 be the $\text{Sym}(n+1)$ -submodules of PJ_{n+1} of the consequences of $M(\lambda)$ derived by substitution and by multiplication, respectively. Then:

- (i) $M_1 = \sum a_\mu M(\mu)$ and for every partition μ of $n+1$ the non-negative integer a_μ is bounded by the number of diagrams $[\mu]$ obtained in the following way: We remove a box from $[\lambda]$ and obtain a diagram $[\nu]$. Then we add two new boxes

to $[\nu]$ and receive the diagram $[\mu]$ such that these two new boxes do not belong to the same column of $[\mu]$ (Fig. 3).

(ii) M_2 is a factor-module of $\Sigma M(\mu)$, where the summation runs over all diagrams $[\mu]$ arising from $[\lambda]$ by adding a box (Fig. 4).

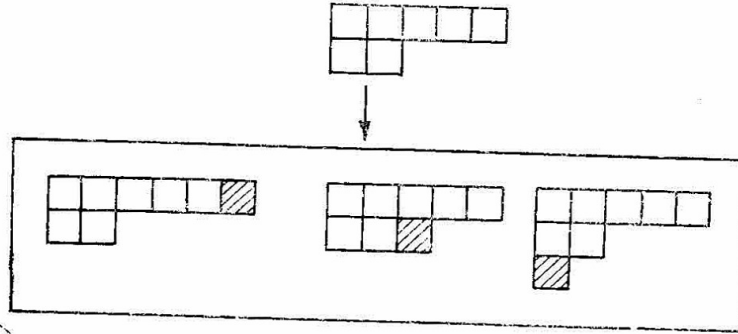


Fig. 4

The proof of the lemma follows immediately from Lemma 2.5, the branching theorem and the Littlewood-Richardson rule.

Let $M \subset \Gamma J_n$ be a $\text{Sym}(n)$ -module and let M_s be the $\text{Sym}(n+s)$ -submodule of PJ_{n+s} consisting of all consequences derived from M by substitutions only. In virtue of Lemma 2.5, the module $Q_s \subset PJ_{n+s}$ of all consequences of M satisfies

$$(4) \quad Q_s = M_s + N_s,$$

where N_s is a homomorphic image of

$$(5) \quad \sum_{k=1}^{s-1} \left(M_k \otimes \sum_{s-k} \frac{(M(1) \otimes \dots \otimes M(1))}{s-k} \right) \uparrow \text{Sym}(n+s)$$

and the inner sum is over all distributions of the brackets in $M(1) \otimes \dots \otimes M(1)$.

L e m m a 2.7. Let $f(x_1, \dots, x_{n+s}) \in M_s$ in the notation of (4) and (5). Then $f(x_1, \dots, x_{n+s})$ equals a commutator polynomial modulo N_s .

Proof. It suffices to prove the assertion for $s=1$. Then the lemma follows easily by induction on s . The module M is generated by the polynomials $g(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n \circ x_{n+1})$, where $g(x_1, \dots, x_n) \in M \subset \Gamma J_n$. Let

$$h(x_1, \dots, x_{n+1}) = g(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n \circ x_{n+1}) \\ - g(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \circ x_{n+1} - g(x_1, \dots, x_{n-1}, x_{n+1}) \circ x_n.$$

Obviously $\partial h / \partial x_i = 0$, $i < n$, because $\partial g / \partial x_i = 0$. Direct calculations show that $\partial h / \partial x_n = \partial h / \partial x_{n+1} = 0$, too. Hence, $h \in \Gamma J_{n+1}$ and $h(x_1, \dots, x_{n+1}) \equiv g(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n \circ x_{n+1}) \pmod{N_1}$.

L e m m a 2.8. Let $n_1 = 2q_1 + r_1$, $n_2 = 2q_2 + r_2$ and let $q_1 + r_1 > q_2 + r_2$. Then the polynomial from (3) $f_{q_2, r_2}(x_1, x_2) \in BJ_2(\mathbf{V})$ does not follow from $f_{q_1, r_1}(x_1, x_2)$. (Therefore the set of all edges of $\text{gr}(\mathbf{V})$ coincides with that of Fig. 1.)

Proof. Let $\lambda = (q_1 + r_1, q_1)$, $\mu = (q_2 + r_2, q_2)$. Then the first row of the diagram $[\mu]$ is shorter than the first row of $[\lambda]$. Let us assume that $f_{q_2, r_2}(x_1, x_2)$ is a consequence of $f_{q_1, r_1}(x_1, x_2)$. In the notations of (4) and (5), the module $M(\mu)$ is a submodule of Q_s for $s = n_2 - n_1$. Hence there exists an isomorphic copy of $M(\mu)$, which is a submodule of

$$\underbrace{(M_k \otimes M(1) \otimes \dots \otimes M(1))}_{s-k} \uparrow \text{Sym}(n_2)$$

for some $k=0, 1, \dots, s$. In virtue of Lemma 2.6, if $M_k = \sum b_\nu M(\nu)$ and

$$\underbrace{(M_k \otimes M(1) \otimes \dots \otimes M(1))}_{s-k} \uparrow \text{Sym}(n_2) = \sum c_\pi M(\pi),$$

then every diagram $[\pi]$ arises from a diagram $[\nu]$ by adding boxes. Therefore, if $\mu = \pi$ for a suitable π , then there exists a diagram $[\nu]$ related to an irreducible submodule of M_s , such that the first row of $[\nu]$ is shorter than the first row of $[\lambda]$. Without loss of generality we assume that the identities of the module $M(\nu) \subset PJ_{n+s}(\mathbf{V})$ are obtained from $M(\lambda) \subset \Gamma J_n(\mathbf{V})$ by substitution only and $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ satisfies $\nu_1 < q_1 + r_1$. Let $|\nu| = \nu_1 + \nu_2$ be the minimal integer with these properties. Hence, in (4) and (5) $M(\nu) \subset M_s$ besides, N_s does not contain submodules isomorphic to $M(\nu)$. In virtue of Lemma 2.7 we suppose that $M(\nu) \subset \Gamma J_{n+s}$. Using Lemma 2.7 again, we conclude that there is a chain of irreducible $\text{Sym}(n+k)$ -modules $R_k \subset \Gamma J_{n+k}$, $k=0, 1, \dots, s$, such that $R_0 = M(\lambda)$, $R_s = M(\nu)$. Moreover the elements from R_{k+1} are derived from $g_k(x_1, \dots, x_{n+k-1}, x_{n+k} \circ x_{n+k+1})$, $g_k \in R_k$, modulo the consequences of multiplication. The minimality of $\nu_1 + \nu_2$ yields that the diagram $[\rho_k] = [\rho'_k, \rho''_k]$ related to R_k satisfies $\rho'_k \geq q_1 + r_1$ for every $k=0, 1, \dots, s-1$ (and $\rho'_s < q_1 + r_1$ for $\rho_s = \nu$). Consequently, we can assume that $s=1$. We shall prove the lemma, if we establish that the polynomial $f_{q+2, r-3}(x_1, x_2)$ does not follow from $f_{qr}(x_1, x_2)$ in $FJ(\mathbf{V})$ for any pair (q, r) .

Let us decompose into a sum of irreducible submodules the $\text{Sym}(n+1)$ -module Q_1 of all multilinear consequences of $f_{qr}(x_1, x_2)$. By Lemma 2.6 (see Figs 3 and 4) $M(q+r-1, q+2)$ has a multiplicity 1 in Q_1 . Let $f(x_1, x_2) = f_{qr}(x_1, x_2)$,

$$g(x_1, x_2, u) = (r+1)f(x_1, u|x_2) + f(x_1, x_2|x_2, u).$$

We verify directly that

$$\begin{aligned} h(x_1, x_2) &= (r-1)(r-2)g(x_1, x_2, x_2 \circ x_2) \\ &\quad - 2(r-2)g(x_1, x_2|x_2, x_1 \circ x_2) + g(x_1, x_2, x_2|x_2, x_1 \circ x_1) \end{aligned}$$

is of the form (1) and $h(x_1, x_2) \neq 0$ in A_2 . Therefore the linearization $\text{lin } h$ of $h(x_1, x_2)$ generates the $\text{Sym}(n+1)$ -module K . $\text{Sym}(n+1) \text{ lin } h \subset PJ_{n+1}$ which is isomorphic to $M(q+r-1, q+2)$. Hence, this is the unique submodule $M(q+r-1, q+2) \subset Q_1$. Some calculations show that $\partial h / \partial x_1 = \partial h / \partial x_2 = 0$ and $h(x_1, x_2) \in BJ_2$. Consequently, $h(x_1, x_2) = 0$ is an identity for \mathbf{V} if and only if $h(a, b) = 0$ [3]. The variables of $f(x_1, x_2)$ participates in commutators only. Having in mind, that the products $a \circ a, a \circ b, b \circ b$ are in the centre of the algebra $M_2(K)$ and every monomial of $h(a, b)$ contains an element $a \circ a, a \circ b$ or $b \circ b$, we deduce that $h(a, b) = 0$. In this way, we have established that $h(x_1, x_2) = 0$ is an identity for \mathbf{V} and $M(q+r-1, q+2)$ is not a consequence of f_{qr} . This completes the proof of the lemma (hence the proof of Theorem 2.1 as well).

Remark 2.9. Let G be a three-dimensional simple Jordan algebra and let K^* be the algebraical closure of K . Then the K^* -algebra $G^* = K^* \otimes_K G$ is isomorphic to $H_2(K^*)$ and G^* has the same polynomial identities as G (i. e. $K^* \oplus_K T(G) = T(H_2(K^*)) \triangleleft K^* \otimes_K SJ$ and $K^* \otimes_K FJ(\text{var } G) \simeq FJ(\text{var } H_2(K^*))$) [10]. The irreducible representations of $\text{Sym}(n)$ continue to be irreducible under base field

extensions. Therefore the lattices of subvarieties of $\text{var } G$ and $\text{var } H_2(K^*)$ are the same and all combinatorial properties of the variety $\text{var } H_2(K^*)$ are valid for $\text{var } G$ as well.

3. CONSEQUENCES OF THE MAIN RESULT

Theorem 3.1. Let U be a subvariety of the variety $V = \text{var } H_2$. Then U is generated by a finite-dimensional algebra R .

Proof. We use the main idea of the proof of a similar result for the associative matrix algebra of second order [4], having in mind the description of the subvarieties of V obtained in Section 2. It suffices to assume $U \neq V$. There exist integers s and n_0 such that for $n \geq n_0$

$$(6) \quad \Gamma J_n(U) = \sum_{q < s} M(n-q, q),$$

where the summation runs over all submodules of $\Gamma J_n(V)$ with $q < s$ (Fig. 2). Clearly, for any positive integer n_0

$$\Gamma J_n(U) \supset \sum_{q < s} M(n-q, q).$$

We shall join the algebra R from two parts. Let

$$R_1 = F_2(U)/F_2^{n_0}(U),$$

where $F_2^{n_0}(U)$ is the ideal of $F_2(U)$ generated by all homogeneous elements of degree $\geq n_0$. The algebra R_1 is obtained by a formal adjunction of 1 to a finite-dimensional nilpotent Jordan algebra. Obviously, $R_1 \in U$ and $\Gamma J_n(\text{var } R_1) = \Gamma J_n(U)$ for $n < n_0$. Let $E = K[t]/(t^s)$ be the factor-algebra of the associative algebra of polynomials in one variable modulo the principal ideal generated by t^s . Denote R_2 the subalgebra of $H_2(E)$ generated by $e_{11}, e_{22}, t(e_{12} + e_{21})$. Repeating verbatim the arguments from [4] we establish that $R_2 \in U$ and

$$\Gamma J_n(\text{var } R_2) = \sum_{q < s} M(n-q, q),$$

i. e. $\Gamma J_n(\text{var } R_2) = \Gamma J_n(U)$ for $n \geq n_0$. This immediately gives that the finite-dimensional algebra $R = R_1 \oplus R_2$ belongs to U and $\Gamma J_n(\text{var } R) = \Gamma J_n(U)$ for every n . Hence, $U = \text{var } R$.

Let $W \subset U$ be subvarieties of $V = \text{var } H_2$ and let $\psi(W) \supset \psi(U)$ be the related subgraphs of $\text{gr}(V)$. Let us denote $\min_U(W)$ the set of "minimal" vertices of $\psi(W)$ which do not belong to $\psi(U)$. Therefore $\min_U(W)$ consists of the vertices of $\psi(W) \setminus \psi(U)$ that are not ends of edges from $\psi(W)$. Pchelintsev [5] introduced the notion of topological rank of a variety satisfying the Specht property. We shall interpret this notion in a graph-theoretic language for the subvarieties of V . Let $W \subset U \subset V$. We call dimension of W with respect to U the minimal integer n with the property: There exists a finite collection of identities f_1, \dots, f_s which determine W as a subvariety of U , $n = \max \{\deg f_i\}$ and f_1, \dots, f_s do not vanish for U . Equivalently, if the set of minimal vertices of $\psi(W)$ with respect to $\psi(U)$ is $\min_U(W) = \{(n_1, q_1), \dots, (n_s, q_s)\}$, then $\dim_U W = \max \{n_1, \dots, n_s\}$. For every $U \subset V$ we introduce

$$O_n(\mathbf{U}) = \{\mathbf{U}\} \cup \{\mathbf{W} \subset \mathbf{U} \mid \dim_{\mathbf{U}} \mathbf{W} \geq n\}.$$

We consider the set $\{O_n(\mathbf{U}) \mid \mathbf{U} \subset \mathbf{V}, n=1, 2, 3, \dots\}$ as a subbase of neighbourhoods. In this way we turn the set of subvarieties $\Lambda(\mathbf{V})$ of the variety \mathbf{V} into a topological space. Every subset \mathbf{P} of $\Lambda(\mathbf{V})$ is a subspace of $\Lambda(\mathbf{V})$.

Let \mathbf{P}' be the set of all non-isolated points from \mathbf{P} . We define inductively $\mathbf{P}^{(r)} = (\mathbf{P}^{(r-1)})'$. It follows easily from the Specht property that the sequence

$$\mathbf{P} \supset \mathbf{P}' \supset \mathbf{P}'' \supset \dots$$

descends strictly. The minimal r with $\mathbf{P}^{(r)} = \emptyset$ is called topological rank $r_t(\mathbf{P})$ of \mathbf{P} . The topological rank of \mathbf{U} is $r_t(\mathbf{U}) = r_t(\{\mathbf{W} \mid \mathbf{W} \subset \mathbf{U}\})$.

Theorem 3.2. The topological rank $r_t(\mathbf{V})$ of \mathbf{V} is infinite. If $\mathbf{U} \subset \mathbf{V}$ and $\mathbf{U} \neq \mathbf{V}$, then \mathbf{U} is of finite topological rank.

Proof. It follows from the graphic version of the notion of dimension that a subvariety \mathbf{W} of \mathbf{V} is an isolated point in $\Lambda(\mathbf{V})$ if and only if $(n, 1) \in \Psi(\mathbf{W})$ for an appropriate integer n . Hence,

$$\Lambda(\mathbf{V})' = \{\mathbf{W} \mid \mathbf{W} \subset \mathbf{V}, \Psi(\mathbf{W}) \text{ does not contain the points } (n, 1)\}, \Lambda(\mathbf{V})^{(q)} = \{\mathbf{W} \mid \mathbf{W} \subset \mathbf{V}, (n, q) \notin \Psi(\mathbf{W}), n \geq 2q\}.$$

Having in mind that $\Lambda(\mathbf{V})^{(q)} \neq \emptyset$ for every q , we establish that $r_t(\mathbf{V}) = \infty$.

Now, let $\mathbf{U} \neq \mathbf{V}$ and let $\Lambda(\mathbf{U})$ be the set of subvarieties of \mathbf{U} . We are able to verify directly that every isolated point of $\Lambda(\mathbf{U})$ is isolated in $\Lambda(\mathbf{V})$ as well. Hence, $\Lambda(\mathbf{U})^{(q)} \subset \Lambda(\mathbf{V})^{(q)}$. It follows from the description of the subvarieties of \mathbf{V} (see Fig. 2) that there exists an integer q_0 such that the vertices (n, q) of $\text{gr}(\mathbf{V})$ belong to $\Psi(\mathbf{U})$ if $q \geq q_0$. Therefore $\Lambda(\mathbf{U})^{(q)} = \emptyset$ for $q \geq q_0$ and $r_t(\mathbf{U}) < \infty$.

For any variety of Jordan algebras \mathbf{U} the sequence of multilinear codimensions is defined by

$$c_n(\mathbf{U}) = \dim PJ_n(\mathbf{U}), n=0, 1, 2, \dots$$

It is convenient to introduce also proper codimensions $\gamma_n(\mathbf{U}) = \dim \Gamma J_n(\mathbf{U})$. It follows from [2, 3, 11] that

$$c_n(\mathbf{U}) = \sum_{s \geq 0} \binom{n}{s} \gamma_s(\mathbf{U}).$$

The equality

$$(7) \quad c(\mathbf{U}, t) = \frac{1}{1-t} \gamma\left(\mathbf{U}, \frac{t}{1-t}\right)$$

holds for the generating functions

$$c(\mathbf{U}, t) = \sum_{n \geq 0} c_n(\mathbf{U}) t^n, \quad \gamma(\mathbf{U}, t) = \sum_{n \geq 0} \gamma_n(\mathbf{U}) t^n.$$

The formula (7) and the next theorem determine completely the generating function of the codimension sequence of \mathbf{V} .

Theorem 3.3. The generating function of the sequence of the proper codimensions of $\mathbf{V} = \text{var } H_2$ satisfies

$$\gamma(\mathbf{V}, t) = \frac{1}{2t} \left(t-1 + \frac{t+1}{\sqrt{1-4t^2}} \right) - \frac{t}{1-t}.$$

Proof. It follows from the description of $\Gamma J_n(\mathbf{V})$ that for $n > 0$

$$(8) \quad \Gamma J_{2n}(\mathbf{V}) \cong \sum_{q \geq 1} M(2n-2q, 2q),$$

$$(9) \quad \Gamma J_{2n+1}(\mathbf{V}) \cong \sum_{q \geq 1} M(2n+1-q, q).$$

Using the branching theorem we obtain for $n-q > q$

$$M(n-q, q) \downarrow \text{Sym}(n-1) \cong M(n-q-1, q) + M(n-q, q-1),$$

and if $n=2q$, then

$$M(n-q, q) \downarrow \text{Sym}(n-1) \simeq M(n-q, q-1).$$

Let us denote $\gamma(t) = \sum \gamma_n t^n$, where $\gamma_0 = 1$,

$$\gamma_{2n} = \sum_{q \geq 0} \dim M(2n-2q, 2q),$$

$$\gamma_{2n+1} = \sum_{q \geq 0} \dim M(2n+1-q, q).$$

Obviously, for $n > 0$

$$\gamma_n(V) = \gamma_n - \dim M(n) = \gamma_n - 1,$$

$$\gamma(\mathbf{Y}, t) = \gamma(t) - \sum_{n \geq 1} t^n = \gamma(t) - \frac{t}{1-t}.$$

The following recurrent formulas for γ_n are immediate consequences of (8), (9) and the branching theorem

$$(10) \quad \begin{aligned} \gamma_{2n} &= \gamma_{2n-1}, \\ \gamma_{2n+1} &= 2 \sum_{q \geq 0} \dim M(2n-q, q) - \dim M(n, n) \\ &= 4 \sum_{q \geq 0} \dim M(2n-1-q, q) - \dim M(n, n) = 4\gamma_{2n-1} - \dim M(n, n). \end{aligned}$$

By the hook formula for calculation of the degrees of the irreducible $\text{Sym}(n)$ -representations we establish

$$\dim M(n, n) = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

Therefore

$$(11) \quad \gamma_{2n+1} = 4\gamma_{2n-1} - \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

We derive from (10) and (11)

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= 1 + (1+t) \sum_{n \geq 0} \gamma_{2n+1} t^{2n+1}, \\ \sum \gamma_{2n+1} t^{2n+1} &= t + 4t^2 \sum \gamma_{2n+1} t^{2n+1} - \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} t^{2n+1}. \end{aligned}$$

Considering the integral of

$$\sum_{n \geq 0} \binom{2n}{n} u^n = \frac{1}{\sqrt{1-4u}}$$

we obtain that

$$1 + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} u^n = \frac{1 - \sqrt{1-4u}}{2u}.$$

Hence

$$\begin{aligned} \sum \gamma_{2n+1} t^{2n+1} &= \frac{t}{1-4t^2} \left(2 - \frac{1 - \sqrt{1-4t^2}}{2t^2} \right) \\ &= \frac{4t^2 - 1 + \sqrt{1-4t^2}}{2t(1-4t^2)} = \frac{1}{2t} \left(\frac{1}{\sqrt{1-4t^2}} - 1 \right). \end{aligned}$$

Consequently

$$\gamma(t) = 1 + \frac{1+t}{2t} \left(\frac{1}{\sqrt{1-4t^2}} - 1 \right) = \frac{1}{2t} \left(\frac{1+t}{\sqrt{1-4t^2}} + t - 1 \right),$$

which gives the desired result.

Theorem 3.4. (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} (c_n(\mathbf{V}))^{1/n} = 3$.

(ii) If \mathbf{U} is a proper subvariety of \mathbf{V} , then $\lim_{n \rightarrow \infty} (c_n(\mathbf{U}))^{1/n}$ equals 1 or 2.

(iii) If \mathbf{W} is a proper subvariety of the variety $\text{var } H_2(K)$ of algebras without 1, then $\limsup (c_n(\mathbf{W}))^{1/n} \leq 2$.

Proof. (i) The limit of the sequence $(c_n(\mathbf{V}))^{1/n}$ can be calculated using the generating function $c(\mathbf{V}, t)$ and Theorem 3.3. We choose another way of exposition applying estimations due to Regev [6] and ideas from [11]. Let

$$PJ_n(\mathbf{V}) = \sum k(\lambda_1, \dots, \lambda_r) M(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$$

and

$$\Gamma J_n(\mathbf{V}) = \sum l(\mu_1, \dots, \mu_r) M(\mu_1, \dots, \mu_r).$$

Then [3], [11] $k(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ is a sum of all $l(\mu_1, \dots, \mu_r)$ such that

$$\lambda_1 \geq \mu_1 \geq \lambda_2 \geq \mu_2 \dots \geq \lambda_r \geq \mu_r.$$

For $\mathbf{V} = \text{var } H_2$ this gives that $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ and

$$k(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \leq (\lambda_1 - \lambda_2 + 1)(\lambda_2 - \lambda_3 + 1) \leq (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + 1)^2.$$

Therefore the multiplicities $k(\lambda)$ are bounded uniformly by a polynomial $h(n)$. Hence

$$\dim PJ_n(\mathbf{V}) = c_n(\mathbf{V}) \leq h(n) S_3(n),$$

where $S_3(n) = \sum \dim M(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = n$.

On the other hand, if $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \neq (2k+1, 2k+1, 2k+1)$, then $k(\lambda) \neq 0$. Consequently $c_n(\mathbf{V}) \geq S_3(n) - \dim M(2k+1, 2k+1, 2k+1)$ for $n = 6k+3$ and $c_n(\mathbf{V}) \geq S_3(n)$ for all other n . Regev [6] estimated the behaviour of $S_k(n)$ asymptotically. In particular, for $k=3$ we obtain

$$S_3(n) \approx 3^{3/2} \frac{1}{3!} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)^{-3} \prod_{j=1}^3 \Gamma\left(1 + \frac{1}{2} j\right) n^{-3/2} 3^n,$$

where $\Gamma(t)$ is the gamma-function. Hence, there exists a constant c such that $c_n(\mathbf{V}) \leq cn^{-3/2} h(n) 3^n$ and $\limsup (c_n(\mathbf{V}))^{1/n} \leq 3$. Similarly, if $n \neq 6k+3$, then $c_n(\mathbf{V}) \geq c_1 n^{-3/2} 3^n$ for a constant c_1 , and $c_n(\mathbf{V}) \geq c_{n-1}(\mathbf{V}) \geq c_1 (n-1)^{-3/2} 3^{n-1}$ for $n = 6k+3$. Therefore $\liminf_{n \rightarrow \infty} (c_n(\mathbf{V}))^{1/n} \geq 3$, i.e. $\lim_{n \rightarrow \infty} (c_n(\mathbf{V}))^{1/n} = 3$.

(ii) Let $\mathbf{U} \neq \mathbf{V}$. First, assume that $\Gamma J_s(\mathbf{U}) = 0$ for s large enough. Then

$$c_n(\mathbf{U}) = \sum_{s \leq s_0} \binom{n}{s} \gamma_s(\mathbf{U})$$

and $c_n(\mathbf{U})$ is a polynomial in n . Therefore $\lim (c_n(\mathbf{U}))^{1/n} = 1$.

It follows from Fig. 1 that the only other possibility for \mathbf{U} is $\Gamma J_s(\mathbf{U}) \neq 0$ for all odd values of s , $s > 1$. Then

$$\Gamma J_s(\mathbf{U}) \subset \sum_{q \leq q_0} M(s-q, q).$$

Having in mind that

$$p(s) = \dim \sum_{q \leq q_0} M(s-q, q)$$

is a polynomial function in s , we verify as in [11] that

$$1 + \sum_{s \geq 1} \binom{n}{2s+1} \leq c_n(\mathbf{U}) \leq \sum_{s \geq 0} \binom{n}{s} p(s)$$

and $\lim_{n \rightarrow \infty} (c_n(\mathbf{U}))^{1/n} = 2$.

(iii) Let \mathbf{W} be a proper subvariety of the variety $\text{var } H_2(K)$ of Jordan algebras without 1. It was proved in [2] that \mathbf{W} satisfies a commutator identity $f(x_1, \dots, x_m) = 0$ which does not vanish for $\text{var } H_2(K)$. Hence

$$c_n(\mathbf{W}) = \dim PJ_n(\mathbf{W}) \leq \dim PJ_n(\mathbf{U}) = c_n(\mathbf{U}),$$

where \mathbf{U} is defined as a subvariety of the variety \mathbf{V} of unitary algebras by the identity $f(x_1, \dots, x_m) = 0$. Consequently, we establish by (ii) that

$$\limsup (c_n(\mathbf{W}))^{1/n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (c_n(\mathbf{U}))^{1/n} \leq 2.$$

REFERENCES

1. И л ь т я к о в, А. Шпехтовость некоторых идеалов тождеств простых неассоциативных алгебр. — Вестник Моск. у-та. Сер. 1, матем., механ., № 1, 1984, с. 83.
2. D r e n s k y, V. T-ideals containing all matrix polynomial identities. — Commun. in Algebra, 13, 1985, 2037—2072.
3. D r e n s k y, V. Polynomial identities in simple Jordan algebras. — C. R. Acad. Bulg. Sci., 35, 1982, 1327—1330.
4. D r e n s k y, V. Polynomial identities of finite-dimensional algebras. — Serdica 12, 1986, 209—216.
5. П ч е л и н ц е в, С. Разрешимые индекса 2 многообразия алгебр. — Матем. сб., 115, 1981, 179—203.

6. Regev, A. Asymptotic values for degrees associated with strips of Young diagrams. — *Adv. Math.*, **41**, 1981, 115—136.
7. Вейль, Г. Классические группы и их инварианты и представления. М., ИЛ, 1947.
8. Джеймс, Г. Теория представлений симметрических групп. М., Мир, 1982.
9. Дренски, В., П. Кошлукков. О левых T -идеалах с малым ростом последовательности коразмерностей. — *Плиска*, **8**, 1986, 94—100.
10. Vaughan-Lee, M. Varieties of Lie algebras. — *Quart. J. Math. Oxford*, **21**, 1970, 297—308.
11. Дренску, В. Codimensions of T -ideals and Hilbert series of relatively free algebras. — *J. Algebra*, **91**, 1984, 1—17.

Received 26. 3. 1985

ОБ ОТНОШЕНИИ p -НЕСМЕЖНОСТИ В ГРАФАХ

Николай Хаджииванов, Недялко Ненов

Николай Хаджииванов, Недялко Ненов. Об отношении p -несмежности в графах. Вершины a и b графа G называются p -несмежными, если $a=b$ или нет p -клик в G , содержащей одновременно a и b . На базе исследования p -несмежности получено и новое доказательство обобщенной теоремы Турана о максимуме числа p -клик для n -вершинных графов без $(s+1)$ -клик при $2 \leq p \leq \min(n, s)$.

Nikolai Hadjiivanov, Nedyaiko Nenov. On the Relation of p -non-adjacency on Graphs. If G is a graph, and a, b are vertexes of G , a and b are called p -non-adjacent when $a=b$ or $a \neq b$ and there is not a p -clique K in G with aeK, bcK . We establish various properties of p -non-adjacency. As an application, the generalized Turan's theorem is proved in a new way.

1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И КОНСТРУКЦИИ

Упорядоченная пара $G=(V, E)$, где V — непустое множество, а E — некоторая совокупность 2-элементных подмножеств множества V , называется графом. Элементы множества V называются вершинами, а элементы множества E — ребрами графа. Граф называется конечным, если множество V всех его вершин конечно.

Множество $K, K \subset V$, называется кликой в $G=(V, E)$, если $\{x, y\} \in E$ для любой пары $\{x, y\}$ отличных друг от друга вершин из K . Клику K называем s -кликкой, если число ее элементов равно s .

Через $E_s(G)$ обозначим множество всех s -клик графа G , а через $E_s(v, G)$, где $v \in V$, обозначим множество всех s -клик, содержащих вершину v . В случае, когда граф конечен, тогда число его s -клик обозначим через $e_s(G)$, так что $e_s(G) = |E_s(G)|$, а число $e_s(v, G) = |E_s(v, G)|$ назовем s -степенью вершины v .

Будем говорить, что вершины a и b графа $G=(V, E)$ p -смежны, и писать $aE_p b$, если $a \neq b$ и в G имеется p -клика, содержащая одновременно a и b . В противном случае вершины a и b называем p -несмежными и пишем $a \bar{E}_p b$. Итак, если $a \in V, b \in V$, то $aE_p b$ тогда и только тогда, когда $a \neq b$ или $a \neq b$, и нет ни одной p -кликки, содержащей одновременно a и b .

Отношение p -несмежности в множестве V вершин графа $G=(V, E)$ — рефлексивное и симметричное.

Когда aE_2b (соотв., $a\bar{E}_2b$), говорим просто, что a и b смежны (соотв., несмежны) в G . Очевидно, если $a\bar{E}_pb$, то aE_sb при $s \geq p$, однако обратное, вообще говоря, неверно.

Граф G назовем полным хроматическим графом, если отношение несмежности в множестве его вершин V является отношением эквивалентности. Классы смежности этого отношения эквивалентности называются хроматическими классами полного хроматического графа. Когда число их конечно и равно s , тогда граф называется еще полным s -хроматическим графом.

Очевидно кликами полного хроматического графа являются только те множества вершин, которые пересекают любой хроматический класс самое большее по одному элементу. Поэтому, если G — полный s -хроматический граф, тогда в нем имеются s -клики, однако нет ни одной $(s+1)$ -клик. Очевидно, в полном s -хроматическом графе отношения \bar{E}_2 и E_p совпадают при всяком p , $2 \leq p \leq s$.

Полный n -хроматический граф с n вершинами называют полным графом и обозначают символом K_n . В K_n любые две вершины смежны. Полный хроматический граф с одним хроматическим классом называется дискретным графом и обозначается символом K_n , где n — число его вершин. В K_n любые две вершины несмежны.

Пусть $G=(V, E)$ — граф и a и b — его p -несмежные вершины. Вычитая из множества E все ребра с вершиной a , присоединим в то же время все 2-элементные множества $\{a, v\}$, где вершина v — p -смежна вершине b . Полученное множество обозначим символом E_b^a , а граф (V, E_b^a) — символом G_b^a . Число p не участвует в обозначении этого графа, потому что в дальнейшем будет все время фиксировано.

Пусть $K \subset V$ и $a \notin K$. Ясно, что K — клика в G точно тогда, когда является кликой в G_b^a .

Пусть теперь K — p -клика в G_b^a и $a \notin K$. Так как a и b — несмежны в G_b^a , то $b \notin K$. Множество $K \setminus a$ является кликой в G_b^a и в G . Это множество составлено только из вершин, p -смежных вершине b и G . Множество $(K \setminus a) \cup b$ — p -клика и в G_b^a , и в G .

Если K — p -клика в G_b^a или в G и $b \in K$, тогда $a \notin K$. Множество $K \setminus b$ состоит только из вершин, которые p -смежны вершине b в G и, следовательно, $(K \setminus b) \cup a$ является p -кликой в G_b^a .

Таким образом доказано, что если G — конечный граф,

$$(1) \quad e_p(a, G_b^a) = e_p(b, G_b^a) = e_p(b, G),$$

где a и b — p -несмежные вершины в G .

Ясно также, что

(2) если граф G_b^a содержит s -клику для некоторого s , то и граф G тоже содержит s -клику.

Из определения графа G_b^a очевидным образом следует, что когда G — конечный граф, то

$$(3) \quad e_p(G_b^a) = e_p(G) - e_p(a, G) + e_p(b, G).$$

Для конечного графа G верно и следующее утверждение:

(4) Если вершина c — p -смежна вершине a и p -несмежна вершине b в G , то $e_p(c, G_b^a) < e_p(c, G)$.

Действительно, так как c и b p -несмежны в G , то a и c несмежны в G_b^a . Тогда любая клика в G_b^a , содержащая c , не содержит a и является кликой в G . С другой стороны, так как a и c p -смежны в G , то существует p -клика в G , которая содержит одновременно a и c и, значит, не является кликой в G_b^a .

Полный s -хроматический граф с n вершинами при $s \leq n$ назовем графом Турана и обозначим через $T_s(n)$, если числа вершин любых двух его хроматических классов отличаются не более чем на единицу. Числа n и s однозначно определяют граф $T_s(n)$.

Действительно, обозначим через k число вершин наименьшего хроматического класса, а через v — число наибольших хроматических классов. Тогда, очевидно, $n = v(k+1) + (s-v)k$ и, следовательно,

$$(5) \quad n = ks + v, \text{ где } 0 \leq v \leq s-1.$$

Легко сообразить, что если n_i — число вершин i -ого хроматического класса полного s -хроматического графа G с n вершинами, то при $2 \leq p \leq s \leq n$ имеем

$$(6) \quad e_p(G) = \sum \{n_{i_1} n_{i_2} \dots n_{i_p} : 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq s\}.$$

В частности для $T_s(n)$ получаем

$$(7) \quad e_p(T_s(n)) = \sum \left\{ \left[\frac{n+i_1-1}{s} \right] \left[\frac{n+i_2-1}{s} \right] \dots \left[\frac{n+i_p-1}{s} \right] : 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq s \right\}.$$

При $s > n$ положим $T_s(n) = K_n$. Ясно, что при $p > \min(n, s)$ $e_p(T_s(n)) = 0$: Формула (7) верна при $p \leq \min(n, s)$, однако при $s \geq n$ она выглядит проще.

$$e_p(T_s(n)) = \binom{n}{p}.$$

2. ОТНОШЕНИЕ P -НЕСМЕЖНОСТИ И ПОЛНЫЕ ХРОМАТИЧЕСКИЕ ГРАФЫ

Предложение 1. Если граф $G = (V, E)$ содержит хотя бы одну p -клику, отношение E_p является отношением эквивалентности в V тогда и только тогда, когда G — полный хроматический граф. В этом случае $\overline{E}_p = \overline{E}_2$.

Доказательство. Достаточно доказать, что если \overline{E}_p — транзитивно, то $\overline{E}_p = \overline{E}_2$. Итак, докажем, что $aE_p b$ влечет $a\overline{E}_2 b$.

Пусть $aE_p b$. Через H обозначим тот класс эквивалентности отношения \overline{E}_p , который содержит a . Очевидно $b \in H$. Пусть K — p -клика в G . В H имеется не более одной вершины из K , так как любые две вершины из K p -смежны в G . Тогда вне H находятся хотя бы $p-1$ вершин c_1, c_2, \dots, c_{p-1} клики K . Любая из них p -смежна вершинам из H и, в частности, вершинам a и b . Если допустить, что a и b смежны, тогда $\{a, b, c_1, c_2, \dots, c_{p-1}\}$ будет $(p+1)$ -кликой и окажется, что a и b p -смежны, что является противоречием.

Предложение 2. Единственно граф $T_s(n)$ при $2 \leq p \leq \min(n, s)$ имеет максимальное число p -клик в множестве всех n -вершинных полных хроматических графов без $(s+1)$ -клик.

Примечание 1. При $p > \min(n, s)$ для любого n -вершинного графа G без $(s+1)$ -клик выполнено равенство $e_p(G) = 0$, так что утверждение в этом случае неверно.

Примечание 2. Высказанное утверждение неново. По существу, оно известно еще со времен Ньютона, однако нам не удалось установить, где это предложение впервые было сформулировано и доказано.

Доказательство предложения 2. Если $s \geq n$, тогда любой n -вершинный граф не имеет $(s+1)$ -клик и очевидно максимальное число p -клик имеет только граф K_n . Однако при $n \geq s$ по определению $T_s(n) = K_n$, так что в этом случае утверждение доказано.

Будем считать, что $2 \leq p \leq s \leq n-1$.

Докажем сначала одно вспомогательное арифметическое утверждение, из которого предложение 2 следует тривиальным образом.

Положим

$$e_p(x_1, x_2, \dots, x_s) = \sum \{x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_p} : 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq s\}, \quad l_0 = 1.$$

Легко проверить, что

$$e_p(x_1-1, x_2, \dots, x_{s-1}, x_s+1) = e_p(x_1, x_2, \dots, x_{s-1}, x_s) + (x_1 - x_s - 1) e_{p-2}(x_2, \dots, x_{s-1}).$$

Из этого равенства следует, что если $x_i \geq 0$ и $x_1 - x_s > 1$, то

$$(8) \quad e_p(x_1-1, x_2, \dots, x_{s-1}, x_s+1) > e_p(x_1, x_2, \dots, x_{s-1}, x_s).$$

Вернемся к доказательству предложения 2. Так как в G нет $(s+1)$ -клик, то число r его хроматических классов удовлетворяет неравенству $r \leq s$. Пусть H_1, H_2, \dots, H_r — хроматические классы графа G . Если $r < s$, тогда положим $H_i = \emptyset$ при $r+1 \leq i \leq s$. Пусть $n_i = |H_i|$, $i = 1, 2, \dots, s$. Будем считать, что $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_s$. Так как $s \leq n-1$, то $n_1 \geq 2$.

Если допустим, что $n_1 - n_s \geq 2$ и положим $H_1' = H_1 \setminus a$, где a — вершина из H_1 , $H_2' = H_2$, $H_3' = H_3, \dots, H_{s-1}' = H_{s-1}$, $H_s' = H_s \cup a$, а потом отбросим пустые множества H_i' , то можно рассмотреть полный хроматический граф G' , имеющий в качестве хроматических классов непустые H_i' . Граф G' тоже имеет n вершин и тоже не содержит $(s+1)$ -клик. Из (6) и (8) следует, что $e_p(G') > e_p(G)$.

Таким образом доказано, что только граф $T_s(n)$ имеет максимальное число p -клик среди n -вершинных полных хроматических графов без $(s+1)$ -клик.

3. ОТНОШЕНИЕ P -НЕСМЕЖНОСТИ В n -ВЕРШИННЫХ ГРАФАХ БЕЗ $(s+1)$ -КЛИК И С МАКСИМАЛЬНЫМ ЧИСЛОМ P -КЛИК

Предложение 3. Пусть $2 \leq p \leq \min(n, s)$ и G — n -вершинный граф без $(s+1)$ -клик, имеющий максимальное число p -клик среди всех таких графов. Тогда G — полный хроматический граф.

Доказательство. Верность утверждения следует из предложения 1, если доказать, что граф G содержит p -клики и что отношение \bar{E}_p транзитивно.

Дополним полный граф K_p до n -вершинного графа присоединением $n-p$ изолированных вершин. Полученный граф G' не имеет $(s+1)$ -клик и так как число его вершин n , а G содержит максимальное число p -клик среди всех таких графов, то $e_p(G) \geq e_p(G') > 0$.

Докажем теперь, что отношение \bar{E}_p транзитивно.

Заметим сначала, что если x и y p -несмежные вершины графа G , то $e_p(x, G) = e_p(y, G)$. Действительно, если допустить, что $e_p(y, G) > e_p(x, G)$, тогда, согласно (3), $e_p(G_y^x) > e_p(G)$. Из (2) следует, что n -вершинный граф G_y^x не содержит $(s+1)$ -клик. Получено противоречие с максимальнойностью графа G по отношению числа p -клик. Итак, $e_p(x, G) = e_p(y, G)$.

Дополним доказанное вспомогательное утверждение следующим:

Если x и y p -несмежные вершины графа G , то граф G_y^x тоже является n -вершинным графом без $(s+1)$ -клик, который содержит максимальное число p -клик среди всех таких графов.

Уже нетрудно доказать, что отношение \bar{E}_p транзитивно в V . Допустим, что $a\bar{E}_p b$ и $b\bar{E}_p c$, однако $aE_p c$. Согласно только что доказанному, $e_p(a, G) = e_p(b, G) = e_p(c, G)$. Из (4) следует, что $e_p(c, G_b^a) < e_p(c, G)$. Из (1) имеем $e_p(b, G) = e_p(b, G_b^a)$. Таким образом оказывается, что $e_p(c, G_b^a) < e_p(b, G_b^a)$.

Вершины b и c p -несмежны и в G_b^a , и так как G_b^a — n -вершинный граф без $(s+1)$ -клик и с максимальным числом p -клик, как это было доказано выше, то $e_p(c, G_b^a) = e_p(b, G_b^a)$.

Полученное противоречие завершает доказательство предложения 3.

Из предложения 2 и предложения 3 тривиальным образом следует хорошо известная обобщенная теорема Турана:

Пусть G — n -вершинный граф без $(s+1)$ -клик и $2 \leq p \leq \min(n, s)$. Тогда $e_p(G) \leq e_p(T_s(n))$. Равенство в этом неравенстве имеет место единственно для графа $G = T_s(n)$.

Поступила 1. 4. 1985 г.

ЗА НАЙ-ДОБРОТО L_p -ПРИБЛИЖЕНИЕ ВЪРХУ РЕАЛНАТА ОС С ЦЕЛИ ФУНКЦИИ ОТ ЕКСПОНЕНЦИАЛЕН ТИП

Ваня Хаджийски

Ваня Хаджийски. О наилучшем L_p -приближении на вещественной оси целыми функциями экспоненциального типа. Исследуется вопрос о связи между свойством аналитичности функции и скоростью стремления к нулю ее наилучшего L_p -приближения на вещественной оси целыми функциями экспоненциального типа. Получены прямая теорема, обратная теорема и теорема единственности.

Vania Hadjiisky. On the Best L_p -approximation on the Real Line by Entire Functions of Exponential Type. The connection between the regularity of a function and the speed of the approach to zero of its best L_p -approximation on the real line by entire functions of exponential type is studied. Direct, converse and uniqueness theorems are obtained.

Теорията на приближенията чрез цели функции е сравнително млада дисциплина. Първият общ резултат принадлежи на Карлеман, който в [1] обобщава теоремата на Вайерщрас за равномерно приближение с полиноми. Там той доказва, че всяка функция, непрекъсната върху реалната ос \mathbb{R} , се приближава равномерно върху \mathbb{R} с цели функции, при това с произволно бързо допиране в безкрайната точка. По-точно вярна е следната теорема:

Теорема (Карлеман [1]). За произволни непрекъснати върху \mathbb{R} функции $f(x)$, $\varepsilon(x) > 0$, съществува цяла функция $g(z)$, такава, че $|f(x) - g(x)| < \varepsilon(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Ако $\varepsilon(x) \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$, то такава приближение се нарича тангенциално (с допиране в безкрайната точка).

Тук не е необходимо функцията f да е ограничена. Но, от друга страна, нищо не може да се каже за приближаващата функция. Тя може да има произволен ръст в безкрайната точка, при това различен за различните f . Затова, ако искаме да приближаваме f равномерно върху \mathbb{R} с цели функции с достатъчно голям, но определен ръст, един и същ за всички функции f от даден клас, ще трябва да наложим допълнителни ограничения на f . Първата крачка в тази насока е направена от С. Н. Бернщайн. През 1923 г. той въвежда класа B на целите функции от експоненциален тип, ограничени върху \mathbb{R} , и неговите подкласове B_σ , където типът не надминава σ . В [2] той доказва следната теорема:

Теорема 1 (С. Н. Бернщайн [2]). За да може ограничената върху \mathbb{R} функция f да се приближава равномерно върху \mathbb{R} с цели функции от класа B , е необходимо и достатъчно f да е равномерно непрекъснатата върху \mathbb{R} .

Привличането на целите функции от класа B като апарат за приближение е съвсем естествено най-малко поради следните причини:

1) От теоремата на Фрагмен—Линделъф следва, че редът на приближаващата функция не бива да е по-малък от единица.

2) За целите функции от класа B_σ е изпълнено следното, станало вече класическо, неравенство на Бернщайн [3, с. 269]:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |g^{(k)}(x)| \leq \text{const } \sigma^k \sup_{x \in \mathbb{R}} |g(x)|.$$

Това неравенство доближава целите функции от класа B_σ като апарат за приближение до полиномите от фиксирана степен.

3) Класът B е най-естественото обобщение на тригонометричните полиноми.

С. Н. Бернщайн подробно е изследвал и въпроса за връзката между структурните свойства на ограничената върху \mathbb{R} функция f и скоростта, с която клони към нула нейното най-добро приближение $A_\sigma(f)$ с цели функции от класа B_σ . Следният резултат от [4] е твърде впечатляващ:

Теорема 2 (С. Н. Бернщайн [4]). За ограничената върху \mathbb{R} функция f и числото $h > 0$ условието

$$(1) \quad \limsup_{\sigma \rightarrow \infty} [A_\sigma(f)]^{1/\sigma} \leq e^{-h}$$

е необходимо и достатъчно за това f да има еднозначно аналитично продължение в ивицата $|\text{Im } z| < h$, ограничено върху всяка подивица $|\text{Im } z| \leq h'$, $h' < h$.

Оттук в частност следва, че ако е изпълнено неравенството (1), то f не може да се анулира върху никакъв интервал освен ако не е тъждествено нула. По-внимателният анализ показва, че е вярна следната теорема, публикувана за първи път от Джрбашян в [5].

Теорема 3 (Джрбашян [5, с. 3]). Ако ограничената върху \mathbb{R} функция f се анулира върху някакъв интервал $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$

$$\liminf_{\sigma \rightarrow \infty} [A_\sigma(f)]^{1/\sigma} < 1,$$

то f е тъждествено нула.

В настоящата работа са обобщени теорема 2 и теорема 3 за L_p -приближения върху \mathbb{R} . Основните резултати са теорема 2.1, теорема 2.2 и теорема 2.3.

Първият общ резултат за L_p -приближения с цели функции принадлежи на Кобер. В [6, с. 77] той доказва, че всяка функция $f \in L_p(\mathbb{R})$, $p \geq 0$, се приближава в L_p -метриката върху \mathbb{R} с цели функции от експоненциален тип. По-нататъшните изследвания по тази тематика са свързани със съветската математическа школа. Основните резултати са събрани в монографията на Ибрахимов [7]. Там е приведена и богата библиография.

Работата се състои от две части. В първата се привеждат необходимите означения, определения и се формулират някои резултати от монографията на Ибрахимов, които се използват. Основните резултати в работата са съдържанието на втора част.

I. Нека \mathbb{R} е реалната ос, а \mathbb{C} — крайната комплексна равнина. Нека g е цяла функция от ред ρ_g и тип σ_g . Класа на целите функции от експоненциален тип ще означим с

$$E = \{g: \rho_g = 1, 0 < \sigma_g < \infty\}.$$

Ще отделим специално следните негови подкласове:

$$E_\sigma = \{g \in E: \sigma_g \leq \sigma\}$$

$$B_\sigma = \{g \in E_\sigma: \sup_{x \in \mathbb{R}} |g(x)| < \infty\}$$

$$E_\sigma^p = \{g \in E_\sigma: g|_{\mathbb{R}} \in L_p(\mathbb{R})\},$$

където

$$L_p(\mathbb{R}) = \left\{ f: \|f\|_p = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty \right\}.$$

Най-доброто L_p -приближение на функцията f чрез функции от класа E_σ^p означаваме с $A_\sigma^p(f)$. По-точно полагаме

$$A_\sigma^p(f) = \inf \{ \|f - g\|_p, g \in E_\sigma^p \}.$$

Теорема 1.1 ([7, с. 311, сл. 1 и с. 331, т. 6.2.12]). Ако $f \in L_p(\mathbb{R})$ и $f^{(n)}(x) \in L_p(\mathbb{R})$, $p \geq 1$, то

$$A_\sigma^p(f) \leq \frac{\pi}{2\sigma^n} \|f^{(n)}\|_p.$$

Теорема 1.2 ([7, с. 85, т. 2.1.7]). Ако $g \in E_\sigma^p$, $p \geq 1$, то $g \in B_\sigma$ и

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |g(x)| \leq (2\pi)^{(p-1)/p} \sigma^{1/p} \|g\|_p.$$

II. Теорема 2.1. Нека f е аналитична в ивицата $|\operatorname{Im} z| < h$ и

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x+iy)|^p dx \leq M_p(f) < \infty, \quad p \geq 1,$$

за всяко y , $|y| < h$. Тогава

$$\limsup_{\sigma \rightarrow \infty} [A_\sigma^p(f)]^{1/\sigma} \leq e^{-h}.$$

Доказателство. Най-напред ще докажем, че ако една функция удовлетворява условието на теоремата, то за всяко естествено n имаме $f^{(n)}(x) \in L_p(\mathbb{R})$. Нека $x \in \mathbb{R}$ и $h_1 > 0$ е произволно число, по-малко от h . Нека $\Gamma_{h_1} = \{z \in \mathbb{C}: |z-x| = h_1\}$. Формулата на Коши ни дава

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma_{h_1}} \frac{f(z)}{(z-x)^{n+1}} dz = \frac{n!}{2\pi h_1^n} \int_0^{2\pi} \frac{f(x+h_1 e^{it})}{e^{int}} dt.$$

Следователно

$$\|f^{(n)}\|_p = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f^{(n)}(x)|^p dx \right)^{1/p} = \frac{n!}{2\pi h_1^n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_0^{2\pi} \frac{f(x+h_1 e^{it})}{e^{int}} dt \right|^p dx \right)^{1/p},$$

Прилагаме обобщеното неравенство на Минковски ([7, с. 20]) към повторния интеграл в горния израз и получаваме

$$(2) \quad \|f^{(n)}\|_p \leq \frac{n!}{2\pi h_1^n} \int_0^{2\pi} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x+h_1 e^{it})|^p dx \right)^{1/p} dt.$$

Понеже при фиксирано t точката $z=x+h_1 e^{it}$ описва правата $\eta=h_1 \sin t$, имаме

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x+h_1 e^{it})|^p dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f(\xi+i\eta)|^p d\xi.$$

Тогава от условието на теоремата и от (2) получаваме

$$(3) \quad \|f^{(n)}\|_p \leq M n! / h_1^n, \quad n=1, 2, \dots,$$

т. е. $f^{(n)}(x) \in L_p(\mathbb{R})$.

Сега можем да приложим теорема 1.1 и от (3) ще получим следната оценка за най-доброто приближение на f с цели функции от класа E_σ^p :

$$(4) \quad A_\sigma^p(f) \leq M \pi n! / 2 (\sigma h_1)^n, \quad n=1, 2, \dots$$

Да изберем $n=[\sigma h_1]([x] - \text{цялата част на } x)$. Според формулата на Стирлинг $n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} (1+\delta_n)$, където $\delta_n \downarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Като заместим в (4), получаваме

$$\begin{aligned} A_\sigma^p(f) &\leq M \pi (\sigma h_1)^n e^{-\sigma h_1 + 1} \sqrt{2\pi \sigma h_1} (1+\delta_n) / 2 (\sigma h_1)^n \\ &\leq M_1 e^{-\sigma h_1} \sqrt{2\pi \sigma h_1}, \end{aligned}$$

където M_1 не зависи от σ и h_1 . Оттук, тъй като $0 < h_1 < h$ беше произволно, веднага следва, че

$$\limsup_{\sigma \rightarrow \infty} [A_\sigma^p(f)]^{1/\sigma} \leq e^{-h}.$$

Теорема 2.2. Нека $f \in L_p(\mathbb{R})$ и

$$\limsup_{\sigma \rightarrow \infty} [A_\sigma^p(f)]^{1/\sigma} \leq e^{-h}.$$

Тогава f съвпада почти навсякъде (относно линейната лебегова мярка) върху \mathbb{R} с функция, аналитична в ивицата $|\operatorname{Im} z| < h$ и ограничена върху всяка подивица $|\operatorname{Im} z| \leq h' < h$.

Доказателство. Нека $K \subset \{z: |\operatorname{Im} z| < h\}$ е произволен компакт. Съществува $h' < h$, такова, че $K \subset \{z: |\operatorname{Im} z| < h'\}$. От неравенствата

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} [A_n^p(f)]^{1/n} \leq \limsup_{\sigma \rightarrow \infty} [A_\sigma^p(f)]^{1/\sigma} \leq e^{-h} < e^{-h'}$$

следва, че съществува такова n_0 , че за всяко $n \geq n_0$ може да се намери цяла функция $F_n \in E_n^p$, за която $\|F_n - f\|_p < e^{-nh'}$. Тогава

$$(5) \quad \|F_{n+1} - F_n\|_p \leq \|F_{n+1} - f\|_p + \|f - F_n\|_p < 2e^{-nh'}, \quad n \geq n_0.$$

Функцията $F_{n+1} - F_n$ е цяла функция от експоненциален тип, ненадминаващ $n+1$, и според теорема 1.2

$$(6) \quad \sup_{x \in \mathbb{R}} |F_{n+1}(x) - F_n(x)| \leq (2\pi)^{(p-1)/p} (n+1)^{1/p} \|F_{n+1} - F_n\|_p.$$

От друга страна, непосредствено от неравенството на Бернщайн за функциите от класа B_σ следва, че

$$(7) \quad |g(x+iy)| \leq e^{\sigma \cdot y} \sup_{x \in \mathbb{R}} |g(x)|$$

за всяко $z = x + iy \in \mathbb{C}$ и всяка функция $g \in B_\sigma$. Така от (5), (6) и (7) получаваме

$$(8) \quad |F_{n+1}(z) - F_n(z)| \leq e^{(n+1)|y|} (2\pi)^{(p-1)/p} (n+1)^{1/p} 2e^{-nh'} \\ \leq M(n+1)^{1/p} e^{-n(h' - |y|)}, \quad n \geq n_0.$$

Оттук следва, че редицата $\{F_n(z), n=1, 2, \dots\}$ е равномерно сходяща върху компактните подмножества на ивицата $|\operatorname{Im} z| < h$ и дефинира там еднозначна аналитична функция $\varphi(z)$. Тогава върху всеки краен интервал $[-\lambda, \lambda] \subset \mathbb{R}$

$$\left(\int_{-\lambda}^{\lambda} |F_n(x) - \varphi(x)|^p dx \right)^{1/p} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Но $\|F_n - f\|_p \rightarrow 0$ и значи f съвпада с φ в почти всички точки от интервала $[-\lambda, \lambda]$. Тъй като λ беше произволно, то f съвпада с φ почти навсякъде върху \mathbb{R} .

Нека $|\operatorname{Im} z| \leq h_1$ е произволна подивица на ивицата $|\operatorname{Im} z| < h$ и нека h' удовлетворява условието $h_1 < h' < h$. Тогава съществува такова n_1 , че за всяко $n \geq n_1$ са изпълнени (5), (6), а следователно и (8). От (8) следва, че за $z: |\operatorname{Im} z| \leq h_1$ функцията $\varphi(z)$ се представя във вида

$$(9) \quad \varphi(z) = F_{n_1}(z) + F(z),$$

където $F_{n_1} \in E_{n_1}^p$, а $F(z) = \sum_{n=n_1+1}^{\infty} (F_{n+1}(z) - F_n(z))$ е функция, ограничена върху ивицата $\{z: |\operatorname{Im} z| \leq h_1\}$, защото при $|\operatorname{Im} z| \leq h_1$

$$|F(z)| \leq M \sum_{n=n_1+1}^{\infty} (n+1)^{1/p} e^{-n(h'-h_1)} < \infty.$$

И тъй като от (7) следва, че всяка функция $g \in B_\sigma$ (в частност $g \in E_\sigma^p \subset B_\sigma$) е ограничена върху ивицата $|\operatorname{Im} z| \leq h_1$, то според (9) и $\varphi(z)$ е ограничена върху $\{z: |\operatorname{Im} z| \leq h_1\}$. С това е доказана и втората част от твърдението.

Т е о р е м а 2.3. Нека $f \in L_p(\mathbb{R})$ и f се анулира в почти всички точки на интервала $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$, и

$$\liminf_{\sigma \rightarrow \infty} [A_\sigma^p(f)]^{1/\sigma} < 1.$$

Тогава f се анулира почти навсякъде в \mathbb{R} .

Доказателство. Преди всичко ще отбележим, че без ограничение на общността можем да предполагаме, че $[\alpha, \beta] = [-1, 1]$, защото в противен случай

вместо функцията $f(x)$ ще разглеждаме функцията $\varphi(x) = f(mx+n)$ с подхо-
 дящо избрани m и n . Наистина $\varphi \in L_p(\mathbb{R})$, φ се анулира почти навсякъде в
 $[-1, 1]$ и ако $g \in E_\sigma^p$ най-добре апроксимира f , то

$$\begin{aligned} A_\sigma^p(f) &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - g(x)|^p dx \right)^{1/p} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(mt+n) - g(mt+n)|^p d(mt+n) \right)^{1/p} \\ &= m^{1/p} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t) - g_1(t)|^p dt \right)^{1/p} \geq m^{1/p} A_{m\sigma}^p(\varphi). \end{aligned}$$

Тогава

$$[m^{1/p} A_{m\sigma}^p(\varphi)]^{1/m\sigma} \leq [A_\sigma^p(f)]^{1/m\sigma}$$

и

$$\liminf_{\sigma \rightarrow \infty} [m^{1/p} A_{m\sigma}^p(\varphi)]^{1/m\sigma} \leq \liminf_{\sigma \rightarrow \infty} [A_\sigma^p(f)]^{1/m\sigma} < 1.$$

Но

$$\liminf_{\sigma \rightarrow \infty} [m^{1/p} A_{m\sigma}^p(\varphi)]^{1/m\sigma} = \liminf_{\sigma \rightarrow \infty} [A_{m\sigma}^p(\varphi)]^{1/m\sigma},$$

Следователно

$$\liminf_{\sigma \rightarrow \infty} [A_{m\sigma}^p(\varphi)]^{1/m\sigma} < 1,$$

така че функцията φ удовлетворява условията на теоремата.

Използваме следния резултат на Берщайн от [8], установяващ връзка
 между $A_\sigma^p(f)$ и $E_n^p(f; n/\sigma)$ — най-доброто L_p — приближение на f върху интер-
 вала $[-n/\sigma, n/\sigma]$ с полином, чиято степен не надминава n :

$$(10) \quad \limsup_{m \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} E_n^p(f; n/(\sigma + \varepsilon_m)) = \lim_{m \rightarrow \infty} A_{\sigma + \varepsilon_m}^p(f) = A_\sigma^p(f),$$

където $\varepsilon_m \downarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$.

От условието на теоремата следва съществуването на безкрайна редица
 от числа $\{\sigma_k, k=1, 2, \dots\} \rightarrow \infty$, такава, че

$$(11) \quad A_{\sigma_k}^p < \rho^{\sigma_k}, \quad 0 < \rho < 1, \quad k=1, 2, \dots$$

От друга страна, имайки предвид (10) и (11), можем да намерим $n_0 = n_0(k)$
 и $m_0 = m_0(k)$, такива, че за всяко $n \geq n_0$ и $m \geq m_0$ да е изпълнено не-
 равенството $E_n^p(f; n/(\sigma_k + \varepsilon_m)) < \rho^{\sigma_k}$. Нека $\lambda > 1$ и да изберем $n > n_0$ толкова голямо, че
 интервалът $[-\lambda, \lambda]$ да се съдържа в интервала $[-n/(\sigma_k + \varepsilon_m), n/(\sigma_k + \varepsilon_m)]$. За
 целта е достатъчно да вземем $n = n_k = [\lambda(\sigma_k + 1)]$ ($[x]$ — цялата част на x). Нека
 $P_{n_k}(f; x)$ е полиномът на най-добро приближение на f в L_p -метриката в интер-
 вала $[-n/(\sigma_k + \varepsilon_m), n/(\sigma_k + \varepsilon_m)]$. Понеже

$$\int_{-1}^1 |f(x)|^p dx = 0,$$

то

$$(12) \quad \left(\int_{-1}^1 |P_{n_k}(f; x)|^p dx \right)^{1/p} \leq \left(\int_{-1}^1 |P_{n_k}(f; x) - f(x)|^p dx \right)^{1/p} < \rho^{\sigma k}.$$

Нашата цел е да покажем, че съществува число $\gamma > 1$, независимо от k и такава, че

$$(13) \quad \left(\int_{-\gamma}^{\gamma} |P_{n_k}(f; x)|^p dx \right)^{1/p} < C(n_k + 1)^2 \rho_1^{n_k},$$

където $\rho < \rho_1 < 1$, а C е константа, независеща от k . От (13) веднага следва, че

$$\begin{aligned} \left(\int_{-\gamma}^{\gamma} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} &\leq \left(\int_{-\gamma}^{\gamma} |f(x) - P_{n_k}(f; x)|^p dx \right)^{1/p} \\ &+ \left(\int_{-\gamma}^{\gamma} |P_{n_k}(f; x)|^p dx \right)^{1/p} < \rho^{\sigma k} + C(n_k + 1)^2 \rho_1^{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0, \end{aligned}$$

и следователно $f(x)$ се анулира за почти всяко $x \in [-\gamma, \gamma]$. Прилагайки, ако е необходимо, тази процедура краен брой пъти, ще получим, че $f(x)$ се анулира за почти всяко $x \in [-\lambda, \lambda]$, и понеже $\lambda > 1$ е произволно, то $f(x)$ ще се анулира почти навсякъде в \mathbb{R} . Следва, че теоремата ще бъде доказана, ако успеем да намерим число $\gamma > 1$, за което е изпълнено (13).

