СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“
основан 1888 г.

ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА
СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ "СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ"

МАТЕМАТИЧЕСКИ ТУРНИР

ВИДИН – ВРАЦА – МОНТАНА – БОТЕВГРАД

16 март 2024 г.

гр. Видин

SAP работи с над 440 000 клиенти в 180 страни, повече от 105 000 служители в 140 локации по света, и има над 50-годишна история. Развойният център в София, SAP Labs Bulgaria, основан през 2000г., е едно от ключовите подразделения на компанията, където над 1400 професионалисти работят по теми, свързани с облачни технологии, и имат основен принос в разработката на облачната платформа на SAP – SAP Business Technology Platform. Развойният център SAP Labs България успява да привлече ангажирани професионалисти със силна технологична експертиза и 9 пъти получава отличието „Най-добър работодател“ в България.

„Experian“ е глобален технологичен лидер в предоставянето на информация и аналитични решения. По време на важните моменти от живота - от покупката на жилище или автомобил, до изпращането на дете в колеж, до разрастването на бизнеса чрез установяване на контакти с нови клиенти - „Experian“ дава възможност на потребителите иклиентите да управляват данните си с увереност. Екипът на „Experian“ се състои от 22 000 души, които работят в 32 държави. Фирмата е регистриране на лондонската фондова борса (EXPN) и е част от индекса FTSE 100.

5 клас

Задача 1. Да се сравнят по големина числата a и b, които са решения на уравненията:

$$0,17\left(\left(7\frac{13}{20}-5\frac{2}{5}\right)\left(4,2-\frac{11}{7}a\right)+0,25.7\right)=1+\frac{1}{16},$$

$$\left(3+\frac{3}{11}+\frac{3}{13}+\frac{3}{17}+\frac{3}{19}\right)\left(b+\frac{17,23.0,2+17,23.0,8}{17,23.0,25+17,23.1,75}\right)=$$
$$=\left(6+\frac{6}{11}+\frac{6}{13}+\frac{6}{17}+\frac{6}{19}\right).$$

Решение: $0,17\left(\left(7\frac{13}{20}-5\frac{2}{5}\right)\left(4,2-\frac{11}{7}a\right)\right)=1+\frac{1}{16}$

$0,17\left(2\frac{1}{4}\left(4,2-\frac{11}{7}a\right)+1,75\right)=\frac{17}{16}$

$2\frac{1}{4}\left(4,2-\frac{11}{7}a\right)+1,75=\frac{17}{16}\frac{100}{17}$

$2\frac{1}{4}\left(4,2-\frac{11}{7}a\right)=\frac{25}{4}-1,75$

$\frac{9}{4}\left(4,2-\frac{11}{7}a\right)=\frac{25}{4}-\frac{7}{4}$

$4,2-\frac{11}{7}a=\frac{18}{4}\frac{4}{9}$

$-\frac{11}{7}a=2-4,2$

$\frac{11}{7}a=2,2=\frac{11}{5}$

$a=\frac{7}{5}=1,4.$

$$\left(3+\frac{3}{11}+\frac{3}{13}+\frac{3}{17}+\frac{3}{19}\right)\left(b+\frac{17,23.0,2+17,23.0,8}{17,23.0,25+17,23.1,75}\right)=\left(6+\frac{6}{11}+\frac{6}{13}+\frac{6}{17}+\frac{6}{19}\right)$$

$$b+\frac{17,23.0,2+17,23.0,8}{17,23.0,25+17,23.1,75}=\frac{6\left(1+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{17}+\frac{1}{19}\right)}{3\left(1+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{17}+\frac{1}{19}\right)}$$

$$b+\frac{17,23(0,2+0,8)}{17,23(0,25+1,75)}=2$$

$$b+\frac{1}{2}=2,\quad b=\frac{3}{2}=1,5,\quad a=1,4<1,5=b.$$

Задача 2. Атанас и Петър потеглят едновременно в 8:00 часа с лодки от Видин по река Дунав в една и съща посока. Скоростта на лодката на Атанас в спокойни води е 7 km/h, а на Петър е 13 km/h. След като изминава 40 km, Петър решава да се върне до Видин и по пътя си обратно среща Атанас. Ако скоростта на течението е 3 km/h, в колко часа Атанас и Петър се срещат?

Решение: Има две възможности – Атанас и Петър пътуват по течението или срещу течението.

Ако двамата пътуват по течението:

Нека v_a е скоростта на Атанас по течението, т.е. $v_a = 7+3=10km/h$.

Нека v_p е скоростта на Петър по течението, т.е. $v_p = 13+3=16km/h$.

Петър ще измине $40km$ за време $t=\frac{40}{16}=\frac{10}{4}=\frac{150}{60}=2\frac{30}{60}h$, т. е. за 2 h 30 min.

За това време Атанас ще измине разстояние $S=10\cdot\frac{10}{4}=25km$ или разстоянието между двамата ще е $40-25=15km$.

След като Петър се връща към Видин, той ще пътува срещу течението и неговата скорост ще бъде $v = 13 - 3 = 10km/h$.

Тогава двамата ще се срещнат след време t_1, за което $v_a.t_1 + v.t_1 = 15$, т.е. $10t_1 + 10t_1 = 15$ $t_1 = \dfrac{15}{20} = \dfrac{45}{60}$ или след 45 min.

Следователно срещата на Атанас и Петър ще бъде след 3 h и 15 min или в 11:15 часа.

Ако двамата пътуват срещу течението:

Нека v_a е скоростта на Атанас срещу течението, т.е. $v_a = 7 - 3 = 4km/h$.

Нека v_p е скоростта на Петър срещу течението, т.е. $v_p = 13 - 3 = 10km/h$.

Петър ще измине $40km$ за време $t = \dfrac{40}{10} = 4h$.

За това време Атанас ще измине разстояние $S = 4.4 = 16km$ или разстоянието между двамата ще е $40 - 16 = 24km$.

След като Петър се връща към Видин, той ще пътува по течението и неговата скорост ще бъде $v = 13 + 3 = 16km/h$.

Тогава двамата ще се срещнат след време t_2, за което $v_a.t_2 + v.t_2 = 24$, т.е. $4t_2 + 16t_2 = 24$,

Откъдето $t_2 = \dfrac{24}{20} = \dfrac{72}{60}$ или 1 h 12 min.

Следователно срещата на Атанас и Петър ще бъде след 5 h 12 min или в 13:12 часа.

Задача 3. Ивайло разделил с остатък няколко последователни естествени числа на 6. Като събрал остатъците получил 56. Какъв е най-големият възможен брой на числата, които Ивайло е разделил?