Да образуваме функцията

$$Q_{n_k}(x) = \int_{-1}^x P_{n_k}(f; t) dt.$$

Очевидно $Q_{n_k}(x)$ е полином от степен, ненадминаваща $n_k + 1$. От известното неравенство на А. А. Марков за производната на полинома имаме, че

$$|Q'_{n_k}(x)| \leq (n_k + 1)^2 \|Q_{n_k}\|_{[-1, 1]}, \quad x \in [-1, 1].$$

Но

$$\|Q_{n_k}\|_{[-1, 1]} \leq \int_{-1}^1 |P_{n_k}(f; x)| dx.$$

Следователно

$$(14) \quad |P_{n_k}(f; x)| = |Q'_{n_k}(x)| \leq (n_k + 1)^2 \int_{-1}^1 |P_{n_k}(f; x)| dx.$$

От (12), като приложим неравенството на Хьолдер, получаваме

$$(15) \quad \int_{-1}^1 |P_{n_k}(f; x)| dx \leq 2^{(p-1)/p} \left(\int_{-1}^1 |P_{n_k}(f; x)|^p dx \right)^{1/p} < M_1 \rho^{\sigma_k}.$$

Окончательно от (14) и (15) следва верността на неравенството

$$(16) \quad \|P_{n_k}(f; x)\|_{[-1, 1]} \leq M_1 (n_k + 1)^2 \rho^{\sigma_k}.$$

Нека сега $g(z, \infty)$ е функцията на Грийн за $\bar{C} \setminus [-1, 1]$ с полюс в безкрайната точка. Съгласно с известното неравенство на Бернщайн—Уолш [9, с. 101] от (16) получаваме

$$(17) \quad \|P_{n_k}(f; x)\| \leq \|P_{n_k}(f; x)\|_{[-1, 1]} e^{n_k g(x, \infty)} \\ \leq M_1 (n_k + 1)^2 \rho^{\sigma_k} e^{n_k g(x, \infty)}, \quad x \in \bar{C} \setminus [-1, 1].$$

Знаем, че $g(z, \infty) = \ln|w(z)|$, където $w(z)$ е функцията, изобразяваща еднолистно и конформно областта $\bar{C} \setminus [-1, 1]$ върху $|w| > 1$ по такъв начин, че $w(\infty) = \infty$. Това е един еднозначен клон на обратната функция на функцията на Жуковски $z = (w + 1/w)/2$. Ето защо (16) и (17) могат да се запишат по следния начин:

$$\|P_{n_k}(f; x)\| \leq M_1 (n_k + 1)^2 \rho^{\sigma_k} |w(x)|^{n_k}.$$

Да изберем сега $R = [(1 + 1/\rho)/2]^{1/\lambda}$ и нека $D_R = \{z \in \mathbb{C} : |w(z)| < R\}$. Това е елипса с фокуси -1 и 1 и полуоси $(R + 1/R)/2$ и $(R - 1/R)/2$. Полагаме $\gamma = (R + 1/R)/2$. Очевидно $\gamma > 1$. Освен това за всяко $x \in D_R \cap \mathbb{R} = [-\gamma, \gamma]$ е изпълнено

$$\|P_{n_k}(f; x)\| \leq M_1 (n_k + 1)^2 \rho^{\sigma_k} R^{n_k} \leq M_1 (n_k + 1)^2 (\rho R^\lambda)^{\sigma_k} R^\lambda \\ = M_2 (n_k + 1)^2 \rho_1^{\sigma_k} \leq M_3 (n_k + 1)^2 \rho_1^{n_k/\lambda},$$

където $\rho_1 = \rho R^\lambda = (1 + \rho)/2 < 1$. Следователно

$$\|P_{n_k}(f; x)\|_{[-\gamma, \gamma]} \leq M_3 (n_k + 1)^2 \rho_1^{n_k/\lambda},$$

откъдето

$$\left(\int_{-\gamma}^{\gamma} |P_{n_k}(f; x)|^p dx \right)^{1/p} \leq (2\gamma)^{1/p} M_3 (n_k + 1)^2 \rho_1^{n_k/\lambda}.$$

Това доказва (13), а с него и самата теорема.

ЛИТЕРАТУРА

1. Carleman, S. Sur un théoreme de Weierstrass. — Arkiv Math. Astr. Och Fisik, 20, 1927, 1—5.
2. Бернштейн, С. Н. О наилучшем приближении непрерывных функций на всей вещественной оси при помощи целых функций данной степени. — В: Собрание сочинений. Т. II. Москва, АН СССР, 1954, 371—395.
3. Бернштейн, С. Н. Об одном свойстве целых функций. — Собрание сочинений. Т. I. Москва, АН СССР, 1952, 269—270.

4. Бернштейн, С. Н. О наилучшем приближении аналитических функций при помощи целых функций конечной степени. — В: Собрание сочинений. Т. II. Москва, АН СССР, 1954, 408—412.
5. Д ж р б а ш я н, М. М. О двух квази-аналитических классах функций на вещественной оси. — Изв. АН Арм. ССР. Сер. физ.-мат., естеств. и техн. наук, VIII, 1955, 3—14.
6. К ö b e r, Н. On the approximation to integrable functions by integral functions. — Trans. Amer. Math. Soc., 54, 1943. 70—82.
7. И б р а г и м о в, И. И. Теория приближения целыми функциями. Баку, 1979.
8. Бернштейн, С. Н. Предельные законы теории наилучших приближений. — В: Собрание сочинений. Т. II. Москва, АН СССР, 1954, 416—420.
9. У о л ш, Д ж. Л. Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области. Москва, 1961.

Постыпила на 1. 4. 1985 г.

A COMBINATORIAL CHARACTERIZATION OF PLANAR TRIANGULATIONS

Nicola Martinov

Никола Мартинов. Комбинаторная характеристика планарных триангуляций. Основным результатом являются следующие два критерия. Граф, отличный от полного графа, является 4-связной планарной триангуляцией тогда и только тогда, когда множество подграфов, порожденных вершинными разрезами, совпадает с множеством порожденных циклов длины больше 3. Граф, не содержащий K_5 , является планарной триангуляцией тогда и только тогда, когда выполнены следующие три условия: 1) каждый порожденный простой цикл длины больше 3 — разделяющий; 2) каждый вершинный разрез порождает простой цикл; 3) каждый вершинный разрез с тремя вершинами выделяет только два компонента.

Nicola Martinov. A Combinatorial Characterization of Planar Triangulations. The following two criteria are the main result of this article. A graph which is not a complete graph is a 4-connected planar triangulation if and only if the set of subgraphs induced by vertex cuts coincides with the set of induced cycles of length greater than three. A graph noncontaining K_5 is a planar triangulation if and only if: 1) every induced prime cycle with length greater than three is separating; 2) every vertex cut induces a prime cycle; 3) every vertex cut with three vertices separates only two components.

The basis for our terminology is Harary [1]. Only finite undirected graphs without loops and multiple edges will be considered. We denote the sets of vertices and edges of a graph G by $V(G)$ and, $E(G)$, respectively. A subset U of $V(G)$ is called *vertex cut* of G when $G-U$ is a disconnected graph and no proper subset of U has this property. We denote the set of vertex cuts of G by $R(G)$ and the set of the graphs spanned by the elements of $R(G)$ by $\hat{R}(G)$. Let $Z(G)$ be the set of induced prime cycles of G and $Z_n(G)$ be the subset of $Z(G)$ for which the length of the cycles is not smaller than n . For a non-isolated vertex v of a graph G , G_v denotes a subgraph of G spanned by the set of all vertices adjacent to v . We call a graph G a *locally cyclic graph* when for each vertex v the subgraph G_v is a prime cycle. We denote the set of the connected locally cyclic graphs by LC . A *pole* of the edge uv is a vertex adja-

cent both to u and v . We define an envelope H of a subgraph H of a graph G as follows: v is a vertex of H if and only if $v \in V(G-H)$ and v is adjacent to H (i. e. v is adjacent at least to one vertex of H) and x is an edge of H if and only if $x \in E(G-H)$ and x has at least one pole in $V(H)$. An intersection $H_1 \cap H_2$ of the subgraphs H_1 and H_2 of a graph G is defined as the maximum common subgraph of H_1 and H_2 . A graph is said to be a planar triangulation if it is a maximum (with respect to edges) planar graph. A planar graph G is said to be a triangulation of a cycle s when one of the faces of G is a polygon bounded by s and the resting faces are triangles.

Some local properties characterizing 4-connected planar triangulations are exposed in [2]. A general criterion (Theorem 1) for 4-connected planar triangulations is given here by specifying of these properties. This criterion is announced in [2] and is generalized here for an arbitrary planar triangulation.

L e m m a 1. Let $G \in LC$, $Z_4(G) \subset \hat{R}(G)$, H be an induced subgraph of G and both H and $G-H$ be connected graphs. Then for every vertex v of H the graph G_v intersects each component of $H-v$ and the intersection is a connected (or trivial) graph.

Proof. Let H' be a component of $H-v$. Because H is connected, $H' \cap G_v \neq \emptyset$. Suppose that $H' \cap G_v$ has two components l_1 and l_2 . Let $v_1 \in V(l_1)$, $v_2 \in V(l_2)$ and l be a (v_1-v_2) -path of H' . Assume, without loss of generality, that l is a prime path which does not intersect $G_v - \{v_1, v_2\}$. Then the paths $v_1 v v_2$ and l form together a prime cycle s . Since G_v is a prime cycle then the length of l is at least 2 and hence $s \in Z_4(G)$, that is we obtain $s \in \hat{R}(G)$.

But v_1 and v_2 belong to different components of $G_v \cap H$, so both (v_1-v_2) -paths of the cycle G_v contain vertices u and u' of $G-H$. These paths don't intersect s (and $v \in V(s)$) so they belong to different components of $G-s$. Hence, we reach a contradiction: the connected graph $G-H$ has vertices (u and u') in different components with respect to the cycle s of H .

L e m m a 2. Let $G \in LC$, $Z_4(G) \subset \hat{R}(G)$, G_1 be an induced 2-connected subgraph and $H_1 = G - G_1$ be a connected (or trivial) graph. Then

- 1) \tilde{H}_1 is 2-regular;
- 2) when $|V(G_1)| \geq 4$ there is a vertex v_0 of \tilde{H}_1 such that $G_1 - v_0$ is 2-connected.

Proof. The existence of \tilde{H}_1 follows from the fact that G is a connected graph. Let $v \in V(\tilde{H}_1)$. According to Lemma 1 (applied to G , G_1 and v) the graph $l = G_v \cap G_1$ is a path having at least two vertices. (If l has only one vertex we have the contradiction that v is a pending vertex of the 2-connected graph G_1 .) Let v_1 and v_2 be the ends of l . The path $G_v - l$ is in H_1 and its ends are the poles of the edges vv_1 and vv_2 respectively. Hence $vv_1, vv_2 \in E(\tilde{H}_1)$ and obviously these are the only edges of \tilde{H}_1 incident with v . (The same holds also when $G_v - l$ is a trivial graph.) Therefore \tilde{H}_1 is a 2-regular graph.

Denote by s the cycle of \tilde{H}_1 passing through v (and consequently passing through v_1 and v_2). Suppose that $|V(G_1)| \geq 4$ and $\kappa(G_1 - v) = 1$. Let u be a cutpoint of $G_1 - v$. Choose vertices a and b in different components of $G_1 - \{u, v\}$ and let γ be a prime $(a-b)$ -path in $G_1 - u$ and a_1 and b_1 be its vertices adjacent to v . Substituting the path $a_1 v b_1$ in γ by the $(a_1 - b_1)$ -subpath of l we obtain a new $(a-b)$ -path of G_1 which does not contain v and therefore it contains u . So we get

$$(1) \quad u \in V(G_v), \quad u \in \{v_1, v_2\}.$$

Taking into account that u separates l into two parts we apply Lemma 1 for G , $G_1 - u$ and v and achieve the result that $G_1 - \{u, v\}$ has two components containing v_1 and v_2 respectively. But the cycle s passes through v_1 and v_2 (and v). Hence,

$$(2) \quad u \in V(s).$$

Moreover, the two $(u-v)$ -paths of s belong to different components of $G_1 - \{u, v\}$. Therefore

$$(3) \quad \text{if } v', v'' \in V(s), \text{ and } v', v'' \text{ separates } u, v, \text{ then } v'v'' \notin E(G).$$

Let S be the graph obtained from the cycle s by adding the following new edges: any vertex v is made adjacent to every cutpoint of $G_1 - v$. According to (1) and (2) S is a subgraph of $\langle s \rangle$. Then, if we map s into a convex polygon in the plane and the new edges of S into the corresponding diagonals of this polygon no two diagonals would intersect internally according to (3). This means that S is an outerplanar graph and hence S has a vertex v_0 of degree 2. The graph $G_1 - v_0$ has no cutpoints and hence it is 2-connected.

L e m m a 3. Let $G \in LC$, $Z_4(G) \subset \hat{R}(G)$, G_1 be an induced 2-connected subgraph and $H_1 = G - G_1$ be a connected (or trivial) graph. Then \tilde{H}_1 is a prime cycle and G_1 is a triangulation of the same cycle.

Proof. We'll use induction on the number of vertices of G_1 .

If $|V(G_1)| = 3$ then $G_1 = K_3$ and obviously the lemma holds.

Let $|V(G_1)| \geq 4$. According to Lemma 2 there is a vertex v in the graph H_1 such that $G_2 = G_1 - v$ is 2-connected. The vertex v is adjacent to H_1 , hence $H_2 = G - G_2$ is connected. By the induction hypothesis the envelope \tilde{H}_2 of H_2 is a prime cycle and G_2 is its triangulation. From Lemma 1 we have that $l = G_v \cap G_1$ is a path. Let v_1 and v_2 be the ends of l . Since v is a vertex of H_2 , l is outside H_2 and v is a pole of every edge of l , then l is a path of \tilde{H}_2 . Hence, G_1 is a triangulation of the cycle s_0 obtained from the cycle \tilde{H}_2 by substituting l for the path v_1vv_2 . It remains to be proved that $s_0 = \tilde{H}_1$.

The path $G_v - l$ belongs to H_1 and its ends are poles of the edges vv_1 and vv_2 respectively. All other edges of s_0 , being edges of \tilde{H}_2 , have poles in H_2 different from v , i. e. have poles in H_1 . Therefore

$$(4) \quad s_0 \subset \tilde{H}_1.$$

But the vertices of G_1 adjacent to H_1 and different from v are among the vertices of G_2 adjacent to H_2 , i. e. they are among the vertices of \tilde{H}_2 . Hence,

$$(5) \quad V(\tilde{H}_1) \subset V(\tilde{H}_2) \cup \{v\}.$$

Besides any vertex u internal to the path l is internal to the triangulation G_1 of s_0 . As a consequence, the vertices adjacent to u (with respect to G_1) form a prime cycle. But $G \in LC$ and therefore u has no adjacent vertices outside G_1 . This shows that the internal vertices of l do not belong to \tilde{H}_1 . From here and (5) we obtain that $V(\tilde{H}_1) \subset V(s)$. This inclusion together with (4) gives $s_0 = \tilde{H}_1$.

L e m m a 4. Let G be a graph different from a complete graph and

$$(6) \quad \hat{R}(G) = Z_4(G).$$

Then $G \in LC$.

Proof. Let $u \in V(G)$. We shall prove that $G_u \in Z_4(G)$, that is $U = V(G_u) \in R(G)$. We consider separately the two cases when U is a cutset and when it is not a cutset of G .

1. Let U be a cutset and G' be the component of $G-U$ containing u . Suppose that

$$(7) \quad U \notin R(G).$$

Removing successively from U (but not from G) the vertices of U not adjacent to G' and $G-(V(G') \cup U)$ we obtain a subset U_1 of U which is a vertex cut of G . Let G_1 be the component of $G-U_1$ containing u and let G_2 be another component of $G-U_1$. By (6) G is a 4-connected graph and from the assumption (7) G_1 has a vertex $u_1 \neq u$. Hence, there are at least 4 different paths of G_1 connecting u_1 with different vertices of U_1 . Therefore we get that there is a prime path s_1 in G_1 noncontaining u and besides its ends v_1 and v_2 are not adjacent vertices of U_1 . Let s_2 be a prime (v_1-v_2) -path in G_2 . Then s_1 together with s_2 form a prime cycle $s \in Z_4(G)$. From (6) $s \in \hat{R}(G)$. Let H_1 be the component of $G-s$ containing u and let H_2 be another component of $G-s$. From $U_1 \subset V(G_u)$ follows

$$(8) \quad U_1 \subset (V(H_1) \cup V(s)).$$

But every path of H_2 connecting internal vertices of s_1 and s_2 respectively will intersect U_1 in a vertex of H_2 . However, this contradicts (8). Therefore (7) does not hold, i. e. $U \in R(G)$.

2. Let now U be not a cutset of G , i. e.

$$(9) \quad V(G_u) = V(G) \setminus \{u\}.$$

Because G is not a complete graph there is a vertex v not adjacent to at least one of the other vertices. Hence $V(G_v)$ is a cutset and using case 1, we get

$$G_v \in Z_4(G);$$

from here we get that the vertex u belonging to the cycle G_v is not adjacent to all vertices of that cycle and that contradicts (9).

L e m m a 5. Let G be a planar triangulation. Then

$$Z_4(G) \subset \hat{R}(G) \subset Z(G).$$

Proof. We identify the graph G with its triangular embedding in the plane. It follows immediately from here that every cycle in $Z_4(G)$ divides G into two parts, i. e.

$$Z_4(G) \subset \hat{R}(G).$$

Let $U \in R(G)$ and $v \in U$. Since G_u is a Hamiltonian graph then at least two vertices v_1 and v_2 of G_v belong to U . Suppose now that G_v contains a third vertex v_3 of U . Then, since the connectivity $\kappa(G) \geq 3$, if v' and v'' are vertices of different components of $G-U$, there will be three nonintersecting paths for each one of them, connecting them with v_1 , v_2 and v_3 respectively. Thus we reach the contradiction that the planar graph G contains homeomorphically $K_{3,3}$. Hence v is adjacent to exactly two vertices of U , i. e. $\langle U \rangle$ is a 2-regular graph. Let s be the

cycle of $\langle U \rangle$, passing through v . Since any vertex v of s is adjacent to each component of $G-U$ and G_v is Hamiltonian, then the components of $G-U$ are two and they are on different sides of s . That means that $U = V(s)$. Hence $\hat{R}(G) \subset Z(G)$.

Lemma 5 can be deduced easily from the basic result on nonseparating induced cycles in planar graphs due to Tutte [3].

Theorem 1. A graph G different from a complete graph is a 4-connected planar triangulation if and only if (6) holds, i. e. if $\hat{R}(G) = Z_4(G)$.

Proof. If G is a planar triangulation and $\kappa(G) \geq 4$, then by Lemma 3 (6) holds.

Let now $\hat{R}(G) = Z_4(G)$. By Lemma 4 $G \in LC$. Let $v \in V(G)$. Since G is 4-connected then $G-v$ is 3-connected. According to Lemma 3 G_v is a cycle and $G-v$ is a triangulation of this cycle. Therefore G is a 4-connected planar triangulation.

Theorem 2. Let G be a graph noncontaining K_5 (as a subgraph). Then the following two propositions are equivalent:

- 1) G is a planar triangulation;
- 2) $Z_4(G) \subset \hat{R}(G) \subset Z(G)$ and every cut with three vertices separates only two components.

Proof. By Lemma 5, 1) implies 2).

Let 2) holds. Then $\kappa(G) \geq 3$. We shall prove 1) by induction on the number n of vertex cuts with three vertices. When $n=0$, if G is not a complete graph, it is a planar triangulation according to Theorem 1. Suppose $n>0$. Let $U \in R(G)$, where

$|U|=3$, and G_1 and G_2 be the components of $G-U$. Besides suppose that $U_1 \in R(G)$. Since $\langle U_1 \rangle$ is a prime cycle and $\langle U \rangle$ is a triangle then U_1 belongs to just one of the graphs $G' = G - G_2$ and $G'' = G - G_1$. The graphs G' and G'' don't contain K_5 and besides every their vertex cut is also a vertex cut of G . That means that the condition 2) holds for every one of G' and G'' . By the induction hypothesis G' and G'' are planar triangulations. Since $G' \cap G''$ is the triangle $\langle U \rangle$, then $G = G' \cup G''$ is also a planar triangulation.

REFERENCES

1. H a r a r y, F. Graph theory. Addison-Wesley, Reading, MA, 1969.
2. М а р т и н о в, Н. Комбинаторни критерии за планарни триангулации. — В: 100 години от рождението на проф. д-р Д. Табаков. Сливен, 1979, 151—161.
3. T u t t e, W. T. How to draw a graph. — Proc. Lond. Math. Soc., 13, 1963, 743—768.

Received 3. 4. 1985

ПАРАЛЕЛОСТЕНИ

Никола Мартинов, Димитър Вакарелов

Никола Мартинов, Димитър Вакарелов. **Паралелостени.** Дается конструктивное описание множества Σ трехмерных выпуклых многогранников, грани которых являются параллелограммами. Мы называем их параллелостенами. Устанавливается, что Σ — бесконечный класс, являющийся объединением подклассов Σ_n ($n=3, 4, 5, \dots$), порождающихся индуктивным путем из параллелепипедов. Каждый многогранник из Σ_n — центрально-симметрический и имеет $n(n-1)+2$ вершин, $n(n-1)$ граней и $2n(n-1)$ ребер.

Nicola Martinov, Dimiter Vakarelov. **Parallelohedrons.** A constructive description of the set Σ of all three dimension of convex polyhedra, all faces of which are parallelograms, is given. We call such polyhedra parallelohedrons. It is proved that Σ is an infinite class, which is a sum of subclasses Σ_n ($n=3, 4, 5, \dots$) generated by an inductive construction from the set Σ_3 of all parallelipeds. Any member of Σ_n is a centralsymmetric one and has $n(n-1)$ faces, $n(n-1)+2$ vertices and $2n(n-1)$ edges.

Разглеждаме съвкупността Σ^0 от многостените в тримерното евклидово пространство E_3 . За произволен многостен P с $S(P)$, $R(P)$ и $V(P)$ ще означаваме съвкупностите съответно на стените, ръбовете и върховете му. Паралелостен наричаме всеки изпъкнал многостен от Σ^0 , стените на който са успоредници. Ако P е паралелостен, съвкупността $R(P)$ се разлага на класове от успоредни (и равни) отсечки; броя на тези класове наричаме индекс на P . Със Σ означаваме съвкупността на паралелостените, а със Σ_n съвкупността на паралелостените с индекс n . Очевидно индексът е поне 3 и елементите на Σ_3 са всички паралелепипеди. В някои средношколски учебници неправилно се отъждествява Σ със Σ_3 . В популярната си статия [1] Александров посочва многостен от Σ_4 и поставя въпроса, дали съществуват други такива примери. Тук ние даваме едно конструктивно описание на съвкупността Σ , позволяващо не само да се направи класификация на паралелостените и да се изучат основните им свойства, но и да се види връзката им с други геометрични обекти.

Най-напред ще въведем някои означения и ще посочим някои интуитивно ясни свойства на изпъкналите множества, които ще използваме по-нататък, понякога без да цитираме.

Границата на изпъкналото множество P , т. е. съвкупността на граничните точки на P , означаваме с \tilde{P} , а вътрешността на P , т. е. $P \setminus \tilde{P}$ — с \hat{P} . Минималното изпъкнало множество, което съдържа дадено точково множество M , означаваме с $\langle M \rangle$. В тази статия многостените, многоъгълниците и отсечките се разглеждат като затворени множества, т. е. те съдържат своите контурни и вътрешни точки.

Л е м а 0. Нека P и Q са изпъкнали множества, а $R = P \cap Q$. Тогава:

- 1) R е изпъкнало множество.
- 2) Ако Q е права или равнина, то $\tilde{R} \subseteq \tilde{P}$.
- 3) Ако $P \in \Sigma^0$, а Q е равнина, то R е многоъгълник, отсечка, точка или празното множество.
- 4) Ако P е ограничено и затворено тяло (т. е. тримерно точково множество), а Q е права или лъч и $Q \cap \hat{P} \neq \emptyset$, то R е отсечка.
- 5) Ако Q е права, която пресича \tilde{P} , но не пресича \hat{P} , то има права, успоредна и произволно близка с Q , която не пресича P .
- 6) Ако P и Q са от Σ^0 , то \tilde{R} и $\langle P \cup Q \rangle$ също са от Σ^0 .

Транслацията с вектор t ще означаваме пак с t , а образа на фигура P при тази транслация ще означаваме с tP .

Нека P е ограничено изпъкнало тяло, а t — ненулев вектор.

О п р е д е л е н и е 1. Шапка $P(t)$ на P по посока t наричаме съвкупността от точките $x \in \tilde{P}$, за които лъчът с начало x и еднопосочен с t пресича \hat{P} .

О п р е д е л е н и е 2. Пояс P_t на P по направление t наричаме съвкупността от точки $x \in \tilde{P}$, за които правата през x и успоредна на t не пресича \hat{P} .

О п р е д е л е н и е 3. t -разширение на P наричаме изпъкналото тяло $\langle P \cup tP \rangle$, което означаваме с $\omega(t, P)$.

Очевидно t -разширение на точка е отсечка, t -разширение на отсечка, която не е успоредна на t , е успоредник, t -разширение на успоредник, който не е успореден на t , е паралелепипед.

Нека l е затворена начупена линия, съставена от отсечките a_1, a_2, \dots, a_n (ръбове на l), а t е вектор, който не е успореден на никой от ръбовете на l .

О п р е д е л е н и е 4. Пръстен, породен от l и t , наричаме съвкупността $\rho(l, t) = \bigcup_{i=1}^n \omega(t, a_i)$. Успоредниците $\omega(t, a_i)$ наричаме стени на пръстена, а тяхната съвкупност означаваме с $S(\rho(l, t))$. Съвкупността на ръбовете на l означаваме с $R(l)$.

Л е м а 1. Нека P е ограничено изпъкнало тяло, t — ненулев вектор, а λ — реално число. Тогава

- 1) Ако $\lambda > 0$, то $P(t) = P(\lambda t)$; ако $\lambda \neq 0$, то $P_t = P_{\lambda t}$.
- 2) Ако права, успоредна на t , пресича \hat{P} , тя пресича \tilde{P} в двойка точки x, y , като при вектор xu , еднопосочен с t , имаме $x \in P(t)$, $y \in P(-t)$.
- 3) Нека s е равнинна проекция на P при проектиране, успоредно на t . Тогава s е изпъкнала фигура, \tilde{s} е проекцията на \tilde{P} , \hat{s} е проекцията на \hat{P} .

като проектирането е еднозначно обратимо изображение между $P(t)$ и \hat{s} .

Доказателство. 1. При $\lambda > 0$ лъчите с общо начало и еднопосочни съответно с t и λt съвпадат, а при $\lambda \neq 0$ правите през дадена точка и успоредни съответно на t и λt съвпадат. Оттук и от определения 1 и 2 следва 1).

2. Нека правата g е успоредна на t и пресича \hat{P} . Съгласно с 4) и 2) на лема 0 $g \cap \tilde{P} = \{x, y\}$. От вектора xu , еднопосочен с t , следва, че ux е еднопосочен с $-t$, $x \in P(t)$ и $y \in P(-t)$.

3. Нека y_1, y_2 са точки от s , а x_1, x_2 са точки от P , които се проектират съответно в y_1 и y_2 . Тъй като отсечката $[x_1, x_2]$ принадлежи на P и отсечка се проектира в отсечка, то $[y_1, y_2] \subseteq s$. Следователно s е изпъкнала фигура.

Нека $x \in P_t$, а y е проекцията на x . Съгласно дефиниция 2 правата xu не пресича \hat{P} . Оттук и от 5) на лема 0 получаваме, че във всяка околност на y има точки извън s , т. е. че $y \notin \tilde{s}$. Следователно P_t се проектира в \tilde{s} .

Нека сега $x \in P(t)$ и y е проекцията на x . Правата $g = xu$ съгласно определение 1 минава през точка $x_0 \in \hat{P}$. Това означава, че има сфера с център x_0 , която се съдържа в P . Така получаваме, че всички прави, успоредни и достатъчно близки с g , пресичат P , а оттам — че всички точки от проекционната равнина, достатъчно близки до y , принадлежат на s . Следователно $y \in \hat{s}$. Но съгласно 2) на лема 1 правата g пресича $P(t)$ единствено в x . Всичко това означава, че $P(t)$ се проектира в \hat{s} , като проектирането е еднозначно обратимо изображение между $P(t)$ и \hat{s} .

Л е м а 2. Нека P е изпъкнал многостен, α е стена на P , a е ръб на P , а t е ненулев вектор. Тогава

1) Твърденията $\hat{a} \cap P_t \neq \emptyset$, $t \parallel \alpha$, $\alpha \subseteq P_t$ са еквивалентни.

2) Ако $\hat{a} \cap P_t \neq \emptyset$, то $a \subseteq P_t$.

3) Ако t не е успореден на никоя стена от $S(P)$, то P_t е затворена верига и $R(P_t) \subseteq R(P)$.

Доказателство. 1. Съгласно 3) и 2) на лема 0 права, която пресича \hat{a} в една точка, пресича и \hat{P} . Следователно правите, успоредни на t , няма да пресичат \hat{P} точно тогава, когато $t \parallel \alpha$. Но тогава, ако една точка от \hat{a} принадлежи на P_t , то t ще е успореден на α и следователно $\alpha \subseteq P_t$. Така получаваме 1).

2. Нека $x \in \hat{a} \cap P_t$, а g е правата през x , успоредна на t . Ако $a \subseteq g$, твърдението е очевидно. Нека $a \not\subseteq g$, $a \neq g$ и β е равнината през a и g . Тъй като $g \cap \hat{P} = \emptyset$, то β ще бъде извън двустенния ъгъл между стените през a , който съдържа P , т. е. $\beta \cap \hat{P} = \emptyset$. Оттук следва, че всяка права, пресичаща a и успоредна на t , не пресича \hat{P} , т. е. че $a \subseteq P_t$.

3. Съгласно 3) на лема 1 равнинната проекция на P_t (при проектиране, успоредно на t) е границата \tilde{s} на проекцията s на P . Но проекцията на многостен е многоъгълник (заедно с вътрешността му), т. е. \tilde{s} е контур на многоъгълник, като съгласно с 1) на лема 2 никоя стена на P не се проектира в ръб на \tilde{s} . Следователно всеки от ръбовете на многоъгълника \tilde{s} е проекция на ръб на P , т. е. P_t е затворена начупена линия, съставена от ръбове на P .

О п р е д е л е н и е 5. Пояс на изпъкнал многостен P , който е затворена начупена линия, наричаме опорна линия на P .

Л е м а 3. Нека P е изпъкнал многостен, t е ненулев вектор, а $Q = \omega(t, P)$. Тогава $Q(t) = P(t)$, $Q(-t) = tP(-t)$.

Доказателство. Нека g е права, успоредна на t и пресичаща \hat{P} . Съгласно 2) на лема 1 g пресича $P(t)$ и $P(-t)$ в точки x и y , като векторът xy е еднопосочен с t . Нека y' е образът на y при трансляцията t . Очевидно g пресича \hat{Q} и $g \cap Q$ е отсечката $[x, y']$, като xy' е еднопосочен с t . Следователно $x \in Q(t)$, $y' \in Q(t)$, т. е. $Q(t) \supset P(t)$, $Q(-t) \supseteq t.P(-t)$. Като вземем предвид, че права, успоредна на t , пресича \hat{P} точно тогава, когато пресича \hat{Q} , получаваме, че горните включвания са изпълнени с равенства.

Л е м а 4. Нека $P \in \Sigma$, t е вектор, който не е успореден на никоя стена на P , а $Q = \omega(t, P)$. Тогава P_t е опорна линия и

- 1) $Q_t = \rho(P_t, t)$.
- 2) $S(Q) = S(P) \cup S(Q_t)$.

Доказателство. 1. Съгласно 3) на лема 2 поясът P_t е опорна линия. Нека $a \in R(P_t)$, а a' е образът на a при трансляцията t . От лема 3 лесно съобразяваме, че ако права, успоредна на t , пресича a и a' в точки x и x' , то отсечката $[xx']$ се съдържа в Q_t . Следователно успоредникът със страни a и a' , т. е. $\omega(t, a)$, се съдържа в Q_t . Оттук, като вземем предвид, че права, успоредна на t , пресича P (респективно \hat{P}) точно тогава, когато пресича Q (респективно \hat{Q}), получаваме, че Q_t се състои точно от успоредниците $\omega(t, a)$, където $a \in R(P_t)$. Следователно $Q_t = \rho(P_t, t)$.

2. От 3) на лема 2 следва, че всяка точка, която е вътрешна за стена на P , се съдържа в $P(t) \cup P(-t)$. Оттук и от лема 3 получаваме $S(P) \subseteq S(Q)$. Съгласно лема 3 точките от \hat{Q} , които са извън $P(t) \cup P(-t)$, съставят Q_t , а Q_t е пръстен. Следователно $S(Q) \setminus S(P) = S(Q_t)$, т. е. изпълнено е 2).

О п р е д е л е н и е 6. Пояс на $P \in \Sigma$, който е пръстен, наричаме **о п о р е н п р ъ с т е н** на P .

От лема 4 следва, че $S(Q)$ съдържа само успоредници и че $R(Q)$ съдържа освен ръбовете на P още и един клас ръбове, които са успоредни на t , т. е. че индексът на Q е с 1 по-голям от индекса на P . Следователно в сила е

Т е о р е м а 1. Ако $P \in \Sigma_n$, а t е вектор, който не е успореден на никоя от стените на P , то $\omega(t, P) \in \Sigma_{n+1}$.

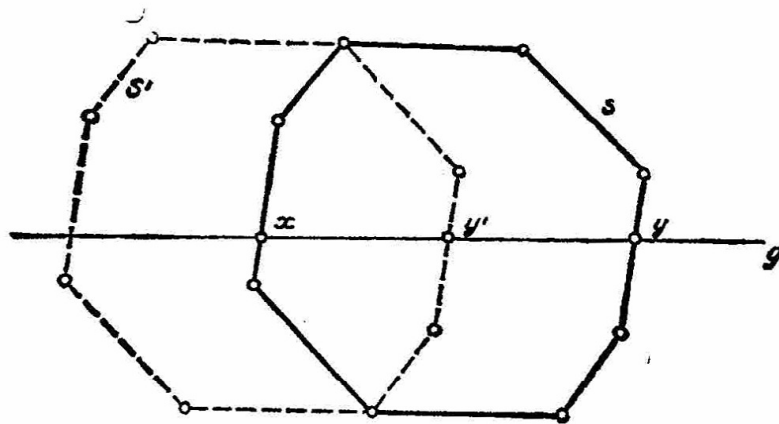
Л е м а 5. Нека $P \in \Sigma_n$, R_1 е клас успоредни ръбове от $R(P)$, а t е вектор, успореден и равен по големина на ръбовете от R_1 . Нека още $Q = P \cap (-t).P$. Тогава

- 1) P_t е опорен пръстен на P .
- 2) При $n > 3$, $Q \in \Sigma_{n-1}$ и $\omega(t, Q) = P$.

Доказателство. 1. Нека s е равнинна проекция на P при проектиране, успоредно на t . Нека още α е стена на P , която има ръб от R_1 . Тогава два от ръбовете на α ще бъдат от R_1 , а за останалите два, които ще означим с a и a' , ще е изпълнено $a' = t.a$. Следователно $\alpha = \omega(t, a)$. Съгласно 1 на лема 2 $\alpha \subseteq P_t$ и следователно се проектира в ръб на \tilde{s} . Обратно, всеки ръб на \tilde{s} е проекция на ръб или стена на P . Да допуснем, че някой ръб b' от \tilde{s} е проекция на ръб b от P . Тогава краищата на b' ще бъдат проекции на върхове (а не на ръбове) на P . Оттук следва, че съседните ръбове на b' също ще бъдат проекции на ръбове на P и т. н., т. е. че всеки ръб на \tilde{s} ще бъде проекция на ръб на P , а това означава, че $R_1 = \emptyset$. Това противоречие доказва, че всеки ръб $a_i' \in R(\tilde{s})$ е проекция на стена α_i на P , $\alpha_i = \omega(t, a_i)$, където $a_i \in R(P)$

и $P_t = \bigcup_i a_i$. От това, че проекциите на a_i образуват цикъл \tilde{s} , лесно се съобразява, че a_i образуват цикъл $l \subseteq R(P)$. Следователно $P_t = \rho(l, t)$.

2. Нека g е права, успоредна на t и пресичаща \hat{P} , а γ е равнина през g ; нека още x и y са пресечните точки (съгласно с 2) на лема 2) на g съот-



Фиг. 1

ветно с $P(t)$ и $P(-t)$; нека $s = P \cap \gamma$, а y' и s' са образите на y и s при трансляция $-t$. Тъй като x и y принадлежат на многоъгълника \tilde{s} (а те са от $P(t)$ и $P(-t)$), то s пресича пояса P_t . Оттук и от 1) на лема 5 получаваме, че s има два ръба, равни и успоредни на t (фиг. 1). Следователно границата на $s \cap s'$ съдържа всички останали ръбове на \tilde{s} освен успоредните на t . Но $\gamma \cap Q = s \cap s'$. Оттук и от $\tilde{Q} \subseteq \tilde{P} \cup (-t) \cdot \tilde{P}$ получаваме

$$(1) \quad Q(t) = P(t), \quad Q(-t) = (-t) \cdot P(-t).$$

Ако правата g пресича P , но не пресича \hat{P} , то, очевидно няма да пресича и \hat{Q} . Следователно $Q_t \subseteq P_t$. Но за всяка стена $\alpha \subseteq P_t$ и $\alpha' = (-t) \cdot \alpha$ имаме $\alpha \cap \alpha' \in R(P)$. Следователно Q_t е опорна линия и $P_t = \rho(Q_t, t)$. Оттук и от (1) съгласно лема 4 и 5 получаваме, че P и $\omega(t, Q)$ имат обща граница, т. е. $P = \omega(t, Q)$.

От 2) на лема 5 непосредствено получаваме

Т е о р е м а 2. Ако $P \in \Sigma_n t$ и $n > 3$, то съществува $Q \in \Sigma_{n-1}$ и вектор t , така че $P = \omega(t, Q)$.

О п р е д е л е н и е 7. Нека P е многостен. Ще казваме, че P е запълнен с паралелепипеди, ако $P = P_1 \cup \dots \cup P_k$ и за $i = 1, \dots, k$ са изпълнени следните условия:

1) $P_i \in \Sigma_3$.

2) Ако два от многостените P, P_1, \dots, P_k се пресичат, то сечението им е или обща стена, или общ ръб, или общ връх.

Т е о р е м а 3. Ако P е изпъкнал многостен, то P е паралелостен тогава и само тогава, когато може да се запълни с паралелепипеди.

Доказателство. Очевидно е, че ако P е изпъкнал многостен, който може да се запълни с паралелепипеди, то стените му са успоредници и следователно е паралелостен.

Нека $P \in \Sigma_n$. Ще докажем чрез индукция относно индекса n на P , че той може да се запълни с паралелепипеди. Когато $n=3$, това е очевидно. Нека $n > 3$ и да приемем, че твърдението е вярно за многостените от Σ_{n-1} . Съгласно с теорема 2 съществува $Q \in \Sigma_{n-1}$ и вектор t , некомпланарен с никоя стена на Q , такива, че $P = \omega(t, Q)$. Имаме следното разлагане на P : $P = [(P \setminus Q) \cup Q(t)] \cup Q = R \cup Q$. Използвайки лема 4, лесно съобразяваме, че фигурата $R = (P \setminus Q) \cup Q(t)$ е многостен и че $R = \bigcup_{\alpha \in S} \omega(t, \alpha)$, където S е съвкуп-

ността от стените на шапката $Q(t)$. Оттук съгласно с определение 7 получаваме, че паралелепипедите $\omega(t, \alpha)$ запълват многостена R . От индукционното предположение Q се запълва с паралелепипеди. Като вземем предвид, че Q и R се долепват по стените на шапката $Q(t)$, заключаваме, че паралелепипедите, запълващи Q и R , удовлетворяват условията на определение 7 и следователно те запълват и P .

С л е д с т в и е 1. Ако $P \in \Sigma$ и α е произволна стена на P , то съществува стена α' на P , която се получава от α чрез успоредно пренасяне.

Доказателство. Нека P е запълнен с паралелепипеди и α е стена на P . Да означим с P_1 онзи от запълващите паралелепипеди, който се допира до P по α , и нека α_1 е противоположната стена на α в P_1 . Ако $\alpha_1 \notin S(P)$, то тя е стена на друг запълващ P паралелепипед P_2 , който се допира до P_1 по α_1 . Да означим с α_2 противоположната стена на α_1 в паралелепипеда P_2 . Ако $\alpha_2 \notin S(P)$, то този процес можем да продължим и поради ограничеността на броя на запълващите паралелепипеди стигаме до стена $\alpha_k \in S(P)$, която очевидно се получава от α чрез успоредно пренасяне.

Т е о р е м а 4. Нека P е изпъкнал многостен. Тогава P е паралелостен точно тогава, когато:

- 1) всички стени на P са четириъгълници и
- 2) за всяка стена α на P съществува стена α' на P , която се получава от α чрез успоредно пренасяне.

Доказателство. Нека $P \in \Sigma$. Тогава 1) е изпълнено тривиално, а 2) се получава от следствие 1.

Обратното твърдение се получава непосредствено от следната

Т е о р е м а [2, с. 322]. Ако P е изпъкнал многостен, изпълняващ условие 2), то: а) P притежава център на симетрия и б) всяка стена на P притежава център на симетрия.

Използвайки б), получаваме, че стените на P са успоредници, т. е. $P \in \Sigma$.

Използвайки следствие 1 и заключението а) от цитираната теорема, получаваме

Т е о р е м а 5. Ако $P \in \Sigma$, то P има център на симетрия.

Тъй като цитираната от [2] теорема се опира на една нетривиална теорема на Минковски, ще дадем следното директно доказателство на теорема 5, без да използваме теорема 4.

Доказателство. Ще приложим индукция по индекса на многостена. Очевидно паралелепипедите имат център на симетрия. Нека теоремата е вярна за всички многостени от Σ_{n-1} , а $P \in \Sigma_n$. От теорема 2 следва, че има многостен $Q \in \Sigma_{n-1}$ и вектор t , такива, че $P = \langle Q \cup tQ \rangle$. Съгласно индукционното предположение има централна симетрия ϕ , която запазва Q . Тогава ϕt ще запазва $Q \cup tQ$, а следователно и $\langle Q \subset tQ \rangle$. Но ϕt е централна симетрия.

От теорема 5 ще получим някои следствия. Нека $P \in \Sigma$, ϕ е централна симетрия, запазваща P , t е ненулев вектор и правата g е успоредна на t . Тъй

като φ запазва \tilde{P} и \hat{P} , то g ще пресича P (респективно \hat{P}) точно тогава, когато образът ѝ φg пресича P (респективно \hat{P}). Оттук и от определение 2 следва, че φ запазва P_t . Освен това, тъй като съответните при φ вектори са разнопосочни, то от определение 1 следва, че φ трансформира $P(t)$ в $P(-t)$. Така получаваме

С л е д с т в и е 2. Всяка опорна линия (опорен пръстен) на $P \in \Sigma$ е централно симетрична фигура и разделя останалите точки на \tilde{P} на две централно симетрични части.

Нека P_{t_1} е опорна линия, а P_{t_2} е опорен пръстен на $P \in \Sigma$. Ако произволна стена α на P_{t_2} се съдържа в $P(t_1)$, то образът ѝ $\varphi\alpha$ ще се съдържа в $P(-t_1)$. Съгласно със следствие 2 α и $\varphi\alpha$ са от различни страни на опорната линия P_{t_1} . Следователно опорната линия и опорният пръстен се пресичат (поне двукратно). Ако проектираме успоредно на t_1 в някоя равнина, то P_{t_1} ще се проектира в контур на многоъгълник. Тъй като този многоъгълник е изпъкнал, той не може да има повече от две страни, успоредни на проекцията на t_2 . Следователно пръстенът P_{t_2} пресича двукратно пояса P_{t_1} , или все едно P_{t_1} има точно два ръба, успоредни и равни на t_2 . Така получаваме

С л е д с т в и е 3. Ако $P \in \Sigma_n$, то всяка опорна линия има $2n$ ръба — по два от всеки клас успоредни ръбове на $R(P)$.

Нека $P_n \in \Sigma_n$, а l е опорна линия на P_n по направление t . Съгласно теорема 1 $P_{n+1} = \omega(t, P_n) \in \Sigma_{n+1}$. Съгласно лема 4 стените на P_{n+1} се получават, като към стените на P_n прибавим стените на пръстена $\rho(l, t)$, които според следствие 3 са $2n$ на брой. Ръбовете на P_{n+1} се получават, като към ръбовете на P_n добавим ръбовете на l , които са $2n$, и още толкова ръба, равни и успоредни на t . Броят на върховете на P_{n+1} се получава, като към броя на върховете на P_n прибавим броя на върховете на l , които са $2n$. Нека означим с $\text{Par}(P)$ множеството на паралелепипедите, запълващи P . Тогава броят на $\text{Par}(P_{n+1})$ се получава, като към броя на $\text{Par}(P_n)$ прибавим броя на стените на шапката $P_n(t)$, които са точно половината от стените на P_n (понеже в случая опорната линия l разпределя стените на P_n в двете шапки $P_n(t)$ и $P_n(-t)$, които са централно симетрични една на друга и следователно имат по равен брой стени). Така получаваме

С л е д с т в и е 4. Ако $P_{n+1} \in \Sigma_{n+1}$ и е t -разширение на $P_n \in \Sigma_n$, то в сила са следните рекурентни равенства:

$$\begin{aligned} |S(P_{n+1})| &= |S(P_n)| + 2n, & |R(P_{n+1})| &= |R(P_n)| + 4n, \\ |V(P_{n+1})| &= |V(P_n)| + 2n, & \text{Par}(P_{n+1}) &= \text{Par}(P_n) + \frac{1}{2} |S(P_n)|. \end{aligned}$$

От следствие 4, като вземем предвид, че Σ_3 съдържа само паралелепипеди, които имат по 6 стени, 12 ръба, 8 върха и всеки от тях запълва себе си, получаваме следната теорема.

Теорема 6. Ако $P \in \Sigma_n$, то

$$\begin{aligned} |S(P)| &= n(n-1), & |R(P)| &= 2n(n-1), & |V(P)| &= n(n-1) + 2, \\ \text{Par}(P) &= \frac{1}{6} (n-2)(n-1)n. \end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров, А. Д. Что такое многогранник. — Математика в школе, 1981, № 1, 8—16; 1981, № 2, 19—26.
2. Александров, А. Д. Выпуклые многогранники. Москва, 1950.

Постъпила на 3. 4. 1985 г.

Забележка на авторите (13. VI. 1986 г.). Основен мотив за написването на тази статия бе публикацията [1] на А. Д. Александров, в която той предполага съществуването на паралелостени с индекс, по-голям от 4, за открит въпрос. Резултатът беше докладван на националния семинар по геометрия през 1972 г., но въпреки това ние дълго не се решавахме да го публикуваме, правейки справки за неговата оригиналност. За съжаление нашите усилия в това направление бяха съсредоточени върху периода след публикуването на статиите [1]. От появилата се неотдавна у нас книга на У. Бол и Г. Коксетър „Математически есе и развлечения“, издадена в Москва през 1986 г., се вижда (с. 155), че паралелостени с произволен индекс са били изучавани преди нас и преди [1]. За тези изследвания, които очевидно са били неизвестни на А. Д. Александров, ние научихме твърде късно, за да съгласуваме нашето изложение с тях. При направената справка с достъпната за нас литература от книгата на Бол и Коксетър узнахме, че някои наши резултати са били известни и преди това. Не намерихме обаче аналози на основните наши теореми, даващи индуктивна характеристика на паралелостените. Въпреки това ние не сме уверени, че и този наш резултат е напълно оригинален.

В светлината на горното става ясно, че въпросът за паралелостените не е популярен у нас и затова ние решихме да оставим статията за публикуване без претенции за приоритетност.

О КУБИЧЕСКИХ ЦИКЛИЧЕСКИ 5-СВЯЗНЫХ ГРАФАХ

Никола Мартинов

Никола Мартинов. О кубических циклически 5-связных графах. Исследуется минимальная база S_5 из которой операцией соединения пары ребер получается совокупность S_5^* всех кубических циклически 5-связных графов. Найдены графы одного подмножества S_5 и представлено одно конструктивное описание S_5^* .

Nicola Martinov. On Cubic Cyclically 5-connected Graphs. In this article we investigate the minimum basis S_5 on which the set S_5^* of all cubic cyclically 5-connected graphs can be obtained by the operation "joining of pair of edges". The graphs of a subset of S_5 are found out and a constructive description of S_5^* is given.

1. ВВЕДЕНИЕ

При описании некоторых классов графов важную роль выполняют операции подразбиение ребра новой вершиной и соединение пары ребер новым ребром. Очевидно, что вторая операция содержит первую (два ребра сначала подразбивают, а затем добавленные вершины связывают новым ребром). При подразбиении ребра топологические свойства графа не изменяются, но всегда нарушается его связность (вершинная связность), если она больше 2. Однако указанные операции не всегда изменяют циклическую связность графа. Следовательно, интересным оказывается установление случаев, когда циклическая связность изменяется. При изучении циклической m -связности можем допускать не только вершины степени менее m , но и ограничиться классом кубических (3-регулярных) графов — классом, достаточно представительным с топологической точки зрения. Изучение кубических циклически m -связных графов при $m \leq 3$ облегчается тем, что их циклическая связность совпадает с вершинной связностью их реберных графов. Уормалд [1] дает полное описание кубических циклически m -связных графов при $m \leq 4$. В более существенном случае $m=4$ он обнаруживает минимальное подмножество, из которого получаются все кубические циклически 5-связные графы последовательным при-

менением операции соединения пары ребер новым ребром. Однако он считает, что подобное конструктивное описание случая $m=5$ является очень трудной и может быть нерешимой задачей.

2. ТЕРМИНОЛОГИЯ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Понятия и означения, которые не определяются здесь, понимаются согласно терминологии Харари [2]. Через $V(G)$ и $E(G)$ обозначаем множества соответственно вершин и ребер графа G , а через $k(G)$ — множество его компонентов. Если G — связный граф, расстояние между двумя его ребрами называется число вершин кратчайшей цепи, связывающей эти ребра. Соединением двух ребер x и y называется разбиение x и y соответственно новыми вершинами u и v и добавление ребра uv . Таким образом получаем новый граф G' , о котором говорим, что он получен из G применением операции γ . Если расстояние между x и y (в графе G) больше n , говорим, что G' получен из G применением операции γ_n . Если G — связен, через $r^0(G)$ обозначаем подмножества $E(G)$, которые являются разделяющими для G , а через $r(G)$ — множество разрезов G , т. е. минимальных (по включению) элементов $r^0(G)$. Разрез, который содержит n ребер, называем n -разрезом, а выделенные им компоненты — n -компонентами. Разрез называем особым, если хотя бы два его ребра имеют расстояние ≤ 2 . Если a — разрез графа G и каждая из компонент $G-a$ (их число два) имеет не меньше $|a|+1$ вершин, то a называем существенным, а если каждая из компонент $G-a$ содержит цикл, то a называем циклическим разрезом. Через $r'(G)$ обозначаем множество циклических разрезов G , а через $r_n'(G)$ — множество циклических n -разрезов. Минимальное число m , для которого $r_m'(G) \neq \emptyset$, называем циклической связностью G и обозначаем через $\lambda'(G)$; тогда G называем циклически m -связным.

Пусть S_m^* — множество кубических циклически m -связных графов. Граф из S_m^* называем не уменьшаемым, если его невозможно получить из другого графа S_m^* применением операции γ (соединением пары ребер). Через S_m обозначаем множество не уменьшаемых графов S_m^* . Согласно [3, лемма 3], справедливо следующее утверждение:

L^0 . Граф принадлежит S_m^* ($m \geq 4$) тогда и только тогда, когда он получается из некоторого графа S_m последовательным применением операции γ_{m-3} .

Следовательно, S_m^* получается конструктивно из базы S_m , используя единственную и относительно простую операцию γ_{m-3} , зная лишь только S_m . Уормалд [1] доказал, что $S_4 = \{K_4, Q_3\}$, где Q_3 — граф (1-скелет) трехмерного куба. Оказывается, множество S_5 намного сложнее. В [3, теорема 5], доказано, что в S_5 имеется в точности один граф, который содержит особый и существенный разрез. Это граф Q из рис. 1, который получается из Q_3 тройкратным применением операции γ . Здесь мы опишем подмножество S_5^0 множества S_5 , чьи графы не содержат существенных разрезов. Будем использовать следующие два, уже установленные, утверждения [3, лемма 2 и лемма 4].

L' . Пусть G — кубический граф и $a \in r^0(G)$. Тогда

а) если $H \in k(G-a)$ и $|V(H)| \geq |a|-1$, то H содержит цикл;

б) если $|a| = \lambda'(G)$, то a не содержит смежных ребер.

L'' . Граф G из S_5^* принадлежит S_5 тогда и только тогда, когда каждое его ребро принадлежит разрезу из $r_5'(G)$.

Дадим и конструктивное описание S_5^* . Для этой цели введем еще одну операцию — γ' :

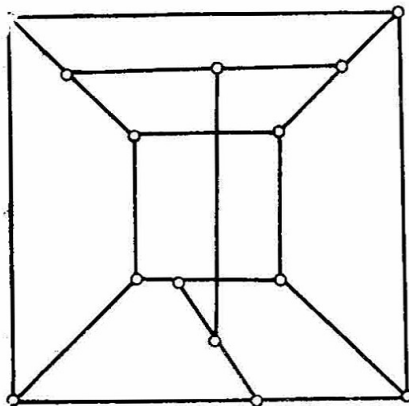


Рис. 1

Пусть G_1 и G_2 — два непересекающиеся 5-компонента графов из S_5^* , причем u_1, u_2, \dots, u_5 и v_1, v_2, \dots, v_5 — соответственно их вершины степени 2. Граф G , который получается из $G_1 \cup G_2$ добавлением ребер $u_1v_1, u_2v_2, \dots, u_5v_5$, называем *с о ч л е н е н и е м* G_1 и G_2 ; будем еще говорить, что G получен из G_1 и G_2 применением операции γ' (*с о ч л е н е н и е м*). Очевидно, что G не определяется однозначно графами G_1 и G_2 ; он зависит от способа нумерации вершин степени 2.

Для удобства вводим еще термин *с м е ж н ы е ц и к л ы* для двух циклов s_1 и s_2 , у которых есть общее ребро и нет других общих элементов, т. е. для которых $s_1 \cap s_2 = K_2$.

3. КЛАССИФИКАЦИЯ ГРАФОВ ИЗ S_5^0

Прежде всего укажем на некоторые графы из S_5^0 .

Пусть $C_{n,5}$ — граф, у которого есть цикл без диагоналей (т. е. порожденный цикл) $s_0 = u_1u_2 \dots u_n$ и еще n вершин v_1, v_2, \dots, v_n , причем v_i смежна с u_i, v_{i-2} и v_{i+2} (i меняется циклически от 1 до n). s_0 называем *о с н о в н ы м ц и к л о м*, а циклы $v_1v_3 \dots v_n$ и $v_2 \dots v_{n-1}$ при нечетном n и $v_1v_3 \dots v_{n-1}$ и $v_2v_4 \dots v_n$ при четном n называем *п е р и ф е р н ы м и ц и к л а м и*. Граф $C_{n,5}$ при четном n — плоский венок, разбитый на пятиугольники. При нечетном n он опять венок, но подвержен одному скручиванию, как при листе Мьобиуса (рис. 2). В частности $C_{5,5}$ — граф Петерсена, а $C_{10,5}$ — граф (1-скелет) додекаэдра.

Пусть $C'_{6,5}$ — граф, полученный из куба Q_3 подразбиением трех ребер, никакая пара из которых не принадлежит одной грани, и соединением трех разбивающих вершин с новой вершиной (рис. 3).

Пусть $C'_{9,5}$ — граф, полученный из $C_{10,5}$ (из додекаэдра) заменой одного 5-цикла s 3-цепью, т. е. $C'_{9,5}$ — сочленение $C_{10,5} - s$ с 3-цепью (рис. 4).

Непосредственно проверяется, что $C'_{6,5}$ и $C'_{9,5}$ — графы из S_5^0 .

Л е м м а 1. Если $n \geq 5$ и $n \neq 6, n \neq 8$, то $C_{n,5} \in S_5^0$.

Доказательство. Пусть s — минимальный цикл $C_{n,5}$. Из $n \geq 5$ и $n \neq 6, n \neq 8$ следует, что если s — основной или периферный цикл, то $|s| \geq 5$. Пусть s — неосновной и не периферный цикл, т. е. содержит вершины среди $u_1,$

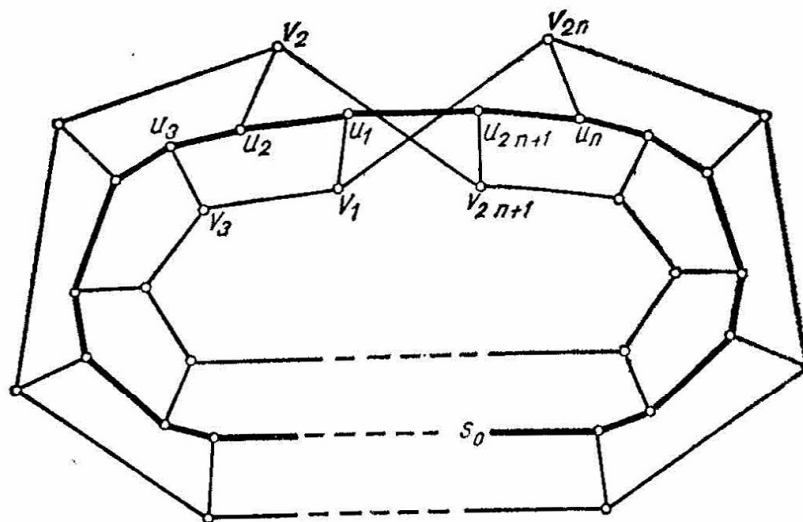


Рис. 2

u_2, \dots, u_n и среди v_1, v_2, \dots, v_n . Без ограничения принимаем, что s содержит вилку (3-цепь) $v_i u_i u_{i+1}$. Ни одна из вершин v_{i-2} и v_{i+2} , смежных v_i , несмежна

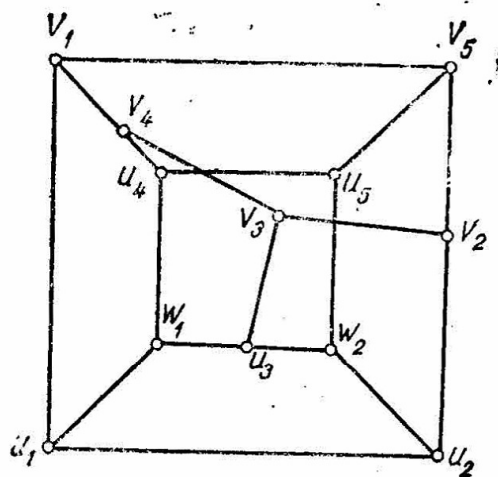


Рис. 3

u_{i+1} . Следовательно, s содержит, кроме одной из v_{i-2}, v_{i+2} , хотя бы еще одну вершину, т. е. $|s| \geq 5$. Так мы получили следующую оценку обхвата $C_{n,5}$:

$$(1) \quad g(C_{n,5}) \geq 5.$$

Пусть a — минимальный циклический разрез $C_{n,5}$. Докажем

(2) $|a| \geq 5$.

Если a — кограница цикла, согласно (1), имея в виду, что $C_{n,5}$ — кубический граф, получаем (2).

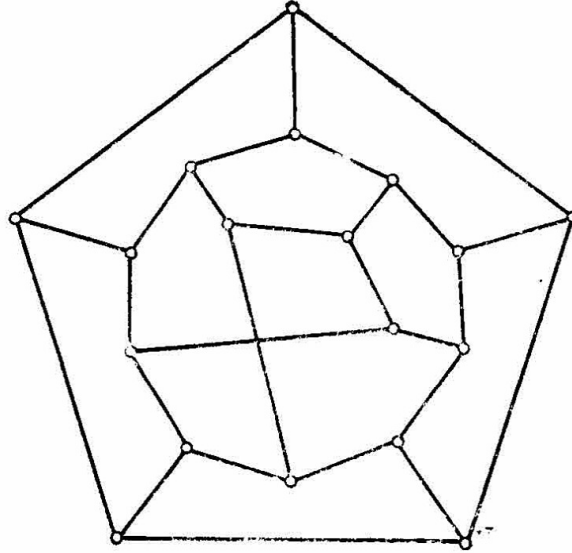


Рис. 4

Пусть a не является кограницей основного или периферного цикла. Тогда a содержит ребро из основного или периферного цикла. Если $v_j v_{j+2} \in a$, то a будет содержать и второе ребро цикла $v_j u_j u_{j+1} u_{j+2} v_{j+2}$, притом несмежное с $v_j v_{j+2}$, т. е. ребро основного цикла s_0 . Поэтому без ограничения принимаем, что

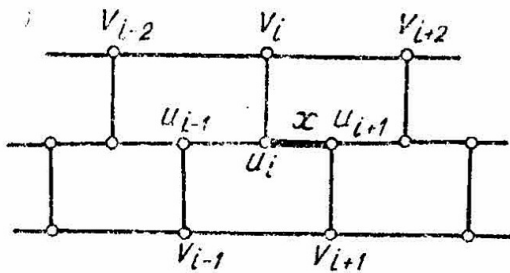


Рис. 5

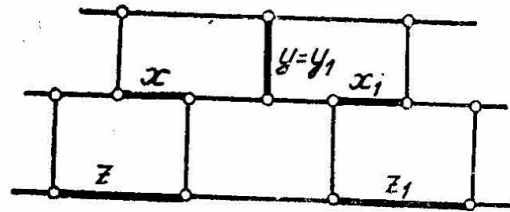


Рис. 6

$$x = u_i u_{i+1} \in a.$$

Ребро x принадлежит циклам $v_i u_i u_{i+1} u_{i+2} v_{i+2}$ и $v_{i-1} u_{i-1} u_i u_{i+1} v_{i+1}$ (рис. 5) и, следовательно, содержит, кроме x , еще ребра y и z соответственно из этих циклов. Но a , кроме x , содержит и второе ребро x_1 из s_0 , а вместе с ним и ребра y_1 и z_1 из соответствующих 5-циклов, содержащих x_1 . Так как x и x_1 несмежны (L', б)), то наиболее два из y, z, y_1, z_1 совпадают. Следовательно, $|a| \geq 5$. Отсюда, принимая в виду, что C_{n+5} содержит 5-циклы и a —

минимальный разрез, получаем, что (2) справедливо с равенством. Тогда два из ребер y, z, y_1, z_1 будут совпадать (рис. 6) и a будет кограницей 5-цикла. Следовательно, $C_{n,5} \in S_5^0$.

Пусть G — кубический циклически 5-связной граф. Так как G не содержит 3- и 4-циклов, то любые два из его 5-циклов могут иметь не более трех общих вершин и эти вершины последовательны (порождают цепь).