Решение: Всеки 6 последователни естествени числа имат сума от остатъци при деление на 6 равна на 15, тъй като $0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$.

За да се постигне сума от остатъци равна на 56 са необходими поне три такива пълни групи ($3.15 = 45$).

Сума от остатъци при деление на 6, равна на $56-45 = 11$ може да се постигне само при следните последователни остатъци 5, 0, 1, 2 и 3.

Следователно най-големият възможен брой на числата е равен на 3 последователни групи от по 6 числа плюс вече описаните 5.

Тогава търсеният брой е 23.

6 клас

Задача 1. а) Да се опрости изразът

$$A=\left(\frac{\left(-3a^2\right)^3\left(11b\right)^2}{a^7b}\right)^2:\left(\frac{9b^2}{23a}\right)^3$$

и да се пресметне стойността му при $a=1024$ и $b=2024$.

б) Да се пресметнат изразите:

$$B=3^9-4.3^8+4.3^7-4.3^6+4.3^5-4.3^4+4.3^3,$$

$$C=-1+\left(-1\right)^2.2+\left(-1\right)^3.3+\ldots+\left(-1\right)^{2024}.2024.$$

Решение: а) $A=\left(\frac{\left(-3a^2\right)^3\left(11b\right)^2}{a^7b}\right)^2:\left(\frac{9b^2}{23a}\right)^3=$

$$=\left(\frac{-27a^6.11^2b^2}{a^7b}\right)^2:\left(\frac{9^3b^6}{23^3a^3}\right)=\left(\frac{-27.11^2b}{a}\right)^2\left(\frac{23^3a^3}{9^3b^6}\right)=$$
$$=\left(\frac{(-27)^2.11^4b^2}{a^2}\right).\left(\frac{23^3a^3}{9^3b^6}\right)=\frac{27^2 11^4 23^3a^3b^2}{9^3a^2b^6}=$$
$$=\frac{27^2 11^4 23^3a}{9^3b^4}=\frac{3^6 11^4 23^3a}{3^6b^4}=\frac{11^4.23^3a}{b^4}.$$

Заместваме $a=1024=2^{10}$ и $b=2024=2^3.11.23$ и получаваме

$$A=\frac{11^4.23^3.2^{10}}{(2^3.11.23)^4}=\frac{11^4.23^3.2^{10}}{2^{12}.11^4.23^4}=\frac{1}{2^2.23}=\frac{1}{92}.$$

б)

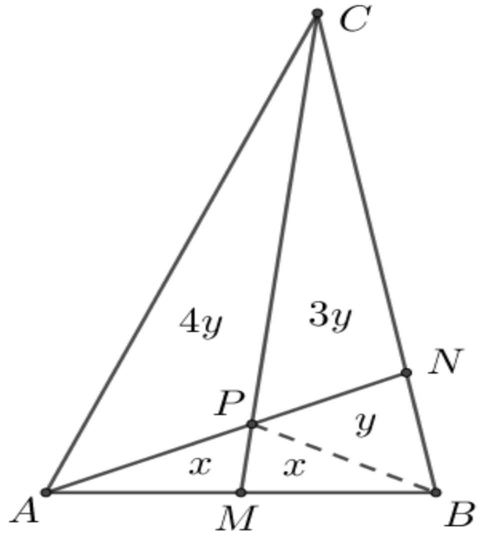
$$B=3^9-4.3^8+4.3^7-4.3^6+4.3^5-4.3^4+4.3^3=$$

$$= 3^9 - (3+1)3^8 + (3+1)3^7 - (3+1)3^6 + (3+1)3^5 - (3+1)3^4 + (3+1)3^3 =$$
$$= 3^9 - 3.3^8 - 3^8 + 3.3^7 + 3^7 - 3.3^6 - 3^6 + 3.3^5 + 3^5 - 3.3^4 - 3^4 + 3.3^3 + 3^3 =$$
$$= 3^9 - 3^9 - 3^8 + 3^8 + 3^7 - 3^7 - 3^6 + 3^6 + 3^5 - 3^5 - 3^4 + 3^4 + 3^3 = 3^3 = 27.$$

$$C = -1 + (-1)^2.2 + (-1)^3.3 + \cdots + (-1)^{2024}.2024 =$$
$$= -1 + 1.2 + (-1).3 + 1.4 + \cdots + (-1).2023 + 1.2024 =$$
$$= (-1+2) + (-3+4) + \cdots + (-2023+2024) =$$
$$= \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{1012} = 1012$$

Задача 2. Върху страните AB и BC на $\triangle ABC$ са взети съответно точки M и N, така че $AM = MB$ и $CN = 3BN$. Нека точка P е пресечната точка на CM и AN. Ако $S_{\triangle ABC} = 56\,\mathrm{cm}^2$, да се намери лицето на четириъгълника $MBNP$.

Решение:



Нека $S_{\triangle MBP} = x$ и $S_{\triangle BNP} = y$. Триъгълниците $\triangle AMP$ и $\triangle MBP$ имат обща височина от връх P и $AM = MB$, следователно $S_{\triangle AMP} = S_{\triangle MBP} = x$.

Аналогично $S_{\triangle AMC} = S_{MBC} = \frac{1}{2} S_{ABC}$.

Триъгълниците $\triangle PNC$ и $\triangle PBN$ имат обща височина от връх P и $CN : NB = 3 : 1$. Следователно $S_{\triangle PNC} : S_{\triangle PBN} = 3 : 1$, т.е. $S_{\triangle PNC} = 3y$.

За $\triangle$ APC и $\triangle PBC$ имаме, че $S_{\triangle APC} = S_{\triangle AMC} - S_{\triangle AMP} = S_{\triangle MBC} - S_{\triangle MBP} = S_{\triangle PBC} = 4y$.

Триъгълниците $\triangle ABC$ и $\triangle ANC$ имат обща височина от върха A и $CN : AB = 3 : 4$. Тогава $S_{\triangle ANC} : S_{\triangle ABC} = 3 : 4$, т. е. $S_{\triangle ANC} = \frac{3}{4} S_{\triangle ABC} = \frac{3}{4} \cdot 56 = 42\,\mathrm{cm}^2$.

Тъй като $S_{\triangle ANC} = 7y$, то получаваме $y = 6\,\mathrm{cm}^2$.

От $S_{\triangle AMC} = \frac{1}{2} S_{ABC}$, получаваме $4y + x = 28\,\mathrm{cm}^2$ или $x = 4\,\mathrm{cm}^2$. Окончателно $S_{MBPN} = x + y = 10\,\mathrm{cm}^2$.

Задача 3. Трима приятели намислили да боядисат затворена дървена ограда, състояща се от 2772 дъски, като започват да броят от едно и също място и приключват на същото място. За да се откроява, те решават да я оцветят по следния начин: първият да боядиса всяка 12-та дъска в бяло, след него вторият да боядиса всяка 18-та дъска в зелено като пропуска боядисаните вече в бяло дъски, а след него третият — всяка 33-та дъска в червено като пропуска вече боядисаните в бяло и зелено дъски. По колко боядисани дъски от всеки цвят ще има, след като приключат?

Решение: Първият от приятелите ще боядиса $2772 : 12 = 231$ дъски в бяло.

Броят на дъските, които би трябвало да се боядисат в зелено, е $2772 : 18 = 154$, но част от тези дъски са вече боядисани в бяло. Това са дъските, които са на позиция, деляща се едновременно на 12 и 18. Тъй като $\text{НОК}(12, 18) = 36$, то има $2772 : 36 = 77$ такива дъски, които са вече боядисани в бяло и вторият приятел ще ги прескочи. Следователно, вторият приятел ще боядиса в зелено $154 - 77 = 77$ дъски.

Броят на дъските, които би трябвало да се боядисат в червено, е $2772 : 33 = 84$, но част от тези дъски са вече боядисани в бяло или в зелено. Дъските, които са на позиция, деляща се едновременно на 12 и 33 са боядисаните вече в бяло дъски и трябва да бъдат прескочени. Тъй като $\text{НОК}(12, 33) = 132$, то има $2772 : 132 = 21$ такива дъски . Аналогично, дъските, които са на позиция, деляща се едновременно на 18 и 33 са боядисаните вече в зелено дъски и също трябва да бъдат прескочени. Тъй като $\text{НОК}(18, 33) = 198$, то има $2772 : 198 = 14$ такива дъски . Тъй като $\text{НОК}(12, 18, 33) = 396$, то има $2772 : 396 = 7$ дъски, които са прескочени веднъж в броенето на боядисаните в зелено дъски (като боядисани вече в бяло) и втори път са прескочени в броенето на червените дъски (при прескачането на боядисаните в бяло или в зелено). Следователно третият приятел остава да боядиса в червено $84 - (14 + 21) + 7 = 84 - 35 + 7 = 56$.

Така след като приятелите приключат боядисването ще има: 231 бели дъски, 77 зелени дъски и 56 червени дъски.

7 клас

Задача 1. а) Да се докаже, че уравненията

$$(x-1)^2-(x-2)^2+(x-3)^2-x^2=$$
$$=(x-2)^3+2(x-1)(x-7)+(1-x)(x^2+x+1)$$

и

$$\left|\left|(x-3)^2-(x-2)(x-5)\right|+\frac{2.(3,25^2-4,5.3,25+2,25^2)}{1,5^2-2,5^2}\right|=$$
$$=(1-x)(1+x)+(x-1)^2+2x$$

не са еквивалентни.

б) Да се провери за кои стойности на a и b изразът $M=a^2+6ab+10b^2-4b+4$ приема най-малка стойност.

Решение: а) Решаваме първото уравнение

$$(x-1)^2-(x-2)^2+(x-3)^2-x^2=$$
$$=(x-2)^3+2(x-1)(x-7)+(1-x)(x^2+x+1)$$
$$x^2-2x+1-(x^2-4x+4)+x^2-6x+9-x^2=$$
$$=x^3-6x^2+12x-8+2(x^2-8x+7)+1^3-x^3$$
$$-4x+6=-4x^2-4x+7$$
$$4x^2-1=0$$
$$(2x-1)(2x+1)=0$$
$$x_1=\frac{1}{2},\qquad x_2=-\frac{1}{2}$$

Решаваме второто уравнение

$$\left| \left|(x-3)^2-(x-2)(x-5)\right| + \frac{2.(3,25^2-4,5.3,25+2,25^2)}{1,5^2-2,5^2} \right| =$$
$$= (1-x)(1+x)+(x-1)^2+2x$$
$$\left| \left|x^2-6x+9-(x^2-7x+10)\right| + \frac{2.(3,25-2,25)^2}{(1,5-2,5)(1,5+2,5)} \right| =$$
$$= 1-x^2+x^2-2x+1+2x$$
$$\left| |x-1| + \frac{2.(1)^2}{(-1)4} \right| = 2$$
$$\left| |x-1| - \frac{1}{2} \right| = 2$$
$$(1) \quad |x-1| - \frac{1}{2} = 2$$
или
$$(2) \quad |x-1| - \frac{1}{2} = -2$$

Уравнение (2) няма решение. За уравнение (1) получаваме:
$$|x-1| = \frac{5}{2}$$
$$x-1 = \frac{5}{2} \text{ или } x-1 = -\frac{5}{2}$$
$$x_1 = \frac{7}{2},\ x_2 = -\frac{3}{2}.$$
Следователно уравненията не са еквивалентни.

б) Преобразуваме дадения израз
$$M = a^2+6ab+10b^2-4b+4 = a^2+6ab+9b^2+b^2-4b+4 =$$
$$= (a+3b)^2+(b-2)^2.$$
Изразът M е неотрицателен за всяко a и b и приема най-малка стойност 0, когато $a+3b=0$ и $b-2=0$. Така получаваме $b=2$ и $a=-6$.

Задача 2. Мария, Георги и Борислав трябва заедно да подготвят проект по „Компютърно моделиране и информационни технологии“. Ако работят едновременно, ще приключат проекта за 20 дни. Първоначално само Мария започва работа, а Георги и Борислав се включват последователно през равен брой дни. Трите приключат работата по проекта едновременно, като Мария е работила 4 пъти повече дни от Борислав. Колко дни е работил всеки от тях, ако производителността им е една и съща.

Решение: Производителността на Мария, Георги и Борислав е една и съща и нека я означим с p. Тогава общата им производителност е $3p$. Ако работят едновременно, получаваме $20.(3p) = 1$. Следователно $p = \dfrac{1}{60}$.

Нека означим с x броя дни, които е работил Борислав. Тогава Мария е работила $4x$ дни.

Георги и Борислав се включват поетапно през равен брой дни. Тези дни са равни на половината от времето от започването на работата по проекта от Мария и деня, в който се включва Борислав, т. е. $\dfrac{4x - x}{2} = \dfrac{3x}{2}$.

Това означава, че Георги е работил с $\dfrac{3}{2}x$ дни по-малко от Мария, или общо $4x - \dfrac{3}{2}x = \dfrac{5}{2}x$ дни.