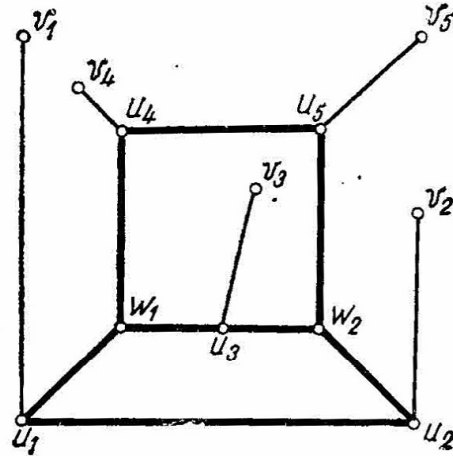


Рис. 7

Л е м м а 2. Пусть $G \in S_5^0$ и два его цикла имеют общую вилку (3-цепь). Тогда $G \in \{C_{5,5}, C'_{6,5}\}$.

Доказательство. Пусть вилка $w_1 u_3 w_2$ содержится в 5-циклах $s_1 = w_1 u_3 w_2 u_2 u_1$ и $s_2 = w_1 u_3 w_2 u_5 u_4$ графа G . Из $g(G) > 4$ следует, что множества $\{u_1, u_2\}$ и $\{u_4, u_5\}$ несмежны (не содержат смежных вершин). Пусть v_i — смежная вершина u_i ($i=1, 2, 3, 4, 5$), которая вне $s_1 \cup s_2$ (рис. 7). Тогда

$$a = \{u_1 v_1, u_2 v_2, u_3 v_3, u_4 v_4, u_5 v_5\} \in r(G),$$

а среди вершин v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 , возможны только следующие два совпадения: $v_1 = v_5$ и $v_2 = v_4$.

1. Пусть $v_1 = v_5$ и $v_2 = v_4$. Если $a \in r'(G)$, то $a \in r'_5(G)$ и получаем противоречие Л', б). Следовательно, $a \notin r'(G)$. Компонент графа $G - a$, который различен от $s_1 \cup s_2$, будет ациклическим графом, и для него (согласно Л', а)) есть единственная возможность — быть цепью $v_1 v_3 v_2$. Следовательно, $G = C_{5,5}$.

2. Пусть $v_1 \neq v_5$. Так как у каждого компонента $G - a$ есть не менее 4 вершин, то, согласно Л', а), $a \in r'_5(G)$. Отсюда и из Л', б) получаем $v_2 \neq v_4$. Аналогичным образом из $v_2 \neq v_4$ следует $v_1 \neq v_5$. Следовательно, нет других возможностей, кроме рассмотренного случая. Так как a не является существенным разрезом, то компонент $G - a$, различный от $s_1 \cup s_2$ — это 5-цикл s с вершинами v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 . Из-за симметрии относительно s_1 и s_2 , а также относительно w_1 и w_2 , без ограничения принимаем, что

$$(3) \quad v_2 v_3 \in E(s).$$

Так как $g(G) > 4$, то $v_1 v_2 \notin E(s)$ и $v_4 v_5 \notin E(s)$. Следовательно, для ребер s , инцидентных вершинам v_2 и v_4 , получаем: справедливо в точности одно из

$$v_2 v_4 \in E(s), \quad v_2 v_5 \in E(s),$$

и справедливы в точности два из соотношений

$$v_1v_4 \in E(s), \quad v_2v_4 \in E(s), \quad v_3v_4 \in E(s).$$

Но $v_2v_4 \in E(s)$ и $v_3v_4 \in E(s)$ невозможны одновременно из-за (3). Следовательно, для ребер s , инцидентных v_2 и v_4 , получаем единственные две возможности:

$$\{v_2v_3, v_1v_4, v_3v_4, v_2v_5\} \subset E(s) \quad \text{или} \quad \{v_2v_3, v_1v_4, v_2v_4\} \subset E(s).$$

Отсюда для s однозначно определены возможности

$$\text{а) } s = v_1v_4v_3v_2v_5 \quad \text{или} \quad \text{б) } s = v_1v_4v_2v_3v_5.$$

Если выполнено б), непосредственно проверяется, что ребро u_3w_2 не принадлежит 5-разрезу, а это, согласно L'' , противоречит условию $G \in S_5$. Таким образом возможным оказывается только случай а). Но тогда, как видно из рис. 3, $G = C'_{6,5}$.

С л е д с т в и е 1. Если $G \in S_5^0$ и у G есть 8-цикл с двумя диагоналями, то $G = C_{5,5}$.

Доказательство. Пусть s — 8-цикл с последовательными вершинами v_1, v_2, \dots, v_8 . Из $g(G) > 4$ следует, что каждая диагональ s соединяет противоположащие (для s) вершины и две диагонали несмежны с одним и тем же ребром s . Следовательно, не теряя общности, принимаем, что диагонали s — это v_1v_5 и v_3v_7 . Тогда у 5-циклов $v_1v_2v_3v_4v_5$ и $v_3v_4v_5v_6v_7$ есть общая вилка, откуда согласно лемме 1 получаем $G \in \{C_{5,5}, C'_{6,5}\}$. Но у кограницы $\langle s \rangle$ есть 4 ребра, т. е. вне s есть только две вершины G . Следовательно, $G = C_{5,5}$.

С л е д с т в и е 2. Если $G \in S_5^0 \setminus \{C_{5,5}, C'_{6,5}\}$ и у G есть 5-цикл, смежной с пятью 5-циклами, то

$$G \in \{C_{10,5}, G'_{9,5}\}.$$

Доказательство. Пусть 5-цикл $s_0 = u_1u_2u_3u_4u_5$ смежен с 5-циклами $s_i = w_i v_{i+2} u_{i+2} u_{i+3} v_{i+3}$ (i изменяется циклически от 1 до 5). Если $v_i = v_j$ за

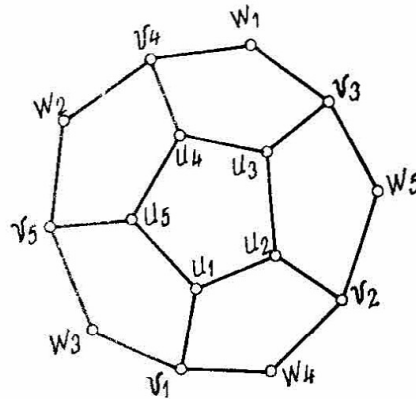


Рис. 8

$i \neq j$, т. е. если v_i смежен с двумя вершинами s_0 , получаем противоречие условию $g(G) > 4$. Если $w_i = w_{i+1}$, то s_i и s_{i+1} содержат общую вилку, и получаем противоречие лемме 2. Если $w_i = w_{i+2}$, получаем вершину степени 4. Так что рассматриваемые вершины различны, и объединение G_0 циклов s_0, s_1, \dots, s_5 — это граф, полученный из $C_{10,5}$ (додекаэдра) удале-

нием одного 5-цикла (рис. 8). Если две из вершин G_0 степени 2 смежны, получаем 4-цикл или два 5-цикла с общей вилкой. Поэтому кограница G_0 — это 5-разрез a .

1. Пусть $a \in r'(G)$. Из условия $G \in S_5^0$ следует, что $G - G_0$ — 5-цикл. Как легко сообразить, G_0 и 5-цикл можно сочлениить четырьмя разными способами, и один из полученных графов есть $C_{10,5}$, а остальные три вне S_5 (так как у них есть ребра, не содержащиеся в 5-разрезах).

2. Пусть $a \notin r'(G)$. Тогда у $G - G_0$ есть единственная возможность — быть 3-цепью. Следовательно, в этом случае $G = C'_{9,5}$.

Теорема 1. $S_5^0 = \{C'_{9,5}, C'_{9,5}, C_{n,5} : n \geq 5, n \neq 6, n \neq 8\}$.

Доказательство. Пусть $G \in S_5^0 \setminus \{C'_{6,5}, C'_{9,5}, C_{5,5}, C_{10,5}\}$. Докажем, что $G = C_{n,5}$, где $n = 7$ или $n > 10$. Отсюда и из леммы 1 вытекает теорема.

Согласно лемме 2 и следствиям 1 и 2, G обладает свойствами:

1°. Если два 5-цикла пересекаются, то сечение содержит одну вершину или две смежные вершины.

2°. У каждого 8-цикла есть наиболее одна диагональ.

3°. У каждого 5-цикла есть наиболее четыре смежные 5-цикла.

Кроме того, из $G \in S_5^0$ и L'' вытекает и

4°. Каждое ребро выходит из 5-цикла (один из его концов принадлежит 5-циклу).

Пусть s_1 — 5-цикл G . Применяя 4° для одного ребра s_1 и имея в виду 1°, получаем 5-цикл s_2 , смежный s_1 . Применяя 4° для общего ребра s_1 и s_2 , получаем 5-цикл s_3 , смежный с s_1 и s_2 . Согласно 2°, $s_1 \cup s_2 \cup s_3 = \langle s_1 \cup s_2 \cup s_3 \rangle$, т. е. $G_3 = s_1 \cup s_2 \cup s_3$ — порожденный подграф. Применяя 4° для ребра s_2 , противоположащего общей вершине s_1, s_2, s_3 , получаем 5-цикл s_4 , смежный либо с s_1 и s_2 , либо с s_2 и s_3 . Не теряя общности, принимаем, что s_4 смежный s_2 и s_3 (рис. 9). Рассмотрим в отдельности каждый случай, когда $G_4 = G_3 \cup s_4$ — порожденный подграф и нетакой.

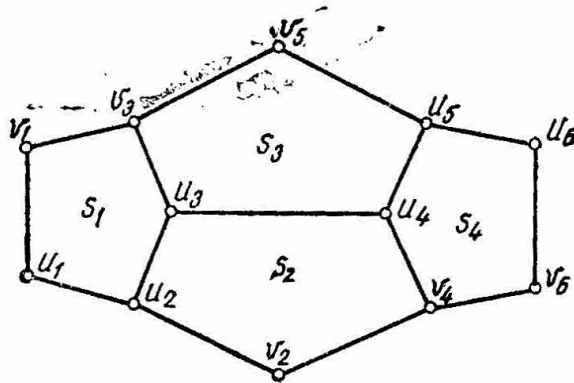


Рис. 9

1. Пусть $G_4 \neq \langle G_4 \rangle$. Из $g(G) > 4$ и свойства 2° вытекает, что у $\langle G_4 \rangle$ есть в точности одно ребро x вне G_4 ; согласно принятым означениям на рис. 9, x связывает $\{u_1, u_2\}$ с $\{u_6, v_6\}$. Кограница aG_4 — 4-разрез и, следовательно, $G - G_4 = K_2$.

Если $x = u_1 u_6$ (или $x = v_1, v_6$), получаем, что вилка $u_2 v_2 v_4$ (или $v_3 v_5, u_6$) содержится в двух 5-циклах, что противоречит 1⁰. Следует, что x среди $u_1 u_6$ и $v_1 v_6$. Без ограничения общности принимаем

$$x = v_1 v_6.$$

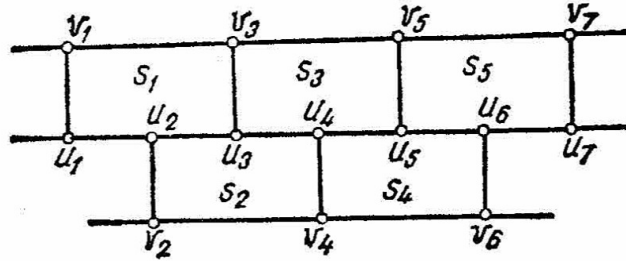


Рис. 10

Тогда у v_2 и одной из вершин u_1, u_6, v_5 будет общая смежная вершина v_7 . Если v_7 смежна u_1 , получится 4-цикл, а если смежна u_6 , получатся 5-циклы с общей вилкой. Таким образом, v_7 смежна u_7 (и v_2). Тогда у u_1, u_6 и v_7 будет общая смежная вершина u_7 и $G = C_{7,5}; u_1 u_2 \dots u_7$ — основной цикл G .

2. Пусть $G_4 = \langle G_4 \rangle$. По 4⁰ ребро $u_6 v_6$ выходит из некоторого 5-цикла s_5 . Из-за симметрии, не теряя общности, принимаем, что s_5 содержит u_6 . Тогда s_5 содержит u_5, v_5 и две новые вершины u_7 и v_7 (рис. 10). Также ребро $u_7 v_7$ выходит из 5-цикла s_6 . Если $v_7 \in s_6$, то s_6 содержит v_5, v_3 , и придем к противоречию с 3⁰. Следовательно, s_6 содержит u_7, u_6, v_6 и еще две вершины u_8 и v_8 ($s_6 = u_7 u_6 v_6 v_8 u_8$). Некоторая из вершин u_8 и v_8 может совпадать с вершиной степени 2 графа $G_4 \cup s_5$. Но из $\chi(G) > 1$ вытекает, что наиболее одна из u_8, v_8 может совпадать с некоторой из u_1, v_1, v_2 . Если нет совпадения, рассмотрим 5-цикл s_7 , из которого выходит ребро $u_8 v_8$. Опять из 3⁰ следует, что s_7 не содержит v_8 , т. е. что s_7 содержит u_8, u_7, v_7 и еще две вершины u_9 и v_9 ($s_7 = u_8 u_7 v_7 v_9 u_9$). Если $\{u_9, v_9\}$ не пересекает $\{u_1, v_1, v_2\}$, рассматриваем 5-цикл s_8 , из которого выходит ребро $u_9 v_9$ и т. д. Так получаем последовательность 5-циклов

$$s_1, s_2, \dots, s_i, \dots \quad (s_i = u_{i+1} u_i v_i v_{i+2} u_{i+2}),$$

причем каждый ее цикл смежен с предыдущими двумя циклами. Так как G — конечный граф, для некоторых i ($i > 5$) соответствующий цикл будет содержать некоторые из вершин u_1, v_1 и v_2 . Пусть s_{n-1} — первый из этих циклов. Тогда

$$(4) \quad \{u_1, v_1, v_2\} \cap \{u_{n+1}, v_{n+1}\} \neq \emptyset.$$

Так как u_{n+1} и v_{n+1} смежны между собой и соответственно с u_n и v_{n-1} , а смежные вершины $v_2 = u_2$ и v_4 , то предположение $v_2 \in \{u_{n+1}, v_{n+1}\}$ приводит к противоречию условия, что n — минимальный индекс, для которого выполняется (4). Следовательно, $u_{n+1} \neq v_2 \neq v_{n+2}$, т. е.

$$\{u_1, v_1\} \cap \{u_{n+1}, v_{n+1}\} \neq \emptyset.$$

Если $\{u_1, v_1\}$ и $\{u_{n+1}, v_{n+1}\}$ имеют только одну общую вершину, она будет степени 4. Следовательно,

$$\{u_1, v_1\} = \{u_{n+1}, v_{n+1}\}.$$

Отсюда получаем, что $v_2 v_n \in E(G)$.

Если $u_{n+1} = v_1$ (и $v_{n+1} = u_1$), так как $\{v_1, u_3\}$ и $\{u_n, v_{n-2}\}$ несмежны, получим, что ребро $u_1 v_1$ не выходит из 5-цикла. Поэтому $u_{n+1} = u_1, v_{n+1} = v_1$, т. е. $G = C_{n,5}; u_1 u_2 \dots u_n$ — основной цикл G . Этим закончено доказательство теоремы 1.

4. КОНСТРУКТИВНОЕ ПОЛУЧЕНИЕ МНОЖЕСТВА S_5^* ИЗ БАЗЫ $S_5^0 \cup \{Q\}$ ОПЕРАЦИЯМИ γ И γ'

Для полного описания S_5 остается определить графы этого множества, у которых есть существенные, но неособые 5-разрезы. Это весьма широкое подмножество S_5 и его характеристика будет предметом следующей статьи. Теперь мы покажем, что кубические циклически 5-связные графы могут получиться вместо из S_5 , из более узкой базы $S_5^0 \cup \{Q\}$, но не только операцией γ , а применением двух операций — γ и γ' .

Л е м м а 3. Пусть $G \in S_5^*$, a — существенный, но неособый разрез G , а граф H получен сочленением компонента G_1 графа $G - a$ с 5-циклом s . Тогда $H \in S_5^*$.

Доказательство. По определению операции γ' (сочленения) граф H — кубический. Кроме того, a — циклический 5-разрез H . Следовательно, $\lambda'(H) \leq 5$.

Допустим, что

$$\lambda'(H) < 5,$$

и пусть b — минимальный циклический разрез H . Тогда

$$(5) \quad |b| < 5.$$

Если $b \subset E(G_1) \cup a$, получим, что $b \in r'(G)$, а это приводит к противоречию условия $G \in S_5^*$. Так как $b \in r'(H)$, то очевидно, что $b \not\subset E(s) \cup a$. Так получаем

$$b \cap E(G_1) \neq \emptyset \neq b \cap E(s).$$

Так как s — цикл, то $|b \cap E(s)| \geq 2$. Отсюда, согласно $L', 6)$, вытекает, что в точности два ребра s — x_1 и x_2 принадлежат b и что один из компонентов $H - b$, который обозначаем через H_1 , содержит в точности две вершины s — v_1 и v_2 . Пусть y_1 и y_2 — ребра a , выходящее соответственно из v_1 и v_2 . Так как $b \in r'(H)$, то H_1 содержит цикл s_1 . Если $\{y_1, y_2\} \subset E(s_1)$, так как a не является особым разрезом G , то расстояние между y_1 и y_2 больше 2 и, следовательно, $|V(s_1) \cap V(G_1)| \geq 3$, т. е.

$$(6) \quad |V(H_1) \cap V(G_1)| \geq 3.$$

Если $\{y_1, y_2\} \not\subset E(s_1)$, то $E(s_1) \subset E(G_1)$. Следовательно, (6) всегда справедливо. Кроме того, множество

$$c = (b \setminus \{x_1, x_2\}) \cup \{y_1, y_2\} —$$

разрез G . Для него, согласно (5), справедливо

$$(7) \quad |c| < 5.$$

Один из компонентов $G-c$ содержит $G-G_1$ и, следовательно, содержит цикл. Другой компонент $G-c$ содержит граф $G'=H_1-\{v_1, v_2\}$. По (6), $|V(G')| \geq 3$. Отсюда и из (7), согласно L' , а), получается, что G' тоже содержит цикл, так что $c \in r'(G)$. Но это, вместе с (7), противоречит условию $G \in S_5^*$. Это противоречие отбрасывает предположение $\lambda'(H) < 5$. Следовательно, $\lambda'(H) = 5$, т. е. $H \in S_5^*$.

Т е о р е м а 2. Каждый граф S_5^* получается из графов $S_5' = S_5^0 \cup \{Q\}$ операциями γ_2 и γ' .

Доказательство. Теорему докажем индукцией по числу вершин графа; графы S_5^* с небольшим числом вершин (напр. до 12) принадлежат S_5^0 .

Пусть $G \in S_5^*$. Согласно L^0 , G получается из некоторого графа $H \in S_5$ последовательным применением операции γ_2 . Существенным является случай, когда H вне S_5' , т. е. когда $H \in S_5 \setminus S_5'$. Тогда у H есть существенный 5-разрез a , который не является особым. Пусть H_1 и H_2 — компоненты $H-a$, а G_1 и G_2 — графы, полученные сочленением соответственно H_1 и H_2 с 5-циклами. По лемме 3, G_1 и G_2 принадлежат S_5^* . Кроме того, так как $|V(H_i)| > 5$, то $|V(G_i)| < |V(G)|$ ($i=1, 2$). Отсюда, согласно индукционному предположению, G_1 и G_2 получаются из S_5' операциями γ_2 и γ' . Это означает, что и G получается из S_5' операциями γ_2 и γ' .

ЛИТЕРАТУРА

1. W o r m a l d, N. Classifying k -connected cubic graphs. — Lecture Notes Math., 748, 1979, 199—206.
2. Х а р а р и, Ф. Теория графов. М., Мир, 1973.
3. М а р т и н о в, Н. Класифициране на кубичните циклично 5-свързани графи. — В: Математика и математическо образование. Доклади Единалесета пролетна конференция, април 1982 г. София, 1982, 211—217.

Поступила 3. 4. 1985 г.

**О МИНИМАЛЬНЫХ ПОДПЛОСКОСТЯХ И ГРУППАХ
АВТОМОРФИЗМОВ, СОХРАНЯЮЩИХ ОКРУЖНОСТЬ,
В НЕМИКЕЛЕВЫХ ИНВЕРСНЫХ ПЛОСКОСТЯХ $S(q)$**

Чавдар Лозанов

Чавдар Лозанов. О минимальных подплоскостях и группах автоморфизмов, сохраняющих окружность в немикелевых инверсных плоскостях $S(q)$. В настоящей работе получена связь между минимальными микелевыми подплоскостями инверсных немикелевых плоскостей $S(q)$ и группой $\text{Aut } S(q)$ автоморфизмов $S(q)$. Получены также геометрические характеристики подгрупп группы $\text{Aut } S(q)$, сохраняющие окружность в этих плоскостях, как и их связь с параболическими пучками окружностей,

Chavdar Lozanov. On the Minimal Subplanes and the Groups of Automorphisms That Fix a Circle in Non-miquelian Inversive Planes $S(q)$. In the paper is obtained the connection of minimal miquelian subplanes of non-miquelian inversive planes $S(q)$ with the group of the automorphisms $\text{Aut } S(q)$ of the planes. The geometric properties of the subgroups of $\text{Aut } S(q)$ that fix a circle of $S(q)$ are obtained, as well as their connection with the parabolic pencils in the planes.

Инверсная (Мебиусова) плоскость I есть структура инцидентности $S(\mathbf{P}, \mathbf{B}, Z)$, блоки которой названы окружностями, такая, что для каждой точки $P \in \mathbf{P}$ внутренняя структура I_P является аффинной плоскостью [1, 6.1].

Известны два типа конечных инверсных плоскостей $M(q)$ и $S(q)$, которые изоморфны овоидальной инверсной плоскости $I(o)$, где o — соответственно невырожденная квадратика индекса 1 или овоид типа $t(\psi)$ [1, 6.1]. Плоскости $M(q)$ микелевы, а плоскости $S(q)$ немикелевы.

Подплоскостью одной инверсной плоскости $I(\mathbf{P}, \mathbf{B}, Z)$ называем подструктуру $J(Q, D, Z')$, где $Q \subset \mathbf{P}$, $D \subset \mathbf{B}$, $Z \subset Z' \cap (Q \times D)$, удовлетворяющую следующему условию: Если две окружности из J имеют только одну общую точку, то они касательные в I [1, 6.1].

Если I порядка n , а J порядка m , то $m \equiv n \pmod{2}$ и $m^2 + m \leq n$ [2].

Если φ — автоморфизм I , $\varphi \in \text{Aut } I$, обозначим через $F(\varphi)$ множество точек, двойных для φ и окружностей, инцидентных по крайней мере с тремя

такими точками. Тогда, если $F(\varphi)$ содержит хотя бы четыре точки, не принадлежащие одной окружности, то $F(\varphi)$ является подплоскостью I . Такой автоморфизм φ называется планарным [2].

В настоящей работе мы найдем связь между минимальными подплоскостями одной инверсной плоскости $S(q)$ и группой $\text{Aut } S(q)$ автоморфизмов этой плоскости, как и некоторые геометрические характеристики подгруппы группы $\text{Aut } S(q)$, сохраняющих окружность.

В исследовании мы будем пользоваться построенную в [3] модель плоскости $S(q)$ в $A(2, q)$. Точки $S(q)$ — упорядоченные пары (x, y) элементов поля Галуа $GF(q)$ ($q=2^e$, $e>1$, e — нечетное) и символ (∞) . Окружности $S(q)$ — овалы в соответствующей аффинной плоскости с уравнениями

$$D\psi(x, y) + Ax + By + C = 0,$$

где $\psi(x, y) = x^{\sigma+2} + y^\sigma + xy$ (σ — единственный автоморфизм $GF(q)$, для которого $x^{\sigma^2} = x^2$ для каждого $x \in GF(q)$). Здесь $D, A, B, C \in GF(q)$ и $\psi(B, AD^\sigma) \neq CD^{\sigma+1}$, если $D \neq 0$, и $\psi(B, A) \neq 0$, если $D = 0$.

Точка (∞) инцидентна с окружностями, для которых $D = 0$ и только с ними.

Аutomорфизмы $S(q)$ заданы в явном виде:

$$\varphi_{abpsr}^\alpha \begin{cases} x' = \left[a + r \frac{g(p, s, x, y)}{f(p, s, x, y)} \right]^\alpha, \\ y' = \left[b + r \frac{r^\sigma h(p, x) + a^\sigma g(p, s, x, y)}{f(p, s, x, y)} \right]^\alpha \end{cases}$$

для $(x, y) \neq (p, s)$ и $\varphi_{abpsr}^\alpha(p, s) = (\infty)$, $\varphi_{abpsr}^\alpha(\infty) = (a^\alpha, b^\alpha)$,

$$\tau_{klm}^\beta \begin{cases} x' = [kh(l, x)]^\beta, \\ y' = [k^{\sigma+1} g(l, m, x, y)]^\beta. \end{cases}$$

$$\tau_{klm}^\beta(\infty) = (\infty).$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$h(p, x) = p + x; \quad g(p, s, x, y) = p^\sigma h(p, x) + h(s, y);$$

$$f(p, s, x, y) = \psi(x, y) + sx + py + \psi(p, s).$$

Коэффициенты $a, b, p, s, r \neq 0$, $k \neq 0$, $l, m \in GF(q)$, а α и β — внутренние автоморфизмы поля $GF(q)$.

Группа автоморфизмов $\text{Aut } S(q)$ плоскости $S(q)$ дважды транзитивна на множестве точек $S(q)$ и транзитивна на множестве окружностей $S(q)$.

Дальше для удобства вводим следующие обозначения: $c(ABC \dots)$ — точки A, B, C, \dots , инцидентны с окружностью c ; cAc' — окружности c и c' касаются в точке A .

Теорема 1. Группа автоморфизмов плоскости $S(q)$ транзитивна на множестве минимальных микелевых подплоскостей плоскости $S(q)$.

Доказательство.

Автоморфизм $\tau_{100}^2 \in \text{Aut } S(q)$:

$$\tau_{100}^2 \begin{cases} x' = x^2, \\ y' = y^2, \end{cases} \tau_{100}^2 \neq id,$$

планарный, так как точки (∞) , $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ неподвижные при τ_{100}^2 и не лежат на одной окружности.

Автоморфизм τ_{100}^2 не имеет других неподвижных точек и, следовательно, подплоскость $F(\tau_{100}^2)$ является минимальной инверсной плоскостью порядка 2, т. е. $F(\tau_{100}^2)$ — микелева инверсная плоскость $M(2)$.

Мы покажем, что группа $\text{Aut } S(q)$ транзитивна на множестве минимальных подплоскостей плоскости $S(q)$, т. е. для каждой $M(2) \subset S(q)$ существует $\varphi \in \text{Aut } S(q)$, такой, что $M(2) \xrightarrow{\varphi} F(\tau_{100}^2)$. (Каждая подплоскость $M(2)$ плоскости $S(q)$ изоморфна $F(\tau_{100}^2)$.)

Пусть A, B, C, D, E — точки $M(2)$. Так как $\text{Aut } S(q)$ дважды транзитивна на множестве точек $S(q)$, без ограничения общности можем считать, что $D = (\infty)$, $E = (0, 0)$.

Каждой окружности подплоскости $M(2)$ принадлежат три точки этой подплоскости. Следовательно, каждая из окружностей $x=0$ и $y=0$ плоскости $S(q)$, проходящих через D и E , может быть инцидентной с не более чем одной из точек A, B, C .

Пусть точка A неинцидентна с $x=0$, $y=0$, т. е. $A = (a_1, a_2)$, $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$. Но $\tau_{k00}^1 \in \text{Aut } S(q)$ при $k = (a_1/a_2)^{\sigma^2}$ является таким автоморфизмом, что $\tau_{k00}^1(D) = D$, $\tau_{k00}^1(E) = E$, $\tau_{k00}^1(A) = A'$, где $A' = (ka_1, ka_2)$.

Итак, мы можем принять, что $D = (\infty)$, $E = (0, 0)$, $A = (a, a)$, $B = (b, c)$, $C = (d, e)$, где $a \neq 0$, точки $M(2)$.

Окружности $M(2)$ суть следующие десять окружностей: $c_1(DEA)$, $c_2(DEB)$, $c_3(DEC)$, $c_4(DAB)$, $c_5(DAC)$, $c_6(DBC)$, $c_7(ABC)$, $c_8(EAB)$, $c_9(EAC)$, $c_{10}(EBC)$.

Согласно условию для касания окружностей в одной подплоскости, имеем, что всегда, когда $c_i P c_j$ в $M(2)$, соответствующие им окружности в $S(q)$ (для простоты обозначаем их опять через c_i, c_j) должны выполнять условие $c_i P c_j$.

Тогда условия $c_3 D c_4$, $c_5 D c_2$, $c_3 C c_7$ дают

$$(1) \quad d = a + b, \quad e = a + c.$$

Из условий $c_1 A c_7$, $c_2 B c_7$, $c_3 C c_7$ следует

$$(2) \quad \psi(a, a) = \psi(d, e),$$

$$(3) \quad \psi(a, a) = \psi(b, c).$$

Так как $c_4 A c_9$, $c_4 B c_7$, то

$$(4) \quad \psi(a, a) = a(b + c).$$

Имея в виду (1), получаем из (2)

$$(5) \quad \psi(a, a) = \psi(a + b, a + c).$$

Из (4) следует

$$c = \frac{\psi(a, a) + ab}{a},$$

а из (3) и (5)

$$c = \frac{1}{a} [\psi(a, a) + ab + a^\sigma b^2 + a^2 b^\sigma].$$

Отсюда находим следующую связь между a и b :

$$a^\sigma b^2 + a^2 b^\sigma = 0,$$

т. е.

$$ab(b^{\sigma-1} + a^{\sigma-1}) = 0.$$

Но $a \neq 0$, следовательно или $b=0$, или $b=a$.

При $b=0$ из (3) и (4) получаем

$$\psi(a, a) = ac,$$

$$\psi(a, a) = c^\sigma,$$

а отсюда $a=1$, $c=1$, т. е. $A=(1, 1)$, $B=(0, 1)$, $C=(1, 0)$, или $M(2)$ есть подплоскость $F(\tau_{100}^2)$.

Если $b=a$, из (4) и (5) получаем

$$\psi(a, a) = a(a+c),$$

$$\psi(a, a) = a^\sigma + c^\sigma,$$

а отсюда следует $a=1$, $c=0$, т. е. $A=(1, 1)$, $B=(1, 0)$, $C=(0, 1)$. Следовательно, и в этом случае $M(2)$ есть подплоскость $F(\tau_{100}^2)$.

Этим теорема доказана.

О п р е д е л е н и е. Пусть P — точка, инцидентная с окружностью c , и

$$\text{Stab } P = \{\varphi \in \text{Aut } S(q), \varphi(P) = P\}, \quad \text{Stab } c = \{\chi \in \text{Aut } S(q), \chi(c) = c\}.$$

Если $\text{Stab } c \subseteq \text{Stab } P$, то мы называем P особой точкой P_c окружности c .

Т е о р е м а 2. Для каждой окружности c существует единственная особая точка P_c . Группа $\text{Stab } c$ дважды транзитивна на множестве точек $\{X \in c, X \neq P_c\}$.

Так как $\text{Aut } S(q)$ транзитивна на множестве \mathbf{B} окружностей плоскости $S(q)$, то без ограничения можем считать, что $c \equiv c_0 : x=0$.

Используя явное задание автоморфизмов группы $\text{Aut } S(q)$, имеем

Случай А.

$$\varphi_{abpsr}^a(c_0) = c_0',$$

$$c_0' : p^\alpha \psi(x, y) + (pb + a^\sigma r)^\alpha x + (pa + r)^\alpha y + [p\psi(a, b) + r(a^{\sigma+1} + b)]^\alpha = 0.$$

Но $c_0 \equiv c_0'$ тогда и только тогда, когда

$$(6) \quad p^\alpha = 0,$$

$$(7) \quad (pa + r)^\alpha = 0,$$

$$(8) \quad [p\psi(a, b) + r(a^{\sigma+1} + b)]^\alpha = 0.$$

Из (6) и (7) следует $p=0, r=0$. Но $r \neq 0$ для каждого автоморфизма φ_{abpsr}^α . Следовательно, $\varphi_{abpsr}^\alpha \notin \text{Stab } c_0$.

Случай Б.

$$\tau_{klm}^\beta(c_0) = c_0^l : k^{(\sigma+1)\beta} x + l^\beta k^{(\sigma+1)\beta} = 0.$$

Но $c_0 \equiv c'_0$ тогда и только тогда, когда $l^\beta k^{(\sigma+1)\beta} = 0$. Так как $k \neq 0$, то $l = 0$. Следовательно, $\text{Stab } c_0 = \{\tau_{k0m}^\beta\}$.

С другой стороны, $P = (\infty) \in c_0$ и $\text{Stab } P = \{\tau_{klm}^\beta\}$, т. е. $\text{Stab } c_0 \subseteq \text{Stab } P$.

Следовательно, P — особая точка окружности c_0 .

Пусть $Q \neq P$ и $Q \in c_a$. Тогда $Q = (0, a)$, $a \in GF(q)$, $\tau_{k0m}^\beta(Q) = (0, (k^{\sigma+1} a + m)^\beta)$.

Но $\tau_{k00}^\beta(Q) \neq \tau_{k01}^\beta(Q)$, так как $(k^{\sigma+1} a)^\beta \neq (k^{\sigma+1} a)^\beta + 1$ для каждого $a \in GF(q)$. Следовательно, $\text{Stab } c_0$ не является подгруппой $\text{Stab } Q$ и точка Q не будет особой точкой окружности c_0 .

Итак, $P = P_{c_0} = (\infty)$ есть единственная особая точка окружности c_0 .

Пусть $Q_1 = (0, a)$, $Q_2 = (0, b)$, $a \neq b$, и $\tau_{k_0 0 m_0}^\beta \in \text{Stab } c_0$, где $k_0 = (a+b)^{1-\sigma}$, $m_0 = a(a+b)^{-1}$. Тогда $\tau_{k_0 0 m_0}^\beta(Q_1) = (0, 0)$, $\tau_{k_0 0 m_0}^\beta(Q_2) = (0, 1)$ для каждого $\beta = 2^i, i < e$. Пусть $Q_3 = (0, c)$, $c \neq a, c \neq b$. Тогда $\tau_{k_0 0 m_0}^\beta(Q_3) = (0, (k_0^{\sigma+1} c + m_0)^\beta)$. Если $d \neq (k_0^{\sigma+1} c + m_0)^\beta$, то не существует автоморфизм $\tau_{k_0 0 m_0}^\beta$, такой, что $\tau_{k_0 0 m_0}^\beta(Q_3) = (0, d)$. Следовательно, группа $\text{Stab } c_0$ дважды, но не трижды транзитивна на множестве точек $\{X \in c_0, X \neq P_{c_0}\}$.

Пусть $c: D\psi(x, y) + Ax + By + C = 0$ — произвольная окружность, $\varphi \in \text{Aut } S(q)$ такой, что $\varphi(c_0) = c$.

Из явного задания $\text{Aut } S(q)$ следует:

1. Если $D \neq 0$, то $\varphi_{a_0 b_0}^{\alpha \beta \beta psr}$, где

$$a_0 = D^{-1} \{[\psi(B, AD^\sigma) + CD^{\sigma+1}]^{(2-\sigma)/2} + B\},$$

$$b_0 = D^{-1} [a_0^\sigma (B + Da_0) + A], \quad \alpha\beta = q.$$

Тогда для особой точки $P_{c_0} = (\infty)$ окружности c_0 и для каждого автоморфизма φ , переводящего c_0 в c , выполняется $\varphi(P_{c_0}) = Q = (a_0, b_0)$.

2. Если $D = 0, B \neq 0$, то $\varphi = \varphi_{a_0 b_0}^{\alpha \beta \beta psr}$, где

$$a_0 = \left(\frac{A}{B}\right)^{(\sigma+2)/2} + \frac{C}{B}, \quad b_0 = \left(\frac{A}{B}\right)^{\sigma/2}, \quad \alpha\beta = q.$$

Тогда $\varphi(P_{c_0}) = Q = (a_0, b_0)$ для каждого автоморфизма переводящего c_0 в c .

3. Если $D = 0, B = 0$, то $\varphi = \tau_{klm}^\beta$ и очевидно $\varphi(P_{c_0}) = (Q) = (\infty)$.

Так как $\text{Stab } c = \{\varphi^{-1} \text{Stab } c_0 \varphi\}$, а $\text{Stab } Q = \{\varphi^{-1} \text{Stab } P_{c_0} \varphi\}$, то из $\text{Stab } c_0 \subseteq \text{Stab } P_{c_0}$ следует, что $\text{Stab } c \subseteq \text{Stab } Q$ и $Q = P_c$ — особая точка окружности c .

Итак, для каждой пары окружностей c и c' и $\varphi \in \text{Aut } S(q)$, если $\varphi(c) = c'$, то $\varphi(P_c) = \varphi(P_{c'})$.

В каждом множестве Π^L параболических пучков с базисной точкой L существует единственный пучок Π_0^L , такой, что группа стабилизатора Π^L транзитивна на множестве пучков $\{\Pi \in \Pi^L, \Pi \neq \Pi_0^L\}$ [4]. Пучок Π_0^L называется особым параболическим пучком в точке L .

Т е о р е м а 3. Множество окружностей через одну точку L , для которых P особая, есть особый параболический пучок в P .

Мы покажем, что если P — особая точка P_c окружности c , то особый параболический пучок Π_0^P в точке P является единственным особым параболическим пучком, содержащим c .

Пусть $c: x=0$.

Тогда, согласно теореме 2, $P=(\infty)$. Пусть $Q=(0, a) \in c$. Для особых параболических пучков Π_0^P и Π_0^Q соответственно в точках P и Q имеем:

$$\Pi_0^P: \{c_\lambda: x+\lambda=0; \lambda \in GF(q)\},$$

$$\Pi_0^Q: \{c_\lambda: \lambda f(0, a, x, y) + g(0, a, x, y) = 0, \lambda \in GF(q)\}.$$

Отсюда видно, что $c \in \Pi_0^P, c \notin \Pi_0^Q$.

Теперь покажем, что P — особая точка каждой окружности $c_\lambda \in \Pi_0^P$. Действительно, $\varphi_{abpsr}^\alpha(c_\lambda) = c_{\lambda'}$, где

$$c_{\lambda'}: (p+\lambda)^\alpha \psi(x, y) + [(p+\lambda)b + a^\sigma r]^\alpha x + [(p+\lambda)a + r]^\alpha y + [(p+\lambda)\psi(a, b) + r(a^{\sigma+1} + b)]^\alpha = 0,$$

а $c_\lambda \equiv c_{\lambda'}$ только тогда, когда

$$(9) \quad (p+\lambda)^\alpha = 0,$$

$$(10) \quad [(p+\lambda)b + a^\sigma r]^\alpha = \rho,$$

$$(11) \quad [(p+\lambda)a + r]^\alpha = 0,$$

$$(12) \quad [(p+\lambda)\psi(a, b) + r(a^{\sigma+1} + b)]^\alpha = \rho\lambda,$$

$$\rho \neq 0, \rho \in GF(q).$$

Из (9) и (10) следует $r=0$, чего быть не может.

Следовательно, в $\text{Stab } c_\lambda$ не существует автоморфизм вида φ_{abpsr}^α . Но $\tau_{kl,m}^\beta(c_\lambda) = c_\lambda$ для каждого $k, m \in GF(q)$ и $l_0 = \lambda k + \lambda^{q/\beta}$. Следовательно, $\text{Stab } c_\lambda \subseteq \text{Stab } P$, и этим теорема доказана.

Особая точка P_c одной окружности c и окружность c определяют параболический пучок, характеризующий инверсную плоскость типа VI.1. по классификации Херинга [5].

Т е о р е м а 4. Инволюции в $\text{Stab } c$ образуют коммутативную подгруппу группы $\text{Stab } c$.

Как в теореме 2, пусть $c: x=0$.

Так как $\text{Stab } c = \{\tau_{k0m}^\beta\}$, одна трансформация из этой группы будет инволюцией тогда и только тогда, когда, $(\tau_{k0m}^\beta)^2 = \text{id}$. Но

$$(\tau_{k0m}^\beta)^2 \begin{cases} x' = (k^{\beta+1}x^\beta)^\beta, \\ y' = (k^{(\sigma+1)(\beta+1)}y^\beta + k^{\sigma+1}m^\beta + m)^\beta. \end{cases}$$

Так как $c: x=0$, то $(\tau_{k0m}^\beta)^2 = \text{id}$ тогда, и только тогда, когда

$$y = (k^{(\sigma+1)(\beta+1)} y^\beta + k^{\sigma+1} m^\beta + m)^\beta,$$

или

$$y^\alpha = k^{(\sigma+1)(\beta+1)} y^\beta + k^{\sigma+1} m^\beta + m,$$

где $\alpha\beta = q$.

Полагая $k^{\sigma+1} = v$, можем написать последнее условие в следующем виде:

$$y^{\alpha^2} + v^\alpha (\beta+1) y + m v^\alpha + m^\alpha = 0.$$

Оно выполняется для каждого $y \in GF(q)$. При $y=0$, $y=1$ получаем

$$(13) \quad m v^\alpha + m^\alpha = 0,$$

$$(14) \quad v^{\sigma(\beta+1)} = 1.$$

Следовательно, $y^{\alpha^2} = y$ для каждого $y \in GF(q)$. Но это возможно только тогда, когда $\alpha^2 \equiv 1 \pmod{q-1}$. Так как $\alpha = 2^s$, $q = 2^e$, $s < e$, e — нечетное, то $2^{2s} \equiv 1 \pmod{2^e - 1}$. Следовательно, $e/2s$, или $s = tq$. Из (14) следует $v = 1$, а условие (13) выполняется для каждого m .

Следовательно, $\text{In } c = \{\tau_{10m}^1\}$ — инволюции в группе $\text{Stab } c$. $\text{In } c$ есть коммутативная подгруппа группы $\text{Stab } c$, так как $\tau_{10n}^1 \circ \tau_{10m}^1 = \tau_{10m}^1 \circ \tau_{10n}^1 = \tau_{10m+n}^1$.

З а м е ч а н и е. Первая часть теоремы следует и из [2], так как q — четное число. Здесь мы получили инволюции из $\text{Stab } c$ в явном виде.

Т е о р е м а 5. Три точки принадлежат одной минимальной подплоскости $M(2)$ тогда и только тогда, когда одна из этих точек особая точка окружности, определенной этими точками.

Пусть $A_1, A_2, A_3 \in M(2)$. Согласно теореме 1 и так как $\text{Aut } S(q)$ дважды транзитивна на множестве точек плоскости, без ограничения можем считать, что $A_1 = (\infty)$, $A_2 = (0, 0)$, а $A_3 = (m, n)$, где $m, n \in GF(2)$.

а. Если $A_3 = (1, 0)$, то $c(A_1 A_2 A_3): y=0$ и по теореме 2 получаем, что A_2 — особая точка c .

б. Если $A_3 = (1, 1)$, то $c(A_1 A_2 A_3): x+y=0$, и по теореме 2 получаем, что A_3 — особая точка окружности c .

в. Если $A_3 = (0, 1)$, то $c(A_1 A_2 A_3): x=0$ и A_1 есть особая точка окружности c .

Пусть $c(A_1 A_2 A_3)$ и A_1 — особая точка окружности c . Согласно теореме 2, получаем, что если $\varphi(c) = c_0: x=0$, то $\varphi(A_1) = (\infty)$. Так как $\text{Stab } c_0$ дважды транзитивна на множестве точек $\{X \in c_0, X \neq (\infty)\}$, то существует автоморфизм $\tau \in \text{Stab } c_0$, такой, что $\tau \varphi(A_2) = (0, 0)$, $\tau \varphi(A_3) = (0, 1)$, т. е. $A_1, A_2, A_3 \in M(2)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Dembowski, P. Finite Geometries. Berlin—Heidelberg—New York, 1968.
2. Dembowski, P. Automorphismen endlicher Möbius-Ebenen. — Math. Z., **87**, 1965, 115—136.
3. Енева, Г., Ч. Лозанов. Инверсные плоскости типа $S(q)$. — Докл. БАН, **36**, 1983, № 6, 761—762.
4. Енева, G. Über die Büschel in einer $S(q)$ -Möbiusebene, — Potsd. Forsch., B, 1984, No 41, 93—94.
5. Hering, C. Eine Klassifikation der Möbius-Ebenen. — Math. Z., **87**, 1965, 252—262.

Поступила 3. 4. 1985 г

**ОДНА ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ЧЕТВЕРОК
КОНЦИКЛИЧЕСКИХ ТОЧЕК В ИНВЕРСНЫХ НЕМИКЕЛЕВЫХ
ПЛОСКОСТЯХ $S(q)$**

Чавдар Лозанов

Чавдар Лозанов. Одна геометрическая характеристика четверок конциклических точек в инверсных немикелевых плоскостях $S(q)$. Один из возможных случаев пяти-точечного распада теоремы Микеля нельзя осуществить в микелевой инверсной плоскости. В работе показано, что этот случай выполняется в конечных немикелевых инверсных плоскостях $S(q)$. Это дает возможность получить геометрическую характеристику четверок конциклических точек в этих плоскостях.

Chavdar Lozanov. A Geometric Characterization of the Quadruples Concircular Points in Non-miquelian Inversive Planes $S(q)$. One of the possible 5-point cases of the Theorem of Miquel is not realized in any miquelian inversive plane. In this paper is shown that this case can be realized in finite non-miquelian inversive planes $S(q)$. It gives a possibility to obtain a geometric characterization of the quadruples concircular points in non-miquelian inversive planes $S(q)$.

Если в одной инверсной плоскости I выполняется конфигурационная теорема Микеля, то I является микелевой плоскостью, т. е. I допускает координатную структуру посредством квадратичного расширения поля [1, 2].

Конфигурация Микеля — это множество, состоящее из восьми точек $A_1, A_2, A_3, A_4, B_1, B_2, B_3, B_4$ и шести окружностей $c_1, c_2, c_3, c_4, c_A, c_B$, инцидентности между которыми задаются табл. 1.

Если все восемь точек A_i, B_i различные, то мы говорим о конфигурации Микеля M_8 .

Возможны еще девять неизоморфных между собой конфигураций Микеля, которые получаются, когда некоторые из точек A_i, B_i совпадают. Они названы Ченем в [3] k -точечными вырождениями конфигурации Микеля в зависимости от числа k точек, участвующих в конфигурации.

Условимся считать, что когда $A_i \equiv B_i$, то c_i касается c_{i+1} ; когда $A_i \equiv A_{i+1}$, то c_{i+1} касается c_A ; когда $B_i \equiv B_{i+1}$, то c_{i+1} касается c_B ($i=1, 2, 3, 4$; индексы взяты mod 4).

Таблица 1

	A_1	A_2	A_3	A_4	B_1	B_2	B_3	B_4
c_1	*			*	*			*
c_2	*	*			*	*		
c_3		*	*			*	*	
c_4			*	*			*	*
c_A	*	*	*	*				
c_B					*	*	*	*

Таблица 2

	$A_1 \equiv B_1$	$A_2 \equiv B_2$	$A_3 \equiv B_3$	A_4	B_4
c_1	* *			*	*
c_2	* *	* *			
c_3		* *	* *		
c_4			* *	*	*
c_A	*	*	*	*	
c_B	*	*	*		*

Если две точки совпадают, то мы переносим их знаки инцидентности в один столбец, соответствующий новой точке, и получаем таблицу инцидентности, соответствующей микелевой конфигурации. Тогда в этом столбце будут две клетки, в которых по два знака инцидентности. Согласно уже сделанным условливаниям, это означает, что окружности, соответствующие этим клеткам, касаются в данной точке.

Будем означать различные неизоморфные между собой микелевы конфигурации через M_k^l . Здесь индекс k соответствует числу k различных точек,

участвующих в конфигурации, а индекс l используем для обозначения неизоморфных конфигураций, у которых одно и то же число точек:

$$M_7: A_i \equiv B_i,$$

$$M_6^1: A_i \equiv B_i, A_{i+1} \equiv B_{i+1},$$

$$M_6^2: A_i \equiv B_i, A_{i+2} \equiv B_{i+2},$$

$$M_6^3: A_i \equiv B_i, A_{i+1} \equiv A_{i+2},$$

$$M_5^1: A_i \equiv B_i, A_{i+1} \equiv B_{i+1}, A_{i+2} \equiv B_{i+2},$$

$$M_5^2: A_i \equiv B_i, A_{i+1} \equiv A_{i+2}, B_{i+1} \equiv B_{i+2},$$

$$M_5^3: A_i \equiv B_i, A_{i+1} \equiv A_{i+2}, B_{i+2} \equiv B_{i+3},$$

$$M_4^1: A_i \equiv B_i, A_{i+1} \equiv B_{i+1}, A_{i+2} \equiv B_{i+2}, A_{i+3} \equiv B_{i+3},$$

$$M_4^2: A_i \equiv B_i, A_{i+1} \equiv B_{i+1}, A_{i+2} \equiv A_{i+3}, B_{i+2} \equiv B_{i+3}$$

(i — одно из чисел 1, 2, 3, 4; индексы взяты mod 4).

В качестве примера приводим табл. 2 инцидентности конфигурации M_5^1 .

Используя указанные обозначения, мы можем сформулировать теорему Микеля следующим образом:

Если восемь точек и шесть окружностей в одной инверсной плоскости такие, что для них выполняются все инцидентности в таблице, за исключением одной, то эта последняя следует из остальных.

В случае, когда эта инцидентность связана с касанием двух окружностей в одной точке, мы принимаем, что из инцидентности следует касание окружностей в этой точке.

С целью удобства дальше мы будем пользоваться следующими обозначениями: $c(ABC \dots)$ — точки A, B, C, \dots , инцидентны с окружностью c ; cAc' — окружности c и c' касаются в точке A .

Особое место между конфигурациями Микеля занимает M_5^1 : $A_1 \equiv B_1, A_2 \equiv B_2, A_3 \equiv B_3$. Эта конфигурация не допускает реализацию в микелевой инверсной плоскости.

Если допустим, что существуют пять различных точек $A_1 \equiv B_1, A_2 \equiv B_2, A_3 \equiv B_3, A_4, B_4$ и пять окружностей $c_1(A_1A_4B_4), c_2A_1c_1, c_2A_2c_3, c_3A_3C_4, c_4(A_3A_4B_4), c_A(A_1A_2A_3A_4)$, то, согласно теореме Микеля, существует окружность $c_B(A_1A_2A_3B_4)$ (см. табл. 2). Но тогда $c_A \equiv c_B$ и, следовательно, точки A_1, A_2, A_3, A_4, B_4 принадлежат одной окружности. Отсюда получаем, что окружности c_1, c_4, c_A, c_B совпадают, т. е. конфигурация становится тривиальной.

Следовательно, в микелевой инверсной плоскости не существуют нетривиальные конфигурации M_5^1 .

Кроме микелевых плоскостей, существуют и немикелевы инверсные плоскости. Известен один тип конечных инверсных плоскостей $S(q)$, которые изоморфны овальной инверсной плоскости $I(o)$, где o овоид типа $t(\psi)$ [2. 6.1].

Оказывается, что конфигурация M_5^1 допускает частичную реализацию в конечной плоскости $S(q)$.

Пусть A, B, C, D — четыре различные точки, инцидентные с одной окружностью c , и c_1, c_2, c_3, c_4 — четыре окружности, такие, что $A \in c_1, c_1B \in c_2, c_2C \in c_3, c_3D \in c_4, A \in c_4$. Очевидно, что если выполняется теорема Микеля, то c_4Ac_1 .

Если в одной инверсной плоскости теорема Микеля не выполняется везде, то возможно существование точки E , неинцидентной с c , так, что $c_1(ABE)$ и $c_4(ADE)$, т. е. это означает, что имеем частичную реализацию конфигурации M_5^1 .

Приведем следующие определения:

1. Четверку конциклических точек $c(ABCD)$ назовем микелевой, если для каждой четырех окружностей c_1, c_2, c_3, c_4 , такие, что $A \in c_1, c_1 B c_2, c_2 C c_3, c_3 D c_4, A \in c_4$ всегда выполняется $c_1 A c_4$.

2. Четверку конциклических точек $c(ABCD)$ назовем немикелевой, если существует точка $E \notin (ABCD)$ и окружности c_1, c_2, c_3, c_4 такие, что $c_1(ABE), c_2 B c_1, c_2 C c_3, c_3 D c_4, c_4(ADE)$.

Очевидно, что все четверки конциклических точек в одной микелевой плоскости микелевы.

Мы покажем, что в плоскостях $S(q)$ существуют немикелевые четверки, что является одной геометрической характеристикой их отличия от микелевых плоскостей.

Для доказательства будем использовать построенную в [6] модель $S(q)$ в соответствующей аффинной плоскости $A(2, q)$. В этой модели точки $S(q)$ — это точки (x, y) плоскости $A(2, q)$ и символ (∞) , а окружности — это специальные овалы в $A(2, q)$:

$$D\psi(x, y) + Ax + By + C = 0.$$

Здесь $D, A, B, C, x, y \in GF(q)$, а автоморфизмы $S(q)$ заданы в явном виде (подробнее см. [7] в настоящем сборнике).

Пусть P — точка, инцидентная с окружностью c , и $\text{Stab } P = \{\psi \in \text{Aut } S(q), \psi(P) = P\}$, $\text{Stab } c = \{\chi \in \text{Aut } S(q), \chi(c) = c\}$. Существует единственная точка P , такая, что $\text{Stab } c \subseteq \text{Stab } P$. Эту точку мы называем особой точкой окружности c [7].

Теорема 1. Каждая четверка конциклических точек, содержащая особую точку окружности, определенной этими точками, является немикелевой.

Из доказательства теоремы 2 [7] известно, что существует автоморфизм $\phi \in \text{Aut } S(q)$, такой, что $\phi(c) = c_0: x=0, \phi(A) = (0, a), \phi(B) = (0, 0), \phi(C) = (\infty), \phi(D) = (0, 1)$, т. е. без ограничения общности можем принять:

$$c: x=0;$$

$$A=(0, a), B=(0, 0), C=(\infty), D=(0, 1);$$

$$a \in GF(q), a \neq 0, 1.$$

Мы покажем, что эта четверка точек немикелева, т. е. она удовлетворяет условиям определения 2.

Окружность c_2 инцидентна с точками B и C , следовательно,

$$c_2: y = mx, m \in GF(q).$$

Тогда, так как $D \in c_3$ и $c_3 C c_2$, то

$$c_3: y = mx + 1.$$

Из $A \in c_1, c_1 B c_2$ получаем

$$c_1: \psi(x, y) + a^{\sigma-1}mx + a^{\sigma-1}y = 0.$$

Из $A \in c_4, c_3 D c_4$ следует

$$c_4: \psi(x, y) + [m(a+1)^{\sigma-1} + 1]x + (a+1)^{\sigma-1}y + (a+1)^{\sigma-1} + 1 = 0.$$

Но окружности c_1 и c_4 касаются в точке A тогда и только тогда, когда

$$(1) \quad a^{\sigma-1} + (a+1)^{\sigma-1} + 1 = 0.$$

Уравнение (1) эквивалентно

$$(2) \quad a^\sigma + a = 0.$$

Единственные решения (2) — это $a=0$, $a=1$, а, с другой стороны, $a \neq 0, 1$. Следовательно, окружности c_1 и c_4 всегда имеют вторую общую точку E , т. е. существует точка $E \notin c$, такая, что $c_1(ABE)$ и $c_4(ADE)$.

Этим теорема доказана.

Так как, согласно теореме 5, из [7] три точки принадлежат одной минимальной подплоскости $M(2)$ плоскости $S(q)$ тогда и только тогда, когда одна из них особая точка окружности, с которой они инцидентны, то из доказанной теоремы получаем

С л е д с т в и е. Если три точки A, B, C плоскости $S(q)$ принадлежат $M(2)$, то для каждой точки $D \in c(ABC)$ четверка $(ABCD)$ является немикелевой.

Т е о р е м а 2. Четверка конциклических точек в $S(q)$ является микелевой тогда и только тогда, когда существует инволюция, переводящая эту четверку в себя.

Пусть $c(ABCD)$ и φ инволюция, которая переводит четверку $(ABCD)$ в себя. Согласно теореме 2 [7], если одна точка — особая точка окружности c , то она будет двойной для каждого $\varphi \in \text{Stab } c$. Но согласно теореме 4 [7], все инволюции из $\text{Stab } c$ имеют единственную двойную точку. Следовательно, точки A, B, C, D не могут быть особыми точками окружности c .

Имея в виду доказанное в [7], без ограничения можем считать, что:

$$c: x=0,$$

$$A=(0, a), B=(0, 0), C=(0, 1), D=(0; d),$$

$$a \neq 0, 1, d \neq 0, 1, a, d \in GF(q), a \neq d.$$

Произвольная окружность c_2 , проходящая через точки B и C , задается следующим образом:

$$c_2: \psi(x, y) + \lambda x + y = 0, \lambda \in GF(q).$$

Условия $c_3 D c_4$ и $A \in c_4$ дают

$$c_3: \psi(x, y) + A_0 x + B_0 y + C_0 = 0,$$

$$(3) \quad B_0 = (d+1)^{\sigma-1}; C_0 = B_0 + 1; A_0 = B_0 \lambda + C.$$

$$c_4: \psi(x, y) + A_1 x + B_1 y + C_1 = 0,$$

$$(4) \quad B_1 = (a+d)^{\sigma-1}; C_1 = (a^\sigma d + a d^\sigma)(a+d)^{-1}; A_1 = (A_0 B_1 + C_0 + C_1) B_0^{-1}.$$

Согласно условиям $c_1 B c_2$ и $A \in c_1$, получаем

$$c_1: \psi(x, y) + \lambda B_2 x + B_0 y = 0,$$

где

$$(5) \quad B_2 = a^{\sigma-1}.$$

Окружности c_1 и c_4 касаются в точке A тогда и только тогда, когда

$$(6) \quad \lambda B_2 B_1 + A_1 B_2 + C_1 = 0.$$

Имея в виду (3), (4) и (5), из (6) получаем

$$(7) \quad a^\sigma d^2 + a^2 d^\sigma + a^\sigma d + a d^\sigma + a^2 d + a d^2 = 0.$$

Так как $a \neq 0$, $d \neq 0$, из (7) следует

$$(8) \quad (a+1)(d^{\sigma-1}+1) + (d+1)(a^{\sigma-1}+1) = 0.$$

С другой стороны, так как $d \neq 1$, из (8) получаем

$$a^{\sigma-1} + a \frac{d^{\sigma-1} + 1}{d+1} + \frac{d^{\sigma-1} + 1}{d+1} + 1 = 0.$$

Полагая $\frac{d^{\sigma-1} + 1}{d+1} = p$, имеем

$$(9) \quad a^{\sigma-1} + pa + p + 1 = 0.$$

Теперь положим $x = (a^{\sigma-1} + 1)^{\sigma-1}$ ($a = (x^{\sigma+1} + 1)^{\sigma+1}$).

Тогда

$$* \quad x^{\sigma+1} + p(x^{2\sigma+3} + x^{\sigma+2} + x^{\sigma+1} + 1) + p = 0,$$

или

$$(10) \quad x^{\sigma+1}(px^{\sigma+2} + px + p + 1) = 0.$$

Но $a \neq 1$, следовательно, $x \neq 0$, $d \neq 1$, а отсюда и $p \neq 0$. Из (10) находим

$$(11) \quad x^{\sigma+2} + x + \frac{p+1}{p} = 0.$$

Уравнение (11) имеет 0 или 2 решения в зависимости от p . Но $a_1 = d$ — решение (9). Следовательно, $x_1 = (d^{\sigma-1} + 1)^{\sigma-1}$ — решение (11). Тогда второе решение этого уравнения (11) будет

$$\begin{aligned} x_2 &= (d^{\sigma-1} + 1)^{\sigma-1} + \left(1 + \frac{p^{\sigma+1}}{p^\sigma}\right)^{-1} = (d^{\sigma-1} + 1)^{\sigma-1} + p^\sigma \\ &= (d^{\sigma-1} + 1)^{\sigma-1} + \frac{(d^{\sigma-1} + 1)^\sigma}{(d+1)^\sigma} = \left(\frac{d^\sigma + d}{d^\sigma + 1}\right)^{\sigma-1}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем второе решение уравнения (9):

$$a_2 = \left(\frac{d^\sigma + d}{d+1} + 1\right)^{\sigma+1} = [(d+1)^{\sigma-1}]^{\sigma+1} = d+1.$$

Но $a \neq d$ и, следовательно, $c_1 D c_4$ тогда и только тогда, когда $a+d=1$.

Итак, четверка $(ABCD)$ является микелевой только тогда, когда $a+d=1$.

Но, согласно теореме 4 [7], автоморфизмы $\{\tau_{10m}^1\}$ — инволюции в $\text{Stab } c$. Следовательно, точки окружности c — $A=(0, a)$, $B=(0, 0)$, $C=(0, 1)$, $D=(0, d)$ соответствуют в инволюции τ_{10m}^1 только тогда, когда $a+d=1$.

Так как инволюции в $\text{Stab } c$ образуют коммутативную группу, то $a+d=1$ является необходимым и достаточным условием, чтобы точки A, B, C, D были соответственными точками в инволюции.

Этим теорема доказана.

Если $a+d \neq 1$, условия (6) для касания c_1 и c_4 не выполняются, и тогда существует точка $E \notin c$, такая, что $c_1(ABE)$ и $c_4(ADE)$, т. е. в этом случае четверка $(ABCD)$ немикелева.

Как мы показали, если в одной четверке $(ABCD)$ одна из точек особая, они не могут быть соответственными точками в инволюции.

Это вместе с теоремой 1 дает

Т е о р е м а 3. Четверка конциклических точек в плоскости $S(q)$ является немикелевой тогда и только тогда, когда не существует инволюция, переводящая эту четверку в себя.

В [8] мы показали, что в $S(q)$ существуют неизоморфные между собой микелевы конфигурации M_4^1 . Из этого следует, что существуют неизоморфные между собой микелевы четверки конциклических точек.