Следователно за извършената работа последователно получаваме $4x\dfrac{1}{60} + \dfrac{5}{2}x\dfrac{1}{60} + x\dfrac{1}{60} = 1$, $\dfrac{15}{2}x = 60$, $x = 8$ дни.

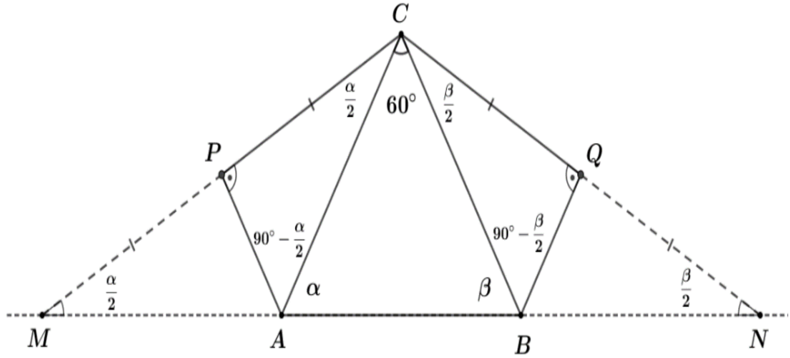
Така получаваме, че Мария е работила 32 дни, Георги — 20 дни, а Борислав 8 дни.

Задача 3. Даден е $\triangle ABC$ с $\sphericalangle ACB = 60^\circ$. През върха C са построени перпендикуляри към ъглополовящите на външните ъгли на $\sphericalangle CAB$ и $\sphericalangle CBA$. Нека петите на тези перпендикуляри са съответно точки P и Q като $CP = CQ$.

а) Да се намерят ъглите на $\triangle ABC$;

б) Ако $AB = 6\,\mathrm{cm}$, да се намери дължината на отсечката PQ.

Решение:



а) Да продължим правите CP и CQ до пресичането им с правата AB съответно в точки M и N. (2 точки) Нека $\sphericalangle BAC = \alpha$ и $\sphericalangle ABC = \beta$.

Ъглите $\sphericalangle MAC$ и $\sphericalangle BAC$ са съседни и следователно $\sphericalangle MAC = 180^\circ - \sphericalangle BAC = 180^\circ - \alpha$.

AP е ъглополовяща на $\sphericalangle MAC$, следователно $\sphericalangle PAM = \sphericalangle PAC = \dfrac{1}{2}\sphericalangle MAC = 90^\circ - \dfrac{\alpha}{2}$.

От сбора на ъглите в триъгълника $\triangle APC$ получаваме, че $\sphericalangle ACP = \dfrac{\alpha}{2}$.

Триъгълниците $\triangle\ APC$ и $\triangle APM$ са еднакви по II признак:

1. AP обща страна;
2. $\sphericalangle MPA = \sphericalangle CPA = 90^\circ$;
3. $\sphericalangle MAP = \sphericalangle CAP = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$.

Така получаваме, че $MP = PC$ и $\sphericalangle AMP = \dfrac{\alpha}{2}$.

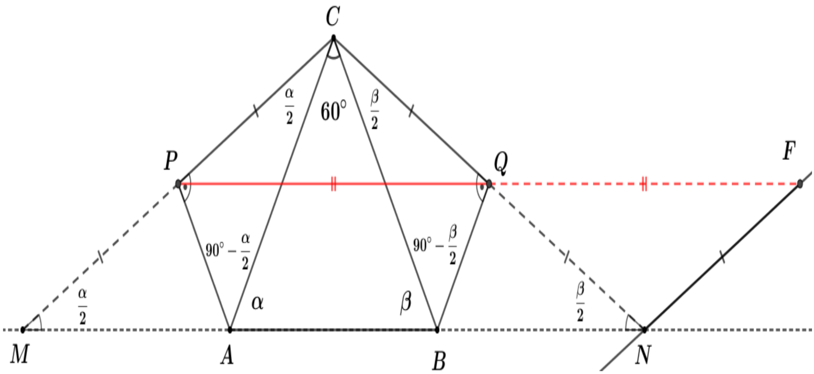
Аналогично, като разгледаме $\triangle BQC$ и $\triangle BQN$, получаваме, че $CQ = QN$ и

$\sphericalangle BNQ = \dfrac{\beta}{2}$.

По условие имаме, че $CP = CQ$. Доказали сме, че $MP = PC$ и $QN = QC$. Следователно $MC = NC$, т. е. $\triangle MNC$ е равнобедрен.

Оттук $\dfrac{\alpha}{2} = \sphericalangle AMP = \sphericalangle BNQ = \dfrac{\beta}{2}$.

Следователно $\alpha = \beta$, т.е. $\triangle ABC$ е равнобедрен. По условие знаем, че $\sphericalangle ACB = 60^\circ$ следователно $\triangle ABC$ е равностранен.



б) Построяваме права през точка N успоредна на MC и нека пресечната точка на тази права с правата PQ е точка F. Триъгълниците $\triangle PCQ$ и $\triangle QNF$ са еднакви по II признак:

1. $CQ = QN$;
2. $\sphericalangle NQF = \sphericalangle PQC$ — връхни ъгли;
3. $\sphericalangle PCQ = \sphericalangle QNF$ — кръстни ъгли.

Така получаваме, че $FN = CP = PM$. Следователно четириъгълникът $MPFN$ е успоредник. (2 точки)

Тогава $MN = PF = 2PQ$.

От доказаното в подусловие а) $\triangle ABC$ е равностранен, а $AM = AC = 6\,\text{cm}$ и $BN = CB = 6\,\text{cm}$ или $MN = 3.6 = 18\,\text{cm}$, т. е. $PQ = 9\,\text{cm}$.

8 клас

Задача 1. а) В училищен клуб по спорт участват 10 ученици. По колко различни начина можем да ги разпределим в три отбора по трима души с един съдия?

б) В спортния клуб организирали междуучилищен турнир. При записали се за участие 10 отбора, колко са общо срещите, които трябва да проведат помежду си за да сме сигурни, че всеки отбор се е срещнал с всеки един от останалите участващи отбори?

в) Ако при вече описания турнир в подточка б) за победа се дават по 3 точки на спечелилия отбор, а при равенство — по 1 точка на всеки от двата отбора, колко е броят на срещите, приключили на равно, ако общият брой на събраните точки от всички отбори е 114 (за загуба не се дават точки)?

Решение:

а) От 10 ученици, един съдия можем да изберем по 10 начина. Останалите 9, се разпределят по $C_9^3.C_6^3.C_3^3$ начина, но тъй като подредбата няма значение, делим на 3!, то $N = 10\dfrac{C_9^3.C_6^3.C_3^3}{3!} = \dfrac{10}{3!}\dfrac{9!}{6!.3!}\dfrac{6!}{3!.3!}\dfrac{3!}{3!.0!} = 2800$

Отговор: 2800

б) Всеки отбор се е срещал с останалите 9, което прави 10.9 =90 срещи , но всеки мач се брои 2 пъти, затова броят на срещите е $N = \dfrac{90}{2} = 45$

Отговор: 45 срещи

в) Нека с равенство са завършили x на брой срещи. Следователно общият брой на точките, получени от равни срещи е $2x$. Останалите $(45 - x)$ срещи носят $3.\,(45 - x)$ точки. Можем да съставим и решим следното уравнение:

$$2x + 3.\,(45 - x) = 114,\ x = 135 - 114,\ x = 21.$$

Отговор: 21 срещи

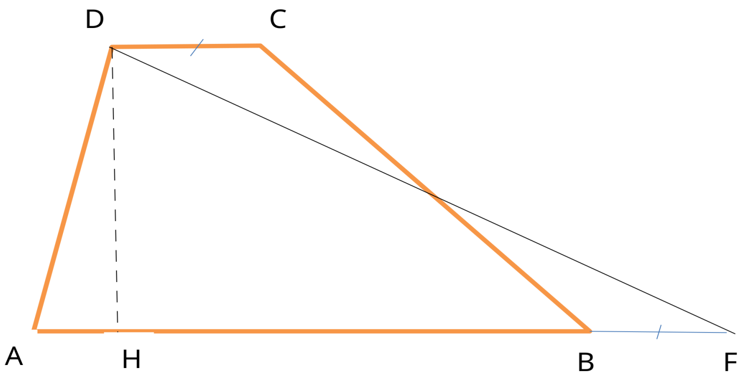
Задача 2. Даден е трапец $ABCD$ ($AB \parallel CD$) с отношение на основите $AB : CD = 3 : 1$. Ако сборът на двете основи и по-малкото бедро е 40 см, да се намери лицето на този трапец, който има най-голямо лице.

Решение: Построяваме точка $F \in \mathrm{AB}^{\rightarrow}$ такава, че $BF = CD = x > 0$. По условие имаме $AB : CD = 3 : 1$, откъдето $AB = 3x$.

Нека $DH = h$, където $H \in AB$ е височина в трапеца ABCD и AD е по-малкото бедро.

$$S_{\mathrm{AFD}} = S_{\mathrm{ABCD}} = \frac{(AB + CD)}{2}.\mathrm{DH}$$

$$S_{\mathrm{AFD}} = S_{\mathrm{ABCD}} = \frac{(3x + x)}{2}h = 2xh, \text{ където } h \leq AD$$



Ако сборът на двете основи и по-малкото бедро е 40 см, то $AD = 40 - 4x > 0$,

$x \in (0, 10)$

$S_{\mathrm{AFD}} = S_{\mathrm{ABCD}} = 2xh$

$S_{\mathrm{AFD}} = S_{\mathrm{ABCD}} = S_{\max} = 2xh$, когато $h \leq 40 - 4x$ приема най-голяма стойност за $h_{\max} = 40-4x$, т. е. когато $\triangle AFD$ е правоъгълен,

$\sphericalangle BAD = 90^\circ$

$S_{\text{ABCD}} = 2x(40 - 4x)$
$S_{\text{ABCD}} = 80x - 8x^2$
$S_{\text{ABCD}} = -8[(x-5)^2 - 25]$

Лицето на трапеца $S(x) = -8[(x-5)^2 - 25]$ приема максимална стойност за онова x, за което $S'(x) = (x-5)^2 - 25$ приема минимална стойност. Тогава $x = 5$ и $S'_{\text{min}}(5) = -25$. Следователно $S_{\text{max}}(5) = 200$ cm^2.

Отговор: 200 cm^2

Задача 3. Даден е квадрат $ABCD$ със страна 12 см. Точка N е среда на BC и AN пресича диагонала BD в точка P. Точката M дели страната DC в отношение 1:2, считано от върха D, а отсечката AM пресича диагонала DB в точката Q. Да се намери лицето на петоъгълника $PNCMQ$.

Решение: Ще изразим $S_{\text{PNCMQ}} = S_{\text{ANCM}} - S_{\text{APQ}}$. За да намерим S_{PNCMQ}, първо трябва да пресметнем S_{ANCM} и S_{APQ}.

Построяваме точката F — среда на MC и точка $O = AC \cap BD$. Следователно OF е средна отсечка в триъгълника ACM и $OF \parallel QM$.

Разглеждаме триъгълник DFO, в който точката M е среда на DF и $OF \parallel QM \Rightarrow$ QM е средна отсечка в DFO и точката Q е среда на DO.

Точка M дели страната DC в отношение $1 : 2$, считано от връх D, а точката F е среда на MC. Тогава $DM = MF = FC = 4$ cm и $S_{\text{ABCD}} = 12^2 = 144$ cm^2. Следователно $S_{\text{ACD}} = 72$ cm^2.

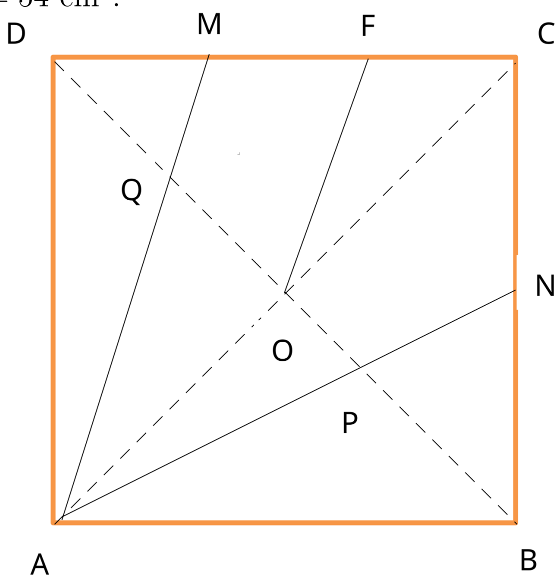
В триъгълника ACD имаме $\text{AC}^2 = \text{AD}^2 + \text{DC}^2$, откъдето $\text{AC}^2 = 288$ или $AC = \pm 12\sqrt{2}$. Но $AC > 0$, т. е. $AC = DB = 12\sqrt{2}$ cm . Следователно $DQ = QO = 3\sqrt{2}$ cm.