ЛИТЕРАТУРА

1. Waerden, B. L. van der, L. J. S m i d. Eine Axiomatik der Kreisgeometrie und der Laguerre-Geometrie. — Math. Ann., **110**, 1935, 753—776.
2. Dembowski, P. Finite Geometries. Berlin—Heidelberg—New York, 1968.
3. Chen, Y. Der Satz von Miquel in der Möbiusebene. — Math. Ann., **186**, 1970, 81—100.
4. Schaeffer, H. Die Sieben-Punkte-Ausartungen des Satzes von Miquel in Möbiusebenen — Math. Z., **137**, 1974, 185—196.
5. Schaeffer, H. Eine Kennzeichnung miquelischer Möbiusebene. — Mitt. Math. Ges. Hamburg, **10**, 1974, No 3, 179—184.
6. Енева, Г., Ч. Лозанов. Инверсные плоскости типа $S(q)$. — Докл. БАН, **36**, 1983, № 6, 761—762.
7. Лозанов, Ч. О минимальных подплоскостях и группах автоморфизмов, сохраняющих окружность, в немикелевых инверсных плоскостях $S(q)$. — Год. Соф. унив., Фак. мат. и мех., **78**, 1984, кн. 1 — Математика — 122.
8. Lozanov, Ch. Theorem of Miquel in finite nonmiquelian planes. — Potsd. Forsch. B, 1984, No 41, 91—92.

Поступила 3. 4. 1985 г.

**CURVATURE PROPERTIES AND ISOTROPIC
PLANES OF RIEMANNIAN AND ALMOST HERMITIAN
MANIFOLDS OF INDEFINITE METRICS**

Adrijan Borisov, Georgi Ganchev, Ognian Kassabov

Адриан Борисов, Георги Ганчев, Огнян Касабов. Свойства кривизны и изотропные плоскости римановых многообразий и почти эрмитовых многообразий с индефинитной метрикой. Поведение тензора кривизны римановых многообразий с индефинитной метрикой на изотропных плоскостях тесно связано со свойствами кривизны многообразия. Дайцер и Номидзу [1] показали специфическую роль изотропных плоскостей в римановой геометрии с индефинитной метрикой. Точнее, они доказали, что M является многообразием постоянной секционной кривизны тогда и только тогда, когда тензор кривизны равен нулю на всех изотропных плоскостях. В настоящей заметке изучаются два типа изотропных плоскостей — слабо- и сильноизотропных. Показывается, что риманово многообразие с индефинитной метрикой является конформно плоским тогда и только тогда, когда тензор кривизны равен нулю на всех сильно изотропных плоскостях. Показывается также, что многообразие, удовлетворяющее аксиоме слабо (сильно)изотропных плоскостей, является многообразием постоянной секционной кривизны (конформноплоским). Далее изучаются аналогичные вопросы на почти эрмитовых многообразиях с индефинитной метрикой, учитывая обе структуры — метрику и почти комплексную структуру.

Adrijan Borisov, Georgi Ganchev, Ognian Kassabov. **Curvature Properties and Isotropic Planes of Riemannian and Almost Hermitian Manifolds of Indefinite Metrics.** The behaviour of the curvature tensor on isotropic planes on a Riemannian manifold of indefinite metric is closely related to the curvature properties of the manifold. The importance of isotropic planes in questions concerning curvature properties of a Riemannian manifold M with indefinite metric firstly has been shown by Daiczer and Nomizu in [1]. Namely, they have shown that M is of constant sectional curvature if and only if the curvature tensor vanishes on all the isotropic planes. In this paper we study two types of isotropic planes: weakly isotropic and strongly isotropic planes. We prove that a Riemannian manifold with indefinite metric is conformally flat if and only if its curvature tensor vanishes on all the strongly isotropic planes. We specialize the plane axiom for Riemannian manifolds of indefinite metrics. We show that manifolds satisfying plane axiom of weakly (strongly) isotropic planes are of constant sectional curvature (conformally flat). Further we study analogous problems on almost Hermitian manifolds of indefinite metrics taking into account both structures: the metric and the almost complex structure.

I. RIEMANNIAN MANIFOLDS OF INDEFINITE METRICS

Preliminaries. Let M be a Riemannian manifold with indefinite metric g of signature $(s, n-s)$, i. e. the tangent space $T_p M$ in $p \in M$ is isometric to \mathbb{R}_s^n with the inner product:

$$\langle x, y \rangle = - \sum_{i=1}^s x^i y^i + \sum_{j=s+1}^n x^j y^j.$$

The curvature operator on M is given by

$$R(X, Y) = [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X, Y]},$$

for arbitrary vector fields X, Y on M . The Ricci tensor and the scalar curvature of M are denoted by ρ and τ respectively. A 2-plane (2-dimensional subspace) α of $T_p M$ is said to be nondegenerate, weakly isotropic or strongly isotropic if the restriction of g on α is of rank 2, 1 or 0 respectively. The sectional curvature of a nondegenerate 2-plane α in $T_p M$ with a basis $\{x, y\}$ is given by

$$K(\alpha) = K(x, y) = \frac{R(x, y, y, x)}{g(x, x)g(y, y) - g^2(x, y)}.$$

A pair $\{x, a\}$ of tangent vectors at a point p in M is said to be orthonormal of signature $(+, -)$ if $g(x, x) = -g(a, a) = 1$, $g(x, a) = 0$. Orthonormal pairs of signature $(+, +)$ or $(-, -)$ are determined analogously. Orthonormal quadruples of certain signature are determined in a similar way.

Firstly, the particular importance of degenerate planes in pseudo-Riemannian geometry has been shown by the theorem:

Theorem A [1]. If $R(x, y, y, x) = 0$, whenever $\text{span}\{x, y\}$ is weakly isotropic, then all the nondegenerate 2-planes have the same sectional curvature, i. e. the manifold is of constant sectional curvature.

In fact, this theorem is formulated in [1] for arbitrary degenerate 2-planes, but the proof is also valid for the proposition in the above given form.

A tensor T of type $(0, 4)$ over $T_p M$, $p \in M$, is said to be curvature-like tensor if it has the following properties:

- a) $T(x, y, z, u) = -T(y, x, z, u)$,
- b) $T(x, y, z, u) = -T(x, y, u, z)$,
- c) $T(x, y, z, u) + T(y, z, x, u) + T(z, x, y, u) = 0$

for all x, y, z, u in $T_p M$.

We shall use Theorem 1, a) from [1] in the following form:

Theorem B. Let T be a curvature-like tensor over $T_p M$, $p \in M$. If $T(x, y, z, x) = 0$, whenever $\{x, y\}$ is an orthonormal pair of signature $(+, -)$ and $g(x, z) = g(y, z) = 0$, then all the nondegenerate 2-planes have the same sectional curvature with respect to T .

Conformally flat Riemannian manifolds and isotropic planes. The conformal curvature tensor C on a Riemannian manifold is given by

$$C = R - \frac{1}{n-2} \varphi + \frac{\tau}{(n-1)(n-2)} \pi_1,$$

where

$$\begin{aligned}\varphi(x, y, z, u) &= g(y, z) \rho(x, u) - g(x, z) \rho(y, u) + g(x, u) \rho(y, z) - g(y, u) \rho(x, z), \\ \pi_1(x, y, z, u) &= g(y, z) g(x, u) - g(x, z) g(y, u).\end{aligned}$$

It is well known, that, if $n > 3$, then M is conformally flat if and only if C vanishes.

The main result in this section is the following theorem, which clarifies the relation between the conformal curvature tensor and the behaviour of R on strongly isotropic 2-planes.

Theorem 1. Let $s \geq 2$, $n-s \geq 2$. Then M is conformally flat if and only if $R(\xi, \eta, \eta, \xi) = 0$, whenever $\text{span} \{\xi, \eta\}$ is strongly isotropic.

Proof. Let $\{x, y, a, b\}$ be an arbitrary orthonormal quadruple of signature $(+, +, -, -)$. Then

$$R(x+a, y+b, y+b, x+a) = 0$$

implies

$$R(x, y, b, a) + R(x, b, y, a) = 0.$$

Hence, using the first Bianchi identity, we find

$$(1) \quad R(x, y, b, a) = 0.$$

Replacing $\{x, b\}$ by $\{(x+tb)/\sqrt{1-t^2}, (tx+b)/\sqrt{1-t^2}\}$, $|t| < 1$, in (1), we obtain

$$R(x, y, a, x) + R(b, y, a, b) = 0.$$

From here it is not difficult to derive

$$(2) \quad (n-2) R(x, y, a, x) - \rho(y, a) = 0.$$

Replacing y by $(y+tb)/\sqrt{1-t^2}$, $|t| < 1$, in (2), we find

$$(3) \quad (n-2) R(x, b, a, x) - \rho(b, a) = 0.$$

From (2), (3) and Theorem B it follows $C = 0$.

The inverse is a simple verification.

Using Theorem 1 and the continuity of R , in a similar way we have

Theorem 2. Let M ($s \geq 2$, $n-s \geq 2$) be a Riemannian manifold of indefinite metric. Then the following conditions are equivalent:

- 1) M is conformally flat;
- 2) $R(x, y, a, b) = 0$, whenever $\{x, y, a, b\}$ is an orthonormal quadruple of signature $(+, +, -, -)$;
- 3) $K(x, y) + K(a, b) = K(x, a) + K(y, b)$, whenever $\{x, y, a, b\}$ is an orthonormal quadruple of signature $(+, +, -, -)$.

This proposition specifies the characterizations of conformally flat manifolds given by Schouten [2, p. 307] and Kulkarni [3].

Plane axioms in the Riemannian geometry of indefinite metric. Let N ($\dim N = m \geq 3$) be a differentiable manifold with a linear connection of zero torsion. In general, N is said to satisfy the axiom of r -planes ($2 \leq r < m$), if, for each point p and for any r -dimensional subspace E of $T_p N$, there exists a totally geodesic submanifold N' containing p such that $T_p N' = E$.

Now, we specialize the general plane axiom to the considered manifolds.

A Riemannian manifold M of indefinite metric is said to satisfy the axiom of weakly (strongly) isotropic 2-planes, if, for each point p and for any weakly (strongly) isotropic 2-plane E in T_pM , there exists a totally geodesic submanifold M' containing p such that $T_pM' = E$ and all the tangent spaces of M' are weakly (strongly) isotropic in M .

Theorem 3. Let M ($n \geq 3$) be a Riemannian manifold of indefinite metric. If M satisfies the axiom of weakly isotropic 2-planes, then M is of constant sectional curvature.

Proof. Let ξ be an isotropic vector in T_pM and $x \perp \xi$, such that $g(x, x) = 1$ or $g(x, x) = -1$. By the conditions of the theorem, there exists a totally geodesic submanifold M' of M through p such that $T_pM' = \text{span} \{ \xi, x \}$. Since M' is totally geodesic and the connection is symmetric, $R(\xi, x)x$ is tangent to M' at p . This implies $R(\xi, x, x, \xi) = 0$. According to Theorem A, M is of constant sectional curvature.

Theorem 4. Let M ($s \geq 2, n-s \geq 2$) be a Riemannian manifold of indefinite metric. If M satisfies the axiom of strongly isotropic 2-planes, then M is conformally flat.

Proof. Let ξ, η be arbitrary isotropic perpendicular vectors in $T_pM, p \in M$. By the condition of the theorem, there exists a totally geodesic submanifold M' of M containing p such that $T_pM' = \text{span} \{ \xi, \eta \}$. Then $R(\xi, \eta)\eta$ is in T_pM' . Hence, $R(\xi, \eta, \eta, \xi) = 0$. Applying Theorem 1, we obtain M is conformally flat.

2. ALMOST HERMITIAN MANIFOLDS OF INDEFINITE METRICS

Preliminaries. In this part M will stand for an almost Hermitian manifold with indefinite metric g of signature $(2s, 2(n-s))$ and almost complex structure J , i. e.

$$J^2 = -id, \quad g(JX, JY) = g(X, Y)$$

for arbitrary vector fields X, Y on M .

If $\nabla J = 0$, then M is a Kaehlerian manifold of indefinite metric.

A 2-plane α in T_pM is said to be holomorphic (antiholomorphic) if $J\alpha = \alpha$ ($J\alpha \perp \alpha, J\alpha \neq \alpha$). A pair $\{x, y\}$ of vectors in T_pM is said to be holomorphic (antiholomorphic) if $\text{span} \{x, y\}$ is a holomorphic (antiholomorphic) 2-plane. Antiholomorphic triples and quadruples are determined in a similar way.

The manifold M is said to be of pointwise constant holomorphic (antiholomorphic) sectional curvature if in each $p \in M$ all the nondegenerate holomorphic (antiholomorphic) 2-planes have the same sectional curvature, which is a function of the point. As in the definite case, if M is a Kaehlerian manifold of pointwise constant holomorphic (antiholomorphic) sectional curvature, then M is of constant holomorphic sectional curvature.

Let $\{e_i, i=1, \dots, 2n\}$, be an orthonormal basis of T_pM . The Ricci *-tensor and the scalar *-curvature are given by

$$\rho^*(y, z) = \sum_{i=1}^{2n} g(e_i, e_i) R(e_i y, Jz, J e_i),$$

$$\tau^* = \sum_{i=1}^{2n} g(e_i, e_i) \rho^*(e_i, l_i)$$

respectively.

The proof of the next proposition, given in [4] is also valid in the indefinite case.

Theorem C. Let T be a curvature-like tensor of type (0,4) over T_pM . If

- 1) $T(x, Jx, Jx, x)=0$, for an arbitrary vector x in T_pM ,
 - 2) $T(x, y, y, x)=0$, whenever $\text{span}\{x, y\}$ is an antiholomorphic 2-plane,
 - 3) $T(x, Jx, y, x)=0$, whenever $\text{span}\{x, y\}$ is an antiholomorphic 2-plane,
- then $T=0$.

Almost Hermitian manifolds of pointwise constant antiholomorphic sectional curvature. In this section we give an analogue of Theorem A for almost Hermitian manifolds of indefinite metric.

Theorem 5. Let M be an almost Hermitian manifold of indefinite metric and $n \geq 3$. If $R(X, \xi, \xi, X)=0$, whenever $\text{span}\{X, \xi\}$ is a weakly isotropic antiholomorphic 2-plane, then M is of pointwise constant antiholomorphic sectional curvature.

Proof. Let $n-s \geq 2$ (the case $s \geq 2$ is treated analogously). We choose x, y, a in T_pM , $p \in M$ so that $\{x, y, a\}$ is an orthonormal antiholomorphic triple of signature $(+, +, -)$. From the condition of the theorem we have

$$R(x, y+a, y+a, x)=0.$$

From here we find

$$(4) \quad K(x, y)=K(x, a),$$

$$(5) \quad R(x, y, a, x)=0.$$

Replacing a by $(a+Ja)/\sqrt{2}$ in (4), we get

$$(6) \quad R(x, a, Ja, x)=0.$$

Analogously

$$(7) \quad R(x, y, Jy, x)=0.$$

Now, let Y, Z be arbitrary unit vectors in T_pM so that $Y, Z \perp x, Jx$. If Y, Z have the same signature, then (4) implies

$$(8) \quad K(x, Y)=K(x, Z)$$

in the following way. If $\{Y, Z\}$ has a signature $(+, +)$, we choose $a \perp x, Jx, Y, JY, Z, JZ$ and then $K(x, Y)=K(x, a)=K(x, Z)$ according to (4). If $\{Y, Z\}$ has a signature $(-, -)$, we choose $y \perp x, Jx, Y, JY, Z, JZ$ and further $K(x, Y)=K(x, y)=K(x, Z)$. If Y, Z are of different signature, then (4)–(7) imply (8). Similarly, if $g(a, a)=-1$, we find

$$(9) \quad K(a, Y)=K(a, Z)$$

for unit vectors Y, Z in T_pM and $Y, Z \perp a, Ja$.

Finally, let α, β be arbitrary nondegenerate antiholomorphic 2-planes with orthonormal bases $\{X, Y\}$ and $\{Z, U\}$, respectively, and let $E = \text{span}\{x, JX\}$. If $\{Z, U\}$ is of signature $(+, -)$, we choose a vector $W \in T_p M$, $W \perp Z, JZ$, $g(W, W) = 1$. Then $\{Z, W\}$ is of signature $(+, +)$ and

$$K(\beta) = K(Z, U) = K(Z, W)$$

taking into account (8). Hence, we can assume $\{Z, U\}$ is of signature $(+, +)$ or $(-, -)$. Let Z' is a unit vector and $Z' \in \beta \cap E^\perp$. Choosing $U' \in \beta$, $U' \perp Z'$ and using (8), (9), we obtain

$$K(\alpha) = K(X, Y) = K(X, Z') = K(Z', U') = K(\beta).$$

This gives: M is of pointwise constant antiholomorphic sectional curvature.

Remark. If M ($n \geq 3$) is an almost Hermitian manifold of pointwise constant antiholomorphic sectional curvature ν , then its curvature tensor has the form [5]

$$R = \frac{1}{2(n+1)} \psi(\rho^*) + \frac{\tau^*}{(2n+1)(2n+2)} \pi_2 = \nu \left(\pi_1 - \frac{1}{2n+1} \pi_2 \right),$$

where

$$\begin{aligned} \psi(S)(x, y, z, u) = & g(y, Jz) S(x, Ju) - g(x, Jz) S(y, Ju) - 2g(x, Jy) S(z, Ju) \\ & + g(x, Ju) S(y, Jz) - g(y, Ju) S(x, Jz) - 2g(z, Ju) S(x, Jy) \end{aligned}$$

is a curvature like tensor whenever $S(x, Jy) + S(y, Jx) = 0$ and

$$\pi_2(x, y, z, u) = g(y, Jz)g(x, Ju) - g(x, Jz)g(y, Ju) - 2g(x, Jy)g(z, Ju).$$

Then, the direct verification shows the inverse proposition of Theorem 5.

If M is Kaehlerian and $n \geq 3$, the following conditions are equivalent [8]

- 1) M is of constant holomorphic sectional curvature μ ;
- 2) M is of constant antiholomorphic sectional curvature $\mu/4$.

Then Theorem 5 implies

Corollary [6]. Let M be a Kaehlerian manifold of indefinite metric and $n \geq 3$. If $R(X, \xi, \xi, X) = 0$, whenever $\text{span}\{X, \xi\}$ is a weakly isotropic antiholomorphic 2-plane, then M is of constant holomorphic sectional curvature.

Almost Hermitian manifolds with vanishing Bochner curvature tensor. Firstly, we shall prove

Lemma 1. Let T be a curvature-like tensor of type $(0,4)$ over $T_p M$. If

- 1) $T(x, Jx, Jx, x) = 0$, whenever $g(x, x) = 1$,
 - 2) $T(x, a, a, x) = 0$, whenever $\text{span}\{x, a\}$ is an antiholomorphic 2-plane of signature $(+, -)$,
 - 3) $T(x, Jx, b, x) = 0$, whenever $\text{span}\{x, b\}$ is an antiholomorphic 2-plane of signature $(+, -)$,
- then $T = 0$.

Proof. We shall show that the conditions 1), 2) and 3) imply the corresponding conditions of Theorem C. For instance, let 1) hold good. If $a \in T_p M$ and $g(a, a) = -1$, we choose $x \perp a, Ja$ and $g(x, x) = 1$. Then 1) implies

$$T(x+ta, Jx+tJa, Jx+tJa, x+ta) = 0$$

for every $|t| < 1$. From here we find $T(a, Ja, Ja, a) = 0$ and hence $T(X, JX, JX, X) = 0$ for arbitrary non-isotropic vector X . Further, approximating any isotropic

vector ξ with non-isotropic vectors, we obtain $T(\xi, J\xi, J\xi, \xi)=0$ and the condition 1) of Theorem C. The conditions 2) and 3) in Theorem C follow in a similar way.

The Bochner curvature tensor $B(R)$ for an almost Hermitian manifold M ($2n \geq 6$) (is given by the equality [7])

$$\begin{aligned} B(R) = & R - \{16(n+2)\}^{-1} (\varphi + \psi)(\rho + 3\rho^*)(R + \bar{R}) \\ & - \{16(n-2)\}^{-1} (3\varphi - \psi)(\rho - \rho^*)(R + R) - \{(4(n+1))^{-1}\psi(\rho^*) - (4(n-1))^{-1}\varphi(\rho)\}(R - \bar{R}) \\ & + \{16(n+1)(n+2)\}^{-1} (\tau + 3\tau^*)(R)(\pi_1 + \pi_2) \\ & + \{16(n-1)(n-2)\}^{-1} (\tau - \tau^*)(R)(3\pi_1 - \pi_2), \end{aligned}$$

where $R(x, y, z, u) = R(Jx, Jy, Jz, Ju)$ for all $x, y, z, u \in T_p M$.

The next theorem gives a characterization of almost Hermitian manifolds of indefinite metric with vanishing Bochner curvature tensor.

Theorem 6. Let M ($s \geq 2, n-s \geq 2$) be an almost Hermitian manifold of indefinite metric. The following conditions are equivalent:

1) $R(\xi, \eta, \eta, \xi) = 0$, whenever $\text{span} \{ \xi, \eta \}$ is a strongly isotropic antiholomorphic 2-plane,

2) $B(R) = 0$.

Proof. Let ξ be an arbitrary isotropic vector in $T_p M$. Choosing an isotropic vector η , so that $\eta \perp \xi, J\xi$, from the condition we find

$$R(\xi, J\xi + \eta, J\xi + \eta, \xi) = 0.$$

From here we obtain

$$R(\xi, J\xi, J\xi, \xi) = 0.$$

This equality gives

$$R(x+a, Jx+Ja, Jx+Ja, x+a) = 0$$

for an arbitrary orthonormal antiholomorphic pair $\{x, a\}$ of signature $(+, -)$. Using the last equality we get

$$(10) \quad K(x, Jx) + K(a, Ja) = K(x, Ja) + K(Jx, a) - 2R(x, Jx, Ja, a) - 2R(x, Ja, Jx, a).$$

Let y be in $T_p M$, so that $\{x, y, a\}$ is an orthonormal antiholomorphic triple of signature $(+, +, -)$. Replacing a by $(a+ty)/\sqrt{1-t^2}, |t| < 1$ in (10) we find

$$(11) \quad K(x, Jx) + K(y, Jy) = K(x, Jy) + K(Jx, y) + 2R(x, Jx, Jy, y) + 2R(x, Jy, Jx, y).$$

If $\{e_1, \dots, e_{2n}\}$ is an orthonormal basis of $T_p M$, from (10) and (11) we obtain

$$(12) \quad \sum_{i=1}^{2n} K(e_i, J e_i) = \frac{\tau + 3\tau^*}{2(n+1)},$$

$$(13) \quad K(x, Jx) = \frac{1}{2(n+2)} F\{\rho(x, x) + \rho(Jx, Jx) + 6\rho^*(x, x)\} - \frac{\tau + 3\tau^*}{4(n+1)(n+2)}.$$

Now, let $\{x, y, a, b\}$ be an orthonormal antiholomorphic quadruple of signature $(+, +, -, -)$. We have

$$R(x+a, y+b, y+b, x+a)=0$$

and further

$$R(x, y+b, y+b, x)+R(a, y+b, y+b, a)=0.$$

From here, for an arbitrary $z \in T_p M$, $z \perp y$, Jy , b , Jb , a , Ja we have

$$R(x, y+b, y+b, x)-R(z, y+b, y+b, z)=0.$$

The last two equalities imply

$$(14) \quad 2(n-2)R(x, y+b, y+b, x)=\rho(y+b, y+b)-R(Jy, y+b, y+b, Jy) \\ +R(Jb, y+b, y+b, Jb).$$

Firstly, from (14) it follows

$$2(n-2)\{K(x, y)-K(x, b)\}=\rho(y, y)+\rho(b, b)-K(y, Jy)+K(b, Jb) \\ +K(Jy, b)-K(y, Jb).$$

Using (12), from this equality we obtain

$$(4n^2-14n+11)K(x, b)+(2n-3)K(x, Jb)+K(Jx, Jb)-K(Jx, b) \\ +2(n-1)\{K(x, Jx)+K(b, Jb)\}=(2n-3)\rho(x, x)-2(n-2)\rho(b, b) \\ +\rho(Jx, Jx)-2\rho(Jb, Jb)-\tau+\frac{\tau+3\tau^*}{2(n+1)}.$$

This formula gives

$$4(n-1)(n-2)K(x, b)+2(n-1)\{K(x, Jx)+K(b, Jb)\} \\ = (2n-3)\{\rho(x, x)-\rho(b, b)\}+\rho(Jx, Jx)+\rho(Jb, Jb)-\tau+\frac{\tau+3\tau^*}{2(n+1)}.$$

From here, taking into account (13), we find

$$(15) \quad K(x, b)=\frac{2n^2-5}{4(n-1)(n^2-4)}\{\rho(x, x)-\rho(b, b)\}+\frac{3}{4(n-1)(n^2-4)}\{\rho(Jx, Jx) \\ -\rho(Jb, Jb)\}-\frac{3}{2(n^2-4)}\{\rho(x, x)-\rho(b, b)\}-\frac{2n^2+3n+4}{8(n^2-1)(n^2-4)}\tau \\ +\frac{9n}{8(n^2-1)(n^2-4)}\tau^*.$$

Further, (14) implies

$$2(n-2)R(x, y, b, x)=\rho(y, b)-R(Jy, y, b, Jy)+R(Jb, y, b, Jb).$$

Replacing here x by $(Jx-Jy)/\sqrt{2}$ and y by $(x+y)/\sqrt{2}$ we get

$$2(n-2)R(y, Jy, Jy, b)-(2n-5)\{R(x, Jx, Jy, b)+R(Jy, x, b, Jx)\} \\ -R(b, Jb, Jb, y)+R(Jx, y, b, Jx)=\rho(y, b),$$

from where it follows

$$(16) \quad 2nR(y, Jy, Jy, b) - R(b, Jb, Jb, y) - 3(b, Jb, y, b) \\ = \rho(y, b) + 3\rho^*(b, y)$$

for an arbitrary orthonormal pair $\{y, b\}$ of signature $(+, -)$.

Changing in (15) x by $(y+tb)/\sqrt{1-t^2}$ and b by $(tJy+Jb)/\sqrt{1-t^2}$ for arbitrary $|t| < 1$ we check

$$(17) \quad 2(n-1)\{R(Jy, y, y, Jb) + R(Jb, y, b, Jb)\} = -\rho(y, b) + \rho(Jy, Jb).$$

Finally, from

$$R(y+b, Jy+Jb, Jy+Jb, y+b) = 0$$

we derive

$$(18) \quad R(y, Jy, Jy, b) + R(b, Jb, Jb, y) + R(y, Jy, Jb, y) + R(b, Jb, Jy, b) = 0.$$

From (16), (17) and (18) it follows easily

$$(19) \quad R(y, Jy, Jy, b) = -\frac{3}{4(n-1)(n+2)}\rho(y, b) + \frac{2n+1}{4(n-1)(n+2)}\rho(Jy, Jb) \\ - \frac{3}{4(n+1)(n+2)}\rho^*(b, y) + \frac{3(2n+3)}{4(n+1)(n+2)}\rho^*(y, b).$$

Taking into account (13), (15) and (19) and Lemma 1 we obtain $B(R) = 0$.

The inverse is a straightforward verification.

L e m m a 2. Let M ($s \geq 2, n-s \geq 2$) be a Kaehlerian manifold of indefinite metric. The following conditions are equivalent:

- 1) $R(\xi, J\xi, J\xi, \xi) = 0$, whenever ξ is an isotropic vector,
- 2) $R(\xi, \eta, \eta, \xi) = 0$, whenever $\text{span}\{\xi, \eta\}$ is a strongly isotropic antiholomorphic 2-plane.

Proof. The implication 2) \rightarrow 1) was shown in the proof of Theorem 6 in the case of an arbitrary almost Hermitian manifold.

Now, let M satisfy 1). This condition gives

$$R(\xi + \eta, J\xi + J\eta, J\xi + J\eta, \xi + \eta) = 0,$$

which implies

$$2R(\xi, J\xi, J\eta, \eta) + 2R(\xi, J\eta, J\xi, \eta) + R(\xi, J\eta, J\eta, \xi) + R(\eta, J\xi, J\xi, \eta) = 0.$$

Using this equality and the first Bianchi identity we find

$$R(\xi, \eta, \eta, \xi) + 3R(\xi, J\eta, J\eta, \xi) = 0.$$

Now 2) follows in a straightforward way.

Applying Lemma 2 and Theorem 6 we obtain

T h e o r e m 7. Let M ($s \geq 2, n-s \geq 2$) be a Kaehlerian manifold of indefinite metric. The following conditions are equivalent:

- 1) $R(\xi, J\xi, J\xi, \xi) = 0$, whenever ξ is an isotropic vector,
- 2) $B(R) = 0$.

R e m a r k. In [8] there is announced the following proposition without a proof:

Theorem 6.5. Let M be a connected indefinite Kaehler manifold with complex dimension $n \geq 2$ and index $2s > 0$. If $R(u, Ju, Ju, u) = 0$ for all isotropic vectors $u \in T_p M$ holds, then M has constant holomorphic sectional curvature.

Plane axioms for almost Hermitian manifolds of indefinite metrics. Let M be an almost Hermitian manifold of indefinite metric. M is said to satisfy the axiom of the weakly (strongly) isotropic antiholomorphic 2-planes, if, for each point p in $T_p M$ and for any weakly (strongly) isotropic antiholomorphic 2-plane E in $T_p M$, there exists a totally geodesic submanifold M' of M containing p , such that $T_p M' = E$ and all the tangent spaces of M' are weakly (strongly) isotropic antiholomorphic 2-planes in M . The axiom of isotropic holomorphic 2-planes is formulated in a similar way. We note, that every isotropic holomorphic 2-plane is necessarily strongly isotropic.

In this section we discuss these axioms. We need the following propositions.

Theorem D. Let M be an almost Hermitian manifold of indefinite metric. If

$$R(x, Jx, Jx, a) = 0,$$

whenever $\{x, a\}$ is an orthonormal antiholomorphic pair of signature $(+, -)$ then M is of pointwise constant holomorphic sectional curvature and $R = \bar{R}$.

This proposition can be derived in a similar way as the corresponding theorem in the case of an almost Hermitian manifold of definite metric [9].

Using Lemma 1, we obtain immediately

Lemma 3. Let M ($s \geq 2, n-s \geq 2$) be an almost Hermitian manifold of indefinite metric. If M is of pointwise constant holomorphic sectional curvature μ , pointwise constant antiholomorphic sectional curvature ν , and $R = \bar{R}$, then the curvature tensor has the form:

$$(20) \quad R = \nu \pi_1 + \frac{\mu - \nu}{3} \pi_2.$$

Theorem E [7]. Let M be an almost Hermitian manifold and $2n \geq 6$. If the curvature tensor of M has the form (20), then M is of constant sectional curvature or M is a Kaehler manifold of constant holomorphic sectional curvature.

The proof of this theorem is also valid in the case of an indefinite metric.

Theorem 8. Let M ($s \geq 2, n-s \geq 2$) be an almost Hermitian manifold of indefinite metric. If M satisfies the axiom of weakly isotropic antiholomorphic 2-planes, then M is of constant sectional curvature or M is a Kaehler manifold of constant holomorphic sectional curvature.

Proof. Let $\{\xi, x\}$ be a basis of an weakly isotropic antiholomorphic 2-plane in $T_p M$ with $g(\xi, \xi) = g(\xi, x) = g(\xi, Jx) = 0$ and $g(x, x) = +1$. By the conditions of the theorem, there exists a totally geodesic submanifold M' through p such that $T_p M' = \text{span} \{\xi, x\}$. This implies $R(\xi, x)x$ is in $T_p M'$. Hence $R(\xi, x, x, \xi) = 0$. Applying Theorem 5, we obtain M is of pointwise constant antiholomorphic sectional curvature. On the other hand, since $Jx \perp \xi, x$, then $R(\xi, x, x, Jx) = 0$. From here it follows immediately $R(Jx, x, x, a) = 0$, whenever $\{x, a\}$ is an orthonormal antiholomorphic pair of signature $(+, -)$. Applying Theorem D, Lemma 3 and Theorem E we obtain the proposition.

Theorem 9. Let M ($s \geq 2, n-s \geq 2$) be an almost Hermitian manifold of indefinite metric. If M satisfies the axiom of strongly isotropic antiholomorphic 2-planes, then M has vanishing Bochner curvature tensor.

Proof. Let $\{\xi, \eta\}$ be a basis of a strongly isotropic antiholomorphic 2-plane in T_pM . From the condition of the assertion we find $R(\xi, \eta)\eta$ is in span $\{\xi, \eta\}$. Hence, $R(\xi, \eta, \eta, \xi)=0$. Applying Theorem 6 we obtain $B(R)=0$.

Theorem 10. Let M ($s \geq 2, n-s \geq 2$) be a Kaehlerian manifold of indefinite metric. If M satisfies the axiom of isotropic holomorphic 2-planes, then M has vanishing Bochner curvature tensor.

Proof. Let ξ be an arbitrary isotropic vector in T_pM . By the conditions of the theorem we have $R(\xi, J\xi)J\xi$ is in the span $\{\xi, J\xi\}$. Hence, $R(\xi, J\xi, J\xi, \xi)=0$. Now, Theorem 7 implies the assertion.

Theorem 11. Let M ($s \geq 2, n-s \geq 2$) be a Kaehlerian manifold of indefinite metric. If M satisfies the axiom of strongly isotropic antiholomorphic 2-planes, then M is of constant holomorphic sectional curvature.

Proof. Applying Theorem 9 we find $B(R)=0$. Let $\{\xi, \eta\}$ be a basis of an arbitrary strongly isotropic antiholomorphic 2-plane in T_pM . The condition of the theorem gives $R(\xi, \eta)\eta$ is a linear combination of ξ and η . From this condition and $B(R)=0$ we check $\rho(\xi, \xi)=0$ for an arbitrary isotropic vector ξ . This condition implies M is Einsteinian [10]. Hence M is of constant holomorphic sectional curvature.

REFERENCES

1. Dajczer, M., K. Nomizu. On sectional curvature of indefinite metrics. — *Math. Ann.*, **247**, 1980, 279—282.
2. Schouten, J. A. Ricci Calculus. Berlin—New York, Springer, 1954.
3. Kulkarni, R. S. Curvature structures and conformal transformations. — *J. Diff. Geom.*, **4**, 1970, 425—451.
4. Ganchev, G. Almost Hermitian manifolds similar to the complex space forms. — *C. R. Acad. Bulg. Sci.*, **32**, 1979, 1179—1182.
5. Ganchev, G. On Bochner curvature tensors in almost Hermitian manifolds. — *Pliska, Studia mathematica bulgarica*, **9**, 1987, 33 — 43.
6. Carmen, M., A. Romero. Sur les variétés kähleriennes indéfinies à courbure sectionnelle holomorphe constant. — *C. R. Acad. Paris, Sér. A*, **297**, 1983, 343—344.
7. Tricerri, F., L. Vanhecke. Curvature tensors on almost Hermitian manifolds. — *Trans. Amer. Math. Soc.*, **267**, 1981, 365—394.
8. Barros, M., A. Romero. Indefinite Kaehlerian manifolds. — *Math. Ann.*, **261**, 1982, 55—62.
9. Kassabov, O. On the axiom of planes and the axiom of spheres in the almost Hermitian geometry. — *Serdica*, **8**, 1982, 109—114.
10. Dajczer, M., K. Nomizu. On the boundedness of Ricci curvature of an indefinite metric. — *Bol. Soc. Brasil. Mat.*, **11**, 1980, 25—30.

Received 10. 4. 1985

О НЕКОТОРЫХ МНОГОШАГОВЫХ СХЕМАХ СО СВЕРХЛИНЕЙНОЙ СКОРОСТЬЮ СХОДИМОСТИ

Николай Кюркчиев, Радостин Иванов

Николай Кюркчиев, Радостин Иванов. **О некоторых многошаговых схемах со сверхлинейной скоростью сходимости.** Исследуется класс многошаговых методов для одновременного вычисления всех корней данного алгебраического уравнения. Показано, что рассматриваемые схемы имеют сверхлинейную скорость сходимости, и дана ее зависимость от степени многошаговости.

Nikolai Kjurkchiev, Radostin Ivanov. **On Some Multi-stage Schemes with a Superlinear Rate of Convergence.** A class of multi-stage methods for simultaneous calculations of the roots of a given algebraic equation is considered. It is shown that these schemes have a superlinear rate of convergence with respect on the multi-stage degree.

Предположим, что задано уравнение

$$(1) \quad f(x) = 0,$$

где $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$ — многочлен степени n . Обозначим $\{x_i\}_1^n$ корни уравнения (1) и рассмотрим следующую итерационную процедуру:

$$(2) \quad x_i^{k+1} = x_i^k - f(x_i^k) \left/ \prod_{\beta_0=1, \beta_0 \neq i}^n (x_i^k - x_{\beta_0}^{k-1} - \Delta_{\beta_0}^{R, k-1}) \right.$$
$$i = 1, \dots, n, \quad k = R+1, \dots, n,$$

где

$$\Delta_s^{R, k-1} = -f(x_s^{k-1}) \left/ \prod_{l=1, l \neq s}^n (x_s^{k-1} - x_l^{k-2} - \Delta_l^{R-1, k-2}), \right.$$
$$(3) \quad \Delta_l^{0, t} = 0, \quad j, t = 1, \dots, n.$$

Предположим, что нам удалось каким-то образом найти приближенные значения корней уравнения (1), а именно: $\{x_i^0\}_1^n, \{x_i^1\}_1^n, \dots, \{x_i^{R+1}\}_1^n$. Отметим, что в работе [1] обсуждаются некоторые приемы конструирования одношаговых схем повышенного порядка сходимости, и при формировании процедуры (2), (3) были использованы эти приемы.

Однако целью было охватить достаточно широкий класс итерационных методов.

Отметим, что при $R=0$ из (2) и (3) получаем следующую формулу типа Вейерштрасса—Дочева:

$$(4) \quad x_i^{k+1} = x_i^k - f(x_i^k) \prod_{\beta_0=1, \beta_0 \neq i}^n (x_i^k - x_{\beta_0}^{k-1}),$$

$$i = 1, 2, \dots, n; \quad k = 1, 2, \dots$$

Процесс (4) является двухшаговым, и при некоторых ограничительных условиях выполнено: $|x_i^k - x_i| \leq cq^{rk}$, $i = 1, 2, \dots, n$, где $r = (1 + \sqrt{5})/2 = 1,618\dots$ — корень квадратного уравнения $r^2 - r - 1 = 0$, то есть процесс сходится со сверхлинейной скоростью с константной r .

Выясним вопрос о порядке скорости сходимости последовательности $\{x_i^k\}_1^n$ генерируемой процедурой (2). Докажем следующую теорему.

Т е о р е м а. Пусть уравнение (1) не имеет кратных корней. Обозначим $d = \min_{i \neq j} x_i - x_j$ и предположим, что выполнены следующие неравенства:

$$(5) \quad 0 < cnA / (d - 2c) < 1,$$

где $c > 0$, а A является корнем уравнения

$$(6) \quad A = e^{1/A} (A = 1,763222834\dots).$$

Если начальные приближения для корней уравнения (1) удовлетворяют неравенствам

$$(7) \quad |x_i^j - x_i| \leq cq^{rj}, \quad i = 1, \dots, n; \quad j = 0, 1, \dots, R+1,$$

где $0 < q < 1$, то для процесса (2) будем иметь

$$(8) \quad |x_i^k - x_i| \leq cq^{rk}, \quad i = 1, \dots, n; \quad k = R+2, \dots,$$

где r является положительным корнем уравнения:

$$(9) \quad r^{R+2} - r^{R+1} - \dots - r - 1 = 0.$$

Доказательство. Неравенства (8) докажем методом математической индукции. Для разности $x_i^{k+1} - x_i$ из (2) получаем

$$x_i^{k+1} - x_i = (x_i^k - x_i) \left(1 - \prod_{\beta_0=1, \beta_0 \neq i}^n \frac{x_i^k - x_{\beta_0}}{x_i^k - x_{\beta_0}^{k-1} - \Delta_{\beta_0}^{R, k-1}} \right) = (x_i^k - x_i) \alpha_i^k.$$

Отсюда с учетом равенства

$$\begin{aligned}
& \alpha_i^k = 1 - \frac{x_i^k - x_n}{x_i^k - x_n^{k-1} - \Delta_n^{R, k-1}} \prod_{\beta_0=1, \beta_0 \neq i}^{n-1} \frac{x_i^k - x_{\beta_0}}{x_i^k - x_{\beta_0}^{k-1} - \Delta_{\beta_0}^{R, k-1}} \\
& + \prod_{\beta_0=1, \beta_0 \neq i}^{n-1} \frac{x_i^k - x_{\beta_0}}{x_i^k - x_{\beta_0}^{k-1} - \Delta_{\beta_0}^{R, k-1}} - \prod_{\beta_0=1, \beta_0 \neq i}^{n-1} (x_i^k - x_{\beta_0}) \Big/ (x_i^k - x_{\beta_0}^{k-1} - \Delta_{\beta_0}^{R, k-1}) \\
& = (x_n - x_n^{k-1} - \Delta_n^{R, k-1}) (x_i^k - x_n^{k-1} - \Delta_n^{R, k-1})^{-1} \prod_{\beta_0=1, \beta_0 \neq i}^{n-1} (x_i^k \\
& - x_{\beta_0}) \Big/ (x_i^k - x_{\beta_0}^{k-1} - \Delta_{\beta_0}^{R, k-1}) - (x_i^k - x_{n-1}) (x_i^k - x_{n-1}^{k-1} - \Delta_{\beta_0}^{R, k-1})^{-1} \prod_{\beta_0=1, \beta_0 \neq i}^{n-2} (x_i^k \\
& - x_{\beta_0}) \Big/ (x_i^k - x_{\beta_0}^{k-1} - \Delta_{\beta_0}^{R, k-1}) + \prod_{\beta_0=1, \beta_0 \neq i}^{n-2} (x_i^k - x_{\beta_0}) \Big/ (x_i^k - x_{\beta_0}^{k-1} - \Delta_{\beta_0}^{R, k-1}) \\
& - \prod_{\beta_0=1, \beta_0 \neq i}^{n-2} (x_i^k - x_{\beta_0}) \Big/ (x_i^k - x_{\beta_0}^{k-1} - \Delta_{\beta_0}^{R, k-1}) + 1 = (x_n - x_n^{k-1} - \Delta_n^{R, k-1}) (x_i^k \\
& - x_n^{k-1} - \Delta_n^{R, k-1})^{-1} \prod_{\beta_0=1, \beta_0 \neq i}^{n-1} (x_i^k - x_{\beta_0}) \Big/ (x_i^k - x_{\beta_0}^{k-1} - \Delta_{\beta_0}^{R, k-1}) + \dots \\
& + (-1) \prod_{\beta_0=1, \beta_0 \neq i}^1 (x_i^k - x_{\beta_0}) \Big/ (x_i^k - x_{\beta_0}^{k-1} - \Delta_{\beta_0}^{R, k-1}) + 1 \\
& = \sum_{\alpha_0=1, \alpha_0 \neq i}^n \frac{x_{\alpha_0} - x_{\alpha_0}^{k-1} - \Delta_{\alpha_0}^{R, k-1}}{x_i^k - x_{\alpha_0}^{k-1} - \Delta_{\alpha_0}^{R, k-1}} \prod_{\beta_0=1, \beta_0 \neq i}^{\alpha_0-1} \frac{x_i^k - x_{\beta_0}}{x_i^k - x_{\beta_0}^{k-1} - \Delta_{\beta_0}^{R, k-1}} \\
& = \sum_{\alpha_0=1, \alpha_0 \neq i}^n (x_{\alpha_0} - x_{\alpha_0}^{k-1}) (x_i^k - x_{\alpha_0}^{k-1} - \Delta_{\alpha_0}^{R, k-1})^{-1} \left(1 - \prod_{\beta_1=1, \beta_1 \neq \alpha_0}^n (x_{\alpha_0}^{k-1} \right. \\
& \left. - x_{\beta_1}) (x_{\alpha_0}^{k-1} - x_{\beta_1}^{k-2} - \Delta_{\beta_1}^{R-1, k-2})^{-1} \right) \prod_{\beta_0=1, \beta_0 \neq i}^{\alpha_0-1} (x_i^k - x_{\beta_0}) \Big/ (x_i^k - x_{\beta_0}^{k-1} - \Delta_{\beta_0}^{R, k-1}) \\
& = \sum_{\alpha_0=1, \alpha_0 \neq i}^n \left((x_{\alpha_0} - x_{\alpha_0}^{k-1}) \Big/ (x_i^k - x_{\alpha_0}^{k-1} - \Delta_{\alpha_0}^{R, k-1}) \right) \sum_{\alpha_1=1, \alpha_1 \neq \alpha_0}^n \left((x_{\alpha_1} - x_{\alpha_1}^{k-2} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\Delta_{\alpha_1}^{R-1, k-2} \left| (x_{\alpha_0}^{k-1} - x_{\alpha_1}^{k-2} - \Delta_{\alpha_1}^{R-1, k-2}) \right| \prod_{\beta_1=1, \beta_1 \neq \alpha_0}^{\alpha_1-1} \left((x_{\alpha_0}^{k-1} - x_{\beta_1}) \left| (x_{\alpha_0}^{k-1} \right. \right. \\
& \left. \left. - x_{\beta_1}^{k-2} - \Delta_{\beta_1}^{R-1, k-2}) \right| \prod_{\beta_0=1, \beta_0 \neq i}^{\alpha_0-1} \left((x_i^k - x_{\beta_0}) \left| (x_i^k - x_{\beta_0}^{k-1} - \Delta_{\beta_0}^{R, k-1}) \right| \right) = \dots \\
& = \sum_{\alpha_0=1, \alpha_0 \neq i}^n \left((x_{\alpha_0} - x_{\alpha_0}^{k-1}) \left| (x_i^k - x_{\alpha_0}^{k-1} - \Delta_{\alpha_0}^{R, k-1}) \right| \sum_{\alpha_1=1, \alpha_1 \neq \alpha_0}^n \left((x_{\alpha_1} - x_{\alpha_1}^{k-2}) \left| (x_{\alpha_0}^{k-1} \right. \right. \right. \\
& \left. \left. - x_{\alpha_1}^{k-2} - \Delta_{\alpha_1}^{R-2, k-3}) \right| \dots \sum_{\alpha_R=1, \alpha_R \neq \alpha_{R-1}}^n \left((x_{\alpha_R} - x_{\alpha_R}^{k-R-1}) \left| (x_{\alpha_{R-1}}^{k-R} \right. \right. \right. \\
& \left. \left. - x_{\alpha_R}^{k-R-1}) \right| \prod_{\beta_R=1, \beta_R \neq \alpha_{R-1}}^{\alpha_R-1} \left((x_{\alpha_{R-1}}^{k-R} - x_{\beta_R}) \left| (x_{\alpha_{R-1}}^{k-R} - x_{\beta_R}^{k-R-1}) \right| \right) \dots \\
& \prod_{\beta_1=1, \beta_1 \neq \alpha_0}^{\alpha_1-1} \left((x_{\alpha_0}^{k-1} - x_{\beta_1}) \left| (x_{\alpha_0}^{k-1} - x_{\beta_1}^{k-2} - \Delta_{\beta_1}^{R-1, k-2}) \right| \prod_{\beta_0=1, \beta_0 \neq i}^{\alpha_0-1} \left((x_i^k \right. \right. \\
& \left. \left. - x_{\beta_0}) \left| (x_i^k - x_{\beta_0}^{k-1} - \Delta_{\beta_0}^{R, k-1}) \right| \right).
\end{aligned}$$

ИМЕЕМ

$$\begin{aligned}
|x_i^{k+1} - x_i| & \leq c q^{r^k} n c (d-2c)^{-1} q^{r^{k-1}} n c (d-2c)^{-1} q^{r^{k-2}} \dots n c (d-2c)^{-1} q^{r^{k-(R+1)}} \\
& \underbrace{e^{1/A} \dots e^{1/A}}_{R+1 \text{ раз}} \leq c q^{r^{k-R-1}(1+r+\dots+r^{R+1})} (A^{-1} e^{1/A})^{R+1}.
\end{aligned}$$

Учитывая равенства (6), (9), получим

$$|x_i^{k+1} - x_i| \leq c q^{r^{k-R-1} \cdot r^{R+2}} = c q^{r^{k+1}}.$$

Теорема доказана.

Приведем некоторые значения функции $r=r(R)$. При $R=0$ корень уравнения (9) равен $r=1,618\dots$ При $R=1$ для процесса

$$\begin{aligned}
x_i^{k+1} = x_i^k - f(x_i^k) \left| \prod_{\beta_0=1, \beta_0 \neq i}^n \left(x_i^k - x_{\beta_0}^{k-1} + f(x_{\beta_0}^{k-1}) \right) \right| \prod_{\beta_1=1, \beta_1 \neq \beta_0}^n \left(x_{\beta_0}^{k-1} - x_{\beta_1}^{k-2} \right), \\
i=1, \dots, n,
\end{aligned}$$

корень уравнения $r^3 - r^2 - r - 1 = 0$ равен

$$r = \frac{1}{3} \left(\sqrt[3]{19+3\sqrt{33}} + \sqrt[3]{19-3\sqrt{33}} + 1 \right) = 1,839\dots$$

При $R=2$ имеем $r=1,927\dots$, при $R=3$ получаем $r=1,9659\dots$, а при $R=8$ наибольший корень уравнения (9) равен $r=1,999\dots$

Заметим только, что теорема гарантирует, что скорость сходимости последовательности $\{x_i^k\}_1^n$ из: (2) R —сверхлинейна.

ЛИТЕРАТУРА

1. К ю р к ч и е в, Н., А. А н д р е е в. Об одной модификации метода Вейерштрасса — Дочева порядка сходимости $R+2$ для одновременного приближенного вычисления всех корней алгебраического уравнения. — Докл. БАН, **38**, 1985, № 11, 1461—1463.

Поступила 29. 4. 1985 г.

ON THE SOLVABILITY OF MONGE-AMPERE TYPE EQUATIONS

Nickolai Kutev

Николай Кутев. О разрешимости уравнений типа Монжа — Ампера. Доказывается точный результат для оценки градиента, существование и единственность классического решения задачи Дирихле для уравнений типа Монжа—Ампера.

Nickolai Kutev. On the Solvability of Monge-Ampere Type Equations. In the paper sharp results for gradient estimates, existence and uniqueness of a classical solution of the Dirichlet problem for equations of Monge-Ampere type are proved.

In this paper we give the complete proof of the propositions announced in [9]. Our purpose is to prove sharp results for the gradient estimates of the solutions of the boundary value problem

$$(1) \quad \begin{aligned} \det u_{x_i x_j} &= f(x, u, Du) \text{ in } G, \\ u &= g \quad \text{on} \quad \partial G, \end{aligned}$$

where G is a uniformly convex, bounded domain in \mathbb{R}^n .

Let us recall that in the paper of Trudinger and Urbas [13] gradient estimates for the solutions of more general equations than (1) were proved. These estimates hold for the solutions of (1) when

$$(2) \quad f(x, g(x), p) \leq C(1 + |p|^2)^{(n+1)/2}$$

for all $p \in \mathbb{R}^n$, $x \in N_{\partial G}$ ($N_{\partial G}$ is some neighbourhood of ∂G). Moreover in [13] it was proved that (2) is necessary in the following sense: when the estimate

$$f(x, z, p) \geq C(1 + |p|^2)^{\alpha/2}, \quad \alpha > n + 1,$$

holds for all $z \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}^n$, $x \in N_y$ (N_y is a neighbourhood of some point $y \in \partial G$), then there exists a function $g \in C^\infty(G)$ for which (1) is not solvable for convex $u \in C(\bar{G}) \cap C^2(G)$.

Our purpose is to prove the gradient estimates for the convex solutions of (1) under the more general and sharp condition

$$(3) \quad f(x, g(x), p) \leq \psi(|p|)(1 + |p|^2)^{(n+1)/2}$$

for all $x \in N_{\partial G}$, $p \in \mathbb{R}^n$, where the continuous nondecreasing, positive function ψ satisfies the condition

$$(4) \quad \int_1^\infty \frac{dt}{t \psi(t)} < \infty.$$

More precisely we have the following

Theorem 1. Let G be a uniformly convex domain in \mathbb{R}^n with $C^{1,1}$ boundary ∂G , $g \in C^{1,1}(\bar{G})$ and let $u \in C(\bar{G}) \cap C^2(G)$ be a convex solution of (1). Suppose that the positive function $f \in C^{1,1}(G \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ satisfies (3), (4) and $f_z \geq 0$ in $G \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Then the estimate

$$(5) \quad \sup_G |Du| \leq C_1$$

holds. The constant C_1 depends on n , G , $|u|_{0,G}$ and $|g|_{1,1;G}$.

Using Theorem 1 we can prove the following existence theorem, which is slightly more general than Theorem 1.2 in [13].

Theorem 2. Let G , g and f be the same as in Theorem 1 and moreover

$$f(x, -N, p) \leq g_1(x)/g_2(p)$$

for all $x \in G$, $p \in \mathbb{R}^n$, where N is a non-negative constant and $g_1(x)$, $g_2(p)$ are positive functions in $L^1(G)$ and $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ respectively such that

$$\int_G g_1(x) dx < \int_{\mathbb{R}^n} g_2(p) dp.$$

Then the Dirichlet problem (1) has a unique convex solution $u \in C^{0,1}(\bar{G}) \cap C^2(G)$.

The proof of Theorem 2 is the same as the proof of Theorem 1.2 in [13], using the gradient estimate (5) in Theorem 1 instead of Lemma 2.2 in [13].

The result in Theorem 1 is the best possible one, as the following theorem shows.

Theorem 3. Let G be a uniformly convex $C^{1,1}$ domain in \mathbb{R}^n and the positive function $f(x, z, p)$ satisfy the condition

$$(6) \quad f(x, z, p) \geq \varphi(|p|)(1 + |p|^2)^{(n+1)/2}$$

for $z \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}^n$, $x \in N_y$ (N_y is a neighbourhood of some point $y \in \partial G$), where the continuous, nondecreasing, positive function φ satisfies

$$(7) \quad \int_1^\infty \frac{dt}{t \varphi(t)} < \infty.$$

Then there exists $g \in C^\infty(\bar{G})$ for which (1) is not solvable for convex $u \in C(\bar{G}) \cap C^2(G)$.

Note that the conditions (3), (4) hold when

$$f(x, z, p) \leq C_2 (1 + |p|^2)^{(n+1)/2} \ln(2 + |p|)$$

while (6), (7) are fulfilled for

$$f(x, z, p) \geq C_3 (1 + |p|^2)^{(n+1)/2} \ln^{1+\varepsilon}(2 + |p|)$$

and C_2, C_3, ε are some positive constants.

To prove Theorems 1 and 3 we need two simple lemmas.

Lemma 1. Let the continuous, nondecreasing positive function ψ satisfy (4). Then for any positive constants K, L, β, δ_0 there exists a constant $\delta(K, L, \beta, \delta_0)$, $0 < \delta < \delta_0$, and a nonnegative function $h \in C^2[0, \delta]$ satisfying the conditions $h(0) = 0$, $h(\delta) \geq K$ and $h' \geq L$, $h'' = -\beta\psi(h')(h')^2$ in $(0, \delta)$.

Lemma 2. Let the continuous, nondecreasing, positive function φ satisfy (7). Then for any positive constants a, b, m_0 there exists a constant $m(b-a, m_0)$, $0 < m \leq m_0$, and a nonnegative function $q \in C[a, b] \cap C^2(a, b)$ satisfying the conditions $q' \geq 0$, $q'(b) = \infty$ and $q'' = m\psi(q')(1+q'^2)$.

Proof of Lemma 1. Let $L_1 \geq L$ satisfy the inequality

$$\int_{L_1}^{\infty} \frac{dt}{t^2 \psi(t)} < \beta \delta_0$$

and $H(z)$ be the positive monotonically increasing function

$$H(z) = \int_{L_1}^z \frac{dt}{t^2 \psi(t)}$$

for $z \geq L_1$, so that the inverse function $H^{-1}:(0, H(\infty)) \rightarrow (L_1, \infty)$ is well defined. We can choose the positive constant $L_2 \geq L_1$ so as to satisfy the inequality

$$\int_{L_1}^{L_2} \frac{dt}{t \psi(t)} \geq K\beta \text{ and } \delta(K, L, \beta, \delta_0) \in (H(L_2)/\beta, H(\infty)/\beta).$$

Let us now consider the function h given by

$$h(t) = \int_0^t H^{-1}(\beta(\delta-s)) ds.$$

It is evident that $h \geq 0$, $h(0) = 0$, $h' = H^{-1}(\beta(\delta-t)) \geq L_1 \geq L$ and $h'' = -\beta/H'(H^{-1}) = -\beta(h')^2 \psi(h')$. Hence $h \in C^2[0, \delta]$. Moreover,

$$h(\delta) = \int_0^\delta H^{-1}(\beta(\delta-s)) ds = \frac{1}{\beta} \int_{L_1}^{H^{-1}(\beta\delta)} \frac{ds}{s \psi(s)} \geq \frac{1}{\beta} \int_{L_1}^{L_2} \frac{ds}{s \psi(s)} \geq K.$$

Lemma 1 is proved.

Proof of Lemma 2. Let

$$m = \min \left(m_0, \frac{1}{b-a} \int_0^\infty \frac{dt}{(1+t^2)\varphi(t)} \right)$$

and $Q(z)$ be the positive monotonically decreasing function

$$Q(z) = \int_z^\infty \frac{dt}{(1+t^2)\varphi(t)}$$

for $z \geq 0$, so that the inverse function $Q^{-1}: (0, Q(0)) \rightarrow (0, \infty)$ is well defined.

We now consider the function $q(t)$ given by

$$q(t) = \int_a^t Q^{-1}(m(b-s)) ds.$$

It is evident that $q \geq 0$, $q' = Q^{-1}(m(b-t)) \geq 0$, $q'(b) = Q^{-1}(0) = \infty$ and $q'' = 1/Q'(Q^{-1}) = m(q')^2 \varphi(q')$.

Moreover,

$$q \leq \int_a^b Q^{-1}(m(b-s)) ds \leq \frac{1}{m} \int_0^\infty \frac{s ds}{(1+s^2)\varphi(s)}$$

and consequently $q \in C[a, b] \cap C^2(a, b)$.

Lemma 2 is proved.

By means of Lemmas 1 and 2 the proof of Theorems 1 and 3 follows immediately.

Proof of Theorem 1. Without loss of generality we may assume that g is a convex function. Let us define the function $d(x)$ as the distance from x to the surface ∂G . The function $d(x)$ is of class $C^{1,1}$ in the domain $G_{d_0} = \{x \in G; d(x) < d_0\}$ when d_0 is sufficiently small (see [4, p. 381]).

We consider the global barrier function $v = g - h(d)/2$ in the domain $G_\delta = \{x \in G; d(x) < \delta\}$, where h is the function defined in Lemma 1 with: $K = 2|g|_{0,G} + 2|u|_{0,G}$, $L = \max(1, 2|g|_{1,G})$, $\delta_0 = \min(d_0, 1/2k)$, $\beta = 2^{2n}/k^{n-1}$, $k = \min k_i > 0$ and k_1, k_2, \dots, k_{n-1} are the principal curvatures on ∂G . Using the principal coordinate system $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}, \nu$, where $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}$ are the principal directions and ν is the unit inner normal at ∂G , it follows that $g - h/2$ is a convex function and we have the following estimates in G_δ

$$\begin{aligned} \det D^2 \left(g - \frac{1}{2} h(d) \right) &\geq \det \left(-\frac{1}{2} D^2 h \right) = -\frac{h'' (h')^{n-1} k_1 k_2 \dots k_{n-1}}{2^n (1-k_1 d) (1-k_2 d) \dots (1-k_{n-1} d)} \\ &\geq 2^n (h')^{n+1} \psi(h') \geq \psi(h') (1+h'^2)^{(n+1)/2} \geq f \left(x, g, Dg - \frac{h'}{2} Dd \right) \\ &\geq f(x, g - h/2, Dg - Dh/2). \end{aligned}$$

Since $g-h/2 \leq u$ on ∂G_δ we obtain from the comparison principle (see Th. 17.1 in [4]) that $g-h/2 \leq u$ in G_δ and hence $(u(x)-u(y))/|x-y| \geq -C_4$ for any $y \in \partial G$, $x \in G_\delta$. Using the convexity of u we have

$$(8) \quad \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|} \leq C_5$$

for all $x \in G_\delta$, $y \in \partial G$ and moreover we have for all $x, y \in G$, $x \neq y$.

Theorem 1 is proved.

To prove Theorem 3 we will use the following variant of the comparison principle (see Lemma 3.1 in [13]) which follows immediately from the usual comparison principle.

Lemma 3 (Trudinger and Urbas). Let G be a bounded domain in \mathbb{R}^n and Γ a relatively open C^1 portion of ∂G . Let $u \in C^0(\bar{G}) \cap C^2(G \cup \Gamma)$ and $v \in C^0(G) \cap C^2(G)$ be uniformly convex functions satisfying

$$\frac{\det D^2 u}{\varphi(|Du|)(1+|Du|^2)^{(n+1)/2}} \geq \frac{\det D^2 v}{\varphi(|Dv|)(1+|Dv|^2)^{(n+1)/2}}$$

in G , $u \leq v$, on $\partial G/\Gamma$ and $\partial v/\partial \nu = \infty$ on Γ , where ν is the outer unit normal to Γ .

Then $u \leq v$ in G .

Proof of Theorem 3. Let $u \in C(G) \cap C^2(G)$ be a convex solution of (1), K_1 be an internally touching ball to ∂G at y with radius $3R$, and r denote the distance from the centre of K_1 .