Разглеждаме триъгълник ABC, в който точката $P = AN \cap BO$. Откъдето точката P е медицентър в триъгълника ABC и $OP = \dfrac{1}{3}OB = 2\sqrt{2}$. Тогава

$$S_{\text{ANCM}} = S_{\text{ANC}} + S_{\text{AMC}} = \frac{6.12}{2} + \frac{8.12}{2} = 84 \text{ cm}^2.$$

За триъгълника APQ имаме $S_{\text{APQ}} = \frac{\text{QP.AO}}{2} = \frac{5\sqrt{2}.6.\sqrt{2}}{2} 30\ \text{cm}^2$.

Накрая намираме, че $S_{\text{PNCMQ}} = S_{\text{ANCM}} - S_{\text{APQ}} = 84 - 30 = 54\ \text{cm}^2$.

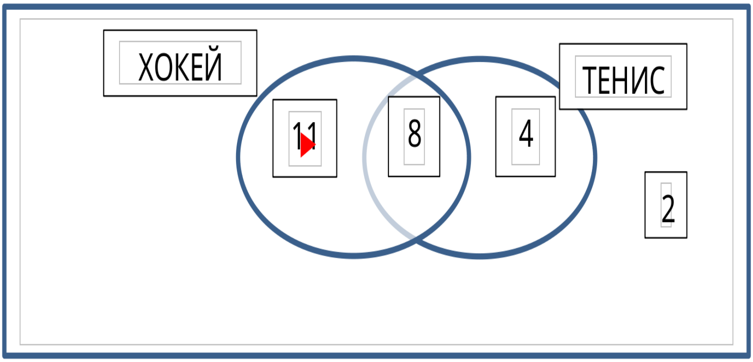


Отговор: $54\ \text{cm}^2$

9 клас

Задача 1. IX „а“ клас се състои от 25 ученици. 19 от тях тренират хокей, 12 играят тенис, а двама не спортуват. Каква е вероятността от случайно избрани 3 ученици, които тренират хокей, точно двама да играят и тенис?

Решение: Ще решим задачата с помощта на Диаграма на Вен.



Според условието на задачата, двама ученици не спортуват, откъдето остават 23 ученици, които тренират хокей или играят тенис. От $(19 + 12) - 23 = 8$ получаваме, че осем ученици тренират хокей и едновременно с това играят тенис. Следователно 11 ученици тренират само хокей, а 4 — играят само тенис.

Общият брой на комбинациите, с които можем да изберем един от 11 ученици е 11.

Общият брой на комбинациите, с които можем да изберем двама от 8 ученици се пресмята по формулата C_8^2.

Общият брой на комбинациите, с които можем да изберем трима от 19 ученици се пресмята по формулата C_{19}^3.

.

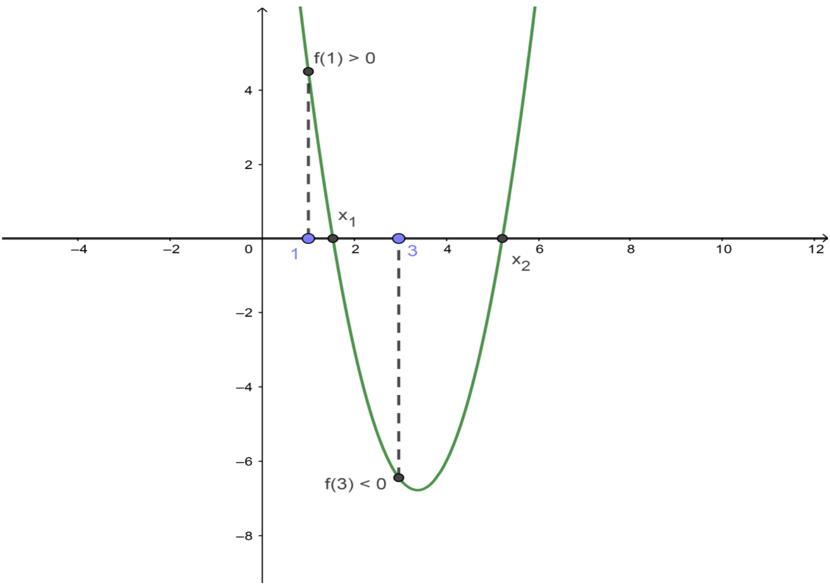
Вероятността на събитието X от случайно избрани трима ученици, един да е хокеист, а останалите двама едновременно да тренират хокей и да играят тенис е $P\left(X\right) = \frac{C_{11}^1.C_8^2}{C_{19}^3}$, т.е.

$$P\left(X\right) = \frac{C_{11}^1.C_8^2}{C_{19}^3} = \frac{11.\frac{8.7}{2.1}}{\frac{19.18.17}{3.2.1}} = \frac{11.28}{19.17.3} = \frac{308}{969}.$$

Отговор: $\mathrm{P}\left(X\right) = \frac{308}{969}$.

Задача 2. За кои стойности на естествения параметър m уравнението $2x^2 - 6mx + 16 = 0$ има два реални различни корена като единият е в интервала $(1,\, 3)$, а другият е по-голям от 3?

Решение: При $a > 0$ графиката на функцията $f\left(x\right) = 2x^2 - 6mx + 16$ е обърната нагоре:



Съгласно условието на задачата параболата трябва да пресича оста $Ox^{\rightarrow}$ в интервалите $(1,\,3)$ и $(3,\,+\infty)$. Това е изпълнено когато:

$$\left|\begin{array}{l} f(1)>0 \\ f(3)<0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} 2-6m+16>0 \\ 18-18m+16<0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} m<3 \\ m>\frac{17}{9} \end{array}\right.$$

Следователно $m \in \left(\dfrac{17}{9},\ 3\right)$ и от $m \in \mathbf{N}$ получаваме, че $m = 2$.

Проверяваме, че дискриминантата е положително число и заключаваме, че уравнението има два реални различни корена или даваме обоснован отговор че когато $f(3) < 0$, условието $D > 0$ е излишно.

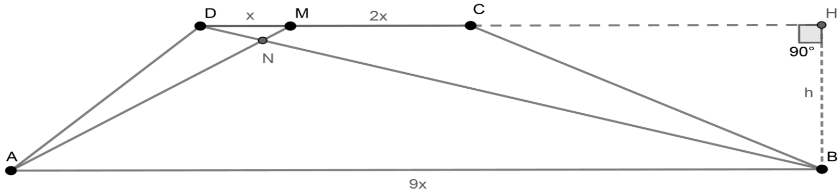
След заместване на $m = 2$ получаваме $2x^2 - 12x + 16 = 0$, $D = 1 > 0$. Следователно

$$x_1 = 2 \in (1,\,3), \qquad x_2 = 4 \in (3,\,+\infty).$$

Отговор: $m = 2$.

Задача 3. Даден е трапец $ABCD$ с основи AB и CD като $AB = 3DC$ и лице $S = 12$ см^2. Точка M лежи на основата CD, така че $CM : MD = 2 : 1$. Отсечката AM пресича диагонала BD в точка N. Да се намери лицето на четириъгълника $BCMN$.

Решение:



Доказваме, че Δ ANB $\sim$ Δ MND.

От Δ ANB $\sim$ Δ MND $\Rightarrow$ $\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{MD}} = \dfrac{9}{1} = k$. От свойствата на подобни триъгълници следва, че височините на Δ ANB и Δ MND имат отношение равно на k.

Изразяваме лицето $S_{\mathrm{BCMN}} = S_{\Delta\ \mathrm{BCD}} - S_{\Delta\ \mathrm{DMN}}$.

$S_{\mathrm{BCMN}} = \dfrac{1}{2}3xh - \dfrac{1}{2}x\dfrac{1}{10}h = \dfrac{29}{20}xh$.

$S_{\mathrm{ABCD}} = \frac{1}{2}.12x.h = 6xh$.

Намираме лицето на четириъгълника BCMN, като изразим отношението на лицата:

$$\frac{S_{\mathrm{BCMN}}}{S_{\mathrm{ABCD}}} = \frac{\frac{29}{20}xh}{6xh} = \frac{29}{120}.$$

$$\Rightarrow S_{\mathrm{BCMN}} = \frac{29}{120}S_{\mathrm{ABCD}} = \frac{29}{120}.12 = \frac{29}{10}\ \mathrm{cm}^2.$$

Отговор: $S_{\mathrm{BCMN}} = \dfrac{29}{10}\ \mathrm{cm}^2$.

10 клас

Задача 1. Да се реши уравнението: $\sqrt{x+6-6\sqrt{x-3}}+\sqrt{x+13-8\sqrt{x-3}}=3$.

Решение: Ще решим задачата с полагане.

Полагаме $\sqrt{x-3}=t\geq 0$. Оттук $x-3=t^2$ или $DM\colon x=t^2+3\geq 3$.

Заместваме в уравнението с t:

$$\sqrt{t^2+3+6-6t}+\sqrt{t^2+3+13-8t}=3.$$

Оттук $\sqrt{(t-3)^2}+\sqrt{(t-4)^2}=3$ и $|t-3|+|t-4|=3$.

1 случай. За $t\in[0,\,3)$ имаме, че $3-t+4-t=3$, откъдето $t=2\ \in DM$.

2 случай. За $t\in[3,\,4]$ получаваме, че $t-3+4-t=3$ или $t\in\varnothing$.

3 случай. За $t\in(4,\ +\infty)$ е в сила, че $t-3+t-4=3$, откъдето $t=5\ \in DM$.

Връщаме се към полагането и съответно получаваме $\sqrt{x-3}=2$ или $\sqrt{x-3}=5$. Оттук $x_1=7$ или $x_2=28$.

Правим проверка, че $x_1=7$ и $x_2=28$ са решения или обосноваваме, защо не е необходима такава.

Отговор: $x_1=7$ или $x_2=28$

Задача 2. За кои стойности на реалния параметър m уравнението $x^4-15x^2+m^2=0$ има четири реални корена, които образуват аритметична прогресия?

Решение: За кои стойности на реалния параметър m уравнението $x^4-15x^2+m^2=0$ има четири реални корена, които образуват аритметична прогресия?

Решение: Полагаме $x^2=t>0$ и получаваме квадратното уравнение $t^2-15t+m^2=0$.

Нека $0 < t_1 < t_2$, тогава $x_1 = -\sqrt{t_2}$, $\mathrm{x}_2 = -\sqrt{t_1}$, $\mathrm{x}_3 = \sqrt{t_1}$, $\mathrm{x}_4 = \sqrt{t_2}$. Ако x_1, x_2, x_3 и x_4, образуват аритметична прогресия, то е вярно, че

$$\mathrm{x}_4 - \mathrm{x}_3 = \mathrm{x}_3 - \mathrm{x}_2 = \mathrm{x}_2 - \mathrm{x}_1 = d,$$

точно когато

$$\sqrt{t_2} - \sqrt{t_1} = \sqrt{t_1} - \left(-\sqrt{t_1}\right) = -\sqrt{t_1} - \left(-\sqrt{t_2}\right).$$

Откъдето $\sqrt{t_2} = 3\sqrt{t_1} \Leftrightarrow t_2 = 9t_1$.

От формулите на Виет и основното свойство на аритметичната прогресия следва, че $\left|\begin{array}{c} t_1.t_2 = m^2 \\ t_1 + t_2 = 15 \\ t_2 = 9t_1 \end{array}\right.$. Откъдето

$\left|\begin{array}{c} t_1.t_2 = m^2 \\ t_1 + 9t_1 = 15 \\ t_2 = 9t_1 \end{array}\right.$, $\left|\begin{array}{c} t_1.t_2 = m^2 \\ t_1 = \dfrac{3}{2} \\ t_2 = \dfrac{27}{2} \end{array}\right.$, $\left|\begin{array}{c} m^2 = \dfrac{81}{4} \\ t_1 = \dfrac{3}{2} \\ t_2 = \dfrac{27}{2} \end{array}\right.$ и $m = \pm\dfrac{9}{2}$. Чрез непосредствена проверка се доказва, че за $m = \pm\dfrac{9}{2}$, корените на уравнението са реални.

Отговор: $m = \pm\dfrac{9}{2}$.

Задача 3. На катетите $AC{=}b$ *и* $BC{=}a$ на правоъгълен триъгълник ABC, външно за него са построени квадратите $ACPQ$ и $BCMN$ (точката $M \in \mathrm{AC}^{\rightarrow}$, а точката $P \in \mathrm{BC}^{\rightarrow}$). AN пресича BQ и BC съответно в точкатаD и точката F, а BQ пресича AC в точката E.

а) Да се намери разстоянието от връх C до отсечката EF.

б) Да се намери отношението на лицата на четириъгълник $EDFC$ и триъгълник ADB.