Let $K_2(y, 2R)$ be a ball and R be sufficiently small so that $K_1 \cap K_2 \subset N_y$. In the domain $G_1 = K_2 \cap \{x \in G; r < 3R - \varepsilon\}$ with $0 < \varepsilon < R$ we consider the function $w = q(r) + M$, where $M = \sup_{\partial G/K_2} u$ and q is the function defined in

Lemma 2 with $a=R$, $b=3R-\varepsilon$, $m_0 = \min(1, R^{n-1})$ and

$$m = \min \left(m_0, \frac{1}{2R-\varepsilon} \int_0^\infty \frac{dt}{\varphi(t)(1+t^2)} \right) \geq \min \left(m_0, \frac{1}{R} \int_0^\infty \frac{dt}{\varphi(t)(1+t^2)} \right).$$

The function w is a convex one and we may apply Lemma 3 to the functions w and u . Thus we have the estimates $\det D^2 w = (q'/r)^n + (q'' - q'/r)(q'/r)^{n-1}$

$$\leq m \varphi(q')(q')^{n-1} (1+q'^2)/R^{n-1} \leq \varphi(|Dw|)(1+|Dw|^2)^{(n+1)/2}$$

in G_1 . From (6) it follows that

$$\frac{\det D^2 u}{\varphi(|Du|)(1+|Du|^2)^{(n+1)/2}} \geq \frac{\det D^2 u}{f(x, u, Du)} = 1 \geq \frac{\det D^2 w}{\varphi(|Dw|)(1+|Dw|^2)^{(n+1)/2}}.$$

Since u is a convex function we have the estimates

$$\sup_{G/K_2} u \leq \sup_{\partial G/K_2} u \text{ and } u \leq w \text{ on } G \cap \partial K_2.$$

Moreover, $w'(3R-\varepsilon) = q'(3R-\varepsilon) = \infty$ and from Lemma 3 it follows that

$$u \leq w \leq \sup_{\partial G/K_2} u + \left[\min \left(m_0, \frac{1}{R} \int_0^\infty \frac{dt}{\varphi(t)(1+t^2)} \right) \right]^{-1} \int_0^\infty \frac{tdt}{\varphi(t)(1+t^2)}.$$

Letting $\varepsilon \rightarrow 0$ and using the continuity of u yields the same inequality at y . Thus in order to prove Theorem 3 it then suffices to choose the boundary values g such that $g=0$ on $\partial G \setminus K_2$ and

$$g(y) > \int_0^\infty \frac{tdt}{\varphi(t)(1+t^2)} / \left[\min \left(m_0, \frac{1}{R} \int_0^\infty \frac{dt}{\varphi(t)(1+t^2)} \right) \right].$$

REFERENCES

1. Aleksandrov, A. D. Dirichlet's problem for equation $\det \|z_{ij}\| = \Phi(z_1, \dots, z_n, x_1, \dots, x_n)$. — Vestnik Leningrad. Univ., Math., **13**, 1958, 5—24.
2. Bakel'man, I. Geometric Methods for Solving Elliptic Equations. Moscow, 1965.
3. Caffarelli, L., L. Nirenberg, J. Spruck. The Dirichlet problem for nonlinear second order elliptic equations. I. Monge-Ampere equations. — Comm. Pure Appl. Math., **37**, 1984, 369—402.
4. Gilberg, D., N. S. Trudinger. Elliptic Partial Differential Equations of Second Order (2nd edition). New York, 1983.
5. Ivochkina, N. M. A priori estimate of $\|u\|_{C^2(\bar{Q})}$ for convex solutions of the Dirichlet problem for the Monge-Ampere equation. — Zapiski Nauchnykh Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. AN SSSR, **96**, 1980, 69—79.
6. Krylov, N. V. On degenerate nonlinear elliptic equations. I — Mat. Sb., **120** (162), 1983, 311—330; II — Mat. Sb., **121** (163), 1983, 211—232.
7. Krylov, N. V. Boundedly nonhomogeneous elliptic and parabolic equations in a domain. — Izvestia Math. Ser., **47**, 1983, 75—108.
8. Kutev, N. Nonexistence of classical solutions of the Dirichlet problem for fully nonlinear elliptic equations (to appear).
9. Kutev, N. On the solvability of Monge-Ampere type equations. — C. R. Acad. Bulg. Sci., 1985, **38**, No 10, 1283—1285.
10. Lions, P.-L. Sur les équations de Monge—Ampere. I — Manuscripta Math., **41**, 1983, 1—43; II — Arch. Rat. Mech. Anal., 1985, **89**, 93—122.
11. Serrin, J. The problem of Dirichlet for quasilinear elliptic differential equations with many independent variables. — Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A, **264**, 1969, 413—496.
12. Trudinger, N. S. Fully nonlinear, uniformly elliptic equations under natural structure conditions. — Trans. Amer. Math. Soc., **278**, 1983, 751—770.
13. Trudinger, N. S., J. I. E. Urbas. The Dirichlet problem for the equation of prescribed Gauss curvature. — Bull. Austral. Math. Soc., **28**, 1983, 217—231.

Received 13. 5. 1985

ГОДИШНИК НА СОФИЙСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ „КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“
ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

Том 78

Книга 1 — Математика

1984

ANNUAIRE DE L'UNIVERSITÉ DE SOFIA „KLIMENT OHRIDSKI“
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES ET MÉCANIQUE

Tome 78

Livre 1 — Mathématiques

1984

СЛАБЫЕ И СИЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Недю Попиванов

Недю Попиванов. Слабые и сильные решения краевых задач. Рассматриваются случаи, когда каждое слабое решение краевой задачи для систем уравнений первого порядка является сильным решением этой задачи. Исследуется наличие разрыва в коэффициентах системы. Рассматриваются и краевые задачи в областях с углами на границе.

Nedju Popivanov. Weak and Strong Solutions of Boundary Value Problems. Some cases when "the weak equal the strong" for solutions of linear systems of partial differential equations are considered. The discontinuity of coefficients is admissible. Some boundary value problems in corner domains are investigated.

Основы теории положительно-симметричных систем заложены в фундаментальной работе Фридрикса [1]. В ней доказывается, что если для таких систем рассмотрим диссипативные краевые условия, эти задачи имеют слабое решение, а их сильное решение является единственным (если существует). Таким образом, чтобы в одном классе решений имело место существование и единственность, остается рассмотреть связь между слабыми и сильными решениями. Для этого Фридрикс, а потом и другие авторы (см. [5, 6]) идут следующим путем. Они рассматривают расширенную систему (включающую и некоторые производные решения), и если она тоже будет положительно-симметричной, с диссипативными краевыми условиями, то отсюда сразу следует существование и единственность сильного решения и его дифференцируемость (эвентуально только относительно некоторых переменных или с весом около границы). Разумеется, для этого необходимо много предположений. Дезин [4] и Лакс и Филипс [3] следуют другим путем. Они сразу доказывают результаты о том, что „каждое слабое решение будет сильным“. Понятно, что для этого достаточно и более малых предположений. Надо заметить, что первые результаты в этом направлении доказал Фридрикс в [2] для внутренних подобластей основной области. Поэтому надо рассматривать слабые и сильные решения только в окрестности граничных точек. Все эти резуль-

таты доказываются при помощи техники осреднения. Все-таки надо отметить и большой круг работ, посвященный исследованию разных случаев, когда не все слабые решения будут сильными (см. [7—9]).

В § 1 настоящей работы рассматривается вопрос о совпадении слабых и сильных решений краевых задач для внутренних подобластей. В работе [2], как и во всех следующих работ, предполагается, что коэффициенты системы непрерывные, с кусочно-непрерывными первыми производными. В § 1 рассматривается случай, когда при переходе через некоторую поверхность допускается разрыв первого рода матриц перед тангенциальными производными. Краевые задачи такого вида появляются, например, при сведении уравнения Лаврентьева-Бицадзе

$$u_{x_3 x_3} - (\operatorname{sgn} x_3) [u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2}] = f$$

к симметрической системе [22].

В § 2 рассматривается связь между соответственными условиями на граничной матрице в работах [1, 3, 16]. Условие Фридрихса [1] выражается через некоторое условие на ранге этой матрицы. Более сильные условия этого вида появляются в работах [10, 11] (включительно и при наличии углов на границе), где исследуется и вопрос о дифференцируемости.

В § 3 исследуются краевые задачи, одна из которых рассмотрена в работах Сорокиной [14, 15]. Доказывается, что слабое решение является сильным при наличии углов и в раньше не рассмотренных случаях. Эти результаты используются для исследования одной нелокальной задачи в [21].

1. СЛАБОЕ РЕШЕНИЕ БУДЕТ СИЛЬНЫМ И ДЛЯ РАЗРЫВНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Рассмотрим в области G систему

$$(1) \quad Lu \equiv \sum_{\nu=1}^m A_{\nu}(x) \frac{\partial u}{\partial x_{\nu}} + B(x)u = f(x),$$

где A_{ν} и B — $(n \times n)$ -матрицы, $f = (f_1, \dots, f_n) \in L_2(G)$. Предполагаем, что функция $u(x) = (u_1(x), \dots, u_n(x)) \in L_2(G)$ является слабым решением уравнения (1) в области G , т. е. что выполнено

$$(2) \quad (u, L^*v) = (f, v)$$

для всех кусочно-гладких в G функций $v = (v_1, \dots, v_n) \in C_0^0(G)$. Функцию $v(x)$ будем называть кусочно-непрерывной в G , если она ограничена в G и при помощи конечного числа кусочно-гладких поверхностей область G можно разбить на подобласти, внутри каждой из которых функция непрерывна. Функцию $v(x)$ будем называть кусочно-гладкой в G , если она непрерывна в G , и ее первые производные кусочно-непрерывные в G . Будем доказывать существование кусочно-гладких в G функций u_k , для которых

$$(3) \quad \|u_k - u\|_{L_2(G')} \rightarrow 0, \quad \|Lu_k - f\|_{L_2(G')} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty,$$

для каждой компактной подобласти G' области G . Для простоты будем считать, что поверхность разрыва является плоскостью $x_1 = 0$.

Рассмотрим следующие условия:

A1. Элементы матрицы $A_1(x)$ кусочно-гладкие в области G . Элементы матриц $A_v(x)$ ($v=2, \dots, m$) кусочно-гладкие в $G \cap \{x_1 \geq 0\}$ и в $G \cap \{x_1 \leq 0\}$. На плоскости $x_1=0$ допускается разрыв первого рода этих функций. Элементы B кусочно-непрерывные в G .

A2. Существуют неособые в G матрицы $Q(x)$ и $Q_1(x)$ с кусочно-гладкими в G элементами и такие, что имеет место представление

$$Q(x)A_1(x)Q_1(x) = \tilde{A}_1(x_1), \quad x \in G.$$

Теорема 1. Пусть для системы (1) выполнены условия A1 и A2. Тогда каждое слабое решение уравнения (1) в области G будет сильным решением в любой компактной подобласти G' .

Доказательство. Обозначим через \tilde{A}_v , $v=1, \dots, m$, и \tilde{B} матрицы

$$\tilde{A}_v(x) = Q(x)A_v(x)Q_1(x),$$

$$\tilde{B}(x) = Q(x) \left[B(x)Q_1(x) + \sum_{v=1}^m A_v(x) \frac{\partial Q_1(x)}{\partial x_v} \right].$$

При этом заметим, что $\tilde{A}_1(x) \equiv \tilde{A}_1(x_1)$. После замены переменных $u(x) = Q_1(x)w(x)$ и умножения уравнения (1) на матрицу $Q(x)$ задача сводится к следующей. Функция $w \in L_2^{\text{loc}}(G)$ будет слабым решением в G уравнения

$$3) \quad \tilde{L}w \equiv \sum_{v=1}^m \tilde{A}_v(x) \frac{\partial w}{\partial x_v} + \tilde{B}(x)w = \tilde{f}(x),$$

где $\tilde{f}(x) = Q(x)f(x) \in L_2^{\text{loc}}(G)$. Пусть G' является некоторой компактной подобласти G . Надо построить функции w_k , кусочно-гладкие в G , для которых

$$(4) \quad \|w_k - w\|_{L_2(G')} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty,$$

$$(5) \quad \|\tilde{L}w_k - \tilde{f}\|_{L_2(G')} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Введем такой вариант усреднения по Фридрихсу. Пусть $j(s)$ — неотрицательная функция одной переменной класса $C^\infty(\mathbb{R}^1)$, $j(-s) = j(s)$, $j(s) = 0$ для $|s| > 1$ и $\int j(s)ds = 1$. Для $v \in L_2(G')$ рассмотрим следующий оператор усреднения:

$$(6) \quad R_{\varepsilon\eta} v(x) = \int_{G'} k_{\varepsilon\eta}(x-z) v(z) dz,$$

где ядро $k_{\varepsilon\eta}$ будет

$$k_{\varepsilon\eta}(x-z) = \frac{1}{\varepsilon\eta^{m-1}} j\left(\frac{x_1-z_1}{\varepsilon}\right) \prod_{v=2}^m j\left(\frac{x_v-z_v}{\eta}\right).$$

Здесь и далее $0 < \varepsilon \leq \eta < \rho(G', \partial G)$. Отметим некоторые свойства оператора (6):

$$R_{\varepsilon\eta} v \in C^\infty(\mathbb{R}^m), \quad R_{\varepsilon\eta} v \in C_0^\infty(G),$$

$$(7) \quad \|R_{\varepsilon\eta} v - v\|_{L_2(G')} \rightarrow 0, \quad \varepsilon, \eta \rightarrow 0.$$

Кроме того, если $G_1 \subset G$ и $v \in L_2(G_1)$, имеем

$$\begin{aligned} & \left\| \int_{G_1} k_{\varepsilon\eta}(x-z) v(z) dz \right\|_{L_2(G_2)}^2 \\ & \leq \int_{G_2} \left\{ \int_{G_1} k_{\varepsilon\eta}(x-z) dz \right\} \left\{ \int_{G_1} k_{\varepsilon\eta}(x-z) v^2(z) dz \right\} dx \\ & \leq \int_{G_1} v^2(z) \left\{ \int_{G_2} k_{\varepsilon\eta}(x-z) dx \right\} dz \leq \|v\|_{L_2(G_1)}^2, \end{aligned}$$

так как $\int_{\mathbb{R}^m} k_{\varepsilon\eta}(x-z) dz = 1$. То есть выполнено

$$(8) \quad \left\| \int_{G_1} k_{\varepsilon\eta}(x-z) v(z) dz \right\|_{L_2(G_2)} \leq \|v\|_{L_2(G_1)}.$$

Аналогичным образом доказывается и оценка

$$(9) \quad \left\| \int_{G_1} |k_{\varepsilon\eta}^1(x-z) v(z)| dz \right\|_{L_2(G_2)} \leq C \|v\|_{L_2(G)},$$

где ядро $k_{\varepsilon\eta}^1$ имеет вид

$$(10) \quad k_{\varepsilon\eta}^1(x) = \frac{1}{\varepsilon\eta^{m-1}} j' \left(\frac{x_1}{\varepsilon} \right) \prod_{v=2}^m j \left(\frac{x_v}{\eta} \right),$$

или

$$(11) \quad k_{\varepsilon\eta}^1(x) = \frac{1}{\varepsilon\eta^{m-1}} j \left(\frac{x_1}{\varepsilon} \right) j' \left(\frac{x_k}{\eta} \right) \prod_{v=2, v \neq k}^m j \left(\frac{x_v}{\eta} \right).$$

Постоянная в (9) будет $C = \int |j'(s)| ds$.

Определим $w_k = R_{\varepsilon_k \eta_k} w$, где последовательности $\varepsilon_k \rightarrow +0$ и $\eta_k \rightarrow +0$ выберем дополнительно. Тогда из (7) следует, что имеет место (4) и $R_{\varepsilon_k \eta_k} \tilde{f} \rightarrow \tilde{f}$. Однако $R_{\varepsilon\eta} v \in C^\infty(G)$, если $v \in L_2(G')$, и поэтому

$$(w, \tilde{L}^* R_{\varepsilon\eta} v) = (\tilde{f}, R_{\varepsilon\eta} v), \quad \forall v \in L_2(G').$$

Так как $R_{\varepsilon\eta} \equiv R_{\varepsilon\eta}^*$, отсюда следует

$$(12) \quad (\tilde{L}^* R_{\varepsilon\eta})^* w = R_{\varepsilon\eta} \tilde{f},$$

где $(\tilde{L}^* R_{\varepsilon\eta})^*$ — сопряженный к $\tilde{L}^* R_{\varepsilon\eta}$ интегральный оператор. Допустим, что уже найдены последовательности $\varepsilon_k \rightarrow +0$ и $\eta_k \rightarrow +0$, для которых выполнено

$$(13) \quad \|(\tilde{L}^* R_{\varepsilon_k \eta_k})^* w - \tilde{L}^* R_{\varepsilon_k \eta_k} w\|_{L_2(G')} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Отсюда следует, что w будет сильным решением уравнения (3) в G' с приближающей последовательностью w_k . В свою очередь из этого следует, что функция u будет сильным решением уравнения (1) с приближающей последовательностью $u_k = Q_1 w_k$.

Итак, рассмотрим

$$(14) \quad (\tilde{L}^* R_{\varepsilon\eta})^* w(x) - L R_{\varepsilon\eta} w(x) \\ = \sum_{\nu=1}^m \int_{G'} \frac{\partial}{\partial z_\nu} [(\tilde{A}_\nu(x) - \tilde{A}_\nu(z)) k_{\varepsilon\mu}(x-z)] w(z) dz, \\ + \int_{G'} [\tilde{B}(z) - \tilde{B}(x)] k_{\varepsilon\eta}(x-z) w(z) dz.$$

Для последнего слагаемого в (14) сразу следует, что оно сходится к нулю в $L_2(G')$ (см. [2] или [13, с. 51—52], только там $\varepsilon = \eta$). Рассмотрим оператор

$$(15) \quad P_{\varepsilon\eta} v(x) = \int_{G'} \frac{\partial}{\partial z_1} [(\tilde{A}_1(x_1) - \tilde{A}_1(z_1)) k_{\varepsilon\eta}(x-z)] v(z) dz \\ = - \int_{G'} \tilde{A}_1'(z_1) k_{\varepsilon\eta}(x-z) v(z) dz \\ + \int_{G'} \frac{1}{\varepsilon} [\tilde{A}_1(x_1) - \tilde{A}_1(z_1)] k_{\varepsilon\eta}^1(x-z) v(z) dz,$$

где $v \in L_2(G')$ и ядро k^1 имеет вид (10). Так как элементы матрицы $\tilde{A}_1(x_1)$ удовлетворяют условию Липшица в G' , то $|\tilde{A}_1(x_1) - \tilde{A}_1(z_1)| \leq C |x_1 - z_1|$. Однако $k_{\varepsilon\eta}(x-z) = 0$ и $k_{\varepsilon\eta}^1(x-z) = 0$, если $|x_1 - z_1| > \varepsilon$, и, следовательно, $\varepsilon^{-1} |\tilde{A}_1(x_1) - \tilde{A}_1(z_1)| |k^1| \leq C |k^1|$. Таким образом получаем

$$|P_{\varepsilon\eta} v(x)| \leq C \int_{G'} k_{\varepsilon\eta}(x-z) |v(z)| dz + C \int_{G'} |k^1(x-z) v(z)| dz.$$

Отсюда и из (9) следует

$$(16) \quad \|P_{\varepsilon\eta} v\|_{L_2(G')} \leq C \|v\|_{L_2(G')},$$

где C не зависит от ν , ε и η . Однако для $v \in C_0^\infty(G')$ имеем

$$P_{\varepsilon\eta} v(x) = \int_{G'} [\tilde{A}_1(z_1) - \tilde{A}_1(x_1)] k_{\varepsilon\eta}(x-z) \frac{\partial v}{\partial z_1}(z) dz$$

и из (8) следует, что

$$(17) \quad \|P_{\varepsilon\eta} v\|_{L_2(G')} \leq C\varepsilon \|v_{z_1}\|_{L_2(G')} \rightarrow 0 \quad (\varepsilon, \eta \rightarrow 0).$$

Из (16) и (17) обычным способом получаем

$$(18) \quad |P_{\varepsilon\eta} w|_{L_2(G')} \rightarrow 0 \quad (\varepsilon, \eta \rightarrow 0).$$

Если $m=1$, то (13) и вместе с ним теорема доказаны. Если $m \geq 2$, рассмотрим выражение

$$I_{\varepsilon\eta} w(x) = \int_{G'} \frac{\partial}{\partial z_2} [(\tilde{A}_2(x) - \tilde{A}_2(z)) k_{\varepsilon\eta}(x-z)] w(z) dz.$$

Это выражение представим в виде

$$(19) \quad \begin{aligned} I_{\varepsilon\eta} w &= \int_{G' \cap \{z_1 > \varepsilon\}} + \int_{G' \cap \{z_1 < -\varepsilon\}} + \int_{G' \cap \{|z_1| < \varepsilon\}} \\ &= I_{\varepsilon\eta}^1 w + I_{\varepsilon\eta}^2 w + I_{\varepsilon\eta}^3 w. \end{aligned}$$

Для функций $v \in L_2(G')$ рассмотрим $I_{\varepsilon\eta}^1 v$. Сразу заметим, что если $x \in G'$ такое, что $x_1 < 0$, то $z_1 - x_1 > \varepsilon$ и, следовательно, ядро оператора $I_{\varepsilon\eta}^1$ обращается в нуль. Следовательно,

$$\begin{aligned} \|I_{\varepsilon\eta}^1 v\|_{L_2(G')}^2 &= \|I_{\varepsilon\eta}^1 v\|_{L_2(G' \cap \{x_1 > 0\})}^2 \\ &\leq 2 \int_{G'} \left\{ \int_{G' \cap \{z_1 > \varepsilon\}} |\partial \tilde{A}_2 / \partial z_2| k_{\varepsilon\eta}(x-z) |v(z)| dz \right\}^2 dx \\ &+ 2 \int_{G' \cap \{x_1 > 0\}} \left\{ \int_{G' \cap \{z_1 > \varepsilon\}} \eta^{-1} |\tilde{A}_2(x) - \tilde{A}_2(z)| k^1(x-z) |v(z)| dz \right\}^2 dx \\ &= I_{\varepsilon\eta}^{11} + I_{\varepsilon\eta}^{12}, \end{aligned}$$

где $k_{\varepsilon\eta}^1$ имеет вид (11) для $k=2$. Из ограниченности $\partial \tilde{A}_2 / \partial z_2$ и (9) сразу получаем, что выражение $I_{\varepsilon\eta}^{11}$ оценивается через $C \|v\|_{L_2(G')}^2$. Заметим, что

так как в $I_{\varepsilon\eta}^{12}$ для точек x и z имеем $x_1 > 0$ и $z_1 > \varepsilon$, то $|\tilde{A}_2(x) - \tilde{A}_2(z)| \leq C|x-z|$, так как в $G \cap \{x_1 \geq 0\}$ элементы матрицы $\tilde{A}_2(x)$ кусочно-гладкие по предположение A1. Однако ядро оператора $I_{\varepsilon\eta}^{12}$ обращается в нуль, если

нарушено хотя бы одно из неравенств $|x_\nu - z_\nu| < \eta$, $\nu = 1, \dots, m$. Следовательно,

$$I_{\varepsilon\eta}^{12} \leq C_1 \int_{G'} \left\{ \int_{G'} |k^1(x-z) v(z)| dz \right\}^2 dx \leq C_2 \|v\|_{L_2(G')}^2,$$

где снова применили (9). Таким образом доказали

$$(20) \quad \|I_{\varepsilon\eta}^1 v\|_{L_2(G')} \leq C \|v\|_{L_2(G')}, \quad \forall v \in L_2(G').$$

Однако, если $v \in C_0^\infty(G')$, то

$$I_{\varepsilon\eta}^1 v(x) = \int_{G' \cap \{z_1 > \varepsilon\}} (\tilde{A}_2(z) - \tilde{A}_2(x)) k_{\varepsilon\eta}(x-z) \frac{\partial v}{\partial z_2}(z) dz.$$

Из этого представления при помощи (8) сразу следует, что для $v \in C_0^\infty(G')$ имеем

$$(21) \quad \|I_{\varepsilon\eta}^1 v\|_{L_2(G')} \leq C\eta \|\partial v / \partial z_2\|_{L_2(G')} \rightarrow 0 \quad (\varepsilon, \eta \rightarrow 0).$$

Из (21) и (20) получаем

$$(22) \quad \|I_{\varepsilon\eta}^1 w\|_{L_2(G')} \rightarrow 0 \quad (\varepsilon, \eta \rightarrow 0).$$

Аналогичным образом следует и

$$(23) \quad \|I_{\varepsilon\eta}^2 w\|_{L_2(G')} \rightarrow 0 \quad (\varepsilon, \eta \rightarrow 0).$$

Наконец, рассмотрим $I_{\varepsilon\eta}^3 w$:

$$\begin{aligned} |I_{\varepsilon\eta}^3 w(x)| &\leq \int_{G' \cap \{|z_1| < \varepsilon\}} \left| \frac{\partial \tilde{A}_2}{\partial z_2}(z) k_{\varepsilon\eta}(x-z) \right| |w(z)| dz \\ + \int_{G' \cap \{|z_1| < \varepsilon\}} \frac{|\tilde{A}_2(x) - \tilde{A}_2(z)|}{\varepsilon\eta^m} &\cdot \left| j\left(\frac{x_1 - z_1}{\varepsilon}\right) j'\left(\frac{x_2 - z_2}{\eta}\right) \right| \left| \prod_{v=3}^m j\left(\frac{x_v - z_v}{\eta}\right) \right| |w(z)| dz \\ &= I_{\varepsilon\eta}^{31} w + I_{\varepsilon\eta}^{20} w. \end{aligned}$$

Для исследования $I_{\varepsilon\eta}^{31} w$ используем (8) при $G_1 = G \cap \{|z_1| < \varepsilon\}$ и $G_2 = G'$ и получаем

$$\|I_{\varepsilon\eta}^{31} w\|_{L_2(G')} \leq C \|w\|_{L_2(G' \cap \{|z_1| < \varepsilon\})}.$$

Используя (9), аналогичным способом получаем

$$\|I_{\varepsilon\eta}^{32} w\|_{L_2(G')} \leq C\eta^{-1} \|w\|_{L_2(G' \cap \{|z_1| < \varepsilon\})}$$

и окончательно

$$(24) \quad \|I_{\varepsilon\eta}^3 w\|_{L_2(G')} \leq C(1 + \eta^{-1}) \|w\|_{L_2(G' \cap \{|z_1| < \varepsilon\})}.$$

Выбираем последовательность $\eta_k \rightarrow +0$. Потом числа $0 < \varepsilon_k \leq \eta_k$ выбираем так, чтобы было выполнено

$$(25) \quad \|w\|_{L_2(G' \cap \{|z_1| < \varepsilon\})} \leq \eta_k/k.$$

Тем самым, из (24) и (25) получаем, что $\|I_{\varepsilon_k \eta_k}^3 w\|_{L_2(G')} \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$. Из этого, (22) и (23) следует, что при таком выборе последовательностей ε_k и η_k будет выполнено

$$\|I_{\varepsilon_k \eta_k} w\|_{L_2(G')} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Аналогичным образом рассматриваются и остальные выражения в (14) для $v=3, \dots, m$. Используя (25), для них тоже получаем аналогичные результаты. Имея в виду представление (14), из всего этого следует, что (13) будет выполнено.

Теорема 1 доказана.

З а м е ч а н и е 1. Заметим, что в случае, когда все матрицы $A_v(x)$ кусочно-гладкие в G , Фридрихс доказал [2], что оператор

$$(\tilde{L} * R_{\varepsilon\eta})^* - \tilde{L}R_{\varepsilon\eta}$$

является равномерно ограниченным (относительно ε и η) из $L_2(G')$ в $L_2(G')$. В его доказательстве $\varepsilon = \eta$. Здесь такую ограниченность мы не можем доказать для оператора $I_{\varepsilon\eta}^3$.

2. УСЛОВИЯ НА ГРАНИЧНОЙ МАТРИЦЕ

В своей работе [1] Фридрихс рассматривает область $G = \{|x| < R, x_m < 0\}$. Одно из многих условий, которые он предполагает выполненными для матрицы A_m из системы (1), в наших обозначениях будет:

$$(26) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Существуют матрицы } \sigma_1, \dots, \sigma_{m-1}, \tau_1, \dots, \tau_{m-1}, \text{ принадлежащие } C(G) \text{ так, что в } G \text{ выполнено} \\ \partial A_m / \partial x_\nu = \tau_\nu A_m + A_m \sigma_\nu, \quad \nu = 1, \dots, m-1 \end{array} \right.$$

(см. [1, с. 368, условия А и 3А]). Фридрихс сразу отмечает, что это условие является более слабым ограничением, чем следующее условие Лакса и Филиппса [3]:

$$(27) \quad \text{Ранг матрицы } A_m(x) \text{ является постоянным в окрестности границы } x_m = 0.$$

В нашей работе [16] мы ввели такое условие:

$$(28) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{В окрестности границы } x_m = 0 \text{ имеет место представление} \\ A_m(x) = E(y) \text{diag}[a_1(x_m), \dots, a_n(x_m)]C(x), \\ \text{где матрицы } E \text{ и } C \text{ неособые, с кусочно-гладкими элементами,} \\ \text{а функции } a_1, \dots, a_n \text{ кусочно-гладкие.} \end{array} \right.$$

Здесь и далее через $\text{diag}[a_1, \dots, a_n]$ обозначаем диагональную матрицу с элементами главной диагонали a_1, \dots, a_n . Сразу видно, что условие (28) является более слабым ограничением, чем условие (27) Лакса и Филиппса.

В своей работе [3] Лакс и Филиппс доказали, что если выполнено условие (27), то каждое слабое решение будет и полусильным. Потом в [12] Пейзер доказал, что это решение на самом деле будет и сильным. Такой результат мы доказали в [17], если выполнено только условие (28). Условие такого вида можно применить и при исследовании вопросов о совпадении слабых и сильных решений в областях с углами. По этому поводу см. работ [18—20], где мы исследовали некоторые краевые задачи.

Здесь мы рассматриваем условие Фридрихса (26) и ту связь, которая существует между ним и условием (28). Заметим, что матрица A_m у Фридрихса симметрическая.

Л е м м а 1. Пусть матрица A_m (необязательно симметрическая) удовлетворяет условию Фридрихса (26). Тогда она удовлетворяет и следующему условию:

$$(29) \quad \text{rank } A_m(x) = \text{const} \quad \text{на} \quad \{x_m = \text{const}\} \cap \bar{G}.$$

Условие (29) является более слабым ограничением, чем условие (26).

Доказательство. Из условия (26) можно доказать, что производная относительно x_ν каждого минора матрицы A_m выражается как однородная линейная комбинация миноров A_m того же порядка. Коэффициенты этой

линейной комбинации являются элементами матриц τ_ν и σ_ν . Допустим, что в точке $(x_1^0, \dots, x_m^0) \in \bar{G}$ ранг A_m меньше p , где $p \leq n$. Это означает, что все миноры A_m порядка p обращаются в нуль в этой точке. Рассмотрим точки вида $(x_1, x_2^0, x_3^0, \dots, x_m^0) \in \bar{G}$. Всюду на этом отрезке миноры A_m порядка p удовлетворяют однородную линейную систему дифференциальных уравнений первого порядка относительно x_1 . Из теоремы единственности задачи Коши следует, что на отрезке $(x_1, x_2^0, \dots, x_m^0) \in \bar{G}$ все миноры порядка p матрицы A_m аннулируются. Аналогичным образом рассматриваем и другие производные и получаем, что все миноры порядка p матрицы A_m аннулируются всюду на $\{x_m = x_m^0\} \cap \bar{G}$, т. е. что здесь ранг матрицы A_m меньше p . Следовательно, выполнено (29).

Остальную часть утверждения леммы получаем при помощи следующего примера: пусть $n=1$, $m \geq 2$ и $A_m(x) \equiv x_m(x_m^2 + x_1^2)$. Очевидно $A_m(x) = 0$ в $\bar{G} \cap \{x_m = 0\}$ и $A_m(x) > 0$ в $G \cap \{x_m > 0\}$, т. е. матрица $A_m(x)$ сохраняет ранг на сечении G с каждой плоскостью вида $\{x_m = \text{const}\}$. Однако легко видно, что условие Фридрихса (26) не выполнено. Это происходит, потому, что функция $A_m(x)$ обращается в нуль в точках $\{x_m = 0\}$ по-разному: для $x_1 = 0$ — как x_m^3 , а в остальных точках — как x_m .

Лемма 1 доказана.

Легко видно, что условие (28) является более сильным ограничением, чем условие Фридрихса (26). Таким образом, получаем следующую диаграмму: $(27) \Rightarrow (28) \Rightarrow (26) \Rightarrow (29)$. Пусть, однако, рассматриваем матрицы не с произвольной структурой, а только допускающие представление вида

$$(30) \quad A_m(x) = E(x) \text{diag}[a_1(x), \dots, a_n(x)]C(x), \quad x \in G,$$

где элементы неособых матриц $E(x)$ и $C(x)$ кусочно-гладкие.

Лемма 2. Пусть матрица $A_m(x)$ допускает представление (30) и удовлетворяет условию Фридрихса (26). Тогда она удовлетворяет и условию (28).

Доказательство. Используя (30), из условия Фридрихса получаем

$$\text{diag} \left[\frac{\partial a_1}{\partial x_\nu}, \dots, \frac{\partial a_n}{\partial x_\nu} \right] = B_\nu \text{diag} [a_1, \dots, a_n] + \text{diag} [a_1, \dots, a_n] D_\nu,$$

то есть $\partial a_k / \partial x_\nu = b_{k\nu} a_k$ ($k=1, \dots, n$; $\nu=1, \dots, m-1$). Отсюда следует

$$(31) \quad a_k(x_1, \dots, x_m) = h_k(x_m) \exp \left\{ \sum_{\nu=1}^{m-1} \int_0^{x_\nu} b_{k\nu}(0, \dots, 0, t, x_{\nu+1}, \dots, x_m) dt \right\},$$

где обозначили $h_k(x_m) = a_k(0, \dots, 0, x_m)$. Имея в виду (30), из (31) получаем представление (28).

Лемма 2 доказана.

3. ГРАНИЦА С УГЛАМИ

Рассмотрим снова вопрос о совпадении слабых и сильных решений, но уже если область G содержит углы. Будем исследовать систему (1) в области $\{x \in R^m: x_1 > 0, x_2 > 0\}$. Предположим, что:

а) матрицы A_1 и A_2 приведены уже в диагональный вид с постоянными коэффициентами во всей области;

б) краевые условия для основной и сопряженной задачи нормализованы (см. [12]), т. е. приведены в вид

$$(32) \quad u_1 = \dots = u_p = 0 \text{ на } x_1 = 0; \quad u_{k_1} = \dots = u_{k_q} = 0 \text{ на } x_2 = 0;$$

$$(33) \quad v_{p+1} = \dots = v_r = 0 \text{ на } x_1 = 0; \quad v_{k_{q+1}} = \dots = v_{k_t} = 0 \text{ на } x_2 = 0.$$

Тогда в работе Пейзера [12] доказано, что слабое решение будет сильным. В нашей работе [19] показано, что это можно сделать и если матрицы A_1 и A_2 являются функциями переменной x_1 .

Рассмотрим такой вопрос: что можно сказать, если после приведения матрицы A^1 в диагональный вид и приведении краевых условий на $x_1 = 0$ в нормальный вид (32), (33) матрица A^2 не будет в диагональном виде или условия на $x_2 = 0$ не будут в виде (32), (33)? Ниже мы рассматриваем такой случай.

В области $G = \{x \in R^3: 0 < x_3 < 1/2, x_3 < \rho < 1 - x_3\}$, где $\rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $\varphi = \text{arctg } x_2/x_1$, рассматривается система

$$(34) \quad Ku \equiv \left\{ \begin{pmatrix} -x_1 & -x_2 & \delta x_3 \\ -x_2 & x_1 & 0 \\ \delta x_3 & 0 & -x_1 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} + \begin{pmatrix} x_2 & -x_1 & 0 \\ -x_1 & -x_2 & \delta x_3 \\ 0 & \delta x_3 & -x_2 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_2} \right. \\ \left. + \begin{pmatrix} -\delta x_3 & 0 & x_1 \\ 0 & -\delta x_3 & x_2 \\ x_1 & x_2 & -\delta x_3 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_3} \right\} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} \equiv f,$$

где δ — параметр и $0 < \delta \leq 1$. Обозначим через S_0 , S_1 и S_2 соответствующие части границы области G : $S_0 = \{x: x_3 = 0, 0 < \rho < 1\}$,

$$S_1 = \left\{ x: x_3 = 1 - \rho, \frac{1}{2} < \rho < 1 \right\}, \quad S_2 = \left\{ x: x_3 = \rho, 0 < \rho < \frac{1}{2} \right\}.$$

Для системы (34) рассматриваем следующие две краевые задачи:

$$(35) \quad \begin{aligned} n_1 u_1 + n_2 u_2 - n_3 u_3 &= 0 \text{ на } S_1; \quad n_2 u_1 - n_1 u_2 = 0 \text{ на } S_2, \\ x_1 u_1 + x_2 u_2 &= 0 \text{ на } S_0 \end{aligned}$$

и, соответственно,

$$(36) \quad \begin{aligned} n_1 u_1 + n_2 u_2 - n_3 u_3 &= 0 \text{ на } S_1, \quad n_2 u_1 - n_1 u_2 = 0 \text{ на } S_2, \\ u_3 &= 0 \text{ на } S_0. \end{aligned}$$

Можно доказать, что имеет место такой результат.

Л е м м а 3. Для каждой функции $f \in L_2(G)$ существует слабое решение задачи (34), (35) (соответственно, (34), (36)), т. е. функция $u \in L_2(G)$, для которой $(u, K^*v) = (f, v)$, для каждой функции $v \in C^1(\bar{G})$, удовлетворяющий сопряженным условиям к условиям (35) (соответственно к (36)).

Заметим, что постановка задачи (34), (35) при $0 < \delta < 1$ была рассмотрена в [14], где доказано и существование слабого решения в этом случае.

Т е о р е м а 2. Каждое слабое решение задачи (34), (35) или (34), (36), носитель которого сосредоточен в окрестности произвольной точки $x_0 \in S_0 \cap S_1$, является сильным решением соответственной задачи, т. е. существуют функ-

ции $u_k \in C^1(\bar{G})$, удовлетворяющие соответственным краевым условиям и $\|u_k - u\|_{L_2(G)} \rightarrow 0$, $\|Ku_k - f\|_{L_2(G)} \rightarrow 0$.

Доказательство. Сначала выпрямим границу. Перейдем к переменным $x_3, \beta = 1 - \rho - x_3, \varphi$ и к области $G' = \{(x_3, \beta, \varphi): x_3 > 0, \beta > 0\}$, где $\text{supp } u \subset \{0 \leq x_3 \leq 1/3, 0 \leq \beta \leq 1/4, \varphi_1 < \varphi < \varphi_2\}$. Положим (вместе с Сорокиной [15])

$$u = F_1 \bar{u} \equiv \begin{pmatrix} \frac{x_1}{\rho} & \frac{x_2}{\rho} & 0 \\ \frac{x_2}{\rho} & -\frac{x_1}{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \bar{u}$$

и перейдем к уравнению $\bar{K}\bar{u} \equiv F_1 K F_1 \bar{u} = F_1 f$, где

$$(37) \quad \bar{K} \equiv \begin{pmatrix} -\delta x_3 & 0 & \rho \\ 0 & -\delta x_3 & 0 \\ \rho & 0 & -\delta x_3 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_3} + \begin{pmatrix} \rho + \delta x_3 & 0 & -(\rho + \delta x_3) \\ 0 & \delta x_3 - \rho & 0 \\ -(\rho + \delta x_3) & 0 & \rho + \delta x_3 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \beta} + \bar{K}^\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} + \bar{B} \equiv \bar{K}^3 \frac{\partial}{\partial x_3} + \bar{K}^\beta \frac{\partial}{\partial \beta} + \bar{K}^\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} + \bar{B}.$$

Чтобы привести в диагональный вид матрицу \bar{K}^3 , положим

$$(38) \quad \bar{u} = \frac{1}{\rho^2 - \delta^2 x_3^2} \begin{pmatrix} \delta x_3 & 0 & \rho \\ 0 & (\delta x_3^2 - \rho^2) & 0 \\ \rho & 0 & \delta x_3 \end{pmatrix} \tilde{u}.$$

Заметим, что преобразование (38) является неособым на $\text{supp } u$. Система (37) переходит в вид

$$(39) \quad \tilde{K} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \delta x_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_3} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & a(x_3, \beta) & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \beta} + A^\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} + B \equiv A^3 \frac{\partial}{\partial x_3} + A^\beta \frac{\partial}{\partial \beta} + A^\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} + B,$$

где $a(x_3, \beta) = 1 - \beta - x_3 - \delta x_3$. Краевые условия на S_0 и S_1 переходят в вид

$$(40) \quad \tilde{u}_3 = 0 \text{ на } x_3 = 0 \text{ и } \tilde{u}_1 - \tilde{u}_3 = 0 \text{ на } \beta = 0$$

для задачи (35) и, соответственно, для задачи (36)

$$(41) \quad \tilde{u}_1 = 0 \text{ на } x_3 = 0 \text{ и } \tilde{u}_1 - \tilde{u}_3 = 0 \text{ на } \beta = 0.$$

Сопряженные к ним условия будут

$$(40') \quad \tilde{v}_1 = 0 \text{ на } x_3 = 0, \tilde{v}_2 = 0 \text{ на } \beta = 0$$

и, соответственно,

$$(41') \quad \tilde{v}_3 = 0 \text{ на } x_3 = 0, \tilde{v}_2 = 0 \text{ на } \beta = 0,$$

Будем использовать следующее усреднение: для $x = (x_3, \beta, \varphi)$ и $\bar{x} = (\bar{x}_3, \bar{\beta}, \bar{\varphi})$

$$(42) \quad R_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \eta} \tilde{u}(x) = \int_{G'} k_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \eta}(x - \bar{x}) \tilde{u}(\bar{x}) d\bar{x},$$

где ядро $k_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \eta}$ имеет вид $\text{diag} [J_1, J_2, J_3]$. Если рассматриваем краевые условия (40), оно будет

$$k(x - z) = \frac{1}{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \eta} j \left(\frac{\varphi - \bar{\varphi}}{\eta} \right) \text{diag} \left[j \left(\frac{x_3 - \bar{x}_3}{\varepsilon_1} + 2 \right) j \left(\frac{\beta - \bar{\beta}}{\varepsilon_2} - 2 \right), \right. \\ \left. j \left(\frac{x_3 - \bar{x}_3}{\varepsilon_1} \right) j \left(\frac{\beta - \bar{\beta}}{\varepsilon_2} + 2 \right), j \left(\frac{x_3 - \bar{x}_3}{\varepsilon_1} - 2 \right) j \left(\frac{\beta - \bar{\beta}}{\varepsilon_2} - 2 \right) \right].$$

Если рассматриваем краевые условия (41), можно взять ядро

$$k(x - z) = \frac{1}{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \eta} \text{diag} \left[j \left(\frac{x_3 - \bar{x}_3}{\varepsilon_1} - 2 \right) j \left(\frac{\beta - \bar{\beta}}{\varepsilon_2} - 2 \right), \right. \\ \left. j \left(\frac{x_3 - \bar{x}_3}{\varepsilon_1} \right) j \left(\frac{\beta - \bar{\beta}}{\varepsilon_2} + 2 \right), j \left(\frac{x_3 - \bar{x}_3}{\varepsilon_1} + 2 \right) j \left(\frac{\beta - \bar{\beta}}{\varepsilon_2} - 2 \right) \right].$$

Здесь $0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2 \leq \eta$. Сразу видно, что $R_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \eta} \tilde{u}$ удовлетворяет краевым условиям, а $R_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \eta}^* v$ — сопряженным краевым условиям для произвольной функции $v \in L_2(G')$. Как, например, в § 1 (см. также [12], все сводится к доказательству, что

$$(43) \quad \|(K^* R_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \eta}^*)^* \tilde{u} - K R_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \eta} \tilde{u}\|_{L_2(G')} \rightarrow 0$$

при $\varepsilon_1 = \varepsilon_1^k \rightarrow +0$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_2^k \rightarrow +0$, $\eta = \eta^k \rightarrow +0$, где последовательности ε_1^k , ε_2^k и η^k выбирается подходящим образом. Заметим, что

$$(44) \quad (\tilde{K}^* R_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \eta}^*)^* \tilde{u}(x) - K R_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \eta} \tilde{u}(x) \\ = \int_{G'} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_3} \left[A^3(x) k_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \eta}(x - \bar{x}) - k_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \eta}(x - \bar{x}) A^3(\bar{x}) \right] \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial \beta} \left[A^\beta(x) k_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \eta} - k_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \eta} A^\beta(\bar{x}) \right] \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[A^\varphi(x) k_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \eta} - k_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \eta} A^\varphi(\bar{x}) \right] \right. \\ \left. - [B(x) k_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \eta} - k_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \eta} B(\bar{x})] \right\} \tilde{u}(\bar{x}) d\bar{x} = I_1 + I_2 + I_3 + I_4.$$

То, что $I_1 \rightarrow 0$ и $I_4 \rightarrow 0$ при $\varepsilon_1^k \rightarrow 0$, $\varepsilon_2^k \rightarrow 0$, $\eta^k \rightarrow 0$, следует, как в § 1 (заметим, что здесь $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2 \leq \eta$ и $A^3(x) \equiv A^3(x_3)$). Рассмотрим

$$(45) \quad I_2 = \int_{G'} \frac{\partial}{\partial \beta} \left[A^\beta(x) k_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \eta} - k_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \eta} A^\beta(\bar{x}) \right] \tilde{u}(\bar{x}) d\bar{x}$$

$$= \int_{G'} \frac{\partial}{\partial \beta} \begin{pmatrix} 0 & 0 & J_3 - J_1 \\ 0 & [\alpha(x) - a(\bar{x})] J_2 & 0 \\ J_1 - J_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tilde{u}(\bar{x}) d\bar{x}.$$

Так как $|a(x) - a(\bar{x})| \leq C(|x_3 - \bar{x}_3| + |\beta - \bar{\beta}|)$ и $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$, то легко можно доказать, что

$$\left\| \int_{G'} \frac{\partial}{\partial \beta} [(a(x) - a(\bar{x})) J_2] \tilde{u}(\bar{x}) d\bar{x} \right\|_{L_2(G')} \rightarrow 0$$

(см. доказательство (18) в § 1). Для исследования остальных выражений из представления (45) рассмотрим

$$\begin{aligned} I_2^1 &= \int_{G'} \frac{\partial}{\partial \beta} [J_1 - J_3] \tilde{u}(\bar{x}) d\bar{x} \\ &= \pm \int_{G'} \frac{1}{\varepsilon_1 \varepsilon_2^2 \eta} \left[j \left(\frac{x_3 - \bar{x}_3}{\varepsilon_1} - 2 \right) - j \left(\frac{x_3 - \bar{x}_3}{\varepsilon_1} + 2 \right) \right] j' \left(\frac{\beta - \bar{\beta}}{\varepsilon_2} - 2 \right) j \left(\frac{\varphi - \bar{\varphi}}{\eta} \right) \tilde{u}(\bar{x}) d\bar{x}, \end{aligned}$$

где знак (+) или (-) берется в зависимости от задачи (36) или (35). Здесь заметим, что если E постоянная и $w \in L_2(G')$, то

$$(46) \quad \left\| \frac{1}{\varepsilon_1} \int_0^\infty j \left(\frac{x_3 - \bar{x}_3}{\varepsilon_1} + E \right) w(\bar{x}_3, \beta, \varphi) d\bar{x}_3 - w(x) \right\|_{L_2(G')} \rightarrow 0$$

при $\varepsilon_1 \rightarrow 0$. Это сразу следует из свойств оператора усреднения. Следовательно $\|I_2^1\|_{L_2(G')} \rightarrow 0$ при каждом фиксированном $\varepsilon_2 > 0$ и $\eta > 0$, если $\varepsilon_1^k \rightarrow 0$. Таким образом, если $\varepsilon_2^k \rightarrow +0$, $\eta^k \rightarrow +0$ и $0 < \varepsilon_1^k \leq \varphi(\varepsilon_2^k, \eta^k) \rightarrow 0$ то $\|I_2\|_{L_2(G')} \rightarrow 0$.

Рассматривая выражение I_3 в представлении (44) и используя аналогичные рассуждения, можно показать, что: $\|I_3\|_{L_2(G')} \rightarrow 0$, если $\eta > 0$ фиксировано, а $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ и $\varepsilon_2 \rightarrow 0$. Это так, потому что в усредняющих ядрах J_1 , J_2 и J_3 компонента относительно φ одинаковая (см. исследования I_2^1).

Окончательно:

1. Выбираем последовательность $\eta^k \rightarrow +0$.
2. Выбираем числа ε_2^k так, что $0 < \varepsilon_1^k \leq \eta^k$ и чтобы $\|I_3\|_{L_2(G')} < 1/k$.
3. Выбираем ε_1^k так, что $0 < \varepsilon_1^k \leq \varepsilon_2^k$ и чтобы $\|I_2\|_{L_2(G')} < 1/k$.

Из всего доказанного следует, что при этом выборе будет выполнено (43).

Теорема 2 доказана.

З а м е ч а н и е 2. Отметим, что при исследовании сходимости I_2^1 к нулю в $L_2(G')$ существенную роль сыграл тот факт, что мы выбрали компоненты ядер J_1 и J_3 , одинаковыми относительно β и φ и тем самым смогли применить (46).

З а м е ч а н и е 3. Доказательство аналога теоремы 2 в работе Сорокиной [15] для задачи (34), (35) при $0 < \delta < 1$ является в некоторой степени некорректным. В ее работе после естественного преобразования $u = F_1 \bar{u}$ она применяет следующее

$$(47) \quad \bar{u} = \frac{1}{\rho} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tilde{u}.$$

Потом она утверждает, что применимы результаты Лакса и Филиппа из [3, § 4]. Это никак неверно, так как, во-первых, после преобразования (47) новополученная матрица A^3 не будет диагональной, во-вторых, ранг матрицы A^3 не сохраняется в G' (см. условие (27)), что сразу видно из системы (39).

ЛИТЕРАТУРА

1. Friedrichs, K. O. Symmetric positive linear differential equations. — *Comm. Pure Appl. Math.*, **11**, 1958, 333—418.
2. Friedrichs, K. O. The identity of weak and strong extensions of differential equation operators. — *Trans. Amer. Math. Soc.*, **55**, 1944, 132—151.
3. Lax, P. D., R. S. Phillips. Local boundary conditions for dissipative symmetric linear differential operators. — *Comm. Pure Appl. Math.*, **13**, 1960, 427—455.
4. Дезин, А. А. Граничные задачи для некоторых симметричных линейных систем первого порядка. — *Мат. сборник*, **49** (91), 1959, № 4, 459—484.
5. Чжао-Хао, Гу. Differentiable solutions of symmetric positive partial differential equations. — *Sc. Record, Acta Math. Sinica*, **14**, 1964, 541—555.
6. Cordes, H. O., R. D. Meyer. On the differentiability of strong solutions of partial differential equations. — *Comm. Pure Appl. Math.*, **17**, 1964, 435—450.
7. Meyer, R. D. On the nonidentity of weak and strong extensions of differential operators. — *Proc. Amer. Math. Soc.*, **19**, 1968, 487—488.
8. Hörmander, L. Weak and strong extensions of differential operators. — *Comm. Pure Appl. Math.*, **14**, 1961, 371—379.
9. Sarason, L. Weak and strong solutions in two dimensions. — *Indiana Univ. Math J.*, **33**, 1984, 159—178.
10. Sarason, L. Elliptic regularization for symmetric positive systems. — *J. Math. Mech.*, **16**, 1967, 807—828.
11. Peuser, G. Symmetric positive systems in corner domains. — *J. Diff. Equations*, **18**, 1975, 135—157.
12. Peuser, G. On the identity of weak and strong solutions of differential equations with local boundary conditions. — *Amer. J. Math.*, **87**, 1965, 267—277.
13. Нагумо, М. Лекции по современной теории уравнений в частных производных. М., 1967.
14. Сорокина, Н. Г. Обобщенная разрешимость одной граничной задачи для волнового уравнения. — *Дифференц. уравнения*, **14**, 1978, 561—564.
15. Сорокина, Н. Г. Единственность слабого решения одной граничной задачи для волнового уравнения. — *Укр. мат. журн.*, **33**, 1981, 273—277.
16. Попиванов, Н. И. О совпадении слабого и сильного решения краевых задач для линейных систем первого порядка. — *Докл. БАН*, **26**, 1973, 1147—1150.
17. Попиванов, Н. И. Совпадение слабого и сильного решения для линейных систем первого порядка. — *Сердика*, **1**, 1975, № 2, 121—132.
18. Попиванов, Н. И. Многомерный аналог задачи Дарбу для вырождающихся гиперболических уравнений. — *Дифференц. уравнения*, **14**, 1978, 80—93.
19. Попиванов, Н. И. О сильной разрешимости многомерных аналогов задач Трикоми и Франкля. — В: *Математика и математическое образование. Доклады Осма пролетна конференция, апрел 1979, София. 1979*, 472—486.

20. Попиванов, Н. И. Об одном классе вырождающихся многомерных гиперболических уравнений. — Год. Соф. унив., Фак. мат. и мех., **67**, (1972/73), 1978, 451—470.
 21. Попиванов, Н. И. О нелокальной регуляризации краевых задач для волнового уравнения. — Докл. АН СССР, **289**, 1986, № 5, 1060—1063.
 22. Попиванов, Н. И. Нелокальная регуляризация краевой задачи для уравнения Лаврентьева—Бицадзе. — Докл. БАН, **39**, 1986, № 6, 19—22.
 23. Rauch, J. Symmetric positive systems with boundary characteristic of constant multiplicity. — Trans. Amer. Math. Soc., **291**, September 1985, 167—187.
 24. Попиванов, Н. Переопределенные задачи для волнового уравнения и их нелокальная регуляризация — Дифференц. уравнения, **24**, 1988, № 11.
 25. Попиванов, Н. Исследование краевых задач для гиперболических систем — Годишник на Соф. унив., Фак. мат. и мех., **80**, 1986.
- Дополнения при корректуре: Используя усреднение другого типа Дж. Раух в [23] рассмотрел тот случай (см. п. 2), когда на гладком куске границы выполнено только условие (29). Продолжение настоящей работы в связи с исследованием задач (34), (35) и (34), (36) можно найти в [24] и [25].

Поступила 13. 5. 1985 г.

ON THE CONFORMAL CURVATURE TENSOR IN THE RIEMANNIAN
AND THE ALMOST HERMITIAN GEOMETRY

Georgi Ganchev, Vesselka Mihova

Георги Ганчев, Веселка Михова. О конформном тензоре кривизны в римановой и почти эрмитовой геометрии. Свойства кривизны риманова многообразия с индефинитной метрикой тесно связаны с поведением тензора кривизны на изотропных плоскостях. Дайцер и Номицу [1] показали, что псевдоримановые многообразия с постоянной секционной кривизной характеризуются тензором кривизны, равным нулю на изотропных плоскостях. Рассматривая комплексификацию касательных пространств риманова многообразия, изучаются секционные кривизны относительно линейного комплексного расширения тензора кривизны. Используя два типа изотропных плоскостей (слабо- и сильно-изотропных) показывается, что риманово многообразие с постоянной секционной кривизной (конформно плоское риманово многообразие) характеризуется тензором кривизны, равным нулю на слабо- (сильно) изотропных плоскостях. На почти эрмитовом многообразии M вводится секционная h -кривизна. Показывается, что постоянство этой кривизны характеризует в общем классе почти эрмитовых многообразий комплексные пространственные формы. Устанавливается другое геометрическое свойство конформного тензора кривизны в почти эрмитовой геометрии в терминах секционных h -кривизн сильноизотропных обыкновенных плоскостей. Основная цель настоящей заметки — изучение почти эрмитовых многообразий (с дефинитной или индефинитной метрикой) с точечно-постоянной секционной h -кривизной ν сильно изотропных обыкновенных плоскостей. Приводится классификация этих многообразий в случае $\nu \neq 0$ и $\dim M \geq 6$, точнее $\nu = \text{const}$ характеризует комплексные пространственные формы, $\nu \neq \text{const}$ характеризует почти эрмитовые многообразия, являющиеся конформно эквивалентными комплексным пространственным формам.

Georgi Ganchev, Vesselka Mihova. On the Conformal Curvature Tensor in the Riemannian and the almost Hermitian Geometry. Curvature properties of Riemannian manifolds of indefinite metrics are closely related to the behaviour of the curvature tensor on the isotropic planes. Dajczer and Nomizu have proved in [1] that a pseudo-Riemannian manifold of constant sectional curvature is characterized with curvature tensor vanishing on all degenerate 2-planes. Considering the complexification of the tangent spaces of a Riemannian manifold we study the sectional curvatures with respect to the linear complex extension of the curvature tensor. Treating of two types of degenerate 2-planes (weakly and strongly isotropic 2-planes) we show that Riemannian manifolds of constant sectional curvatures (conformally flat Riemannian manifolds) are characterized with curvature tensor vanishing on weakly (strongly) isotropic 2-planes. On almost Hermitian manifold M a sectional h -curvature is introduced. The constancy of this

sectional h -curvature in the general class of almost Hermitian manifolds characterizes the complex space forms. We give another geometric property of the conformal curvature operator in the almost Hermitian geometry in terms of the sectional h -curvatures of the strongly isotropic ordinary 2-planes. Our main purpose is to study almost Hermitian manifolds (of definite or indefinite metrics) with pointwise constant h -curvature ν of the strongly isotropic ordinary 2-planes. We give a classification of these manifolds in the case $\nu \neq 0$ and $\dim M \geq 6$, more precisely, $\nu = \text{const}$ characterizes the complex space forms and $\nu \neq \text{const}$ characterizes almost Hermitian manifolds conformally equivalent to complex space forms.

I. RIEMANNIAN MANIFOLDS

Definite metrics. Let V be a real n -dimensional vector space with a positively definite metric g . We consider the complexification V^c of V , i. e. $V^c = V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Then V is a real subspace of V^c . More generally, the tensor space $T_s^r(V)$ over V can be considered as a real subspace of the tensor space $T_s^r(V^c)$ in a natural manner. The complex conjugation in V^c can be extended in a natural manner to that of $T_s^r(V^c)$.

A tensor R of type $(1, 3)$ is said to be curvature-like tensor if it satisfies the following conditions for all x, y, z, u in V :

- 1) $R(x, y)z = -R(y, x)z$,
- 2) $R(x, y)z + R(y, z)x + R(z, x)y = 0$,
- 3) $R(x, y, z, u) = -R(x, y, u, z)$,

where $R(x, y, z, u) = g(R(x, y)z, u)$.

The Ricci tensor and the scalar curvature with respect to R are denoted by ρ and τ , respectively.

We denote by T^c the complex linear extension of any tensor T over V .

We shall consider three types of 2-planes in V^c :

A plane α in V^c is said to be nondegenerate, weakly isotropic or strongly isotropic, if the restriction of g on α is of rank 2, 1 or 0, respectively.

The sectional curvature of the 2-plane α in V , spanned by $\{x, y\}$, is given by

$$(1) \quad K(\alpha) = K(x, y) = \frac{R(x, y, y, x)}{\pi_1(x, y, y, x)},$$

where $\pi_1(x, y, z, u) = g(y, z)g(x, u) - g(x, z)g(y, u)$ for all x, y, z, u in V .

Using R^c and π_1^c , we can consider the sectional curvature, given by (1), for all nondegenerate 2-planes in V^c . This expression becomes meaningless, if the plane α is degenerate one. But, if $R^c(X, Y, Y, X) = 0$ for any basis $\{X, Y\}$ of a degenerate 2-plane α in V^c , then this is a geometric property of α , i. e. it does not depend on the basis of α .

A vector $X \neq 0$ in V^c is said to be isotropic, if $g^c(X, X) = 0$. Each isotropic vector X in V^c defines an isotropic direction.

The Ricci curvature of a nonisotropic direction in V^c , defined by X , is given by $\rho^c(X) = \rho^c(X, X)/g^c(X, X)$. This curvature cannot be defined for an isotropic direction in V^c . But, if $\rho^c(X, X) = 0$ for a vector X of an isotropic direction, then this is a geometric property of the direction.

Let R be a curvature-like tensor over V . The conformal curvature tensor $W(R)$, associated with R , is given by

$$W(R) = R - \frac{1}{n-2} \varphi(\rho) + \frac{\tau}{(n-1)(n-2)} \pi_1,$$

where

$\varphi(\rho)(x, y, z, u) = g(y, z)\rho(x, u) - g(x, z)\rho(y, u) + g(x, u)\rho(y, z) - g(y, u)\rho(x, z)$
for all x, y, z, u in V .

Let $\{x_1, \dots, x_n\}$ be an orthonormal basis of V . Then the vectors $x_j + ix_k$, $j \neq k$, are isotropic vectors.

L e m m a 1. Let S be a symmetric tensor of type $(0, 2)$ over V ($n \geq 2$). If $S^c(\xi, \xi) = 0$ for any isotropic vector ξ in V^c , then $S = \lambda g$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Proof. Let $\xi = x_j + ix_k$, $j \neq k$. Since $S^c(\xi, \xi) = 0$, we have

$$S(x_j, x_j) - S(x_k, x_k) + 2iS(x_j, x_k) = 0$$

and hence

$$S(x_j, x_j) = S(x_k, x_k) = \lambda, \quad S(x_j, x_k) = 0; \quad j \neq k.$$

From the last two equalities it follows that

$$S(x, y) = \lambda g(x, y)$$

for all x, y in V , $\lambda = \text{trace } S/n$.

L e m m a 2. Let R be a curvature-like tensor over V ($n \geq 3$). The following conditions are equivalent:

- (i) $R^c(X, \xi, \xi, X) = 0$, whenever $\alpha = \text{span}\{X, \xi\}$ is a weakly isotropic 2-plane in V^c ;
- (ii) $R = k\pi_1$, i. e. all 2-planes in V have the same sectional curvature $k = \tau/n(n-1)$.

Proof. Let $X = x_j$, $\xi = x_k + ix_l$ (j, k, l — different). From the condition (i), we have

$$R^c(x_j, x_k + ix_l, x_k + ix_l, x_j) = 0,$$

which implies

$$(2) \quad R(x_j, x_k, x_k, x_j) = R(x_j, x_l, x_l, x_j) = k,$$

$$(3) \quad R(x_j, x_k, x_l, x_j) = 0.$$

The last equality gives

$$(4) \quad R(x_j, x_k, x_l, x_m) = 0,$$

when j, k, l, m are different.

Using (2), (3) and (4), we have $R(x, y, y, x) = k$ for an arbitrary orthonormal pair $\{x, y\}$ in V , which implies the condition (ii).

The inverse is an easy verification.

L e m m a 3. Let R be a curvature-like tensor over V ($n \geq 4$). The following conditions are equivalent:

- (i) $R^c(\xi, \eta, \eta, \xi) = 0$, whenever $\alpha = \text{span}\{\xi, \eta\}$ is a strongly isotropic 2-plane in V^c ;
- (ii) $W(R) = 0$.

Proof. Let $\xi = x_j + ix_k$, $\eta = x_l + ix_m$ (j, k, l, m — different). From the condition (i), we have

$$R^c(x_j + ix_k, x_l + ix_m, x_l + ix_m, x_j + ix_k) = 0.$$

From here we get

$$(5) \quad K(x_j, x_l) + K(x_k, x_m) - K(x_j, x_m) - K(x_k, x_l) \\ = 2R(x_j, x_l, x_m, x_k) + 2R(x_j, x_m, x_l, x_k).$$

Changing j by k and summing up the obtained equalities and (5), we find

$$(6) \quad K(x_j, x_l) + K(x_k, x_m) = K(x_j, x_m) + K(x_k, x_l),$$

(j, k, l, m — different). The last equalities imply $W(R) = 0$ [2].

The inverse can be checked directly.

Using Lemmas 1, 2 and 3, we obtain

L e m m a 4. Let R be a curvature-like tensor over $V(n \geq 4)$. The following conditions are equivalent:

- (i) $R^c(X, \xi, \xi, X) = 0$, whenever $\alpha = \text{span} \{X, \xi\}$ is a weakly isotropic 2-plane in V^c ;
- (ii) $\rho^c(\xi, \xi) = 0$ for an arbitrary isotropic vector ξ in V^c and $R^c(\xi, \eta, \eta, \xi) = 0$, whenever $\alpha = \text{span} \{\xi, \eta\}$ is a strongly isotropic 2-plane in V^c .

Now, let M be a Riemannian manifold with metric g , curvature tensor R and $V = T_p M$ be the tangential space to M at $p \in M$.

Using Lemma 1, we obtain:

T h e o r e m 1. Let M ($\dim M \geq 3$) be a Riemannian manifold. The following conditions are equivalent:

- (i) $\rho^c(\xi, \xi) = 0$, whenever ξ is an isotropic vector in $T_p^c M$, $p \in M$;
- (ii) M is Einsteinian.

Using Lemma 2, we obtain:

T h e o r e m 2. Let M ($\dim M \geq 3$) be a connected Riemannian manifold. The following conditions are equivalent:

- (i) $R^c(\xi, X, X, \xi) = 0$, whenever $\alpha = \text{span} \{X, \xi\}$ is a weakly isotropic 2-plane in $T_p^c M$, $p \in M$;
- (ii) M is of constant sectional curvature.

Using Lemma 3, we obtain:

T h e o r e m 3. Let M ($\dim M \geq 4$) be a Riemannian manifold. The following conditions are equivalent:

- (i) $R^c(\xi, \eta, \eta, \xi) = 0$, whenever $\alpha = \text{span} \{\xi, \eta\}$ is a strongly isotropic 2-plane in $T_p^c M$, $p \in M$;
- (ii) M is conformally flat.

Lorentz metrics. Let V be a real n -dimensional vector space with a Lorentz metric g . The metric g is of signature $(1, n-1)$ and V has a natural orthogonal basis $\{a, x_1, \dots, x_{n-1}\}$, $g(a, a) = -1$, $g(x_k, x_k) = 1$, $g(a, x_j) = g(x_j, x_k) = 0$; $j \neq k$.

The orthonormal pair $\{a, x\}$ is said to be of signature $(-, +)$ if $g(a, a) = -g(x, x) = -1$. Orthonormal triples and quadruples of certain signature are defined similarly.

V^c will stand for the complexification of V .

There are two kinds of isotropic vectors in V^c with respect to g^c : real and complex isotropic vectors. For example, $a+x$ is a real isotropic vector, if $g(a, a) = -1$, $g(x, x) = 1$, $g(a, x) = 0$; $x+iy$ is a complex isotropic vector, if $g(x, x) = g(y, y) = 1$, $g(x, y) = 0$.

We consider four types of degenerate 2-planes in V^c with respect to the isotropic vectors:

1. Weakly isotropic 2-planes. Such a 2-plane has an orthogonal basis of type $\{\xi, X\}$, where ξ is an isotropic, and X — a non isotropic vector in V^c .

a) $n \geq 3$. Real weakly isotropic 2-planes. The isotropic direction of such a 2-plane is a real one. For example, $\xi = a + x$, $X = y$, where $\{a, x, y\}$ is an orthonormal triple in V of signature $(-, +, +)$;

b) $n \geq 3$. Complex weakly isotropic 2-planes. The isotropic direction of such a 2-plane is a complex one. For instance, $\xi = x + iy$, $X = a$, where $\{a, x, y\}$ is an orthonormal triple in V of signature $(-, +, +)$. •

2. Strongly isotropic 2-planes. Such a 2-plane has an orthogonal basis of type $\{\xi, \eta\}$, where ξ and η are isotropic vectors in V^c .

a) $n \geq 4$. Strongly isotropic 2-planes of hybrid type. Such a 2-plane contains only one real isotropic direction. For example, $\alpha = \text{span}\{a + x, y + iz\}$, where $\{a, x, y, z\}$ is an orthonormal quadruple in V of signature $(-, +, +, +)$;

b) $n \geq 5$. Strongly isotropic complex 2-planes. Such a 2-plane does not contain any real isotropic direction. For instance, $\alpha = \text{span}\{x + iy, z + iu\}$, where $\{x, y, z, u\}$ is an orthonormal quadruple in V of signature $(+, +, +, +)$.

There are no strongly isotropic real 2-planes in V^c .

We shall use Theorem 2 from [3] in the following formulation.

Theorem A. Let R be a curvature-like tensor over a real vector space $V (n \geq 3)$ with a Lorentz metric. If all 2-planes $\alpha = \text{span}\{x, y\}$, where $\{x, y\}$ is an orthonormal pair in V of signature $(+, +)$, have the same sectional curvature c with respect to R , then all nondegenerate 2-planes in V have a sectional curvature c , i. e. $R = c\pi_1$.

Lemma 5. Let R be a curvature-like tensor over $V (n \geq 3)$. If $R(x, a, a, x) = 0$, whenever $\{x, a\}$ is an orthonormal pair in V of signature $(+, -)$, then $R = 0$.

Proof. From the condition of the Lemma, it follows that

$$R(x, a + ty, a + ty, x) = 0$$

for every orthonormal triple $\{a, x, y\}$ in V of signature $(-, +, +)$ and $|t| < 1$. Letting $t \rightarrow \pm 1$, we obtain $R(x, y, y, x) = 0$. Now, Theorem A implies the assertion.

Lemma 6. Let R be a curvature-like tensor over $V (n \geq 4)$. The following conditions are equivalent:

- (i) $R^c(\xi, \eta, \eta, \xi) = 0$, whenever $\alpha = \text{span}\{\xi, \eta\}$ is a strongly isotropic 2-plane of hybrid type;
- (ii) $W(R) = 0$.

Proof. Let $\xi = a + x_j$, $\eta = x_k + ix_m$ (j, k, m — different). From the condition of the lemma, we have:

$$R^c(a + x_j, x_k + ix_m, x_k + ix_m, a + x_j) = 0.$$

After summing these equalities by j and m , we obtain

$$(n-1)(n-2)R(a, x_k, x_k, a) + (n-1)\{\rho(x_k, x_k) - \rho(a, a)\} - \tau = 0,$$

i. e. $W(R)(a, x_k, x_k, a) = 0$. Applying Lemma 5 to the curvature-like tensor $W(R)$, we find $W(R) = 0$.

The inverse is easily to be checked.

In a similar way, using Theorem A, we obtain

Lemma 7. Let R be a curvature-like tensor over $V (n \geq 5)$. The following conditions are equivalent:

- (i) $R^c(\xi, \eta, \eta, \xi) = 0$, whenever $\alpha = \text{span}\{\xi, \eta\}$ is a strongly isotropic complex 2-plane in V^c ;

(ii) $W(R)=0$.

Now, we shall apply these results to Lorentz manifolds.

Using Lemma 6, we obtain

Theorem 4. Let M ($\dim M \geq 4$) be a Lorentz manifold. The following conditions are equivalent:

- (i) $R^c(\xi, \eta, \eta, \xi)=0$, whenever $\alpha = \text{span}\{\xi, \eta\}$ is a strongly isotropic 2-plane of hybrid type in $T_p^c M$, $p \in M$;
(ii) M is conformally flat.

Using Lemma 7, we obtain

Theorem 5. Let M ($\dim M \geq 5$) be a Lorentz manifold. The following conditions are equivalent:

- (i) $R^c(\xi, \eta, \eta, \xi)=0$, whenever $\alpha = \text{span}\{\xi, \eta\}$ is a strongly isotropic complex 2-plane in $T_p^c M$, $p \in M$;
(ii) M is conformally flat.

Remark. In the case of Riemannian manifolds with indefinite metric of signature $(s, n-s)$, ($s \geq 2$, $n-s \geq 2$), there exist strongly isotropic real 2-planes. An analogous characterization of conformally flat manifolds with respect to strongly isotropic real 2-planes is given in [4].

II. ALMOST HERMITIAN MANIFOLDS

Hermitian metrics. Let V be a $2n$ -dimensional real vector space with a complex structure J and a Hermitian metric g . For all x, y in V , $g(Jx, Jy) = g(x, y)$. V^c will stand for the complexification of V . $V^c = V^+ \oplus V^-$, where V^+ and V^- are the eigenspaces of J , corresponding to the eigenvalues $+i$ and $-i$, respectively. In this section, we will deal with adapted bases for V , i. e. orthonormal bases of the type $\{x_1, \dots, x_n; Jx_1, \dots, Jx_n\}$. A 2-plane α in V^e is said to be holomorphic (antiholomorphic) if $\alpha = J\alpha$ ($\alpha \neq J\alpha$, $\alpha \perp J\alpha$). A 2-plane α in V^c is said to be ordinary, if α is neither holomorphic, nor antiholomorphic.

If α is a 2-plane in V , the angle $\theta = \angle(\alpha, J\alpha)$ is determined by

$$\cos^2 \theta = \frac{g^2(x, Jy)}{g(x, x)g(y, y) - g^2(x, y)}, \quad \alpha = \text{span}\{x, y\}; \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

In the almost Hermitian geometry, there is a second important curvature-like tensor, expressed by g and J :

$$\pi_2(x, y, z, u) = g(y, Jz)g(x, Ju) - g(x, Jz)g(y, Ju) - 2g(x, Jy)g(z, Ju)$$

for all x, y, z, u in V .

We denote the curvature-like tensor $\pi_1 + \pi_2$ by π .

If α is a 2-plane in V with a basis $\{x, y\}$, then

$$(7) \quad \frac{\pi(x, y, y, x)}{\pi_1(x, y, y, x)} = 1 + 3 \cos^2 \theta, \quad \theta = \angle(\alpha, J\alpha).$$

Let R be a curvature-like tensor over V . We consider the following sectional curvature (h -curvature) for a 2-plane α in V with respect to R :

$$hK(\alpha) = hK(x, y) = \frac{R(x, y, y, x)}{\pi(x, y, y, x)},$$

where $\{x, y\}$ is a basis of α .

This definition can be extended in a natural way for each $\alpha = \text{span}\{X, Y\}$ in V^c with $\pi^c(X, Y, Y, X) \neq 0$.

We shall use Theorem 6 from [5] in the following form:

Theorem B. Let R be a curvature-like tensor over $V(2n \geq 4)$. If for each 2-plane α in V

$$K(\alpha) = c(\theta), \quad \theta = \angle(\alpha, J\alpha),$$

then

$$R = \nu \pi_1 + \frac{\mu - \nu}{3} \pi_2,$$

where $\mu = c(0)$, $\nu = c(\pi/2)$.

Taking into account (7), Theorem B implies immediately:

Lemma 8. Let R be a curvature-like tensor over $V(2n \geq 4)$. All 2-planes in V have the same sectional h -curvature iff

$$R = \nu \pi, \quad \nu = \tau/4n(n+1).$$

The isotropic 2-planes in V^c have no Riemannian sectional curvature, but the ordinary isotropic 2-planes in V^c have sectional h -curvatures. We have

Lemma 9. Let R be a curvature-like tensor over $V(2n \geq 6)$. If the weakly isotropic ordinary 2-planes in V^c have the same sectional h -curvature ν , then

$$R = \nu \pi, \quad \nu = \tau/4n(n+1).$$

Proof. Let α be a weakly isotropic ordinary 2-plane in V^c and $hK^c(\alpha) = \nu$. The conjugate 2-plane $\bar{\alpha}$ is again a weakly isotropic ordinary 2-plane. Then $\nu = \bar{\nu}$, and hence, ν is a real constant. Considering the curvature-like tensor $T = R - \nu \pi$ over V , we have

$$(8) \quad T^c(\xi, X, X, \xi) = 0,$$

whenever $\alpha = \text{span}\{\xi, X\}$ is a weakly isotropic ordinary 2-plane in V^c . Let $\xi = x_j + ix_k$, $X = x_m$ (j, k, m — different). Then, $\alpha = \text{span}\{\xi, X\}$ is a weakly isotropic antiholomorphic 2-plane. Let $\alpha(t) = \text{span}\{\xi, x_m + tJx_j\}$, $t \neq 0$. The 2-plane $\alpha(t)$ is a weakly isotropic ordinary 2-plane and $\alpha(t) \rightarrow \alpha$, when $t \rightarrow 0$. Applying (8) to $\alpha(t)$ and letting $t \rightarrow 0$, we obtain (8), whenever $\alpha = \text{span}\{\xi, X\}$ is a weakly isotropic antiholomorphic 2-plane in V^c . Now Lemma 2 implies $T = 0$ and $R = \nu \pi$.

Further, we consider the strongly isotropic ordinary 2-planes in V^c .

Lemma 10. Let R be a curvature-like tensor over $V(2n \geq 6)$. The strongly isotropic ordinary 2-planes in V^c have the same sectional h -curvature ν iff

$$(9) \quad W(R) = \nu W(\pi); \quad W(\pi) = \pi_2 - (3/(2n-1))\pi_1.$$

Proof. It follows that ν is a real constant. We consider the curvature-like tensor $T = R - \nu \pi$ over V . If $\{\xi, \eta\}$ spans a strongly isotropic ordinary 2-plane in V^c , we have

$$(10) \quad T^c(\xi, \eta, \eta, \xi) = 0.$$

Let $\alpha(t) = \text{span}\{\xi, \eta\}$, where $\xi = x_j + i(Jx_k + tJx_m)/\sqrt{1+t^2}$, $\eta = Jx_j + i(-x_k + tx_m)/\sqrt{1+t^2}$ (j, k, m — different), $t \neq 0$. Applying (10) to $\alpha(t)$ and letting $t \rightarrow 0$, we find, (10) is valid whenever $\alpha = \text{span}\{\xi, \eta\}$ is a strongly isotropic

holomorphic 2-plane. in a similar way we find, (10) is valid whenever $\alpha = \text{span} \{ \xi, \eta \}$ is a strongly isotropic antiholomorphic 2-plane. Lemma 3 implies $W(T)=0$, i. e., $W(R)=\nu W(\pi)$.

The converse is easy to be checked.

Let R be a curvature-like tensor over V . The tensor ρ^* of type $(0, 2)$ is given by

$$\rho^*(y, z) = \text{trace}(x \rightarrow -JR(x, y)Jz); \quad x, y, z \in V.$$

The trace of ρ^* is denoted by τ^* . The tensor ρ^* has the property $\rho^*(y, Jz) + \rho^*(z, Jy) = 0$; $y, z \in V$, which implies the tensor

$$\begin{aligned} \psi(\rho^*)(x, y, z, u) = & g(y, Jz)\rho^*(x, Ju) - g(x, Jz)\rho^*(y, Ju) - 2g(x, Jy)\rho^*(z, Ju) \\ & + g(x, Ju)\rho^*(y, Jz) - g(y, Ju)\rho^*(x, Jz) - 2g(z, Ju)\rho^*(x, Jy) \end{aligned}$$

is a curvature-like tensor over V .

By direct computations we find the constant ν in Lemma 10:

$$\nu = \frac{(2n-1)\tau^* - \tau}{8n(n^2-1)}.$$

The conformal curvature operator W is constructed by the operator ϕ . In the almost Hermitian geometry there is another important curvature operator, constructed by the operator ψ :

$$AR = R - \frac{1}{2(n+1)} \psi(\rho^*) + \frac{\tau^*}{(2n+1)(2n+2)} \pi_2,$$

where R is a curvature-like tensor over V . This curvature-like tensor AR is characterized by the antiholomorphic sectional curvatures of R in the following way:

Theorem C [6]. Let R be a curvature-like tensor over V ($2n \geq 4$). All antiholomorphic 2-planes in V have the same sectional curvature ν iff

$$AR = \nu A\pi_1; \quad A\pi_1 = \pi_1 - \frac{1}{2n+1} \pi_2.$$

The Bochner curvature tensor $B(R)$, associated with a curvature-like tensor R over V , was given in [7]. In [6] there was proved that

$$B(R) = W(A(R)).$$

Further we shall use the following proposition:

Theorem D [8]. Let R be a curvature-like tensor over V ($2n \geq 8$). The following conditions are equivalent:

- (i) $R(x, y, z, u) = 0$, whenever $\{x, y, z, u\}$ is an orthonormal antiholomorphic quadruple in V ;
- (ii) $B(R) = 0$.

Lemma 11. Let R be a curvature-like tensor over V ($2n \geq 6$). The following conditions are equivalent:

- (i) $R^c(\xi, X, X, \xi) = 0$, whenever $\alpha = \text{span}\{\xi, X\}$ is a weakly isotropic antiholomorphic 2-plane in V^c ;

$$(ii) \quad AR = \nu A\pi_1; \quad \nu = \frac{(2n+1)\tau - 3\tau^*}{8n(n^2-1)}.$$

Proof. Let $\xi = x_j + ix_k$, $X = x_m$ (j, k, m — different). From (i), we have

$$R^c(x_j + ix_k, x_m, x_m, x_j + ix_k) = 0,$$

i. e.

$$(11) \quad K(x_j, x_m) = K(x_k, x_m) = \nu,$$

$$(12) \quad R(x_j, x_m, x_m, x_k) = 0 \quad (j, k, m \text{ — different}).$$

From (12), we find

$$(13) \quad R(x_j, x_k, x_l, x_m) = 0,$$

when j, k, l, m are different. Now, (11), (12) and (13) imply that all antiholomorphic 2-planes in V have the same sectional curvature ν , and Theorem C gives (ii).

The inverse can be easily checked.

L e m m a 12. Let R be a curvature-like tensor over $V(2n \geq 8)$. The following conditions are equivalent:

(i) $R^c(\xi, \eta, \eta, \xi) = 0$, whenever $\alpha = \text{span}\{\xi, \eta\}$ is a strongly isotropic antiholomorphic 2-plane in V^c ;

(ii) $B(R) = 0$.

Proof. Let $\xi = x_j + ix_k$, $\eta = x_l + ix_m$ (j, k, l, m — different). From $R^c(x_j + ix_k, x_l + ix_m, x_l + ix_m, x_j + ix_k) = 0$ we derive

$$K(x_j, x_l) + K(x_k, x_m) - K(x_j, x_m) - K(x_k, x_l) = 0,$$

$$R(x_j, x_m, x_l, x_k) = 0 \quad (j, k, l, m \text{ — different}).$$

Now, Theorem D gives (ii).

The inverse is an easy verification.

Now, we shall apply the previous results to almost Hermitian manifolds. M will stand for an almost Hermitian manifold with definite metric g and almost complex structure J . For all tangent vectors x, y in T_pM at $p \in M$,

$$J^2x = -x, \quad g(Jx, Jy) = g(x, y).$$

We shall use the following

Theorem E [7]. Let M be a connected almost Hermitian manifold ($\dim M \geq 6$) and the Riemannian curvature tensor R has the following form

$$R = f\pi_1 + h\pi_2,$$

where f and h are C^∞ -functions on M , such that h is not identically zero. Then M is a Kaehlerian manifold with constant holomorphic sectional curvature.

Using Lemma 8 and Theorem E, we obtain

Theorem 6. Let M ($\dim M \geq 4$) be an almost Hermitian manifold. All 2-planes in T_pM , $p \in M$, have the same sectional h -curvature $\nu(p)$, which is not identically zero, iff M is a Kaehlerian manifold of constant holomorphic sectional curvature ($\neq 0$).

R e m a r k. In the case $\dim M = 4$ the proof of Theorem E is still valid because of $f = h = \nu$. Theorem 6 gives the Kaehlerian manifolds of constant holomorphic sectional curvature are the only almost Hermitian manifolds of constant sectional h -curvature.

Using Lemma 8 and Theorem E, we obtain

Theorem 7. Let M ($\dim M \geq 6$) be an almost Hermitian manifold. All weakly isotropic ordinary 2-planes in $T_p^c M$, $p \in M$, have the same sectional h -curvature $\nu(p)$, which is not identically zero, iff M is a Kaehlerian manifold of constant holomorphic sectional curvature.

Using Lemma 10, we obtain

Theorem 8. Let M ($\dim M \geq 6$) be an almost Hermitian manifold with curvature tensor R . All strongly isotropic ordinary 2-planes in $T_p^c M$, $p \in M$, have the same sectional h -curvature $\nu(p)$ iff its conformal curvature tensor $W(R)$ has the form

$$W(R) = \nu W(\pi), \quad W\pi = \pi_2 - \frac{3}{2n-1} \pi_1.$$

Using Lemma 11, we obtain

Theorem 9. Let M ($\dim M \geq 6$) be an almost Hermitian manifold with curvature tensor R . The following conditions are equivalent:

- (i) $R^c(\xi, X, X, \xi) = 0$, whenever $\alpha = \text{span}\{\xi, \eta\}$ is a weakly isotropic antiholomorphic 2-plane in $T_p^c M$, $p \in M$;
- (ii) M is of pointwise constant antiholomorphic sectional curvatures $\nu(p)$, i. e., $AR = \nu A\pi_1$.

Using Lemma 12, we obtain

Theorem 10. Let M ($\dim M \geq 8$) be an almost Hermitian manifold with curvature tensor R . The following conditions are equivalent:

- (i) $R^c(\xi, \eta, \eta, \xi) = 0$, whenever $\alpha = \text{span}\{\xi, X\}$ is a strongly isotropic antiholomorphic 2-plane in $T_p^c M$, $p \in M$;
- (ii) $B(R) = 0$.

Corollary 1. Let M ($\dim M \geq 6$) be a Kaehlerian manifold with curvature tensor R . The following conditions are equivalent:

- (i) $R^c(\xi, X, X, \xi) = 0$, whenever $\alpha = \text{span}\{\xi, X\}$ is a weakly isotropic antiholomorphic 2-plane in $T_p^c M$, $p \in M$;
- (ii) M is of constant holomorphic sectional curvature.

Corollary 2. Let M ($\dim M \geq 4$) be a Kaehlerian manifold with curvature tensor R . The following conditions are equivalent:

- (i) $R^c(\xi, J\xi, J\xi, \xi) = 0$, whenever ξ is an isotropic vector in $T_p^c M$, $p \in M$;
- (ii) $B(R) = 0$.

Indefinite metrics and complex structures. Let V be a $2n$ -dimensional real vector space with a complex structure J , an indefinite metric g of signature $(2s, 2(n-s))$ and $g(Jx, Jy) = g(x, y)$ for all x, y in V . In this section, we will deal with orthonormal bases of V of the type $\{a_1, \dots, a_s, Ja_1, \dots, Ja_s; x_1, \dots, x_{n-s}, Jx_1, \dots, Jx_{n-s}\}$, where $g(a_i, a_i) = -1$, ($i=1, \dots, s$), $g(x_k, x_k) = 1$, ($k=1, \dots, n-s$). In this case there exist real nondegenerate, real weakly isotropic and real strongly isotropic 2-planes in V . Holomorphic, antiholomorphic and ordinary 2-planes in V are defined as in the definite case. A sectional h -curvature can be defined for every 2-plane α in V with a basis $\{x, y\}$ such that $\pi(x, y, y, x) \neq 0$. Questions, analogous to these in Theorem 9, have been studied in [3]. Questions, analogous to these in Theorems 6 and 7, will be subject of further investigations. In this section we

shall deal with strongly isotropic ordinary 2-planes in V and their sectional h -curvatures.

We shall use Theorem 1 from [4] in the following form:

Theorem F. Let R be a curvature-like tensor over the real vector space V with an indefinite metric g of signature $(s, n-s)$, $(s \geq 2, n-s \geq 2)$. The following conditions are equivalent:

- (i) $R(\xi, \eta, \eta, \xi) = 0$, whenever $\alpha = \text{span}\{\xi, \eta\}$ is a strongly isotropic 2-plane in V ;
- (ii) $W(R) = 0$.

Lemma 13. Let R be a curvature-like tensor over $V(2n \geq 6)$. The strongly isotropic ordinary 2-planes in V have the same sectional h -curvature ν iff

$$W(R) = \nu W(\pi), \quad W(\pi) = \pi_2 - \frac{3}{2n-1} \pi_1.$$

Proof. Let us consider the curvature-like tensor $T = R - \nu\pi$ over V , and $\alpha = \text{span}\{\xi, \eta\}$ be a strongly isotropic ordinary 2-plane in V . From the condition of the Lemma, we have

$$(14) \quad T(\xi, \eta, \eta, \xi) = 0.$$

Let $\{a, x, y\}$ be an orthonormal antiholomorphic triple in V of signature $(-, +, +)$ and $\alpha(t) = \text{span}\{\xi, \eta\}$, where $\xi = x + (a + tJy)/\sqrt{1-t^2}$, $\eta = Jx + (Ja + ty)/\sqrt{1-t^2}$, $t \neq 0$, $|t| < 1$. Then $\alpha(t)$ is a strongly isotropic ordinary 2-plane. Applying (14) to $\alpha(t)$ and letting $t \rightarrow 0$, we find, (14) is valid whenever α is a strongly isotropic holomorphic 2-plane in V . In a similar way we find, (14) is valid whenever $\alpha = \text{span}\{\xi, \eta\}$ is a strongly isotropic antiholomorphic 2-plane. Now, Theorem F implies $W(T) = 0$, i. e., $W(R) = \nu W(\pi)$.

The inverse is an easy verification.

Further, we apply the above results to almost Hermitian manifolds of indefinite metrics.

Theorem 11. Let M ($\dim M \geq 6$) be an almost Hermitian manifold with indefinite metric of signature $(2s, 2(n-s))$ and curvature tensor R . The strongly isotropic ordinary 2-planes in $T_p M$, $p \in M$, have the same sectional h -curvature $\nu(p)$ iff

$$W(R) = \nu W(\pi), \quad W(\pi) = \pi_2 - \frac{3}{2n-1} \pi_1.$$

Almost Hermitian manifolds of pointwise constant sectional h -curvature of the strongly isotropic ordinary 2-planes. In this section M will stand for an almost Hermitian manifold with definite, or indefinite, metric g and almost complex structure J .

In [6] there has been proved that the almost Hermitian manifolds of pointwise constant antiholomorphic sectional curvature ν are characterized by the condition

$$A(R) = \nu A(\pi_1), \quad A(\pi_1) = \pi_1 - \frac{1}{2n+1} \pi_2.$$

This statement gives a geometric meaning of the curvature operator $A(R)$. This result is still valid in the case of an indefinite metric. Theorems 8 and 11 give an analogous geometric interpretation of the conformal curvature operator $W(R)$ in the almost Hermitian geometry.

The Lie form of the manifold M is given by

$$\theta(x) = -\frac{1}{n-1} \text{trace}(y \rightarrow (\nabla_y J)x); \quad x, y \in T_p M, p \in M.$$

Theorem 12. Let M ($\dim M = 2n \geq 6$) be an almost Hermitian manifold with definite (indefinite) metric g and curvature tensor R . If the strongly isotropic ordinary 2-planes in $T_p^c M(T_p M)$, $p \in M$, have the same sectional h -curvature $\nu(p)$, then

$$X\nu = \nu\theta(X)$$

for an arbitrary C^∞ -vector field X on M .

Proof. From the condition of the Theorem and Theorem 8, we have $W(R) = \nu W(\pi)$, i. e.

$$(15) \quad R - \frac{1}{2(n-1)} \varphi(\rho) + \frac{\tau}{(2n-1)(2n-2)} \pi_1 = \nu \left(\pi_2 - \frac{3}{2n-1} \pi_1 \right).$$

Let X, Y, Z, U, V be arbitrary C^∞ vector fields on M . From (15), we get

$$(\nabla_X W(R))(Y, Z, U, V) = X\nu W(\pi)(Y, Z, U, V) + \nu(\nabla_X W(\pi))(Y, Z, U, V).$$

Applying the second Bianchi identity and putting $X_p = Jx$, $Y_p = x$, $Z_p = y$, $U_p = z$, $V_p = Jz$, where $\{x, y, z\}$ is an orthonormal antiholomorphic triple in $T_p M$, $p \in M$, we find.

$$(16) \quad x(\nu)g(y, y) + \nu g(Jx, (\nabla_y J)y + (\nabla_{Jy} J)Jy) = 0.$$

Since y is an arbitrary unit vector, perpendicular to x and Jx , we check from (16) $x(\nu) = \nu\theta(x)$ for each unit tangent vector x at $p \in M$. The last equality implies the assertion.

Now, let M ($\dim M \geq 6$) be an almost Hermitian manifold with definite or indefinite metric g , whose curvature tensor satisfies (15). We shall consider only the case $\nu \neq 0$. Theorem 12 gives

$$(17) \quad X \ln |\nu| = \theta(X),$$

where X is a C^∞ vector field on M .

If $\theta = 0$, i. e., M is a semi-Kaehlerian manifold, then (17) implies that ν is a constant.

Conversely, if ν is a constant, then (17) implies that $\theta = 0$, i. e. M is a semi-Kaehlerian manifold.

So, we obtained

Theorem 13. Let M ($\dim M \geq 6$) be a connected almost Hermitian manifold, whose curvature tensor satisfies (15) with $\nu \neq 0$. Then ν is a constant iff M is a semi-Kaehlerian manifold.

Further, we have

Theorem 14. Let M ($\dim M \geq 6$) be a connected semi-Kaehlerian manifold, whose curvature tensor satisfies (15). Then M is a Kaehlerian manifold.

Proof. Taking into account Theorem 13, we find from (15)

$$(18) \quad (\nabla_X W(R))(Y, Z, U, V) = \nu(\nabla_X W(\pi))(Y, Z, U, V); \quad X, Y, Z, U, V \in T_p M, p \in M.$$

Let $\{x, y, z\}$ be an orthonormal antiholomorphic triple in $T_p M$, $p \in M$. Putting

$X=x, Y=y, Z=z, U=Jz, V=Jy$ and applying the second Bianchi identity to (18), we derive

$$g(z, (\nabla_x J)x) + g(z, (\nabla_y J)y) = 0.$$

From the last equality we conclude, that

$$(19) \quad (\nabla_x J)x = 0, \quad x \in T_p M, \quad p \in M,$$

which means, M is a nearly-Kaehlerian manifold.

Putting in (18) $X=Jx, Y=x, Z=y, U=z, V=Jx$, and applying the second Bianchi identity to both sides of (18), we check

$$(\nabla_x J)y = 0, \quad x, y \in T_p M, \quad p \in M,$$

taking into account (19). This means, M is a Kaehlerian manifold.

Theorem 15. Let M ($\dim M \geq 6$) be a connected Kaehlerian manifold, whose curvature tensor satisfies (15) with $\nu \neq 0$. Then M is of constant holomorphic sectional curvature.

Proof. Let $\{x, y\}$ be an orthonormal basis of an arbitrary antiholomorphic 2-plane in $T_p M, p \in M$. From (15), we check

$$R(x, y, y, x) = R(x, y, Jy, Jx) = \nu g(x, x)g(y, y).$$

This equality means that all antiholomorphic 2-planes in $T_p M, p \in M$, have the same sectional curvature ν . Since M is a Kaehlerian manifold, M is of constant holomorphic sectional curvatures 4ν .

So, in the case $\nu \neq 0$ and $\dim M \geq 6$, we have the following classification theorem.

Theorem 16. Let M ($\dim M \geq 6$) be a connected semi-Kaehlerian manifold of definite metric and all strongly isotropic ordinary 2-planes in $T_p^c M, p \in M$, have the same sectional h -curvature $\nu(p) \neq 0$. Then M is a Kaehlerian manifold of constant holomorphic sectional curvature.

Theorem 17. Let M ($\dim M \geq 6$) be a connected semi-Kaehlerian manifold of indefinite metric and all strongly isotropic ordinary 2-planes in $T_p M, p \in M$, have the same sectional h -curvature $\nu(p) \neq 0$. Then M is a Kaehlerian manifold of indefinite metric with constant holomorphic sectional curvature.

The proof of these theorems follows from Theorems 13, 14 and 15.

Now, let $\nu \neq 0$ is not a constant. Then (17) implies $\theta = d \ln |\nu|$, i. e. θ is exact. In this case the manifold M is conformally equivalent to a semi-Kaehlerian manifold [9]. Let \bar{M} be conformally equivalent to the semi-Kaehlerian manifold \bar{M} with metric \bar{g} and almost complex structure J , i. e.

$$(20) \quad g = e^{2\sigma} \bar{g},$$

where σ is a C^∞ -function on \bar{M} . It is well-known, (20) implies the following relation between the curvature tensors R and \bar{R} , respectively:

$$(21) \quad R = e^{2\sigma} \{ \bar{R} + \varphi(Q) \},$$

where $Q(x, y) = (\nabla_x \omega)y - \omega(x)\omega(y) + \frac{1}{2} \|\omega\|^2 g(x, y); \omega = d\sigma$.

Now, let M be of definite metric and $\alpha = \text{span} \{ \xi, \eta \}$ be a strongly isotropic ordinary 2-plane in $T_p^c M, p \in M$. From (21) we derive $hK(\xi, \eta) = e^{2\sigma} h\bar{K}(\xi, \eta)$.

Taking into account (15), we find

$$(22) \quad h\bar{K}(\xi, \eta) = \nu e^{-2\sigma}.$$

Now, applying Theorem 16 to the semi-Kaehlerian manifold \bar{M} , we obtain \bar{M} is a Kaehlerian manifold of constant holomorphic sectional curvature $4k$. From (22) it follows that $\nu = \bar{k}e^{2\sigma}$.

So we proved the classification theorem for the case, when $\nu(p)$ is not a constant.

Theorem 18. Let M ($\dim M \geq 6$) be a connected almost Hermitian manifold of definite metric. If the strongly isotropic ordinary 2-planes in $T_p^c M$, $p \in M$, have the same sectional h -curvature $\nu(p) \neq 0$, which is not a constant, then M is conformally equivalent to a Kaehlerian manifold of constant holomorphic sectional curvature.

The inverse is also true.

Using Theorem 17, analogously we have

Theorem 19. Let M ($\dim M \geq 6$) be a connected almost Hermitian manifold of indefinite metric. If the strongly isotropic ordinary 2-planes in $T_p M$, $p \in M$, have the same sectional h -curvature $\nu(p) \neq 0$, which is not a constant, then M is conformally equivalent to a Kaehlerian manifold of indefinite metric with constant holomorphic sectional curvature.

The inverse is also true.

Remark. The case $\dim M = 4$ will be considered further.

REFERENCES

1. Dajczer, M., K. Nomizu. On sectional curvature of indefinite metrics. — *Math. Ann.*, **247**, 1980, 279—282.
2. Kulkarni, R. S. Curvature structures and conformal transformations. — *J. Diff. Geom.*, **4**, 1970, 425—451.
3. Graves, L., K. Nomizu. On sectional curvature of indefinite metrics. — *Math. Ann.*, **232**, 1978, 267—272.
4. Borisov, A., G. Ganchev, O. Kassabov. Curvature properties and isotropic planes of Riemannian and almost Hermitian manifolds of indefinite metrics. — *Ann. Univ. Sofia, Fac. Mat. et. Mech.*, **78**, livre 1, 1984.
5. Ganchev, G. Almost Hermitian manifolds similar to the complex space forms. — *C. R. Acad. bulg. Sci.*, **32**, 1979, 1179—1182.
6. Ganchev, G. On Bochner curvature tensors in almost Hermitian manifolds. — *Pliska, Studia mathematica bulgarica*, **9**, 1987, 33 — 43.
7. Tricerri, F., L. Vanhecke. Curvature tensors on almost Hermitian manifolds. — *Trans. Amer. Math. Soc.*, **267**, 1981, 365—398.
8. Ganchev, G. Conformal type and Bochner tensors for almost Hermitian manifolds. — *C. R. Acad. bulg. Sci.*, **34**, 1981, 1065—1068.
9. Gray, A., L. Hervella. The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants. — *Ann. Math. Pura Appl.*, **123**, 1980, No 4, 35—58.

Received 14. 5. 1985

Н-КЕЛЕРОВО МНОГООБРАЗИЕ СЪС СТРУКТУРА НА АНТИЦИКЛИЧНА АЛГЕБРА ОТ ЧЕТВЪРТИ РЕД

Христо Хоптериев

Христо Хоптериев. *Н-келерово многообразие с надененна структура антициклической алгебры четвертого порядка.* Рассматривается *Н-келерово многообразие* размерности $4n$ и надененна структура представления алгеброй антициклических чисел. Доказываются аналоги теорем Герглотца и Шура. Определяется тензор, аналогичный тензору Бохнера.

Hristo Hopteriev. *H-Kaehlerian Manifold with a Structure of Anticyclic Algebra of the Fourth Order.* The article deals with an $4n$ -dimensional *H-Kaehlerian manifold* with a structure of anticyclic algebra of the fourth order. Analogies to Schur's and Herglotz's theorems are proved. Definitions of a tensor analogous to Bohnner's tensor are given. Manifolds, meeting linear relations are classified.

Н-ермитовите и Н-келеровите многообразия са разглеждани за първи път в [2]. В настоящата работа, използвайки метода, предложен в [4], класифицираме Н-келеровите многообразия със структура на антициклическа алгебра от четвърти ред, за които са в сила две линейни връзки. Разглеждат се многообразия с постоянна холоморфна и присъединена холоморфна кривина и Н-айнщайнови многообразия. Дефинира се тензор, аналогичен на тензора на Бохнер за келерово многообразие.

1. Въведение. Нека M е $4n$ -мерно риманово многообразие с метричен тензор g , свързаност на Леви—Чевита — и тензорно поле на кривина R . Многообразието M се нарича *Н-ермитово многообразие със структура на антициклическа алгебра от четвърти ред*, ако на M са зададени тензорните полета от тип $(1,1)$ f_1, f_2, f_3 , комутиращи и удовлетворяващи условията [2]:

$$(1) \quad f_1^2 = f_2, f_1 f_2 = f_3, f_1 f_3 = -I, g(t_1 x, y) = -g(x, f_1 y),$$

където I е идентитетът на M . От (1) следва още

$$(2) \quad g(f_2 x, y) = g(x, f_2 y), g(f_3 x, y) = -g(x, f_3 y)$$

Многообразието M се нарича H -келерово [2], ако е H -ермитово и

$$(3) \quad \Delta f_1 = 0,$$

от което непосредствено следва

$$(4) \quad \Delta f_2 = \Delta f_3 = 0.$$

По-нататък ще предполагаме, че M е H -келерово многообразие.

Нека A е тензорно поле от тип $(1, 1)$. Тензорното поле T се нарича чисто относно A , ако $T(Ax, y, \dots) = T(x, Ay, \dots) = \dots$. За всяко чисто тензорно поле T се дефинира присъединено тензорно поле $T_A(x, y, \dots) = T(Ax, y, \dots)$. Тензорното поле T се нарича хибридно по двойката x, y относно A , ако $T(Ax, y, \dots) = -T(x, Ay, \dots)$.

От (1), (2), (3) и (4) следва, че g и R са чисти тензорни полета относно f_2 . Техните присъединени тензорни полета ще означаваме с g_2 и R_2 . От същите равенства се вижда, че g е хибриден относно f_1 и f_3 , а R е хибриден по двойките x, y и z, u относно f_1 и f_3 . Тензор на кривина, който е чист относно f_2 и хибриден по двойките x, y и z, u относно f_1 и f_3 , ще наричаме HK -тензор на кривина. С $\rho(R)$ ще означим тензора на Ричи, а с $\tau(R)$ — скаларната кривина на R . Тензорът $\rho(R)$ е чист относно f_2 и хибриден относно f_1 и f_3 . Тензорът на Ричи и скаларната кривина на R_2 ще означаваме съответно с $\rho(R_2)$ и $\tau(R_2)$. За $\tau(R)$ и $\tau(R_2)$ в локални координати е в сила [1]

$$(5) \quad -\partial_i (\tau(R)) = \partial_j (\tau(R_2)) f_{2i}^j.$$

Нека M_p е допирателното пространство в точка $p \in M$, а E^m и F^k са подпространства на M_p с бази си съответно $\{v_e\}_{e=1}^m$ и $\{w_p\}_{p=1}^k$. Величината

$$(6) \quad K(E^m, F^k) = \sum_{e, s, p, q} V^{es} W^{pq} R(v_e w_p w_q v_s),$$

където V^{es} и W^{pq} са обратните матрици на матриците $(g(v_e v_s))$ и $(g(w_p w_q))$, се нарича взаимна кривина на E^m и F^k [4, 3]. Когато E^m и F^k съвпадат, се дефинира кривината

$$K(E^m) = \frac{1}{2} K(E^m, E^m),$$

която се нарича кривина на E^m [4]. Ако в (6) заменим R с R_2 , получената кривина ще бележим с $K_2(E^m, F^k)$ и ще я наричаме присъединена на $K(E^m, F^k)$.

Нека $x \in M_p$ и $x_i = f_i x$, $i = 1, 2, 3$. Подпространството $x^* = \{x, x_1, x_2, x_3\}$ на M_p се нарича холоморфна площадка. В общия случай векторите x, x_1, x_2, x_3 могат да бъдат линейно зависими. Това означава, че димензията на една холоморфна площадка е по-малка или равна на четири. По-нататък ще считаме, че всички разглеждани холоморфни площадки имат димензия четири. В [5] показахме как една холоморфна площадка с по-малка димензия може да се допълни до холоморфна площадка с максимална димензия четири. Кривината на x^* и нейната присъединена ще бележим с $H(x)$ и $H_2(x)$ и ще ги наричаме съответно холоморфна и присъединена холоморфна кривина. От (6) намираме

$$(7) \quad \begin{aligned} H(x) &= 4(R(x x_3 x_3 x)(2g_1 g_2 / \Delta^2) - R(x x_1 x_3 x)(g_2^2 - g_1^2) / \Delta^2), \\ H_2(x) &= 4(-R(x x, x_3 x)(2g_1 g_2 / \Delta^2) - R(x x_3 x_3 x)(g_2^2 - g_1^2) / \Delta^2), \end{aligned}$$

където $\Delta = g_1^2 + g_2^2$, $g_1 = g(x x)$, $g_2 = g_2(x x)$. По-нататък ще използваме още взаимната кривина на x^* и M_p :

$$(8) \quad \begin{aligned} K(x^*, M_p) &= \frac{4}{\Delta} (g(x x) \rho(R)(x x) + g_2(x x) \rho(R_2)(x x)), \\ K_2(x^*, M_p) &= \frac{4}{\Delta} (-g_2(x x) \rho(R)(x x) + g(x x) \rho(R_2)(x x)). \end{aligned}$$

2. Н-келерови многообразия, удовлетворяващи система от две линейни връзки. Тук ще разгледаме H -келерови многообразия, чийто тензор на кривина удовлетворява системата линейни връзки

$$(9) \quad \begin{aligned} \lambda H(x) + \mu K(x^*, M_p) &= c, \\ \lambda H_2(x) + \mu K_2(x^*, M_p) &= c_2. \end{aligned}$$

Келерови многообразия, удовлетворяващи една линейна връзка, са разглеждани в [4]. В нашия случай възможността да се разглежда втора линейна връзка се обуславя от наличието на присъединен тензор на кривина R_2 . За улеснение на по-нататъшните пресмятания да положим

$$\begin{aligned} L(x y z u) &= -\mu/8[-g(x t) \rho(R)(y u) + g(y z) \rho(R)(x u) - g(y u) \rho(R)(x z) + g(x u) \rho(R)(y z) \\ &\quad + g_2(x z) \rho(R_2)(y u) - g_2(y z) \rho(R_2)(x u) + g_2(y u) \rho(R_2)(x z) - g_2(x u) \rho(R_2)(y z) \\ &\quad + g(x z_3) \rho(R)(u y_1) - g(y z_3) \rho(R)(u x_1) + g(u y_3) \rho(R)(x z_1) - g(u x_3) \rho(R)(y z_1) \\ &\quad + g(x z_1) \rho(R)(y_3 u) - g(y z_1) \rho(R)(u x_3) + g(u y_1) \rho(R)(x z_3) - g(u x_1) \rho(R)(y z_3) \\ &\quad + 2g(x y_3) \rho(R)(u z_1) + 2g(u z_3) \rho(R)(x y_1) + 2g(x y_1) \rho(R)(u z_3) + 2g(u z_1) \rho(R)(x y_3) \\ &\quad + (c/16[+g(y z)g(x u) - g(x z)g(y u) + g_2(x z)g_2(y u) - g_2(x u)g_2(y z) \\ &\quad + g(u y_1)g(x z_3) - g(u x_1)g(y z_3) + g(x z_1)g(u y_3) - g(y z_1)g(u x_3) \\ &\quad + 2g(u z_1)g(x y_3) + 2g(u z_3)g(x y_1)] + (c_2/16)[2g(x y_1)g(u z_1) - 2g(x y_3)g(u z_3) \\ &\quad + g(x z)g_2(y u) - g(y z)g_2(x u) + g(y u)g_2(x z) - g(x u)g_2(y z) \\ &\quad + g(x z_1)g(u y_1) - g(y z_1)g(u x_1) - g(x z_3)g(u y_3) + g(y z_3)g(u x_3)]. \end{aligned}$$

Тогавя след заместване на $H(x)$, $H_2(x)$, $K(x^*, M_p)$, $K_2(x^*, M_p)$ получаваме система от две линейни уравнения относно $\lambda R(x x_1 x_3 x)$ и $\lambda R(x x_3 x_3 x)$. След решаване на тази система намираме

$$(10) \quad \lambda R(x x_1 x_3 x) = L(x x_1 x_3 x), \quad \lambda R(x x_3 x_3 x) = L(x x_3 x_3 x).$$

Л е м а. Ако за два НК-тензора R и L са в сила равенствата (10), то $\lambda R = L$.

Доказателство. В първото равенство да заместим x с $x + u$ и да отделим вторите степени на x :

$$\lambda(R(xx_1y_3y)+2R(xy_1x_3y))=L(xx_1y_3y)+2L(xy_1x_3y).$$

Сега от първото тъждество на Бианки намираме

$$(11) \quad \lambda(-R(xyx_1y)+3R(xy_1x_3y))=-L(xyx_1y)+3L(xy_1x_3y).$$

Аналогично от второто равенство в (10) получаваме

$$(12) \quad \lambda(-R_2(xyx_1y)+3R(xy_3x_3y))=-L_2(xyx_1y)+3L(xy_3x_3y).$$

В (12) заместваме y с y_1 :

$$\lambda(R(xy_1y_3x)+3R(xy_1yx))=L(xy_1y_3x)+3L(xy_1yx).$$

От последното равенство и (11) изразяваме

$$\lambda R(xy_1yx)=L(xy_1yx).$$

Заместваме x с $x+u$ и получаваме

$$\lambda R(xy_1yu)=L(xy_1yu).$$

Отгук, чрез замяната $y \rightarrow y+z$ и кратки преобразования следва

$$(13) \quad \lambda R(xyzu)=L(xyzu).$$

Т е о р е м а 1. Ако за всяка точка $p \in M$ и всеки вектор $x \in M_p$ са в сила линейните връзки (9), като λ , μ , c и c_2 са функции, независещи от x , то за тензора на кривината на M е в сила (13).

След контракция от (13) получаваме

$$(14) \quad \lambda \rho(R) = -(\mu/8)[4\rho(R)(n+2) + \tau(R)g - \tau(R_2)g_2] + (c/4)(n+1)g - (c_2/4)(n+1)g_2,$$

$$\lambda \tau(R) = -\mu \tau(R)(n+1) + cn(n+1),$$

$$(15) \quad \lambda \tau(R_2) = -\mu \tau(R_2)(n+1) + c_2n(n+1).$$

Ще направим класификация на H -келеровите многообразия, удовлетворяващи линейните връзки (9).

а) Нека $\mu=0$. Без ограничение на общността можем да приемем, че $\lambda=1$. Тогава

$$(16) \quad H(x) = c, \quad H_2(x) = c_2.$$

Многообразие, удовлетворяващо (16), ще наричаме многообразие с постоянни холоморфна и присъединена холоморфна кривина. За такова многообразие от (13) и (14) получаваме

Т е о р е м а 2. Ако M е с постоянни холоморфна и присъединена холоморфна кривина, то

$$(16') \quad \begin{aligned} 1. \quad R(xyzu) = & -(c/16)[g(xz)g(yu) - g(yz)g(xu) - g_2(yu)g_2(xz) + g_2(xu)g_2(yz) \\ & - g(uy_1)g(xz_3) + g(ux_1)g(yz_3) - g(xz_1)g(uy_3) + g(yz_1)g(ux_3) \\ & - 2g(uz_1)g(xy_3) - 2g(uz_3)g(xy_1)] \\ & + (c_2/16)[g(xz)g_2(yu) - g(yz)g_2(xu) + g(yu)g_2(xz) - g(xu)g_2(yz) \\ & + g(xz_1)g(uy_1) - g(yz_1)g(ux_1) - g(xz_3)g(uy_3) + g(yz_3)g(ux_3) \\ & + 2g(xy_1)g(uz_1) - 2g(xy_3)g(uz_3)]; \end{aligned}$$

$$2. \quad \rho(R) = (c/4)(n+1)g - (c_2/4)(n+1)g_2;$$

$$3. \quad \tau(R) = cn(n+1), \quad \tau(R_2) = c_2n(n+1).$$

б) Нека $\lambda = 0$. Можем да считаме, че $\mu = 1$. Тогава

$$(17) \quad K(x, M_p)^* = c, \quad K_2(x, M_p)^* = c_2.$$

Многообразие, удовлетворяващо (17), ще наричаме *H*-айнщайново.

Т е о р е м а 3. Многообразието *M* е *H*-айнщайново точно когато

$$\rho(R) = \alpha g + \beta g_2,$$

където $\alpha = c/4$, $\beta = -c_2/4$.

Доказателство. От (14) и (15) намираме

$$(18) \quad \rho(R) = (c/4)g - (c_2/4)g_2.$$

Освен това $c = \tau(R)/n$, $c_2 = \tau(R_2)/n$.

Обратно, ако *M* удовлетворява (18), тогава според (8)

$$K(x, M_p)^* = 4\alpha, \quad K_2(x, M_p)^* = -4\beta,$$

което показва, че *M* е *H*-айнщайново.

Т е о р е м а 4. Ако *M* е с постоянни холоморфна и присъединена холоморфна кривина, то *M* е *H*-айнщайново.

Доказателството следва от теорема 2.

Т е о р е м а 5 (аналог на теоремата на Херглотц). Нека *M* е свързано *H*-айнщайново *H*-келерово многообразие със структура на антициклична алгебра от четвърти ред и $n \geq 2$. Тогава $\tau(R)$ и $\tau(R_2)$ са глобални константи.

Доказателство. В локални координати за $\rho(R)$ имаме

$$\rho(R)_{ij} = \frac{\tau(R)}{4n} g_{ij} - \frac{\tau(R_2)}{4n} g_{2ij}.$$

Според [6, 22]

$$\partial_j(\tau(R)) = \nabla_i \rho(R) = \nabla_i \rho(R)^i_j = \partial_i(\tau(R)) g^i_j - \partial_i(\tau(R_2)) f^i_j / 4n.$$

От (5) имаме

$$\partial_j(\tau(R))/2 = \partial_j(\tau(R))/2n.$$

При $n \geq 2$ следва $\partial_j(\tau(R)) = 0$. Аналогично се доказва, че $\partial_j(\tau(R_2)) = 0$. Тъй като *M* е свързано, следва, че $\tau(R)$ и $\tau(R_2)$ са глобални константи.

С л е д с т в и е. Ако *M* е свързано *H*-келерово многообразие, което удовлетворява (16), то *c* и *c*₂ са глобални константи.

в) Нека $\lambda \neq 0$ и $\mu \neq 0$. Да преобразуваме (14) във вида

$$(\lambda + \mu(n+2)/2) \rho(R) = \left(-\frac{\mu}{8} + \frac{c}{4}(n+1) \right) \tau(R) g + \left(-\frac{\mu}{8} - \frac{c_2}{4}(n+1) \right) \tau(R_2) g_2.$$

Ако $\lambda + \mu(n+2)/2 \neq 0$, многообразието е *H*-айнщайново. Следователно $K(x, M_p)^* = c'$ и $K_2(x, M_p)^* = c_2'$. Сега от (9) следва, че *M* е с постоянни холоморфна и присъединена холоморфна кривина. В частност този резултат се получава при $\mu = 0$.

Нека $\lambda + \mu(n+2)/2 = 0$. Можем да считаме, че $\lambda = 1$. Тогава $\mu = -2/(n+2)$, а от (15) намираме $c_1 = \tau(R)/(n+1)(n+2)$ и $c_2 = -\tau(R_2)/(n+1)(n+2)$. При тези стойности на μ , c_1 и c_2 да положим

$$(19) \quad B(xyzu) = R(xyzu) - L(xyzu).$$

Тензорът B има аналогични свойства на тензора на Бохнер за келерово многообразие.

Въз основа на тези разглеждания можем да формулираме следната класификационна теорема за H -келерови многообразия, удовлетворяващи системата линейни връзки (9).

Теорема 6. Нека M е H -келерово многообразие, за което са в сила линейните връзки (9). Тогава:

- а) $\lambda = 0$ точно когато M е H -айнщайново;
- б) $\lambda \neq 0$ и $\lambda + \mu(n+2)/2 = 0$ точно когато $B = 0$;
- в) ако $\lambda \neq 0$ и $\lambda + \mu(n+2)/2 \neq 0$, то M е с постоянни холоморфна и присъединена холоморфна кривина.

С проверка се доказват и следните теореми:

Теорема 7. Тензорът B е НК-тензор и има нулев тензор на Ричи.

Теорема 8. За M са еквивалентни:

- а) $H(x)$ и $H_2(x)$ не зависят от x във всяка точка на M ;
- б) M е H -айнщайново и $B = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вишневский, В. В. Некоторые свойства дифференциально-геометрических структур, определяемых алгебрами. — Науч. тр. ПУ, Мат., 10, кн. 1, 1972, 23—29.
2. Кручкович, Г. И. H -эрмитовы пространства. — Изв. ВУЗ, Мат., 4 (107), 1971, № 4, 42—49.
3. Павлов, Е. В., М. К. Василева. Секционна кривина в пространство над алгебрата на Клифорд. — Науч. тр. ПУ, Мат., 16, кн. 1, 1978, 418—431.
4. Станислов, Г. И. Върху геометрията на римановите и почти ермитовите многообразия (Докторска дисертация. София, 1968).
5. Хоптериев, Хр. Т. Върху сигнатурата на В-метрика. — Науч. тр. ПУ, Мат., 23, кн. 1, 1985.
6. Яно, К., С. Бохнер. Кривизна и числа Бетти. Москва, ИЛ, 1957.

Постъпила на 14.5.1985 г.

ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ВСЕХ КРАТНЫХ КОРНЕЙ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Николай Кюркчиев, Андрей Андреев, Васил Попов

Николай Кюркчиев, Андрей Андреев, Васил Попов. **Итерационные методы для вычисления всех кратных корней алгебраического уравнения.** Рассматриваются численные методы для уточнения всех корней алгебраических уравнений, если их кратности произвольные, но заданные. Приводится оценка скорости сходимости одного итерационного процесса.

Nikolai Kjurkchiev, Andrei Andreev, Vasil Popov. **Iterative Methods for Computation of all Multiple Roots of an Algebraic Polynomial.** Numerical methods for determination of all roots of a given algebraic polynomial are considered in the case when the multiplicity of the roots is preassigned. The rate of the convergence is obtained for one iterative process.

Рассматриваются итерационные методы для уточнения всех корней алгебраических уравнений, если их кратности произвольные, но заданные.

Известно, что если разыскиваемый корень ξ нелинейного уравнения $f(x)=0$ имеет кратность s , то модифицированное правило Ньютона

$$x_{n+1} = x_n - s \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n=0, 1, \dots,$$

будет иметь приблизительно такой же закон убывания погрешности для x_n , близких к ξ , как и в основном правиле Ньютона при $f'(\xi) \neq 0$.

Особый интерес представляют итерационные методы для одновременного вычисления всех кратных корней алгебраического уравнения

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0 = 0,$$

если кратности корней заданы.

Естественно, возникает вопрос, нельзя ли обобщить методы типа Вейерштрасса—Дочева [1, 2], Эрлиха [3] и их обобщений [4—7] таким образом,

чтобы сохранить их скорость сходимости и чтобы с их помощью можно было бы уточнять одновременно все корни уравнения $f(x)=0$ и в случаях, когда их кратности произвольные, но заданные.

Оказывается, что это возможно. Пусть x_1, x_2, \dots, x_m являются всеми корнями уравнения

$$(1) \quad f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a^0 = \prod_{j=1}^m (x-x_j)^{s_j}$$

с кратностями, соответственно, s_1, s_2, \dots, s_m ; $s_j \geq 1, j=1, 2, \dots, m, s_1 + s_2 + \dots + s_m = n$.

Семерджиев [8] показал, что для процесса

$$(2) \quad x_i^{k+1} = x_i^k - \frac{1}{s_i} \sum_{j=0}^{s_i-1} \frac{f^{(j)}(x_i^k)}{j!(s_i-1-j)!} \left[\frac{(x-x_i^k)^{s_i}}{t_m^k(x)} \right]_{x=x_i^k},$$

где

$$t_m^k(x) = \prod_{l=1}^m (x-x_l^k)^{s_l},$$

при некоторых ограничениях выполнено

$$(3) \quad |x_i^k - x_i| \leq cq^{2^k}, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

для каждого $k=0, 1, \dots$

Далее Макрелов и Семерджиев [9] получили методы для одновременного нахождения всех корней тригонометрических и экспоненциальных уравнений, если заданы их кратности.

В работе Гаргантини [10] предложена итерационная процедура, являющаяся модификацией метода Эрлиха:

$$(4) \quad x_i^{k+1} = x_i^k - \frac{s_i}{f'(x_i^k)/f(x_i^k) - \sum_{\beta_0=1, \beta_0 \neq i}^m s_{\beta_0}/(x_i^k - x_{\beta_0}^k)},$$

$$i=1, 2, \dots, m, \quad k=0, 1, \dots,$$

порядка сходимости $\tau=3$.

Метод (4) очень часто применяется, и было сделано ряд попыток, преследующих цель изменить его в сторону увеличения скорости сходимости.

Иногда может оказаться практически более целесообразным рассмотреть следующую процедуру:

$$x_i^{k+1} = x_i^k - \frac{s_i}{\frac{f'(x_i^k)}{f(x_i^k)} - \sum_{\beta_0=1}^{i-1} \frac{s_{\beta_0}}{x_i^k - x_{\beta_0}^{k+1}} - \sum_{\beta_0=i+1}^m \frac{s_{\beta_0}}{x_i^k - x_{\beta_0}^k}},$$

$$i=1, 2, \dots, m, \quad k=0, 1, \dots$$

порядка сходимости $\tau > 3$.

В работе Миловановича и Петковича [11] предлагается вычислять следующие приближения x_i^{k+1} по формулам

$$(6) \quad x_i^{k+1} = x_i^k - \frac{S_i}{\frac{f'(x_i^k)}{f(x_i^k)} - \sum_{\beta_0=1, \beta_0 \neq i}^m \frac{S_{\beta_0}}{x_i^k - x_{\beta_0}^k - \Delta_{\beta_0}^k}},$$

$$i=1, 2, \dots, m, \quad k=0, 1, \dots,$$

$$\Delta_j^k = -s_j f(x_j^k)/f'(x_j^k), \quad j=1, 2, \dots, m,$$

или по формулам

$$(7) \quad x_i^{k+1} = x_i^k - \frac{S_i}{\frac{f'(x_i^k)}{f(x_i^k)} - \sum_{\beta_0=1}^{i-1} \frac{S_{\beta_0}}{x_i^k - x_{\beta_0}^{k+1}} - \sum_{\beta_0=i+1}^m \frac{S_{\beta_0}}{x_i^k - x_{\beta_0}^k - \Delta_{\beta_0}^k}},$$

$$i=1, 2, \dots, m, \quad k=0, 1, \dots,$$

порядка сходимости, соответственно, $\tau=4$ и $\tau>4$.

Оказывается, что можно строить эффективные алгоритмы, обладающие хорошей скоростью сходимости.

Формулируем правило ускорения сходимости следующим образом:

$$(8) \quad x_i^{k+1} = x_i^k - \frac{S_i}{H(x_i^k) - \sum_{\beta_0=1, \beta_0 \neq i}^m s_{\beta_0}/(x_i^k - x_{\beta_0}^k - \Delta_{\beta_0}^{R,k})},$$

$$i=1, 2, \dots, m, \quad k=0, 1, \dots,$$

где $H(x_i^k) = f'(x_i^k)/f(x_i^k)$,

$$\Delta_t^{R,k} = - \frac{S_t}{H(x_t^k) - \sum_{l=1, l \neq t}^m s_l/(x_t^k - x_l^k - \Delta_l^{R-1,k})},$$

$$\Delta_t^{0,k} = 0, \quad t=1, 2, \dots, m, \quad k=0, 1, \dots$$

Выясним вопрос о скорости сходимости последовательности $\{x_i^k\}_{i=1}^m$ из (8). Справедлив следующий результат.

Теорема. Пусть $0 < q < 1$, $d = \min_{i \neq j} |x_i - x_j|$ и $c > 0$, такое что

$$d > c \left(2 + \frac{n}{s} 3q \right),$$

$$(9) \quad \frac{c^2(n-s')}{(d-c)\left(d-2c-\frac{n}{s}cq\right)\left(1-\frac{\left(\frac{n}{s}+1\right)\left(\frac{n}{s'}-1\right)c^2q^2}{(d-c)\left(d-2c-\frac{n}{s}cq\right)}\right)} \leq 1,$$

где $s = \max_{1 \leq j \leq m} s_j$, $s' = \min_{1 \leq j \leq m} s_j$.

Если начальные приближения $\{x_i^0\}_1^m$ к корням уравнения $f(x)=0$ удовлетворяют неравенствам

$$|x_i^0 - x_i| \leq cq, \quad i=1, 2, \dots, m,$$

то для всех k будем иметь

$$(10) \quad |x_i^k - x_i| \leq cq(2R+3)^k, \quad i=1, 2, \dots, m,$$

то есть последовательность $\{x_i^k\}_{k=0}^\infty$, $i=1, 2, \dots, m$, генерируемая процедурой (8), имеет порядок сходимости $\tau=2R+3$.

Доказательство. Утверждение теоремы докажем методом математической индукции. При $R=0$ получается, конечно, метод (4) третьего порядка сходимости: $\tau=2R+3=3$. Для разности $x_i^{k+1}-x_i$ получаем

$$\begin{aligned} x_i^{k+1} - x_i &= x_i^k - x_i - \frac{s_i}{\sum_{\beta_0=1}^m \frac{s_{\beta_0}}{x_i^k - x_{\beta_0}}} - \frac{s_i}{\sum_{\beta_0=1, \beta_0 \neq i}^m \frac{s_{\beta_0}}{x_i^k - x_{\beta_0} - \Delta_{\beta_0}^{R,k}}} \\ &= x_i^k - x_i - \frac{s_i}{x_i^k - x_i} + \frac{s_i}{\sum_{\beta_0=2, \beta_0 \neq i}^m \frac{s_{\beta_0}}{x_i^k - x_{\beta_0}}} - \frac{s_i}{\sum_{\beta_0=1, \beta_0 \neq i}^m \frac{s_{\beta_0}}{x_i^k - x_{\beta_0} - \Delta_{\beta_0}^{R,k}}} \\ &= x_i^k - x_i - \frac{s_i(x_i^k - x_i)}{s_i + (x_i^k - x_i) \sum_{\beta_0=1, \beta_0 \neq i}^m \frac{s_{\beta_0}(x_{\beta_0}^k - x_{\beta_0}^k - \Delta_{\beta_0}^{R,k})}{(x_i^k - x_{\beta_0})(x_i^k - x_{\beta_0}^k - \Delta_{\beta_0}^{R,k})}} \\ &= (x_i^k - x_i) \left[1 - \frac{s_i}{s_i + (x_i^k - x_i) \sum_{\beta_0=1, \beta_0 \neq i}^m \frac{s_{\beta_0}(x_{\beta_0}^k - x_{\beta_0}^k - \Delta_{\beta_0}^{R,k})}{(x_i^k - x_{\beta_0})(x_i^k - x_{\beta_0}^k - \Delta_{\beta_0}^{R,k})}} \right] \\ &= \frac{(x_i^k - x_i)^2}{s_i + (x_i^k - x_i) \sum_{\beta_0=1, \beta_0 \neq i}^m \frac{s_{\beta_0}(x_{\beta_0}^k - x_{\beta_0}^k - \Delta_{\beta_0}^{R,k})}{(x_i^k - x_{\beta_0})(x_i^k - x_{\beta_0}^k - \Delta_{\beta_0}^{R,k})}} - \sum_{\beta_0=1, \beta_0 \neq i}^m \frac{s_{\beta_0}(x_{\beta_0}^k - x_{\beta_0}^k - \Delta_{\beta_0}^{R,k})}{(x_i^k - x_{\beta_0})(x_i^k - x_{\beta_0}^k - \Delta_{\beta_0}^{R,k})} \end{aligned}$$

Ho

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\beta_0=1, \beta_0 \neq i}^m \frac{s_{\beta_0}(x_{\beta_0} - x_{\beta_0}^k - \Delta_{\beta_0}^{R, k})}{(x_i^k - x_{\beta_0})(x_i^k - x_{\beta_0}^k - \Delta_{\beta_0}^{R, k})} \\
 &= \sum_{\beta_0=1, \beta_0 \neq i}^m \frac{s_{\beta_0} \left(x_{\beta_0} - x_{\beta_0}^k + s_{\beta_0} \left(\frac{f'(x_{\beta_0}^k)}{f(x_{\beta_0}^k)} - \sum_{\beta_1 \neq \beta_0}^m \frac{s_{\beta_1}}{x_{\beta_0}^k - x_{\beta_1}^k - \Delta_{\beta_1}^{R-1, k}} \right)^{-1} \right)}{(x_i^k - x_{\beta_0})(x_i^k - x_{\beta_0}^k - \Delta_{\beta_0}^{R, k})} \\
 &= \sum_{\substack{\beta_0=1 \\ \beta_0 \neq i}}^m \frac{s_{\beta_0} \left(x_{\beta_0} - x_{\beta_0}^k + s_{\beta_0} \left(\frac{s_{\beta_0}}{x_{\beta_0}^k - x_{\beta_0}} + \sum_{\beta_1 \neq \beta_0}^m \frac{s_{\beta_1}}{x_{\beta_0}^k - x_{\beta_1}^k} - \sum_{\beta_1 \neq \beta_0}^m \frac{s_{\beta_1}}{x_{\beta_0}^k - x_{\beta_1}^k - \Delta_{\beta_1}^{R-1, k}} \right)^{-1} \right)}{(x_i^k - x_{\beta_0})(x_i^k - x_{\beta_0}^k - \Delta_{\beta_0}^{R, k})} \\
 &= \sum_{\substack{\beta_0=1 \\ \beta_0 \neq i}}^m \frac{s_{\beta_0} (x_{\beta_0} - x_{\beta_0}^k) \left(1 - s_{\beta_0} \left(s_{\beta_0} + (x_{\beta_0}^k - x_{\beta_0}) \sum_{\beta_1 \neq \beta_0}^m \frac{s_{\beta_1} (x_{\beta_1} - x_{\beta_1}^k - \Delta_{\beta_1}^{R-1, k})}{(x_{\beta_0}^k - x_{\beta_1})(x_{\beta_0}^k - x_{\beta_1}^k - \Delta_{\beta_1}^{R-1, k})} \right)^{-1} \right)}{(x_i^k - x_{\beta_0})(x_i^k - x_{\beta_0}^k - \Delta_{\beta_0}^{R, k})} \\
 &= \sum_{\substack{\beta_0=1 \\ \beta_0 \neq i}}^m \frac{s_{\beta_0} (x_{\beta_0}^k - x_{\beta_0})^2 \sum_{\beta_1 \neq \beta_0}^m \frac{s_{\beta_1} (x_{\beta_1} - x_{\beta_1}^k - \Delta_{\beta_1}^{R-1, k})}{(x_{\beta_0}^k - x_{\beta_1})(x_{\beta_0}^k - x_{\beta_1}^k - \Delta_{\beta_1}^{R-1, k})}}{(x_{\beta_0} - x_i^k)(x_i^k - x_{\beta_0}^k - \Delta_{\beta_0}^{R, k}) \left(s_{\beta_0} + (x_{\beta_0}^k - x_{\beta_0}) \sum_{\beta_1 \neq \beta_0}^m \frac{s_{\beta_1} (x_{\beta_1} - x_{\beta_1}^k - \Delta_{\beta_1}^{R-1, k})}{(x_{\beta_0}^k - x_{\beta_1})(x_{\beta_0}^k - x_{\beta_1}^k - \Delta_{\beta_1}^{R-1, k})} \right)}
 \end{aligned}$$

Рекурсивно следует, что

$$\begin{aligned}
 (11) \quad & \sum_{\beta_0=1, \beta_0 \neq i}^m \frac{s_{\beta_0} (x_{\beta_0} - x_{\beta_0}^k - \Delta_{\beta_0}^{R, k})}{(x_i^k - x_{\beta_0})(x_i^k - x_{\beta_0}^k - \Delta_{\beta_0}^{R, k})} \\
 &= \sum_{\substack{\beta_0=1 \\ \beta_0 \neq i}}^m \frac{s_{\beta_0} (x_{\beta_0}^k - x_{\beta_0})^2}{(x_{\beta_0} - x_i^k)(x_i^k - x_{\beta_0}^k - \Delta_{\beta_0}^{R, k}) \left(s_{\beta_0} + (x_{\beta_0}^k - x_{\beta_0}) \sum_{\beta_1 \neq \beta_0}^m \frac{s_{\beta_1} (x_{\beta_1} - x_{\beta_1}^k - \Delta_{\beta_1}^{R-1, k})}{(x_{\beta_0}^k - x_{\beta_1})(x_{\beta_0}^k - x_{\beta_1}^k - \Delta_{\beta_1}^{R-1, k})} \right)} \\
 &\times \sum_{\beta_1 \neq \beta_0}^m \frac{s_{\beta_1} (x_{\beta_1}^k - x_{\beta_1})^2}{(x_{\beta_1} - x_{\beta_0}^k)(x_{\beta_0}^k - x_{\beta_1}^k - \Delta_{\beta_1}^{R-1, k}) \left(s_{\beta_1} + (x_{\beta_1}^k - x_{\beta_1}) \sum_{\beta_2 \neq \beta_1}^m \frac{s_{\beta_2} (x_{\beta_2} - x_{\beta_2}^k - \Delta_{\beta_2}^{R-2, k})}{(x_{\beta_1}^k - x_{\beta_2})(x_{\beta_1}^k - x_{\beta_2}^k - \Delta_{\beta_2}^{R-2, k})} \right)} \\
 &\times \dots,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \sum_{\beta_{R-1} \neq \beta_{R-2}}^m \frac{s_{\beta_{R-1}} (x_{\beta_{R-1}}^k - x_{\beta_{R-1}})^2}{(x_{\beta_{R-1}} - x_{\beta_{R-2}}^k) (x_{\beta_{R-2}}^k - x_{\beta_{R-1}}^k - \Delta_{\beta_{R-1}}^{1,k})} \\ & \times \left(s_{\beta_{R-1}} + (x_{\beta_{R-1}}^k - x_{\beta_{R-1}}) \sum_{\beta_R \neq \beta_{R-1}}^m \frac{s_{\beta_R} (x_{\beta_R} - x_{\beta_R}^k)}{(x_{\beta_{R-1}}^k - x_{\beta_R}) (x_{\beta_{R-1}}^k - x_{\beta_R}^k)} \right) \\ & \times \sum_{\beta_R \neq \beta_{R-1}}^m \frac{s_{\beta_R} (x_{\beta_R} - x_{\beta_R}^k)}{(x_{\beta_{R-1}}^k - x_{\beta_R}) (x_{\beta_{R-1}}^k - x_{\beta_R}^k)}. \end{aligned}$$

Можно показать, что

$$(12) \quad \left| \Delta_t^{p,k} \right| \leq \frac{n}{s} cq, \quad t=1, 2, \dots, m, \quad p=0, 1, \dots, R.$$

Допустим, что

$$\left| \Delta_t^{p-1,k} \right| \leq \frac{n}{s} cq, \quad t=1, 2, \dots, m.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \Delta_t^{p,k} &= \frac{s_t}{\frac{s_t}{x_t^k - x_t} + \sum_{l \neq t}^m \frac{s_l}{x_t^k - x_l} - \sum_{l \neq t}^m \frac{s_l}{x_t^k - x_l^k - \Delta_l^{p-1,k}}} \\ &= \frac{s_t (x_t^k - x_t)}{s_t + (x_t^k - x_t) \sum_{l \neq t}^m \left(\frac{s_l}{x_t^k - x_l} - \frac{s_l}{x_t^k - x_l^k - \Delta_l^{p-1,k}} \right)}, \end{aligned}$$

тогда

$$\left| \Delta_t^{p,k} \right| \leq \frac{s_t cq}{s_t - cq \sum_{l \neq t}^m s_l \left(\frac{1}{|x_t^k - x_l|} + \frac{1}{|x_t^k - x_l^k| - |\Delta_l^{p-1,k}|} \right)}.$$

Используя неравенства

$$(13) \quad |x_s^k - x_l^k| > d - 2cq, \quad |x_s^k - x_l| \geq d - cq,$$

получаем

$$\left| \Delta_t^{p,k} \right| \leq \frac{s_t cq}{s_t - cq \left(\frac{1}{d-c} + \frac{1}{d-2c - \frac{n}{s}cq} \right) (n-s)}$$

$$\leq \frac{cq}{1 - \left(\frac{n}{s_t} - 1\right) cq} \frac{2}{d - 2c - \frac{n}{s} cq}.$$

Но

$$\frac{1}{1 - \frac{2cq \left(\frac{n}{s_t} - 1\right)}{d - 2c - \frac{n}{s} cq}} < \frac{n}{s},$$

так как по условию $d > c(2 + (n/s) 3q)$. Следовательно,

$$|\Delta_t^{p, k}| \leq \frac{n}{s} cq.$$

Имея в виду (12), (13) и неравенство

$$\begin{aligned} & \frac{s_\mu}{|x_\mu - x_y^k| \cdot |x_y^k - x_\mu^k - \Delta_\mu^{s, k}| \left| s_\mu + (x_\mu^k - x_\mu) \sum_{\lambda \neq \mu}^m \frac{s_\lambda (x_\lambda - x_\lambda^k - \Delta_\lambda^{s-1, k})}{(x_\mu^k - x_\gamma) (x_\mu^k - x_\lambda^k - \Delta_\lambda^{s-1, k})} \right|} \\ \leq & \frac{s_\mu}{x_\mu - x_y^k \cdot (|x_y^k - x_\mu^k| - |\Delta_\mu^{s, k}|) \left(s_\mu - |x_\mu^k - x_\mu| \sum_{\lambda \neq \mu}^m \frac{s_\gamma (|x_\lambda - x_\lambda^k| + |\Delta_\lambda^{s-1, k}|)}{(d-c) \left(d - 2c - \frac{n}{s} cq \right)} \right)} \\ \leq & \frac{s_\mu}{(d-c) \left(d - 2c - \frac{n}{s} cq \right) \left(s_\mu - cq \sum_{\lambda \neq \mu}^m \frac{s_\lambda \left(cd + \frac{n}{s} cq \right)}{(d-c) \left(d - 2c - \frac{n}{s} cq \right)} \right)} \\ \leq & \frac{s_\mu}{(d-c) \left(d - 2c - \frac{n}{s} cq \right) \left(s_\mu - c^2 q^2 \frac{\left(\frac{n}{s} + 1 \right) (n - s_\mu)}{(d-c) \left(d - 2c - \frac{n}{s} cq \right)} \right)} \\ \leq & \frac{1}{(d-c) \left(d - 2c - \frac{n}{s} cq \right) \left(1 - \frac{\left(\frac{n}{s} + 1 \right) \left(\frac{n}{s_\mu} - 1 \right) c^2 q^2}{(d-c) \left(d - 2c - \frac{n}{s} cq \right)} \right)} \end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{(d-c) \left(d-2c - \frac{n}{s} cd \right) \left(1 - \frac{\left(\frac{n}{s} + 1 \right) \left(\frac{n}{s'} - 1 \right) c^2 q^2}{(d-c) \left(d-2c - \frac{n}{s} cq \right)} \right)} = A,$$

для разности $x_i^{k+1} - x_i$ получаем

$$\begin{aligned} |x_i^{k+1} - x_i| &\leq [cq^{(2R+3)^k}]^{2R+3} A^{R+1} \sum_{\beta_0 \neq i}^m s_{\beta_0} \sum_{\beta_1 \neq \beta_0}^m s_{\beta_1} \dots \sum_{\beta_R \neq \beta_{R-1}}^m s_{\beta_R} \\ &= cq^{(2R+3)^{k+1}} (c^2 A)^{R+1} (n-s_i)(n-s_{\beta_0}) \dots (n-s_{\beta_{R-1}}) \\ &\leq cq^{(2R+3)^{k+1}} (c^2(n-s')A)^{R+1} \leq cq^{(2R+3)^{k+1}} \end{aligned}$$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Weierstrass, K. Neuer Beweis des Satzes, daß jede ganze rationale Funktion einer Veränderlichen dargestellt werden kann als ein Produkt aus Linearen Funktionen derselben Veränderlichen. — In: Ges. Werke, 3, 1903, 251—269.
2. Дочев, К. Видоизменен метод на Нютон за едновременно приблизително пресмятане на всички корени на дадено алгебрично уравнение. — Физ.-мат. сп., 5, 1962, № 2, 136—139.
3. Ehrlich, L. W. A Modified Newton Method for Polynomials Commun. — ACM, 10, 1967, 107—108.
4. Кюркчиев, Н., С. Ташев. Один метод одновременного приближенного вычисления всех корней алгебраического уравнения. — Докл. БАН, 34, 1981, № 8, 1053—1055.
5. Кюркчиев, Н. О некоторых модификациях метода Эрлиха для приближенного решения алгебраических уравнений. — Плиска, 5, 1983, 43—50.
6. Кюркчиев, Н., А. Андреев. Об одной модификации метода Вейерштрасса—Дочева порядка сходимости $R+2$ для одновременного приближенного вычисления всех корней алгебраического уравнения. — Докл. БАН, 38, 1985, № 11, 1461—1463.
7. Kjurkchiev, N., A. Andreev. Erlich's method with raised speed of a convergence. — Serdika, 13, 1987, 52—57.
8. Семерджиев, Хр. Метод для одновременного нахождения всех корней алгебраического уравнения, если заданы их кратности. — Докл. БАН, 35, 1982, № 8, 1057—1059.
9. Макрелов, Ил., Хр. Семерджиев. Методы для одновременного нахождения всех корней алгебраических, тригонометрических и экспоненциальных уравнений, если заданы их кратности. — ЖВМ, 24, 1984, № 12.
10. Gargantini, I. Further applications of circular arithmetic: Schroeder-like algorithms with error bounds for finding zeros of polynomials. — SIAM J. Numer. Anal., 15, 1978, 497—510.
11. Milovanovic, G., M. Petkovic. Metodi visokog reda za simultano odredjivanje visestrukih nula polynoma. — Mat. Vesnik University Nis, 1981, 95—100.

Поступила 14. 5. 1985 г.

О 4-КЛИКАХ НЕКОТОРЫХ ГРАФОВ БЕЗ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Недялко Ненов, Николай Хадживанов

Недялко Ненов, Николай Хадживанов. **О 4-кликах некоторых графов без треугольников.** Рассматриваются обыкновенные графы без треугольников, имеющих специальное распределение 4-антиклик. Получены все 9-вершинные графы без треугольников, имеющих не более трех 4-антиклик. В качестве следствий из доказанных в этой работе теорем получаются результаты из [2, 3, 4, 5, 11], относящиеся к минимуму числа 4-клик в графах без треугольников и с данным числом вершин.

Nedyalco Nenov, Nicolai Hadjiivanov. **On the 4-Cliques of Some Graphs without Triangles.** A set of 4 vertices of a given graph is called a 4-anticlique if no two of them are adjacent. In this paper we consider graphs with no triangles which have particular distributions of the 4-anticliques. As a consequence of the theorems proved concerning the minimum number of 4-cliques in graphs with no triangles and with a given number of vertices.

ВВЕДЕНИЕ

Под графом будем понимать упорядоченную пару $G = (V(G), E(G))$, где $V(G)$ — конечное множество, а $E(G)$ — некоторая совокупность 2-элементных подмножеств множества $V(G)$. Элементы множества $V(G)$ называются вершинами графа G , а элементы множества $E(G)$ — ребрами графа G . Будем говорить, что граф $G_1(V(G_1), E(G_1))$ является подграфом графа $G = (V(G), E(G))$, если $V(G_1) \subseteq V(G)$ и $E(G_1) \subseteq E(G)$. Если $|V(G)| = n$, будем говорить, что граф G является n -вершинным графом. Вершины $v_1, v_2 \in V(G)$ называются смежными в графе G , если $[v_1, v_2] \in E(G)$. Два графа G и H изоморфны, если между их вершинами существует взаимно однозначное соответствие, сохраняющее смежность. Если граф H изоморфен некоторому подграфу графа G , допуская вольность речи, иногда будем говорить, что граф H является подграфом графа G . Множество из трех вершин графа G называется треугольником, если любые две из них смежны. Будем рассматривать только графы без треугольников. Число вершин графа, смежных данной вершине v , называется степенью этой вершины и обозначается $d(v)$.

О п р е д е л е н и е 1. Множество вершин графа называется антикликой, если любые две из них несмежны. Если антиклика состоит из p вершин, то она называется p -антикликой.

Через $f_p(G)$ обозначим число p -антиклик графа G .

О п р е д е л е н и е 2. Минимум чисел $f_p(G)$ по всем n -вершинным графам без треугольников обозначим через $f_p(n)$.

Лорденом [9] вычислены все значения функции $f_3(n)$, $n \geq 12$. Кроме того, там описаны все экстремальные графы, т. е. такие n -вершинные графы без треугольников G , что $f_3(G) = f_3(n)$, $n \geq 12$. Подробное изложение результатов из [9] можно найти и в [8]. Метод Лордена для $n \leq 11$ неприменим. Исследованию функции $f_3(n)$, $n \leq 11$, и описанию экстремальных графов посвящены работы [6], [7], [10], где получены все значения $f_3(n)$, $n \leq 11$, и соответствующие экстремальные графы.

Эрдемем в [14] была поставлена проблема о вычислении $f_p(n)$, $p \geq 4$. Эта проблема пока не решена даже в случае $p=4$. Отметим некоторые результаты в этом направлении:

- (1) $f_4(n) = 0$, $n \leq 8$ см. [11],
- (2) $f_4(9) \geq 1$, см. [11],
- (3) $f_4(9) = 1$, см. [2, 3],
- (4) $f_4(10) = 5$, см. [4],
- (5) $f_4(11) = 11$, $f_4(12) = 12$, см. [5],
- (6) $f_4(13) \geq 28$, см. [5].

Все экстремальные графы равенства $f_4(7) = 0$ получены в [1], (см. теорему А настоящей работы), а все экстремальные графы равенства $f_4(8) = 0$ — в [13] (см. теорему В настоящей работы). Экстремальные графы равенства $f_4(9) = 1$ получены в [2] и [3]. Несколько лет спустя частично эти результаты были повторены в [12]. Экстремальные графы равенств (4) и (5) описаны в работах [4] и [5].

Иногда с конкретным значением функции $f_4(n)$ связано много экстремальных графов. В настоящей работе мы воспользуемся следующим методом: сначала получим все максимальные графы рассматриваемого типа, а потом удалением ребер получим все графы искомого типа. Этот метод оправдывает себя хотя бы тем, что число максимальных графов гораздо меньше числа всех графов с искомыми свойствами. Пользуясь этим методом, нам удастся получить все n -вершинные графы без треугольников, $n \leq 10$, с минимальным и почти минимальным числом 4-антиклик. Как следствия будут получены равенства (3), (4) и соответствующие экстремальные графы.

СБОЗНАЧЕНИЯ

- $V(G)$ — множество вершин графа G ;
- $E(G)$ — множество ребер графа G ;
- $G-v$ — подграф графа G , получающийся удалением его вершины v ;
- $G-[v_1, v_2]$ — подграф графа G , получающийся удалением его ребра $[v_1, v_2]$;
- $G+[v_1, v_2]$ — надграф графа G , получающийся добавлением нового ребра $[v_1, v_2]$;

$A(v)$, $v \in V(G)$ — множество всех вершин, смежных вершине v ;
 $d(v)$ — число вершин, смежных вершине v , т. е. $d(v) = |A(v)|$;
 $f_p(G)$ — число p -антиклик графа G ;
 $f_p(n)$ — см. определение 2.

МАКСИМАЛЬНЫЕ ГРАФЫ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

О п р е д е л е н и е 3. Будем говорить, что вершина v графа G является свободной вершиной, если существует $v' \in V(G)$, которая несмежна v и граф $G + [v, v']$ не имеет других треугольников, кроме треугольников графа G .

О п р е д е л е н и е 4. Будем говорить, что граф G является максимальным графом, если множество его свободных вершин пусто, т. е. если добавление нового ребра приводит к появлению нового треугольника.

В дальнейшем важную роль будут играть следующие предложения:

П р е д л о ж е н и е 1. Пусть G — максимальный граф и $v_0 \in V(G)$. Тогда вершина v_0 смежна всем свободным вершинам подграфа $G - v_0$.

Доказательство. Предположим, что вершина v_0 несмежна вершине v' и что она является свободной вершиной подграфа $G - v_0$. Тогда существует вершина v'' подграфа $G - v_0$, которая несмежна вершине v' и такая, что добавление к $G - v_0$ ребра $[v', v'']$ не приводит к появлению нового треугольника подграфа $G - v_0$. Ясно, что в графе $G + [v', v'']$ тоже не появляется новый треугольник. Это противоречит максимальнойности графа G .

П р е д л о ж е н и е 2. Пусть G — максимальный граф и его вершина v_0 не является вершиной никакого треугольника. Тогда множество свободных вершин подграфа $G - v_0$ является антикликой, т. е. любые две свободные вершины этого подграфа несмежны.

Предложение 2 очевидным образом вытекает из предложения 1.

Нам будет нужна следующая:

Т е о р е м а А [1]. Пусть G — 7-вершинный граф без треугольников и без 4-антиклик. Тогда граф G изоморфен одному из графов на рис. 1.

О 8-ВЕРШИННЫХ ГРАФАХ БЕЗ ТРЕУГОЛЬНИКОВ И БЕЗ 4-АНТИКЛИК

В этом пункте дадим новое доказательство следующей теоремы:

Т е о р е м а В [13]. Пусть G — 8-вершинный граф без треугольников и без 4-антиклик. Тогда он изоморфен одному из графов на рис. 2.

Доказательство. Предположим сначала, что граф G является максимальным графом без треугольников и без 4-антиклик и пусть $v_0 \in V(G)$. Согласно теореме А, подграф $G - v_0$ совпадает с одним из графов на рис. 1. Согласно предложению 2, множество свободных вершин подграфа $G - v_0$ является антикликой. Из этого вытекает, что $G - v_0$ совпадает либо с графом на рис. 1, и, либо с графом на рис. 1, з. Из того, что нет треугольников, следует, что $A(v)$ является антикликой для любой вершины $v \in V(G)$. Это означает, что $d(v) \leq 3$ для любой вершины $v \in V(G)$ (иначе будет 4-антиклика) и, следовательно, подграф $G - v_0$ различен от графа на рис. 1, и. Итак, мы показали, что $G - v_0$ совпадает с графом на рис. 1, з. Согласно предложению 1, вершина v_0 смежна вершинам 3 и 6 графа на рис. 1, з. Так как нет треугольников, то вершина v_0 несмежна вершинам 1, 2, 4, 7. Из максимальнойности графа

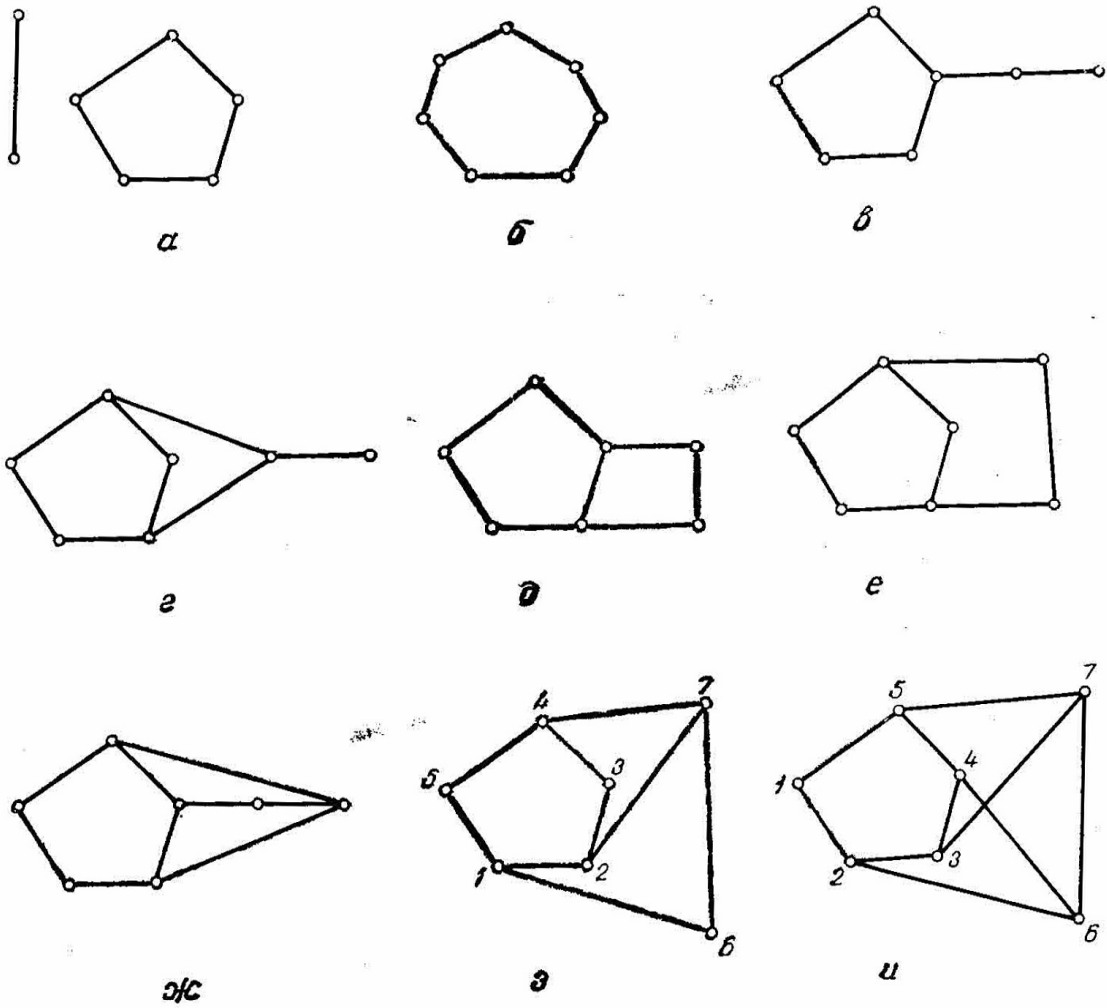


Рис. 1

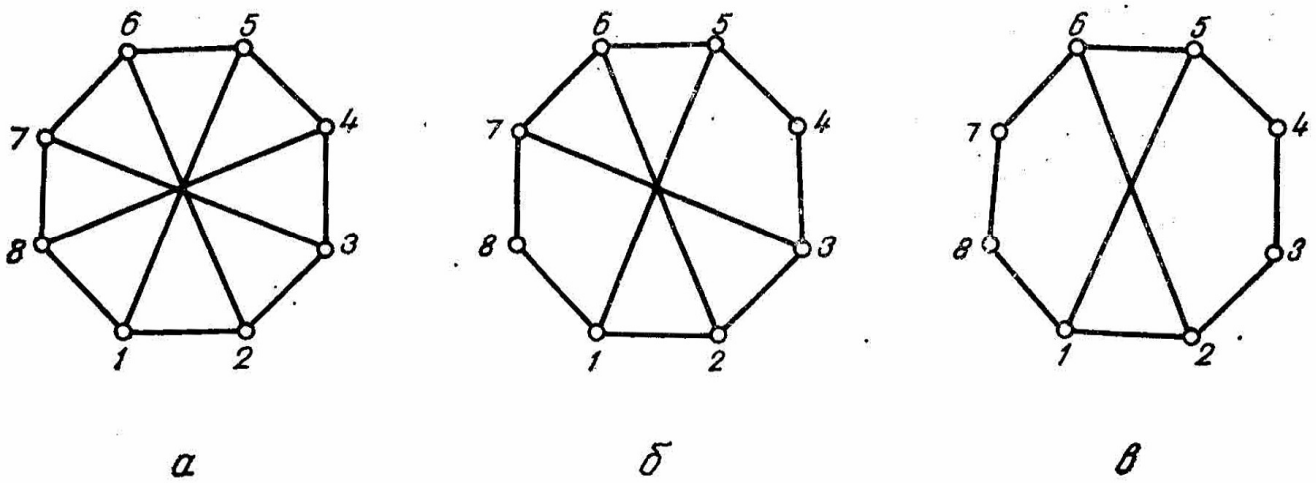


Рис. 2

фа G следует, что вершина v_0 смежна вершине 5. Неутрудно убедиться в том, что полученный таким образом граф изоморфен графу на рис. 2, *a*.

Итак, мы доказали, что существует единственный максимальный 8-вершинный граф без треугольников, который не содержит 4-антиклик, а именно граф на рис. 2, *a*. Так как любой граф без треугольников и без 4-антиклик содержится в максимальном графе этого же типа, то любой 8-вершинный граф без треугольников и без 4-антиклик является подграфом графа на рис. 2, *a*. Удаление произвольного ребра цикла 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 1 графа на рис. 2, *a* приводит к появлению 4-антиклики. Поэтому любой 8-вершинный граф без треугольников и без 4-антиклик содержит все ребра этого цикла. Из этого следует, что если 8-вершинный граф рассматриваемого типа различен от графа на рис. 2, *a*, тогда он изоморфен некоторому подграфу графа на рис. 2, *b*. Нетрудно убедиться в том, что все собственные подграфы графа на рис. 2, *b*, которые не имеют 4-антиклик, изоморфны графу на рис. 2, *v*. Теорема В доказана.

О 8-ВЕРШИННЫХ ГРАФАХ БЕЗ ТРЕУГОЛЬНИКОВ, ИМЕЮЩИХ РОВНО ОДНУ 4-АНТИКЛИКУ

Т е о р е м а 1. Пусть G — максимальный 8-вершинный граф без треугольников, множество 4-антиклик которого имеет непустое пересечение. Тогда граф G изоморфен одному из графов на рис. 3.

Доказательство. Пусть вершина $v_0 \in V(G)$ принадлежит всем 4-антикликам графа G . Тогда подграф $G - v_0$ не содержит 4-антиклик. Согласно теореме А, подграф $G - v_0$ совпадает с одним из графов на рис. 1. Из предложения 2 вытекает, что граф $G - v_0$ совпадает с одним из графов на рис. 1, *з* и 1, *и*.

Допустим, что $G - v_0$ совпадает с графом на рис. 1, *з*. Согласно предложению 1, вершина v_0 смежна вершинам 3 и 6. Из максимальнойности графа G следует, что вершина v_0 смежна еще вершине 5. Полученный таким образом граф не имеет 4-антиклик, что является противоречием.

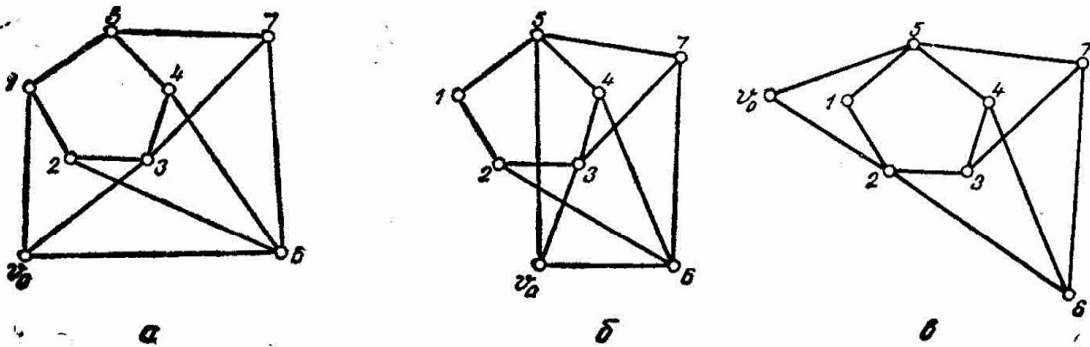


Рис. 3

Итак, подграф $G - v_0$ совпадает с графом на рис. 1, *и*. Возможны две ситуации: либо v_0 смежна хотя бы одной из вершин 3, 4, 6, 7 (они все равноправны), либо $A(v_0) = \{2, 5\}$. В этом случае граф G совпадает с графом на рис. 3, *v*. Теперь предположим, что вершина v_0 смежна хотя бы одной из

вершин 3, 4, 6, 7. Из-за равноправности этих вершин можно предположить, что v_0 и 6 смежны. Из максимальности графа G и того, что $A(3)=A(6)$, следует также смежность вершин v_0 и 3. Так как нет треугольников, то либо $A(v_0)=\{1, 3, 6\}$, либо $A(v_0)=\{3, 5, 6\}$. В первом случае граф G совпадает с графом на рис. 3, а, а во втором — с графом на рис. 3, б.

Теорема 1 доказана.

С л е д с т в и е 1. Если 8-вершинный граф без треугольников максимален и содержит ровно одну 4-антиклику, тогда он изоморфен графу на рис. 4, а.

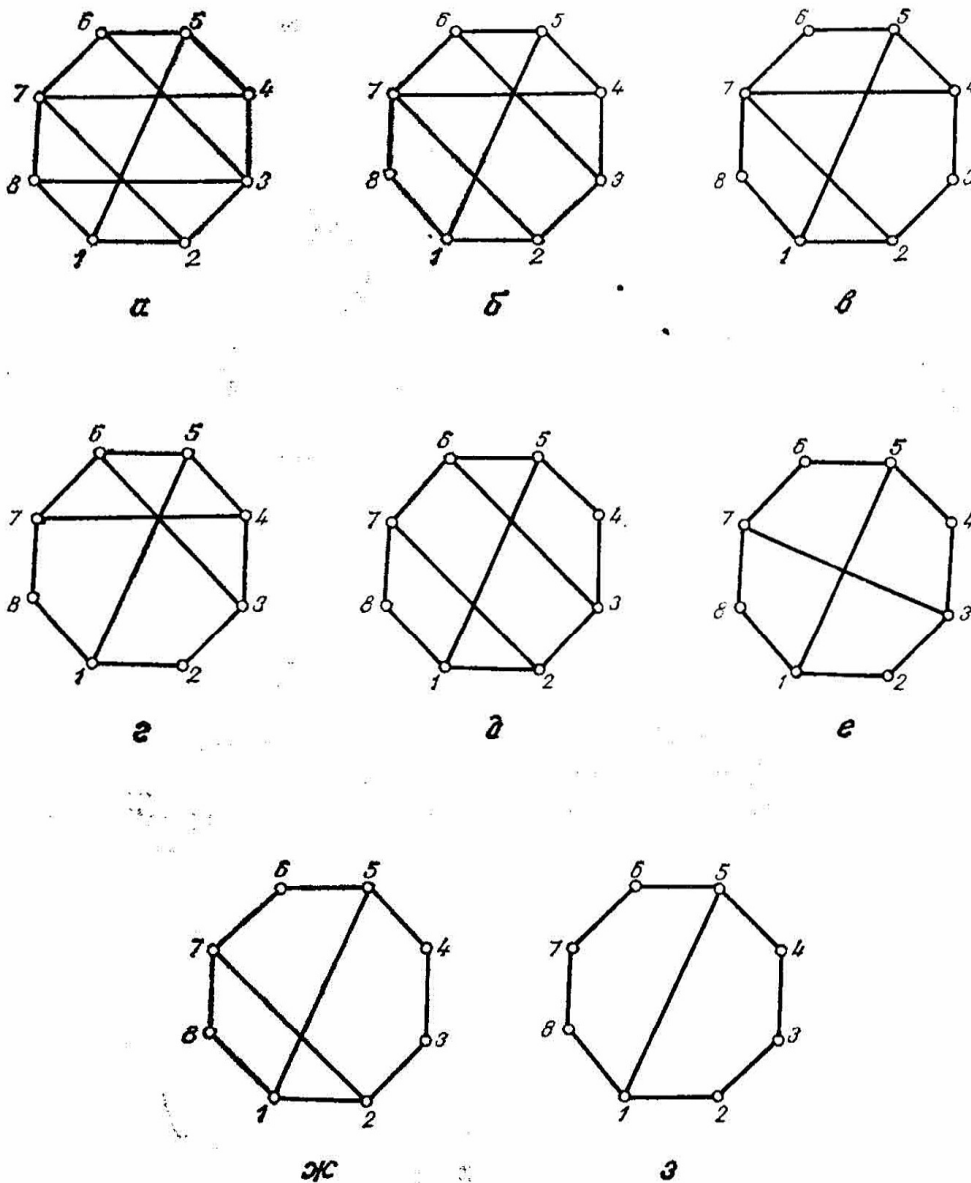


Рис. 4

Доказательство. Согласно теореме 1, граф G изоморфен одному из графов на рис. 3. Графы на рис. 3, б и 3 в имеют две 4-антиклики. Следовательно, граф G изоморфен графу на рис. 3, а. Остается показать, что граф

на рис. 3, *a* изоморфен графу на рис. 4, *a*. Искомый изоморфизм задается следующим соответствием:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & v_0 \\ 1 & 8 & 7 & 6 & 5 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix},$$

где в первой строке находятся вершины графа на рис. 3, *a*, а во второй — вершины графа на рис. 4, *a*.

Следствие 1 доказано.

Т е о р е м а 2. Пусть G — 8-вершинный граф без треугольников, который имеет единственную 4-антиклику. Тогда граф G изоморфен одному из графов на рис. 4.

Доказательство. Ясно, что граф G является подграфом максимального 8-вершинного графа без треугольников, который либо не содержит 4-антиклик, либо имеет единственную 4-антиклику. Согласно теореме В и следствию 1, граф G является подграфом либо графа на рис. 2 *a*, либо графа на рис. 4, *a*.

Случай 1. Граф G является подграфом графа на рис. 4, *a*. Заметим, что $E(G)$ содержит непременно следующие ребра: $[1, 2]$, $[1, 8]$, $[4, 5]$, $[5, 6]$ и $[1, 5]$ (иначе появляется вторая 4-антиклика). Граф на рис. 4, *a* обозначим через Γ . Из сделанных замечаний вытекает, что $E(G) \cong E(\Gamma) \setminus E'$, где E' — множество всех ребер графа Γ , содержащих одну из вершин 3, 7. Очевидно следующие подстановки вершин графа Γ :

$$\sigma_1 = (1) (2) (3) (4, 6) (5) (7) (8),$$

$$\sigma_2 = (1) (2, 8) (3) (4) (5) (6) (7),$$

$$\sigma_3 = (1, 5) (2, 4) (3) (6, 8) (7),$$

$$\sigma_4 = (1) (2) (3, 7) (4) (5) (6) (8),$$

являются автоморфизмами графа Γ (рис. 4, *a*). Эти автоморфизмы показывают, что группа автоморфизмов графа Γ действует транзитивно на множество всех ребер E' , содержащих вершины 3 и 7. Это означает, что подграфы $\Gamma - e$, $e \in E'$ изоморфны. Поэтому, если G является собственным подграфом графа Γ , тогда можно считать, что G является подграфом графа $\Gamma_1 = \Gamma - [3, 8]$ (рис. 4, *b*). В этом случае $E(G)$, кроме ребер множества $E(\Gamma) \setminus E'$, содержит непременно и ребра $[2, 3]$, $[7, 8]$ (иначе появляется вторая 4-антиклика). Удалением единственного ребра графа Γ_1 можно получить только следующие подграфы искомого типа: $\Gamma_1 - [3, 6]$, $\Gamma_1 - [3, 4]$, $\Gamma_1 - [4, 7]$, $\Gamma_1 - [6, 7]$, $\Gamma_1 - [2, 7]$. Подстановка σ_1 показывает, что графы $\Gamma_1 - [3, 4]$ и $\Gamma_1 - [3, 6]$ изоморфны. Та же подстановка σ_1 задает изоморфизм и между графами $\Gamma_1 - [6, 7]$ и $\Gamma_1 - [4, 7]$.

Итак, если $G \neq \Gamma$ и $G \neq \Gamma_1$, тогда можно считать, что граф G изоморфен некоторому подграфу одного из графов $\Gamma_1 - [3, 6]$ (рис. 4, *b*), $\Gamma_1 - [2, 7]$ (рис. 4, *z*), $\Gamma_1 - [4, 7]$ (рис. 4, *d*). Удаление одного ребра последних графов приводит либо к подграфу с двумя 4-антиклинами, либо к подграфу, очевидно изоморфному графу на рис. 4, *ж*. Граф на рис. 4, *ж* имеет единственный подграф искомого типа, а именно граф на рис. 4, *z*.

Случай 2. Граф G является подграфом графа на рис. 2, *a*. Обозначим граф на рис. 2, *a* через F . Соответствие

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 6 & 7 & 8 & 1 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

задает изоморфизм между графом $F = [1, 2]$ и графом на рис. 4, д (в первой строке стоят вершины графа $F = [1, 2]$). Следовательно, удалением произвольного ребра цикла 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 1 графа F приводит к подграфу, изоморфному графу на рис. 4, д. Поэтому можно считать, что $E(G)$ содержит все ребра этого цикла. Так как F не содержит 4-антиклик, то граф G является его собственным подграфом. Из-за симметрии можно предположить, что граф G является подграфом графа $F_1 = [3, 8]$ (рис. 2, б). Сам граф F_1 тоже не содержит 4-антиклик, и поэтому G является его собственным подграфом. Из этого легко следует, что граф G изоморфен графу на рис. 4, е, либо графу на рис. 4, з.

Теорема 2 доказана.

О МАКСИМАЛЬНЫХ 9-ВЕРШИННЫХ ГРАФАХ БЕЗ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Т е о р е м а 3. Пусть G — 9-вершинный максимальный граф без треугольников, который имеет вершину v_0 , такую, что подграф $G - v_0$ не содержит 4-антиклик. Тогда граф G изоморфен либо графу на рис. 5, а, либо графу на рис. 5, в.

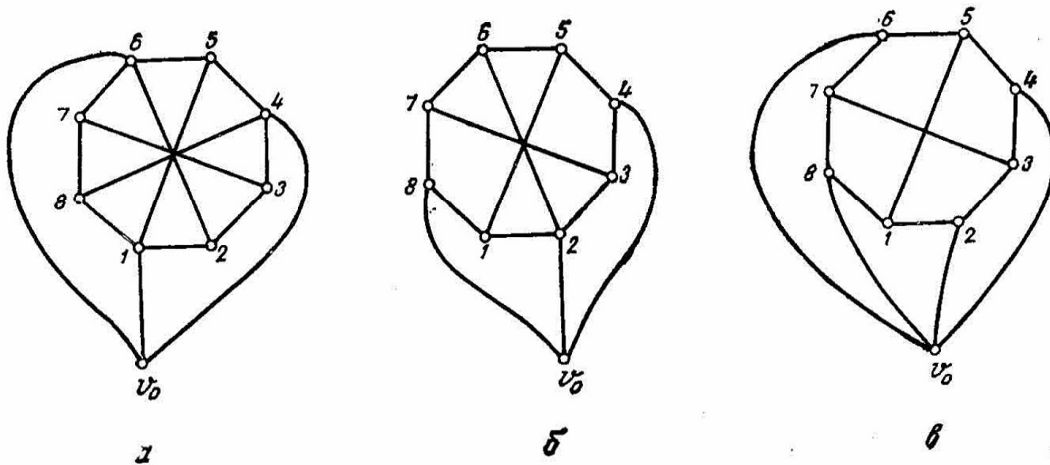


Рис. 5

Доказательство. Согласно теореме В, подграф $G - v_0$ изоморфен одному из графов на рис. 2. Согласно предложению 2, свободные вершины подграфа $G - v_0$ составляют антиклику. Из этого вытекает, что $G - v_0$ совпадает либо с графом на рис. 2, а, либо с графом на рис. 2, б.

Случай 1. Подграф $G - v_0$ совпадает с графом на рис. 2, а. Без ограничения общности можно предположить, что вершина v_0 смежна вершине 1. Из того, что нет треугольников, следует, что v_0 несмежна вершинам 2, 5 и 8. Поэтому $A(v_0)$ совпадает с одним из следующих множеств: $\{1, 3, 6\}$, $\{1, 4, 6\}$, $\{1, 4, 7\}$. Любое из этих множеств можно получить из другого подходящим поворотом вокруг центра восьмиугольника на рис. 2, а. Следовательно, в этом случае граф G изоморфен графу на рис. 5, а.

Случай 2. Подграф $G-v_0$ совпадает с графом на рис. 2, б. Согласно предложению 1, вершина v_0 смежна вершинам 4 и 8. Из того, что нет треугольников, вытекает, что v_0 несмежна вершинам 1, 3, 5, 7. Следовательно, либо $A(v_0) = \{2, 4, 8\}$, либо $A(v_0) = \{4, 6, 8\}$. В том и в другом случае получается граф, который изоморфен графу на рис. 5, б.

Для окончательного завершения доказательства теоремы 3 остается показать, что граф на рис. 5, б изоморфен графу на рис. 5, в. Искомый изоморфизм задается следующим соответствием:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & v_0 \\ 8 & v_0 & 4 & 3 & 7 & 6 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

где в первой строке стоят вершины графа на рис. 5, б.

С л е д с т в и е 2 [11]. Любой 9-вершинный граф без треугольников имеет хотя бы одну 4-антиклику.

Доказательство. Пусть граф G не имеет треугольников. Допустим, что он не имеет тоже 4-антиклик. Ясно, что граф G содержится в максимальном графе, удовлетворяющем условиям теоремы 3. Следовательно, граф G содержится в одном из графов на рис. 5, а и 5, в. Последние графы, однако, имеют 4-антиклики, что является противоречием.

С л е д с т в и е 3 [2, 3]. Пусть G — 9-вершинный граф без треугольников, который имеет ровно одну 4-антиклику. Тогда граф G изоморфен графу на рис. 5, в.

Доказательство. Согласно теореме 3, граф G является подграфом одного из графов на рисунках 5, а и 5, в. Граф на рисунке 5, а имеет три 4-антиклики, а именно: $[v_0, 2, 5, 8]$, $[v_0, 2, 7, 5]$, $[v_0, 3, 5, 8]$. Следовательно, граф G является подграфом графа на рис. 5, в. Любой собственный подграф графа на рис. 5, в имеет хотя бы две 4-антиклики. Поэтому граф G совпадает с графом на рис. 5, в.

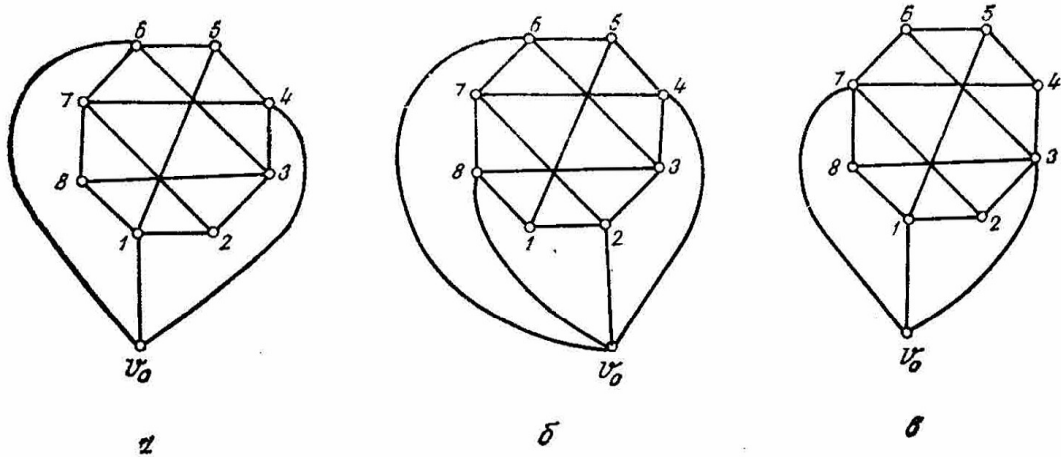


Рис. 6

Т е о р е м а 4. Пусть G — максимальный 9-вершинный граф, все 4-антиклики которого имеют пустое пересечение. Пусть еще существует вершина $v_0 \in V(G)$, такая, что $G-v_0$ содержит ровно одну 4-антиклику. Тогда граф G изоморфен одному из графов на рис. 6.

Доказательство. Так как граф $G-v_0$ содержит единственную 4-антиклику, то, согласно тереме 2, подграф $G-v_0$ совпадает с одним из графов на рис. 4, а согласно предложению 2, множество свободных вершин графа $G-v_0$ является антикликой. Из этого вытекает, что $G-v_0$ совпадает с одним из графов на рис. 4, а, 4, б, 4, в, 4, е.

Допустим, что подграф $G-v_0$ совпадает с графом на рис. 4, е. Согласно предложению 1 вершина v_0 смежна вершинам 2, 4, 6 и 8. В полученном максимальном графе имеется единственная 4-антиклика. Это означает, что 4-антиклики этого графа имеют непустое пересечение, что является противоречием.

Покажем, что $G-v_0$ не может совпадать с графом на рис. 4, в. Допустим противное. Согласно предложению 1, вершина v_0 смежна вершинам 3, 6 и 8. Из того, что нет треугольников, вытекает, что $A(v_0) = \{3, 6, 8\}$. Полученный граф имеет единственную 4-антиклику и, следовательно, не удовлетворяет условиям теоремы.

Допустим теперь, что $G-v_0$ совпадает с графом на рис. 4, б. Согласно предложению 1, вершина v_0 смежна вершинам 3 и 8. Из того, что нет треугольников, вытекает, что v_0 несмежна вершинам 1, 2, 4, 6 и 7. Следовательно, $A(v_0) = \{3, 5, 8\}$. В полученном графе все 4-антиклики имеют общую вершину (например 4), что является противоречием.

Итак, подграф $G-v_0$ должен совпадать с графом на рис. 4, а. Рассмотрим три случая:

Случай 1. Вершина v_0 смежна одной из вершин 3 и 7. Из того, что нет треугольников, получаем, что v_0 несмежна вершинам 2, 4, 6, 8. Из этого вытекает, что либо $A(v_0) = \{1, 3, 7\}$, либо $A(v_0) = \{3, 5, 7\}$ и, значит, граф G изоморфен графу на рис. 6, в.

Случай 2. Вершина v_0 несмежна вершинам 3 и 7, однако смежна одной из вершин 1 и 5. Без ограничения общности можно предположить, что v_0 смежна вершине 1. Ясно, что в этом случае $A(v_0) = \{1, 4, 6\}$ и граф G изоморфен графу на рис. 6, а.

Случай 3. Вершина v_0 несмежна вершинам 1, 3, 5, 7. Из максимальнойности графа G следует, что v_0 смежна вершинам 2, 4, 6 и 8. Следовательно, граф G изоморфен графу на рис. 6, б.

Теорема 4 доказана.

С л е д с т в и е 4 [2, 3]. Пусть G — 9-вершинный граф без треугольников, который имеет ровно две 4-антиклики. Тогда граф G определен однозначно, и его можно получить от графа на рис. 6, в удалением одного из ребер $[2, v_0]$, $[4, v_0]$, $[6, v_0]$, $[8, v_0]$.

Доказательство. Ясно, что граф G содержится в максимальном графе, удовлетворяющем условиям одной из теорем 3 и 4. Следовательно, граф G является подграфом одного из графов на рис. 5 и рис. 6. Графы на рисунках 5, а, 6, а, 6, б и 6, в имеют больше двух 4-антиклик. Следовательно, граф G является подграфом графа на рис. 5, в. Удаление любого ребра этого графа, не содержащего вершину v_0 , приводит к появлению больше двух 4-антиклик. Удаление двух ребер, содержащих вершину v_0 , тоже приводит к появлению больше двух 4-антиклик.

Следствие 4 доказано.

Т е о р е м а 5. Пусть G — 9-вершинный максимальный граф без треугольников, содержащий не более трех 4-антиклик. Тогда он изоморфен некоторому подграфу одного из графов на рис. 5, а, 5, в, 6, а, 6, б.

Доказательство. Ясно, что в любом случае граф G удовлетворяет условиям одной из теорем 3 и 4. Следовательно, граф G совпадает с одним из графов на рис. 5 и 6. Как было доказано, графы на рис. 5, б и 5, в изоморфны, а граф на рис. 6, в имеет больше трех 4-антиклик и поэтому не изоморфен графу G . Этим теорема 5 доказана.

О 9-ВЕРШИННЫХ ГРАФАХ БЕЗ ТРЕУГОЛЬНИКОВ С ТРЕМЯ 4-АНТИКЛИКАМИ

Теорема 6. Пусть — 9-вершинный граф без треугольников, который имеет ровно три 4-антиклики и все эти 4-антиклики имеют общую вершину. Тогда граф G изоморфен одному из графов на рис. 7.

Доказательство. Ясно, что граф G является подграфом максимального 9-вершинного графа без треугольников, все 4-антиклики которого имеют общую вершину (напомним, что, согласно следствию 2, множество 4-антиклик непусто). Согласно теореме 3, граф G изоморфен одному из графов на рис. 5, а и 5 в.

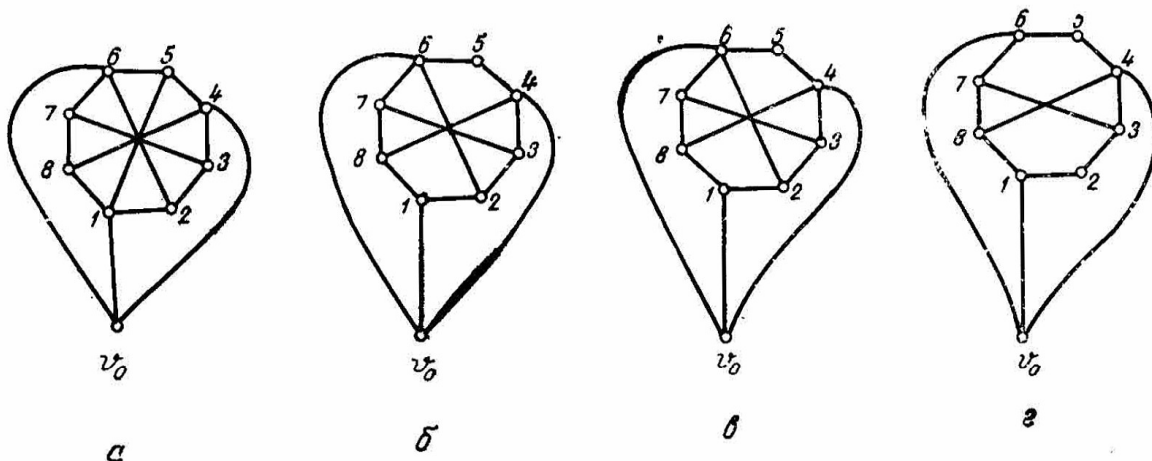


Рис. 7

Случай 1. Граф G изоморфен некоторому подграфу графа на рис. 5, а (или то же самое на рис. 7, а). Обозначим этот граф через Γ . Пусть $E' = \{[1, v_0], [1, 5], [2, 6], [4, 8]\}$. Если $e \notin E'$, тогда подграф $\Gamma - e$ содержит больше трех 4-антиклик. Поэтому $E(G)$ содержит все ребра множества $E(\Gamma) \setminus E'$.

Итак, мы доказали, что если $G \neq \Gamma$ (рис. 7, а), тогда он является подграфом одного из графов $\Gamma - [1, v_0]$, $\Gamma - [1, 5]$, $\Gamma - [2, 6]$, $\Gamma - [4, 8]$. Графы $\Gamma - [2, 6]$ и $\Gamma - [4, 8]$ очевидно изоморфны. Графы $\Gamma - [1, 5]$ и $\Gamma - [1, v_0]$ тоже изоморфны, так как вершины v_0 и 5 равноправны ($A(v_0) = A(5)$).

Этим мы доказали, что если граф $G \neq \Gamma$, тогда он изоморфен некоторому подграфу одного из графов $\Gamma - [1, 5]$ (рис. 7, в) и $\Gamma - [2, 6]$ (рис. 7, б).

Положим $\Gamma_1 = \Gamma - [2, 6]$. Предположим, что граф G является собственным подграфом графа Γ_1 . Удалением одного ребра от графа Γ_1 можно получить только следующие два подграфа с тремя 4-антикликами, а именно: $\Gamma_1 - [1, 5]$ и $\Gamma_1 - [1, v_0]$. Так как в графе Γ_1 вершины v_0 и 5 равноправны ($A(v_0) = A(5)$), то эти подграфы изоморфны. Следовательно, можно предположить, что граф G является подграфом графа на рис. 7, г. Так как любой

собственный подграф последнего графа имеет больше трех 4-антиклик, то граф G совпадает с графом на рис. 7, г.

Пусть $\Gamma_2 = \Gamma - [1, 5]$. Граф Γ_2 имеет два собственных подграфа с тремя 4-антикличками, а именно $\Gamma_2 - [4, 8]$ и $\Gamma_2 - [2, 6]$. Оба подграфа очевидно изоморфны графу на рис. 7, г. Поэтому, если G является подграфом графа Γ_2 , тогда он совпадает с одним из графов на рис. 7, в и 7, г.

Случай 2. Граф G изоморфен некоторому подграфу графа на рис. 5, в. Если от графа на рис. 5, в удалить ребро цикла 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 1 (например, $[1, 2]$), то получается подграф, который изоморфен графу на рис. 7, г. Изоморфизмом между этими графами является соответствие

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & v_0 \\ 2 & 5 & 6 & v_0 & 1 & 8 & 7 & 3 & 4 \end{pmatrix},$$

где во второй строке стоят вершины графа на рис. 7, г. Следовательно, достаточно рассмотреть ситуацию, когда $E(G)$ содержит все ребра этого цикла. Если от графа на рис. 5, в удалить одно из ребер $[1, 5]$, $[3, 7]$, получается подграф, все 4-антиклики которого имеют пустое пересечение. Поэтому можно считать, что $E(G)$ содержит еще ребра $[1, 5]$ и $[3, 7]$.

Остается рассмотреть подграфы графа на рис. 5, в, которые получаются от графа на рис. 5, в удалением ребер, содержащих вершину v_0 . Однако в полученных подграфах либо число 4-антиклик не равно 3, либо полученные подграфы таковы, что их 4-антиклики имеют пустое пересечение.

Теорема 6 доказана.

Т е о р е м а 7. Пусть 9-вершинный граф G без треугольников имеет ровно три 4-антиклики, которые не имеют общей вершины. Пусть еще любые две 4-антиклики пересекаются. Тогда граф G изоморфен графу на рис. 8.

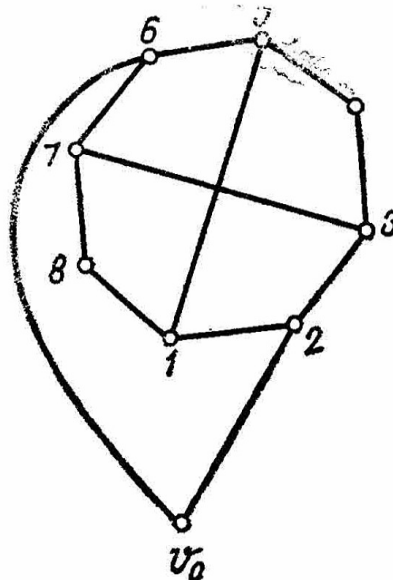


Рис. 8

Доказательство. Граф G является подграфом некоторого максимального графа без треугольников, имеющего не более трех 4-антиклик. Согласно теореме 5, граф G является подграфом одного из графов на рис. 5, а, 5, в,

6, а и 6, б. Граф на рис. 5, а имеет три 4-антиклики с непустым пересечением, а графы на рис. 6, а и 6, б имеют две 4-антиклики без общих вершин. Следовательно, граф G не является подграфом этих графов.

Итак, мы доказали, что граф G является подграфом графа на рис. 5, в. Если от этого графа удалить ребро цикла 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 1, тогда получается подграф, который имеет три 4-антиклики с непустым пересечением. Следовательно, $E(G)$ содержит все ребра этого цикла. Если из графа на рис. 5, в удалить одно из ребер $[1, 5]$, $[3, 7]$, тогда получается подграф, который имеет две 4-антиклики без общих вершин. Следовательно, $E(G)$ содержит еще и ребра $[1, 5]$, $[3, 7]$.

Этим мы показали, что граф G получается от графа на рис. 5, в удалением ребер, содержащих вершину v_0 . Граф на рис. 5, в имеет только одну 4-антиклику. Поэтому G является собственным подграфом этого графа. Из-за симметрии можно предположить, что $[4, v_0] \notin E(G)$. Подграф графа на рис. 5, в, который получается после удаления ребра $[4, v_0]$, имеет две 4-антиклики. Поэтому G является собственным подграфом этого графа. Удаление еще одного из ребер $[2, v_0]$ и $[6, v_0]$ приводит к появлению больше трех 4-антиклик. Следовательно, граф G изоморфен графу на рис. 8.

Теорема 7 доказана.

Теорема 8. Пусть 9-вершинный граф не имеет треугольников и имеет ровно три 4-антиклики. Пусть две из его 4-антиклик не имеют общих вершин, однако третья 4-антиклика пересекается с любой из первых двух 4-антиклик. Тогда граф G изоморфен одному из графов на рис. 9.

Доказательство. Ясно, что граф G содержится в максимальном 9-вершинном графе без треугольников, имеющем не более трех 4-антиклик. Согласно теореме 5, граф G является подграфом одного из графов на рис. 5, а, 5, в, 6, а и 6, б.

Граф на рис. 5, а имеет три 4-антиклики с непустым пересечением, а граф на рис. 6, б имеет 4-антиклику $[2, 4, 6, 8]$, которая не пересекается с остальными двумя его 4-антиклями. Следовательно, граф G не является подграфом этих графов.

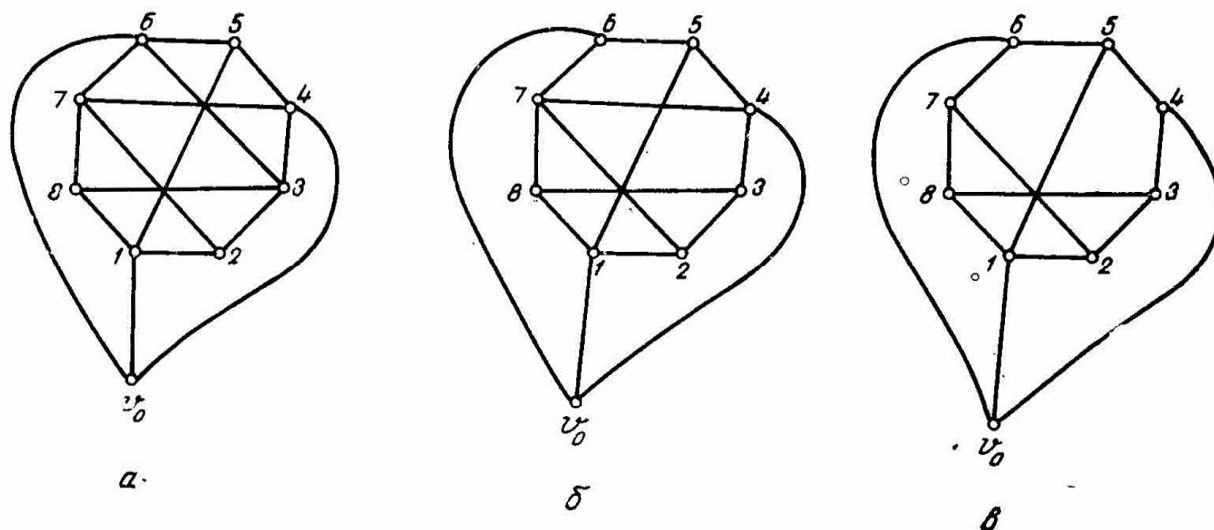


Рис. 9

Покажем теперь, что граф G не является подграфом графа на рис. 5, в. Допустим противное. Тогда $E(G)$ содержит все ребра цикла 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 1 (иначе получается подграф, который либо имеет три 4-антиклики с непустым пересечением, либо имеет больше трех 4-антиклик). Удаление одного из ребер [1, 5], [3, 7] приводит к подграфу с тремя 4-антиклями, которые не удовлетворяют условиям теоремы (4-антиклика [2, 4, 6, 8] не пересекается с остальными двумя). Удаляя ребра графа на рис. 5, в, которые содержат вершину v_0 , получаем подграфы, число 4-антиклик которых не равно 3, либо получаем подграфы, любые две 4-антиклики которых пересекаются.

Итак, граф G является подграфом графа на рис. 6, а (или то же самое на рис. 9, а). Обозначим этот граф через Γ и положим $E' = \{[3, 4], [3, 6], [4, 7], [6, 7]\}$. Подстановки

$$\begin{aligned} (1) \quad & (2, 8) \quad (3, 7) \quad (4, 6) \quad (5) \quad (v_0) \\ (1) \quad & (2) \quad (3) \quad (4, 6) \quad (5) \quad (7) \quad (8) \quad (v_0) \end{aligned}$$

являются автоморфизмами графа Γ . Следовательно, группа автоморфизмов графа Γ действует транзитивно на множестве ребер E' . Если $e \in E'$, тогда $\Gamma - e$

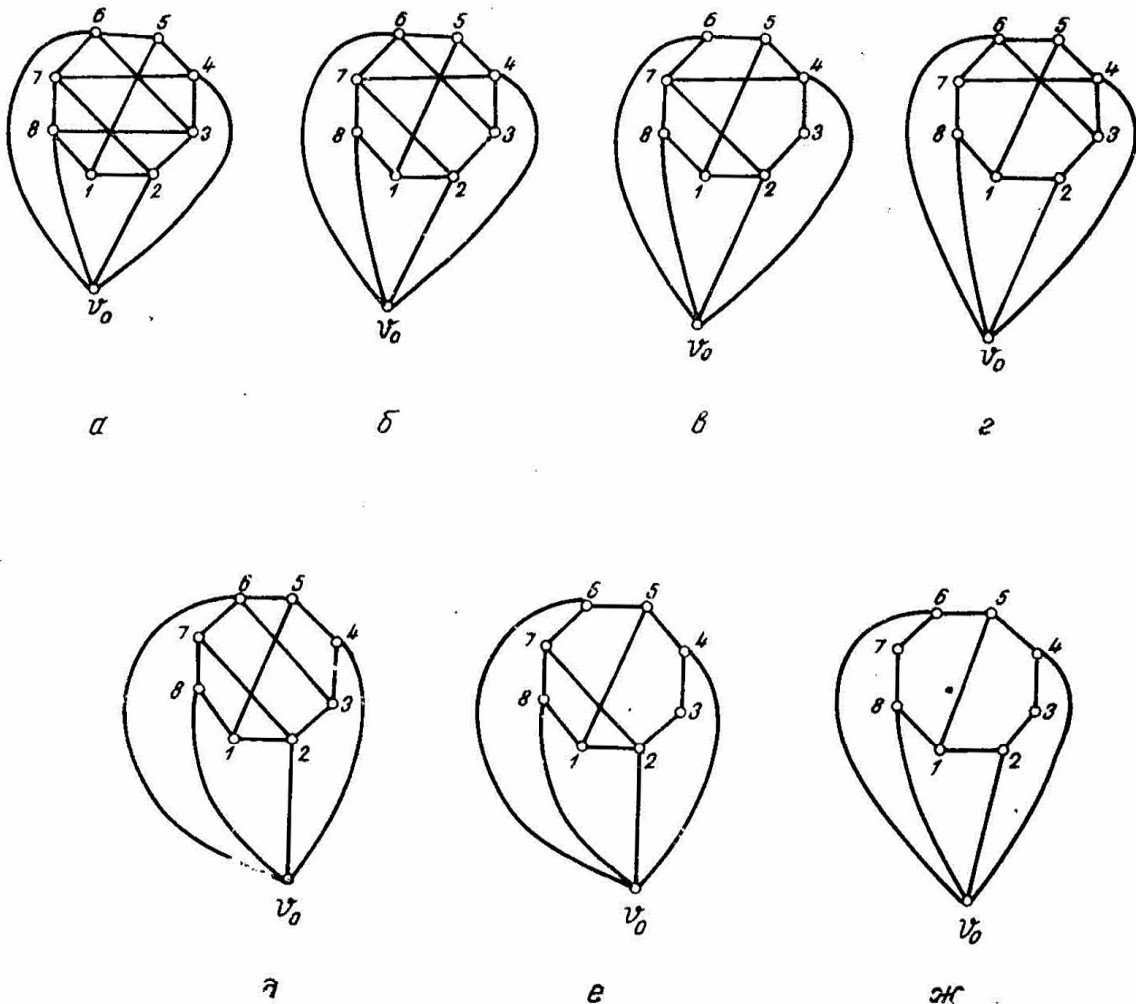


Рис. 10

содержит больше трех 4-антиклик. Следовательно, если предположить, что граф G является собственным подграфом графа Γ (рис. 9, а), тогда он является подграфом одного из графов $\Gamma - e$, $e \in E'$. Согласно сделанным выше замечаниям, графы $\Gamma - e$, $e \in E'$, изоморфны. Следовательно, можно предположить,

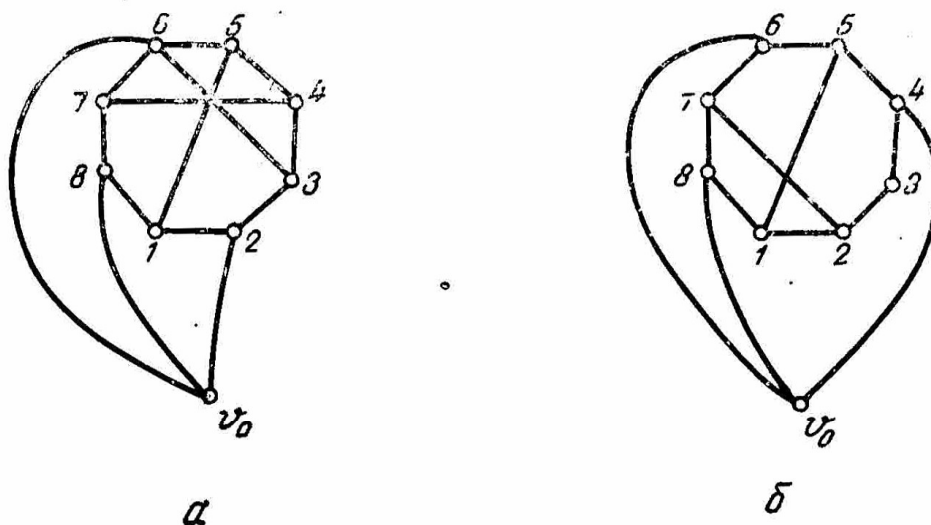


Рис. 11

что граф G является подграфом графа $\Gamma_1 = \Gamma - [3, 6]$ (рис. 9, б). Граф Γ_1 содержит единственный подграф с тремя 4-антиклями, а именно $\Gamma_1 - [4, 7]$ (рис. 9, в).

Теорема 8 доказана.

Теорема 9. Пусть G — 9-вершинный граф без треугольников, который имеет ровно три 4-антиклики. Пусть еще одна из этих 4-антиклик не пересекается с любой из остальных двух. Тогда граф G изоморфен одному из графов на рис. 10 и 11.

Доказательство. Очевидно граф G является подграфом максимального 9-вершинного графа без треугольников, имеющего не более трех 4-антиклик. Согласно теореме 5, можно считать, что граф G является подграфом одного из графов на рисунках 5, а, 5, в, 6, а, 6, б. Графы на рисунках 5, а и 6, б имеют три 4-антиклики, которые не удовлетворяют условиям теоремы 9. Следовательно, граф G является подграфом одного из графов на рис. 5, в и 6, б. Рассмотрим два случая:

Случай 1. Граф G является подграфом графа на рис. 5, в. Удаление любого ребра цикла 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 1 этого графа приводит к появлению трех 4-антиклик с непустым пересечением. Поэтому можно считать, что $E(G)$ содержит все ребра этого цикла. После удаления одного ребра, содержащего вершину v_0 графа на рис. 5, в, получается подграф с двумя 4-антиклями. Удаление нового ребра от полученного подграфа приводит к подграфу, имеющему либо больше трех 4-антиклик, либо к подграфу с тремя 4-антиклями, любые две из которых пересекаются. Следовательно, G содержит все ребра графа на рис. 5, в, за исключением одного из ребер $[1, 5]$, $[3, 7]$. Это означает, что граф G изоморфен графу на рис. 10, ж.

Случай 2. Граф G является подграфом графа на рис. 6, б (см. и рис. 10, а). Обозначим этот граф через Γ . Сначала допустим, что $E(G)$ содер-

жит все ребра $[v_0, 2]$, $[v_0, 4]$, $[v_0, 6]$, $[v_0, 8]$. Заметим, что 4-антиклики графов G и Γ должны совпадать. Следовательно, $G-v_0$ является 8-вершинным графом без треугольников и с одной 4-антикликой. Согласно теореме 2, граф $G-v_0$ совпадает с одним из графов на рис. 4, т. е. граф G получается из графов на рис. 4. добавлением новой вершины v_0 , смежной вершинам 2, 4, 6 и 8 (напомним, что $A(v_0)$ является 4-антикликой). Заметим, что таким образом из графа на рис. 4, *e* получается граф с одной 4-антикликой. В остальных случаях получаются графы на рис. 10. Все из графов на рис. 10 удовлетворяют условиям теоремы.

Итак, если граф G содержит все ребра $[2, v_0]$, $[4, v_0]$, $[6, v_0]$, $[8, v_0]$ графа на рис. 10, *a*, тогда он изоморфен одному из графов на рис. 10.

Теперь заметим, что вершины 3, 7 и v_0 равноправны в графе Γ (рис. 10, *a*), так как $A(3) = A(7) = A(v_0)$. Поэтому все, что доказано для вершины v_0 , относится и к вершинам 3 и 7. Таким образом, мы доказали, что если граф G является таким подграфом графа Γ , что в нем некоторая из вершин 3, 7 и v_0 имеет степень 4, тогда граф Γ изоморфен одному из графов на рис. 10. Ясно тоже, что любой из остальных подграфов искомого типа графа Γ является собственным подграфом такого подграфа графа Γ , в котором одна из вершин 3, 7 и v_0 имеет степень 4, а остальные две имеют степени меньше 4. Без ограничения общности можно предположить, что именно v_0 имеет степень 4. Это означает, что граф G получается от графов на рис. 10, в которых вершины 3 и 7 имеют степени, меньше 4, удалением ребер, содержащих вершину v_0 . Следовательно, граф G получается от графов на рис. 10, *z*, 10, *d*, 10, *e*, 10, *ж* удалением ребер, содержащих вершину v_0 . Любой собственный подграф графа на рис. 10, *ж* имеет больше трех 4-антиклик. Поэтому возможны только следующие ситуации:

а) Граф G получается от графа на рис. 10, *z* удалением ребер, содержащих вершину v_0 . Удаление одного из ребер $[2, v_0]$, $[8, v_0]$ приводит к появлению больше трех 4-антиклик. Одновременное удаление ребер $[4, v_0]$ и $[6, v_0]$ тоже приводит к появлению больше трех 4-антиклик. Следовательно, в этой ситуации граф G получается из графа на рис. 10, *z* удалением одного из ребер $[4, v_0]$, $[6, v_0]$. Полученный таким образом граф G очевидно изоморфен графу на рис. 11, *a*.

б) Граф G получается от графа на рис. 10, *d* удалением ребер, содержащих вершину v_0 . Заметим, что все ребра, содержащие вершину v_0 в графе на рис. 10, *d*, равноправны. Поэтому без ограничения общности можно считать, что $E(G)$ не содержит $[2, v_0]$. Однако подграф, который получается от графа на рис. 10, *d* удалением его ребра $[2, v_0]$, изоморфен графу на рис. 11, *a*. Изоморфизм задается соответствием

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & v_0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & v_0 & 8 & 7 \end{pmatrix}.$$

Тем самым доказано, что в этой ситуации граф G изоморфен графу на рис. 11, *a*.

в) Граф G получается от графа на рис. 10, *e* удалением ребер, содержащих вершину v_0 . Удаление одного из ребер $[4, v_0]$, $[6, v_0]$, $[8, v_0]$ приводит к появлению больше трех 4-антиклик. Поэтому граф G получается из графа на рис. 10, *e* удалением ребра $[2, v_0]$ и изоморфен графу на рис. 11, *б*.

Теорема 10. Пусть G — 9-вершинный граф без треугольников, который имеет ровно три 4-антиклики. Тогда он изоморфен одному из графов на рис. 7, 8, 9, 10 и 11, между которыми нет изоморфных.

Доказательство. Ясно, что граф G удовлетворяет условиям одной из теорем 6, 7, 8 и 9. Из этого вытекает, что граф изоморфен одному из графов на рис. 7, 8, 9, 10 и 11. Остается доказать, что любые два из этих графов неизоморфны между собой. Неизоморфность графов, принадлежащих разным рисункам, вытекает из описания структуры этих графов условиях теорем 6, 7, 8 и 9. Поэтому остается доказать неизоморфность графов в рамках одного и того же рисунка. Только два из графов на рис. 7 имеют одинаковое число ребер, а именно $7, б$ и $7, в$. В графе $7, в$ единственная вершина степени 2 смежна двум вершинам степени 4, а в графе на рис. $7, г$ это не так. Поэтому эти два графа неизоморфны. Любые два графа на рис. 9 имеют различное количество ребер. Поэтому среди графов на рис. 9 нет изоморфных. Среди графов на рис. 10 только два имеют одинаковое количество ребер, а именно графы на рис. $10, г$ и $10, д$. В графе $10, г$ 4-антиклика $[2, 4, 6, 8]$ (которая не пересекается с остальными 4-антикличками) имеет две вершины степени 4, а в графе $10, д$ — только одну. Этим неизоморфность любых двух графов по рис. 10 доказана. Неизоморфность графов на рис. 11 очевидна.

Теорема 10 доказана.

О НЕКОТОРЫХ МАКСИМАЛЬНЫХ 10-ВЕРШИННЫХ ГРАФАХ БЕЗ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

В этой части будем пользоваться следующими двумя леммами:

Лемма 1 [5]. Пусть G — 10-вершинный граф без треугольников, который содержит 5-антиклику. Тогда $f_4(G) \geq 8$.

Лемма 2. Пусть G — 10-вершинный граф без треугольников, который не содержит 5-антиклик. Тогда $d(v) \leq 4$ для любой вершины $v \in V(G)$.

Лемма 2 очевидна, так как из того, что нет треугольников, следует, что $A(v)$ является антикликой для любой вершины $v \in V(G)$.

Нам будет нужно также и следующее равенство для n -вершинного графа G :

$$(7) \quad (n-4)f_4(G) = \sum \{f_4(G-v), v \in V(G)\}.$$

Равенство (7) вытекает из того, что любая 4-антиклика графа G в правой части учитывается $n-4$ раз.

Теорема 11. Пусть G — максимальный 10-вершинный граф без треугольников, который не содержит 5-антиклик. Допустим, что существует вершина $v' \in V(G)$, такая, что $f_4(G-v') \leq 2$. Тогда граф G изоморфен одному из графов на рис. 12.

Доказательство. Согласно следствиям 3 и 4, подграф $G-v'$ совпадает либо с графом на рис. $5, в$, либо получается из него удалением ребра $[v_0, 2]$. После удаления ребра $[v_0, 2]$ получается подграф, множество свободных вершин которого содержит смежные вершины 6 и v_0 . Из предложения 2 вытекает, что $G-v'$ не может совпадать с этим подграфом. Итак, мы доказали, что подграф $G-v'$ совпадает с графом на рис. $5, в$. Так как граф G не содержит 5-антиклик, то вершина v' смежна непременно одной из вершин $2, 4, 6, 8$. Без ограничения общности можно предположить, что вер-

шины v' и 2 смежны. Из того, что нет треугольников, следует, что вершина v' несмежна вершинам 1, 3, v_0 . Представляются следующие три возможности:
 Случай 1. Вершина v' несмежна другим вершинам 4-антиклики [2, 4, 6, 8]. В этом случае $A(v') = \{2, 5, 7\}$ и граф G совпадает с графом на рис. 12, а,

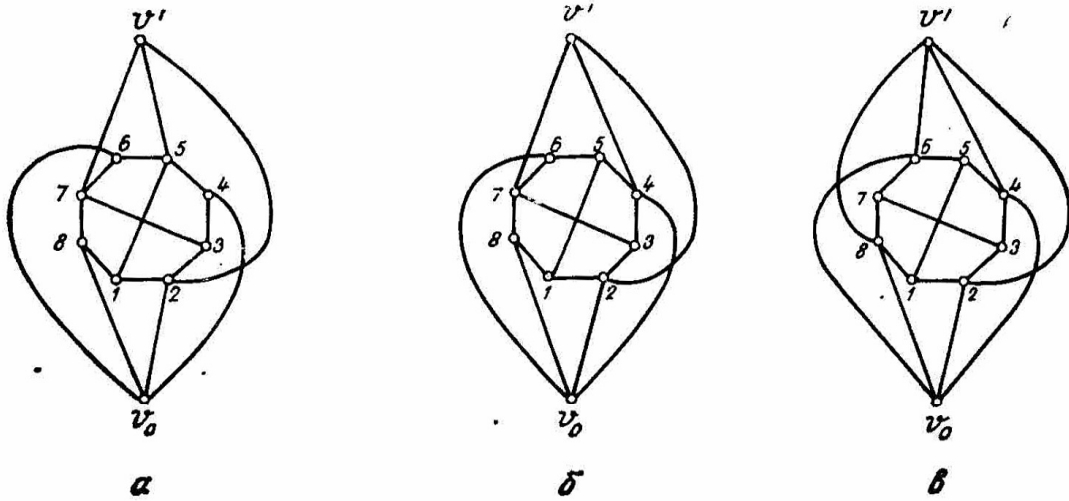


Рис. 12

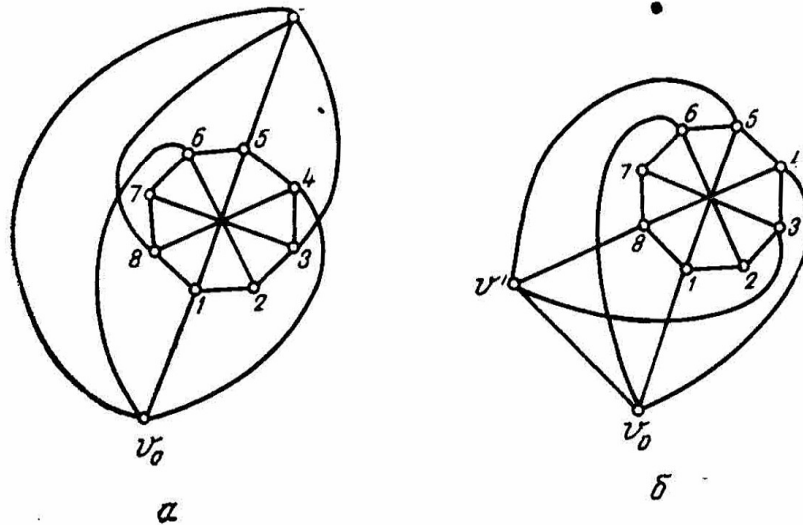


Рис. 13

Случай 2. Вершина v' смежна вершине 6. Из того, что нет треугольников, следует, что v' несмежна еще вершинам 5 и 7 (выше было показано, что v' несмежна вершинам v_0 , 1, 3). Из максимальности графа G следует, что $A(v') = \{2, 4, 6, 8\}$ и что граф G совпадает с графом на рис. 12, в.

Случай 3. Вершина v' несмежна вершине 6, однако смежна одной из вершин 4, 8. Из-за симметрии можно предположить, что v' смежна вершине 4. Из того, что нет треугольников, вытекает, что вершина v' , кроме как вершинам v_0 , 1, 3 и 6, несмежна еще вершине 5. Из максимальности графа G вытекает, что v' несмежна вершине 8 (v' и 6 несмежны). Следовательно, $A(v') = \{2, 4, 7\}$ и граф G изоморфен графу на рис. 12, б.

Теорема 11 доказана.

Теорема 12. Пусть G — максимальный 10-вершинный граф без треугольников и без 5-антиклик, в котором $f_4(G-v) \geq 3$ для любой вершины $v \in V(G)$. Допустим, что существует вершина $v' \in V(G)$, такая, что $f_4(G-v') = 3$ и все три 4-антиклики подграфа $G-v'$ имеют общую вершину. Тогда граф G совпадает с одним из графов на рис. 13.

Доказательство. Согласно теореме 6, подграф $G-v'$ изоморфен одному из графов на рис. 7. Согласно предложению 2, множество свободных вершин графа $G-v'$ является антикликой. Из этого вытекает, что $G-v'$ неизоморфен графу на рис. 7, г и, следовательно, представляются следующие возможности:

Случай 1. Подграф $G-v'$ совпадает с графом на рис. 7, а. Согласно лемме 2, вершина v' несмежна вершинам 1, 4 и 6. Из этого вытекает, что v' непременно смежна вершинам v_0 и 5 (иначе граф G не будет максимальным графом). Допустим теперь, что v' несмежна ни одной из вершин 3 и 7. Ясно, что в этом случае $A(v') = \{2, 5, 8, v_0\}$ и граф G совпадает с графом на рис. 13, а. Остается рассмотреть возможность, когда v' смежна одной из вершин 3 и 7. Без ограничения общности можно предположить, что v' смежна вершине 3. Из того, что нет треугольников и из максимальнойности графа G следует, что $A(v') = \{3, 5, 8, v_0\}$ и граф G совпадает с графом на рис. 13, б.

Случай 2. Подграф $G-v'$ совпадает с графом на рис. 7, б. Согласно предложению 1, вершина v' смежна вершинам 2 и 6. Из того, что нет треугольников, вытекает, что v' несмежна вершинам 1, 3, 7, 5 и v_0 . Следовательно, либо $A(v') = \{2, 6, 8\}$, либо $A(v') = \{2, 4, 6\}$. В том и в другом случае получается граф G , в котором $f_4(G-v_0) = 1$, что противоречит условию теоремы.

Случай 3. Подграф $G-v'$ совпадает с графом на рис. 7, в. Согласно предложению 1, вершина v' смежна вершинам 1 и 5. Из того, что нет треугольников, вытекает, что v' несмежна вершинам v_0 , 2, 4, 6 и 8. Следовательно, либо $A(v') = \{1, 3, 5\}$, либо $A(v') = \{1, 5, 7\}$. В любом случае в полученном графе G имеем $f_4(G-v_0) = 1$, что является противоречием.

Теорема 12 доказана.

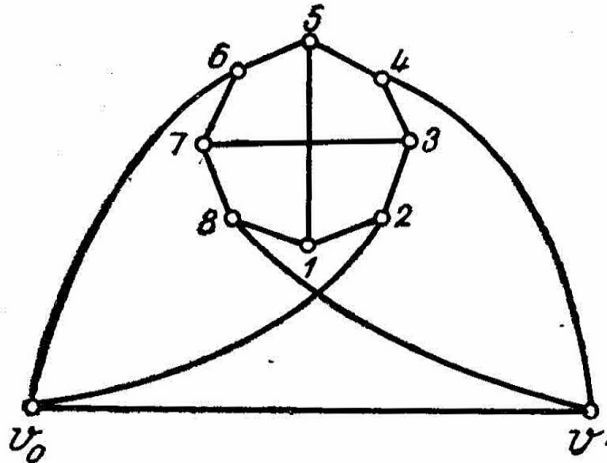


Рис. 14

Теорема 13. Пусть G — максимальный 10-вершинный граф без треугольников и без 5-антиклик. Допустим, что существует вершина $v' \in V(G)$, такая, что $f_4(G-v') = 3$ и что любые две 4-антиклики подграфа $G-v'$ имеют

общую вершину, однако все три его 4-антиклики имеют пустое пересечение. Тогда граф G изоморфен графу на рис. 14.

Доказательство. Согласно теореме 7, подграф $G-v'$ совпадает с графом на рис. 8. Граф на рис. 8 имеет три свободные вершины: v_0 , 4 и 8. Согласно

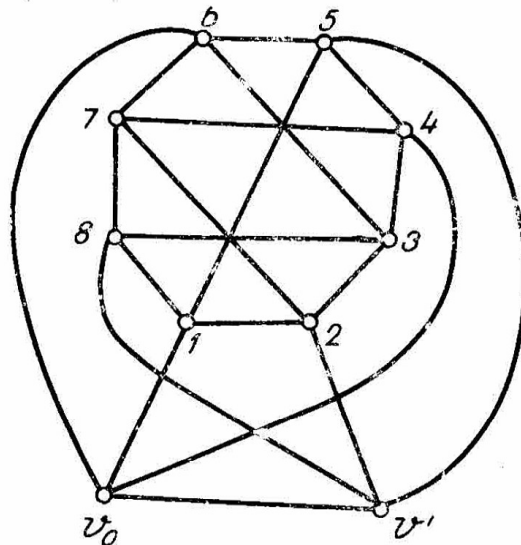


Рис. 15

предложению 1, вершина v' смежна вершинам v_0 , 4 и 8. Из этого вытекает, что граф G совпадает с графом на рис. 14.

Теорема 13 доказана.

Теорема 14. Пусть G — максимальный 10-вершинный граф без треугольников и без 5-антиклик. Допустим, что существует вершина $v' \in V(G)$, такая, что $f_4(G-v')=3$. Предположим, что две из 4-антиклик подграфа $G-v'$ не имеют общих вершин, однако третья 4-антиклика пересекается с любой из остальных двух 4-антиклик этого же подграфа. Тогда граф G изоморфен графу на рис. 15.

Доказательство. Согласно теореме 8, подграф $G-v'$ совпадает с одним из графов на рис. 9. Граф на рис. 9 имеет смежные свободные вершины 6 и 7. Согласно предложению 2, подграф $G-v''$ различается от этого графа. Поэтому представляются следующие две возможности:

Случай 1. Подграф $G-v'$ совпадает с графом на рис. 9, а. Согласно лемме 2, вершина v' несмежна вершинам 1, 3, 4, 6, 7. Из этого вытекает, что $A(v') = \{v_0, 2, 8, 5\}$ и, следовательно, граф G изоморфен графу на рис. 15.

Случай 2. Подграф $G-v'$ совпадает с графом на рис. 9, б. Согласно предложению 1, вершина v' смежна вершинам v_0 , 5, 7, 8, 2. Из максимальной графа G следует, что v' смежна вершине 1, что противоречит лемме 2.

Теорема 14 доказана.

Теорема 15. Пусть G — максимальный 10-вершинный граф без треугольников и без 5-антиклик. Допустим, что $f_4(G-v) \geq 3$ для любой вершины $v \in V(G)$. Предположим еще, что существует вершина v' , такая, что $f_4(G-v')=3$, и одна из 4-антиклик подграфа $G-v'$ не пересекается с остальными двумя его 4-антикличками. Тогда граф G изоморфен графу на рис. 13, б.

Доказательство. Согласно теореме 9, подграф $G-v'$ совпадает с одним из графов на рисунках 10 и 11. Из этих графов только графы на рисунках 10 а, 10 б и 10 в имеют множества свободных вершин, составляющих антиклику. Поэтому представляются следующие три ситуации:

Случай 1. Подграф $G-v'$ совпадает с графом на рис. 10, а. Согласно лемме 2, вершина v' несмежна вершинам $v_0, 2, 3, 4, 6, 7, 8$. Это противоречит максимальнойности графа G .

Случай 2. Подграф $G-v'$ совпадает с графом на рис. 10, б. Согласно предложению 1, вершина v' смежна вершинам 3 и 8. Из того, что нет треугольников, следует, что вершина v' несмежна вершинам $v_0, 1, 2, 4, 6, 7$. Следовательно, $A(v') = \{3, 5, 8\}$. Рассмотрим подграф $G-v_0$ полученного графа G . В этом подграфе $f_4(G-v_0) = 3$ и все три его 4-антиклики имеют общую вершину а, именно вершину 4. Согласно теореме 12, граф G изоморфен одному из графов на рис. 13. В графе на рис. 13, а обе вершины степени 3 смежны, а в полученном графе G это не так. Поэтому граф G изоморфен графу на рис. 13, б

Случай 3. Подграф $G-v'$ совпадает с графом на рис. 10, в. Согласно предложению 1, вершина v' смежна вершинам 3, 6 и 8. Из того, что нет треугольников, следует, что $A(v') = \{3, 6, 8\}$. Подграф $G-v_0$ полученного графа имеет единственную 4-антиклику, что является противоречием.

Теорема 15 доказана.

С л е д с т в и е 5 [4]. Пусть G — 10-вершинный граф без треугольников. Тогда граф G имеет хотя бы пять 4-антиклик, т. е. $f_4(G) \geq 5$.

Доказательство. Если граф G содержит 5-антиклику, тогда утверждение очевидно. Поэтому предположим, что граф G не содержит 5-антиклик. Если для некоторой вершины $v \in V(G)$ имеем $f_4(G-v) \leq 2$, тогда, согласно теореме 11, граф G изоморфен некоторому подграфу одного из графов на рис. 12. Все графы на рис. 12 имеют хотя бы пять 4-антиклик. Предположим, что $f_4(G-v) \geq 3$ для любой вершины $v \in V(G)$. Тогда из равенства (7) вытекает, что $f_4(G) \geq 5$.

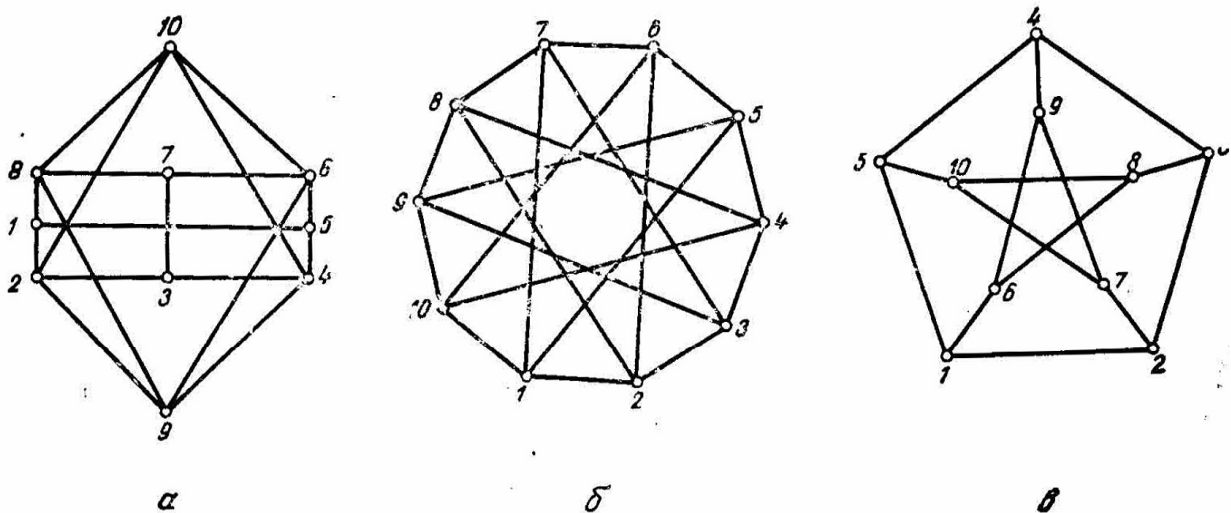


Рис. 16

Следствие 5 доказано.

Т е о р е м а 16. Пусть G — 10-вершинный граф без треугольников, который имеет не более шести 4-антиклик. Тогда граф G изоморфен некоторому подграфу одного из графов на рис. 12, 13, 14 и 15.

Доказательство. Согласно лемме 1, граф G не имеет 5-антиклик. Из равенства (7) следует, что существует вершина v' , такая, что $f(G-v') \leq 3$. Рассмотрим максимальный 10-вершинный граф без треугольников Γ , который содержит граф G . Ясно, что граф Γ удовлетворяет условиям одной из теорем 11, 12, 13, 14 и 15. Следовательно, граф Γ совпадает с одним из графов на рис. 12, 13, 14 и 15.

Этим теорема 16 доказана.

С л е д с т в и е 6 [4]. Пусть G — 10-вершинный граф без треугольников, который имеет ровно пять 4-антиклик, т. е. $f_4(G) = 5$. Тогда граф G изоморфен одному из графов на рис. 16.

Доказательство. Согласно теореме 16, граф G является подграфом одного из графов на рисунках 12, 13, 14 и 15. Из этих графов только графы на рис. 12, в, 14 и 15 имеют пять 4-антиклик. Поэтому граф G изоморфен одному из этих графов. Граф на рис. 12, в изоморфен графу на рис. 16, а. Изоморфизм между этими графами задается соответствием

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & v_0 & v' \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}.$$

Граф на рис. 14 изоморфен графу на рис. 16, в. Изоморфизм задается отображением

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & v_0 & v' \\ 9 & 7 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 6 & 10 & 8 \end{pmatrix}.$$

Граф на рис. 15 изоморфен графу на рис. 16, б. Изоморфизмом между этими графами является соответствие

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & v_0 & v' \\ 6 & 2 & 3 & 4 & 5 & 9 & 8 & 7 & 10 & 1 \end{pmatrix}.$$

Т е о р е м а 17. Пусть G — 10-вершинный граф без треугольников, который имеет семь 4-антиклик. Допустим, что граф G имеет вершину v' такую, что $f_4(G-v') \leq 3$. Тогда граф G изоморфен некоторому подграфу одного из графов на рис. 12, 13, 14 и 15.

Доказательство. Согласно лемме 1, граф G не содержит 5-антиклик. Рассмотрим максимальный 10-вершинный граф без треугольников Γ , который содержит граф G . Граф Γ непременно удовлетворяет условиям одной из теорем 11, 12, 13, 14 и 15. Следовательно, граф Γ совпадает с одним из графов на рис. 12, 13, 14 и 15.

Теорема 17 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н е н о в, Н., Н. Х а д ж и и в а н о в. Любой граф Рамсея без 5-антиклик имеет больше 11 вершин. — Сердика, **11**, 1985, 341—356.
2. Х а д ж и и в а н о в, Н., Н. Н е н о в. Усиление одной теоремы Грийнвуда и Глиссона о раскрасках ребер полного графа с 9 вершинами. — Докл. БАН, **31**, 1978, № 6, 631—633.
3. Н е н о в, Н., Н. Х а д ж и и в а н о в. О некоторых двуцветных раскрасках ребер полного графа с 9 вершинами. — Год. Соф. унив., Фак. мат. и мех., **71**, ч. II, 96—114.
4. Н е н о в, Н., Н. Х а д ж и и в а н о в. Об одном экстремальном свойстве графа Петерсена. — Год. Соф. унив., Фак. мат. и мех., **75**, 1981, 115—123.

5. Н е н о в, Н., Н. Х а д ж и и в а н о в. О минимуме числа 4-антиклик некоторых графов без треугольников. — Год. Соф. унив., Фак. мат. и мех., **77**, 163 — 174.
6. Х а д ж и и в а н о в, Н., Н. Н е н о в. О минимуме числа 3-клик в n -вершинных графах без 3-клик. — Сердика, **11**, 1985, 251—258.
7. Х а д ж и и в а н о в, Н., Н. Н е н о в. За броя на тройките, непознати в компания без тройки познати. — Физ.-мат. сп., **26**, 1984, 360—364.
8. Х а д ж и и в а н о в, Н. Числа на Рамзи. София, 1982.
9. L o r d e n, G. Blue-empty chromatic graphs. — Amer. Math. Monthly, **69**, 1962, 114—119.
10. H a r a r y, F. The two-triangle case of acquaintance graph. — Math. Magazine, **45**, 1972, 130—135.
11. G r e e n w o o d, R., A. G l e a s o n. Combinatorial relations and chromatic graphs. — Canad. J. Math., **7**, 1955, 1—7.
12. B u r r, S., V. R o s t a. On the Ramsey multiplicities of graphs. Problems and recent results. — J. Graph Theory, **4**, 1980, 347—361.
13. K é r y, G. Ramsey egy grafelméleti tételéről. — Mat. Lapok, **15**, 1964, 204—224.
14. E r d ö s, P. On the number of complete subgraphs contained in certain graphs. — Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl., Ser. A, **7**, 1962, No 3, 459—464.

Поступила 14. 5. 1985 г.

ВЪРХУ ТЪЖДЕСТВОТА СЪС СЛЕДА В МАТРИЧНАТА АЛГЕБРА

Михаил Гаврилов

Михаил Гаврилов. О тождествах со следом матричной алгебры. Доказывается, что если $f(x_1, \dots, x_p) g(x_1, \dots, x_p) = 0$ является тождеством со следом в полной матричной алгебре F_n , то $f(x_1, \dots, x_p) = 0$ либо $g(x_1, \dots, x_p) = 0$ является тождеством в F_n — аналог хорошо известной теореме Амицура о полиномиальных тождествах.

Mikhail Gavrilov. On Trace Identities in Matrix Algebra. In this note we prove that if $f(x_1, \dots, x_p) g(x_1, \dots, x_p) = 0$ is a trace identity in full matrix algebra F_n , then $f(x_1, \dots, x_p) = 0$ or $g(x_1, \dots, x_p) = 0$ is a trace identity in F_n — an analog of the well-known theorem of Amitsur, about polynomial identities.

Нека F е безкрайно поле, а F_n — алгебрата на квадратните матрици от n -ти ред с елементи от F . Тъждествата със следа в матричните алгебри са въведени от Размислов [1]. Те изиграват значителна роля в развитието на теорията на пръстените. От друга страна, добре известна е важната теорема на Амицур [2] за полиномните тъждества F_n , съгласно която, ако произведението на два полинома (с некомутиращи променливи) е тъждество в F_n , то поне един от тези полиноми е тъждество в F_n . Естествен е въпросът, пренася ли се теоремата на Амицур в случая на тъждества със следа (Този въпрос бе съобщен на автора от В. Н. Латышев.).

Т е о р е м а. Нека $f(x_1, \dots, x_p) g(x_1, \dots, x_p) = 0$ е тъждество със следа в матричната алгебра F_n . Тогава във F_n е изпълнено поне едно от тъждествата $f(x_1, \dots, x_p) = 0$, $g(x_1, \dots, x_p) = 0$.

Доказателство. Съществува разширение K на полето F и тяло D с размерност n^2 над своя център K . Нека H е полето на разцепване на D , т. е.

$$D \otimes H = H_n$$

Тъй като това тензорно произведение е над полето K , то D и H можем да разглеждаме като подалгебри на H_n , като при това $H_n = DH$, $dh = hd$ за всеки два

елемента $d \in D$ и $h \in H$. Като използваме топологията на Зариски, както в доказателството на теорема 1 от [3, гл. I, § 9, с. 46], се убеждаваме, че за всеки елемент $d \in D$ естествената следа $\text{tr}(d) \in K$. От равенството

$$\text{tr}(d \otimes h) = \text{tr}(dh) = h \text{tr}(d) = \text{tr}(d) \otimes h$$

се получава лесно, че всяко твърдение със следа в D е твърдение в H_n и обратно. Това ни позволява по-нататък да следваме съображенията на Амицур от [2].

Нека $f(x_1, \dots, x_p) g(x_1, \dots, x_p) = 0$ е твърдение със следа в F_n . Лесно се вижда, че това твърдение е изпълнено в H_n , а следователно и в D . За всеки набор d_1, \dots, d_p от елементи на D ще имаме $f(d_1, \dots, d_p) g(d_1, \dots, d_p) = 0$. Тъй като D е тяло, то $f(d_1, \dots, d_p) = 0$ или $g(d_1, \dots, d_p) = 0$. Това означава, че

$$(1) \quad f(x_1, \dots, x_p) y g(x_1, \dots, x_p) = 0$$

е твърдение със следа в D и следователно в H_n и в F_n .

Нека $t_{ij}^{(k)}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, $k = 1, 2, \dots, p$, са $n^2 p$ комутиращи неизвестни над полето F и $\bar{F} = F(t_{ij}^{(k)})$ е полето от рационални функции на тези променливи. Да поставим в (1) вместо x_k общите матрици $t^{(k)} = (t_{ij}^{(k)})$. За произволен елемент y от \bar{F}_n получаваме

$$f(t^{(1)}, \dots, t^{(p)}) y g(t^{(1)}, \dots, t^{(p)}) = 0.$$

т. е.

$$f(t^{(1)}, \dots, t^{(p)}) \bar{F}_n g(t^{(1)}, \dots, t^{(p)}) = 0.$$

От последното равенство следва, че

$$f(t^{(1)}, \dots, t^{(p)}) = 0 \text{ или } g(t^{(1)}, \dots, t^{(p)}) = 0.$$

Специализацията $t_k = A_k$, A_k — произволни матрици от F_n , завършва доказателството на теоремата.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р а з м ы с л о в, Ю. П. Тождества со следом полных матричных алгебр над полем характеристики нуль. — Изв. АН СССР, Сер., мат., **38**, 1974, № 4, 723—756.
2. A m i t s u r, S. The T -ideals of the free ring. — J. London Math. Soc., **30**, 1955, 470—475.
3. J a c o b s o n, N. PI.-Algebras. — In: Lecture Notes Math., No 441, Berlin—Heidelberg—New York, 1975.

Постъпила на 14. 5. 1985 г.

О ГРАФАХ РАМСЕЯ

Николай Хаджииванов, Недялко Ненов

Николай Хаджииванов, Недялко Ненов. **О графах Рамсея.** Граф G называется графом Рамсея, если при любой 2-раскраске его ребер появляется монохроматический треугольник. Показано, что метод из [5] можно применить для получения 15-вершинного графа Рамсея без 5-клик, неизоморфного уже построенному в [8].

Nikolai Hadjiivanov, Nedyalko Nenov. **On Ramsey's Graphs.** G is a Ramsey graph if in every 2-colouring of its edges there is a monochromatic triangle. In the paper we show that the method of [5] is applicable to construct a 15-vertices Ramsey graph without 5-cliques which is not isomorphic to the graph in [8].

1. ВВЕДЕНИЕ

Обыкновенный граф называется графом Рамсея, если при любой 2-раскраске его ребер появляется монохроматический треугольник. Хорошо известно и легко доказать, что если граф содержит 6-клику, то он — граф Рамсея.

Эрдеш и Хайнал [1] поставили вопрос об изучении графов Рамсея без 6-клик. Грахам [2] построил такой граф с 8 вершинами, а Лин [3] доказал, что это единственный граф Рамсея без 6-клик, который имеет не более 8 вершин. Однако граф Грахама имеет 5-клики.

Грахам и Спенсер [4] предложили найти граф Рамсея без 5-клик, число вершин n которого минимально. Эта проблема пока остается открытой. В 1978 г. в [5] нам удалось доказать, что $n \leq 16$ (см. также [6] и [7]). В 1981 г. один из нас установил в [8], что $n \leq 15$. С другой стороны, в 1983 г. мы доказали (см. [9]) неравенство $n \geq 12$.

В настоящей статье покажем, что метод, созданный нами в [5] для построения 16-вершинного графа Рамсея без 5-клик, можно приложить без всяких изменений для построения 15-вершинного графа этого типа, притом неизоморфного аналогичному графу из [8].

Следует отметить, что в 1983 г. в [10] был буквально повторен наш пример и наш метод из [5], хотя, как становится ясно из [10], ее автор знает статью [5]. Что касается оценки снизу $n \geq 11$, которая приводится в [10] без доказательства, она получена одним из нас еще в 1978 г. [11] и, кроме того, как уже было упомянуто выше, в [9] мы уже доказали больше.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТРЕХ ОСНОВНЫХ ГРАФОВ

Пусть G_1 и G_2 — графы. Через $G_1 \cup G_2$ обозначим их объединение, т. е. граф, множество вершин и множество ребер которого является объединением соответственно множеств вершин и множеств ребер обоих графов.

Если G_1 и G_2 дизъюнкты, через $G_1 + G_2$ обозначим их соединение, которое получается из графа $G_1 \cup G_2$ путем присоединения ребер типа $\{v_1, v_2\}$, где v_1 и v_2 — произвольные вершины соответственно графов G_1 и G_2 .

Через C_p обозначим p -вершинный простой цикл, а через L_p — p -вершинную простую цепь, рассматриваемые как графы.

Если v_1, v_2, \dots, v_s — вершины графа G , через $\langle v_1, v_2, \dots, v_s \rangle$ обозначим подграф, порожденный ими, т. е. максимальный подграф графа G с вершинами в множестве $\{v_1, v_2, \dots, v_s\}$.

Граф Грахама из [2], о котором выше шла речь, определяется следующим образом: $K = C_3 + C_5$. Это первый из трех графов, который привлекает наше внимание в настоящей заметке.

Рассмотрим графы P и Q на рис. 1, а и 1, б. Положим $P_1 = \langle a, b', c' \rangle$, $P_2 = \langle a, b'', c'' \rangle$ и $P_3 = \langle c', b', b'', c'' \rangle$, а также $Q_1 = \langle v_1, v_2', v_3', v_4, v_5' \rangle$, $Q_2 = \langle v_1, v_2'', v_3'', v_4, v_5'' \rangle$ и $Q_3 = \langle v_1, v_2''', v_3''', v_4, v_5''' \rangle$. Определим граф

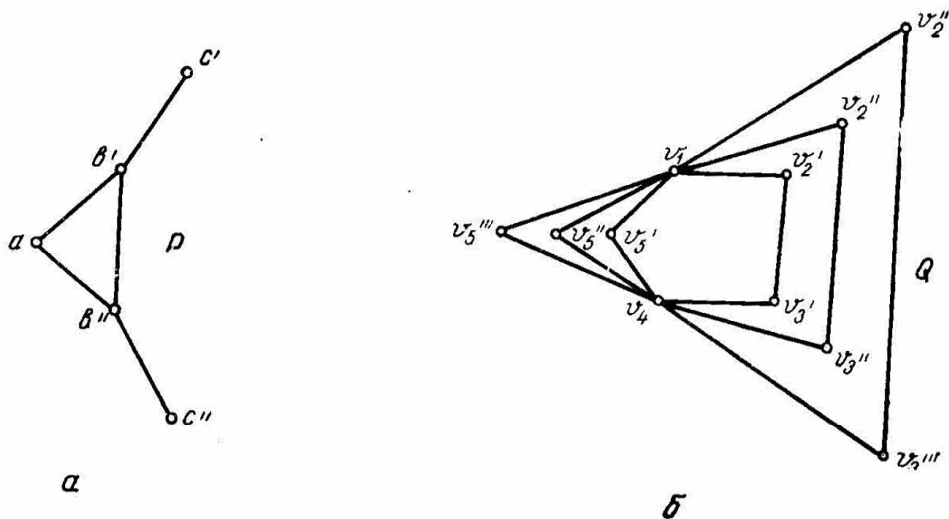


Рис. 1. К определению графа L

$L = \bigcup_{i=1}^3 (P_i + Q_i)$. Этот граф из нашей статьи [5] есть второй из графов, который попадет в сферу наших дальнейших рассуждений.

Рассмотрим графы R и S на рис. 2, а и 2, б. Положим $R_1 = \langle a, b, c' \rangle$, $R_2 = \langle a, b, c'' \rangle$, $R_3 = \langle a, b, c''' \rangle$, $S_1 = \langle v_1, v_2', v_3', v_4', v_5' \rangle$, $S_2 = \langle v_1, v_2'', v_3'' \rangle$,

$v_4'', v_5''\rangle$, $S_3 = \langle w, v_5', v_3'', v_3', v_5''\rangle$ и определим граф $M = \bigcup_{i=1}^3 (R_i + S_i)$. Это третий из графов, которым посвящена настоящая заметка.

3. ОПРЕДЕЛЕННЫЕ ТРИ ГРАФА — ГРАФЫ РАМСЕЯ

Все три графа, которые определены в предшествующем пункте, являются конечными объединениями соединений $U_i \cup V_i$ где U_i — связной граф, а V_i — граф с хроматическим числом $\chi(V_i)$ больше двух. Притом графы $U = \bigcup U_i$ и $V = \bigcup V_i$ — дизъюнкты и любые два графа U_p и U_q имеют общее ребро.

Нетрудно установить (и это сделано в [5]), что при любой 2-раскраске ребер произвольного графа, сконструированного таким образом, U является монохроматическим подграфом и, следовательно, если в U имеется треугольник, тогда граф является графом Рамсея. Все это следует непосредственно из следующей леммы из [5]:

Л е м м а. При любой 2-раскраске ребер графа $G = L_3 + \Gamma$, где $\chi(\Gamma) > 2$, в которой нет монохроматических треугольников, цепь L_3 монохроматическая.

Для полноты приведем доказательство леммы, тем более, что оно совсем короткое.

Пусть γ — 2-раскраска ребер графа G без хроматического треугольника и v — центр цепи $L_3 = \langle a_1, v, a_2 \rangle$. Через Γ_1 обозначим множество всех вершин u подграфа Γ , для которых ребро $\{v, u\}$ имеет первый цвет, а через Γ_2 — множество остальных вершин из Γ . Так как $\chi(\Gamma) > 2$, хотя бы одно из множеств Γ_i содержит ребро $\{u_1, u_2\}$. Тогда $\{v, u_1\}$ и $\{v, u_2\}$ имеют одинаковый цвет, и если некоторое ребро цепи L имеет тот же цвет, то мы нашли

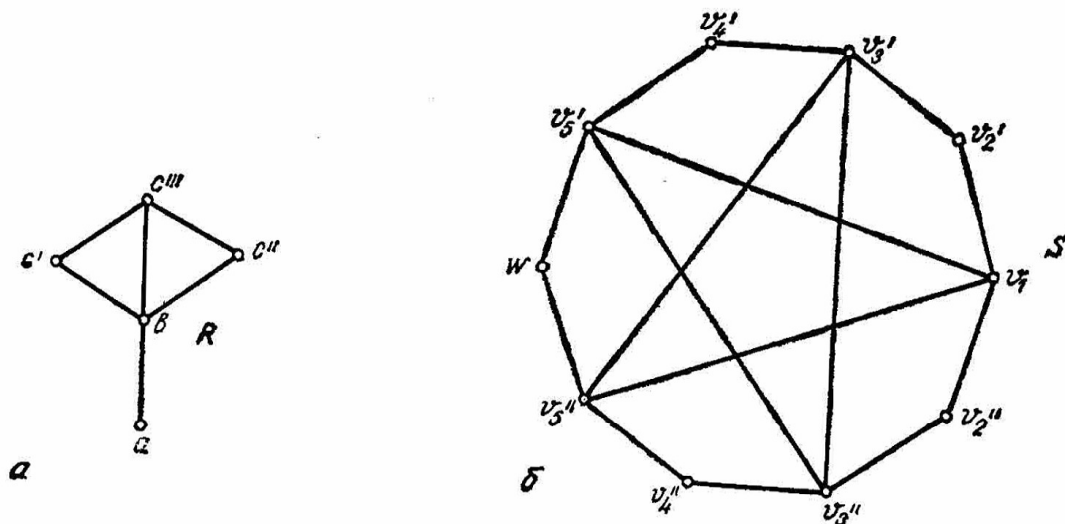


Рис. 2. К определению графа M

4-клику $\{v, a_i, u_1, u_2\}$ в G , три ребра из вершины v которой имеют одинаковый цвет. Тогда некоторая грань этой 4-клики является монохроматическим треугольником. Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

С л е д с т в и е. Любой из трех графов, определенных в п. 2, является графом Рамсея.

4. ГРАФЫ L И M НЕ ИМЕЮТ 5-КЛИК

Граф K очевидно не имеет 6-клик и, таким образом, следствие дает новое доказательство теоремы Грахама.

Что касается графов L и M , то легко сообразить, что они не имеют 5-клик. Впрочем, для графа L это доказано в [5]. Для полноты приведем доказательство и здесь, так как оно предельно короткое.

Допустим, что α — 5-клика в L . Так как Q не имеет треугольников, то α имеет в Q не более двух вершин. Однако в P нет 4-клик. Следовательно, α имеет в Q ровно две вершины, а в P — три. Эти три вершины очевидно a, b' и b'' . Обе вершины клики α , которые находятся в Q , не могут быть v_1 и v_4 , так как v_1 и v_4 несмежны. Следовательно, хотя бы одна из вопросных двух вершин отлична от v_1 и v_4 и поэтому не может быть смежной всем вершинам треугольника $\{a, b', b''\}$. Полученное противоречие завершает доказательство.

Докажем, что в M нет 5-клик. Допустим, что α — 5-клика в M . Так как в S нет треугольников, то α имеет там не более двух вершин и, следовательно, имеет в R хотя бы три вершины. Из S смежны вершине $C^{(i)}$ только вершины цикла S_i . Однако S_3 и $S_i, 1 \leq i \leq 2$, имеют только две общие вершины и они несмежны, а S_1 и S_2 имеют только одну общую вершину.

Следовательно, если α содержит две из вершин $c^{(i)}, i=1, 2, 3$ (а это обязательно должно иметь место), то α содержит не более одной вершины из S и, следовательно, содержит 4-клику из R . Тогда $\{c', c'', c'''\} \subset \alpha$ и, значит, α имеет вершину, принадлежащую циклам S_1, S_2 и S_3 . Такой вершины, однако, нет. Полученное противоречие завершает доказательство.

5. ТЕОРЕМА

Из следствия в п. 3 и из доказанного в п. 4 получаем следующее утверждение:

Т е о р е м а. Граф M является 15-вершинным графом Рамсея без 5-клик.

ЛИТЕРАТУРА

1. Erdős, P., A. Hajnal. Research problem 2—5. — J. Comb. Th., 2, 1967, p. 107.
2. Graham, R. On edgewise 2-colored graphs with monochromatic triangles and containing no complete hexagon. — J. Comb. Th., 4, 1968, p. 300.
3. Lin, S. On Ramsey number and K_r -coloring of graphs. — J. Comb. Th., Ser. B, 12, 1972, 82—92.
4. Graham, R., J. Spencer. On small graphs with forced monochromatic triangles. — Lecture Notes in Math., 186, 1971, 137—141.
5. Нен о в, Н., Н. Х а д ж и и в а н о в. О числе Грахама—Спенсера. — Докл. БАН, 32, 1979, № 2, 155—158.
6. Х а д ж и и в а н о в, Н., Н. Н е н о в. Пример 16-вершинного (3,3)-графа Рамсея, с кликовым числом 4. — Сердика, 9, 1983, 73—74.
7. Х а д ж и и в а н о в, Н. Числа на Рамзи. С., 1982.
8. Н е н о в, Н. Пример 15-вершинного графа Рамсея с кликовым числом 4. — Докл. БАН, 34, 1981, № 11, 1487—1489.
9. Н е н о в, Н., Н. Х а д ж и и в а н о в. Любо́й граф Рамсея без 5-клик имеет больше 11 вершин. — Сердика, 11, 1985, 341—356.
10. Giraud, G. Sur un probleme d'Erdős et Hajnal. — Annals Discr. Math., 17, 1983, 303—306.
11. Н е н о в, Н. Новая оценка снизу для числа Грахама—Спенсера. — Сердика, 6, 1980, 373—383.

Поступила 14. 5. 1985 г.

СЪДЪРЖАНИЕ

Донка Пашкулева — Влияние на втория коефициент върху радиуса на изпъкналост на една комбинация от аналитични функции	3
Илия Шапкарев — Полиноми от m -та степен като общи решения на един клас от системи от линейни диференциални уравнения от n -ти ред	9
Георги Попов — Асимптотика на някои спектрални характеристики на елиптични системи от диференциални оператори	15
Неко Георгиев — Върху съществуването на периодично решение	27
Тошко Боев — Един клас от псевдодиференциални оператори	30
Иван Пашов, Николай Хадживанов, Недялко Ненов — Съществуване и единственост на 14-върхов граф с три 3-клик и една 5-антиклика	40
Веселин Дренски — Върху тждествата в тримерна проста жорданова алгебра	53
Николай Хадживанов, Недялко Ненов — Върху релацията p -несъседство в графи	68
Ваня Хаджийски — За най-доброто L_p -приближение върху реалната ос с цели функции от експоненциален тип	73
Никола Мартинов — Една комбинаторна характеристика на планарни триангулации	82
Никола Мартинов, Димитър Вакарелов — Паралелостени	87
Никола Мартинов — Върху кубическите циклични 5-свързани графи	95
Чавдар Лозанов — Върху минималните подравнини и групите от автоморфизми, запазващи окръжност, в немикелеви инверсни равнини $S(q)$	106
Чавдар Лозанов — Една геометрична характеристика на четворки от коциклични точки в инверсни немикелеви равнини $S(q)$	114
Адриан Борисов, Георги Ганчев, Огнян Касабов — Свойства на кривината и изотропни равнини на риманови многообразия и почти ермитови многообразия с индефинитна метрика	121
Николай Кюркчиев, Радостин Иванов — Върху някои многостъпкови схеми със свръхлинейна скорост на сходимост	132
Николай Кутев — Върху разрешимостта на уравненията от типа на Монж—Ампер	139
Недю Попиванов — Слаби и силни решения на гранични задачи	143
Георги Ганчев, Веселка Михова — Върху тензора на конформната кривина в римановата и почти ермитовата геометрии	158
Христо Хоптериев — H -келерово многообразие със структура на антициклична алгебра от четвърти ред	172
Николай Кюркчиев, Андрей Андреев, Васил Попов — Итерационни методи за пресмятане на всички кратни корени на алгебрично уравнение	178
Недялко Ненов, Николай Хадживанов — Върху 4-кликите на някои графи без триъгълници	186
Михаил Гаврилов — Върху тждествата със следа в матричната алгебра	209
Николай Хадживанов, Недялко Ненов — Върху графите на Рамзи	211

CONTENTS

Donka Pashkuleva — The Influence of the Second Coefficient on the Radius of Convexity of a Combination of Analytic Functions	3
Iliia Shapkarev — Polynomials of Degree m as General Solutions of a System of n Linear Differential Equations	9
Georgi S. Popov — Asymptotics of Some Spectral Characteristics of Elliptic Systems of Differential Operators	15

Neko Georgiev — On the Existence of a Periodical Solutions	27
Toshko Boev — A Class of Pseudodifferential Operators	30
Ivan Pashov, Nicolai Hadjiivanov, Nedyalko Nenov — The Existence and Uniqueness of a 14-vertex Graph with Three 3-cliques and one 5-anticlique	40
Vesselin Drensky — On the Identities of the Three-dimensional Simple Jordan Algebra	53
Nicolai Hadjiivanov, Nedyalko Nenov — On the Relation of p -non-adjacency on Graphs	68
Vania Hadjiisky — On the Best L_p -approximation on the Real Line by Entire Functions of Exponential Type	73
Nicola Martinov — A Combinatorial Characterization of Planar Triangulations	82
Nicola Martinov, Dimiter Vakarelov — Parallelohedrons	87
Nicola Martinov — On Cubic Cyclically 5-connected Graphs	95
Chavdar Lozanov — On the Minimal Subplanes and the Groups of Automorphisms that Fix a Circle in Non-miquelian Inversive Planes $S(q)$	106
Chavdar Lozanov — A Geometric Characterization of the Quadruples Concircular Points in Non-miquelian Inversive Planes $S(q)$	114
Adrijan Borisov, Georgi Ganchev, Ognian Kassabov — Curvature Properties and Isotropic Planes of Riemannian and Almost Hermitian Manifolds of Indefinite Metrics	121
Nicolai Kjurkchiev, Radostin Ivanov — On Some Multi-stage Schemes with a Superlinear Rate of Convergence	132
Nicolai Kutev — On the Solvability of Monge-Ampere Type Equations	139
Nedju Popivanov — Weak and Strong Solutions of Boundary Value Problems	143
Georgi Ganchev, Vesselka Mihova — On the Conformal Curvature Tensor in the Riemannian and the Almost Hermitian Geometry	158
Hristo Hopteriev — H -Kaehlerian Manifold with a Structure of Anticyclic Algebra of the Fourth Order	172
Nicolai Kjurkchiev, Andrei Andreev, Vasil Popov — Iterative Methods for Computation of all Multiple Roots of an Algebraic Polynomial	178
Nedyalko Nenov, Nicolai Hadjiivanov — On the 4-Cliques of Some Graphs without Triangles	186
Mikhail Gavrilov — On Trace Identities in Matrix Algebra	209
Nicolai Hadjiivanov, Nedyalko Nenov — On Ramsey's Graphs	211