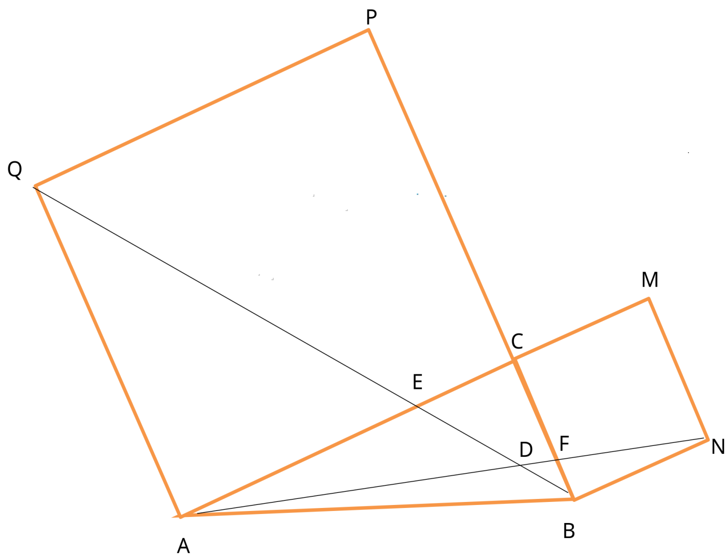
Решение: а) Означаваме с $(h > 0)$ разстоянието от точката C до отсечката EF и изразяваме лицето на триъгълника EFC по два начина: $S_{\mathrm{EFC}} = \frac{\mathrm{EF.h}}{2} = \frac{\mathrm{EC.CF}}{2}$.

Тогава $\triangle ACF \sim \triangle AMN$ и последователно получаваме $\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AM}} = \frac{\mathrm{CF}}{\mathrm{MN}}$, $\frac{b}{a+b} = \frac{\mathrm{CF}}{a}$, $CF = \frac{\mathrm{ab}}{a+b}$.

От $\triangle BCE \sim \triangle BPQ$ имаме $\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{BP}} = \frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{PQ}}$, $\frac{a}{a+b} = \frac{\mathrm{CE}}{b}$, $CE = \frac{\mathrm{ab}}{a+b}$ и $CF = CE = \frac{\mathrm{ab}}{a+b}$.

От триъгълника EFC получаваме, че $\mathrm{EF}^2 = \mathrm{EC}^2 + \mathrm{CF}^2$ и $EF = \pm\sqrt{\frac{2a^2b^2}{(a+b)^2}}$. Тъй като $EF > 0$, $a > 0$ и $b > 0$, то $EF = \frac{\mathrm{ab}\sqrt{2}}{a+b}$ и $S_{\mathrm{EFC}} = \frac{\mathrm{ab}\sqrt{2}}{(a+b)}.\frac{h}{2} = \frac{a^2b^2}{2.(a+b)^2}$. Окончателно $h = \frac{\mathrm{ab}\sqrt{2}}{2.(a+b)}$, тъй като $a > 0$ и $b > 0$.

б) Ще представим лицата на фигурите, чиито отношение търсим, като разлики от лицата на триъгълници: $S_{\mathrm{EDFC}} = S_{\mathrm{ACF}} - S_{\mathrm{AED}}$, и $S_{\mathrm{ADB}} = S_{\mathrm{ABE}} - S_{\mathrm{AED}}$. От $S_{\mathrm{ACF}} = \frac{\mathrm{AC.CF}}{2} = \frac{ab^2}{2(a+b)}$ и $S_{\mathrm{ABE}} = \frac{\mathrm{AE.BC}}{2} = \frac{ab^2}{2(a+b)}$ получаваме, че $S_{\mathrm{EDFC}} = S_{\mathrm{ADB}}$



Отговор: S_{EDFC}: $S_{\mathrm{ADB}} = 1 : 1$.

11 клас

Задача 1. Дадени са правите

$$g_1\colon 4x + y - 7 = 0, \qquad g_2\colon 8x - 3y + 1 = 0$$

и точка $S(3,5)$.

а) Намерете върховете на успоредник $ABCD$ с център S, на който две от страните лежат върху правите g_1 и g_2.

б) Намерете уравнението на окръжността с център S, допираща се до правата g_1.

Решение:

а) Единият от върховете на успоредника е пресечната точка A на правите g_1 и g_2. От системата $\left|\begin{array}{l} 4x + y = 7 \\ 8x - 3y = -1 \end{array}\right.$, получаваме, че $A(1,3)$. Ако $C(x,y)$ е срещуположният на A връх, то $\dfrac{1+x}{2} = 3$ и $\dfrac{3+y}{2} = 5$ и $C(5,7)$. Правата $g_1'\colon 4x+y-27 = 0$ е успоредна на g_1 и минава през точката C. Аналогично, правата $g_2'\colon 8x-3y-19 = 0$ е успоредна на g_2 и минава през C. Тогава пресечните точки B на g_1' и g_2 и D на g_2' и g_1 са другите два върха на успоредника. Решавайки системите $\left|\begin{array}{l} 4x + y = 27 \\ 8x - 3y = -1 \end{array}\right.$ и $\left|\begin{array}{l} 8x - 3y = 19 \\ 4x + y = 7 \end{array}\right.$, получаваме, че $B(4,11)$ и $D(2,-1)$.

б) Разстоянието от S до g_1 е $\left|\dfrac{4.3+1.5-7}{\sqrt{4^2+1^2}}\right| = \dfrac{10}{\sqrt{17}}$ и това число е радиусът на търсената окръжност. Тогава уравнението ѝ е $(x-3)^2 + (y-5)^2 = \dfrac{100}{17}$.

Задача 2. Дадена е редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, за която $a_1 = 2024$ и $a_n = \dfrac{1}{2}\left(a_{n-1} + \dfrac{2025}{a_{n-1}}\right)$ за всяко $n \geq 2$. Докажете, че редицата е сходяща и намерете нейната граница.

Решение:

Ясно е че $a_n > 0$ за всяко естествено n. От $a_n - a_{n-1} = \dfrac{(45-a_{n-1})(45+a_{n-1})}{2a_{n-1}}$ получаваме, че $a_n > a_{n-1}$ при $a_{n-1} < 45$ и $a_n < a_{n-1}$ при $a_{n-1} > 45$. От друга страна $a_n - 45 = \dfrac{(a_{n-1}-45)^2}{2a_{n-1}}$. Тогава редицата е монотонно намаляваща и ограничена отдолу от 45. Следователно тя е сходяща. При граничен преход в равенството $a_n = \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{2025}{a_{n-1}}\right)$ за границата $l = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ получаваме $l^2 = \frac{1}{2}\left(l + \frac{2025}{l}\right)$, от където $l^2 = 2025$. От $a_n \geq 45$ окончателно имаме $l = 45$.

Задача 3. Основата на триъгълната пирамида $ABCD$ е равнобедреният правоъгълен триъгълник ABC с хипотенуза AC. Околните ръбове DA, DB и DC сключват с равнината на основата ъгли равни на $45°$. Ако M е средата на DB, а N е средата на DC, намерете косинуса на острия ъгъл между правите BN и AM.

Решение:

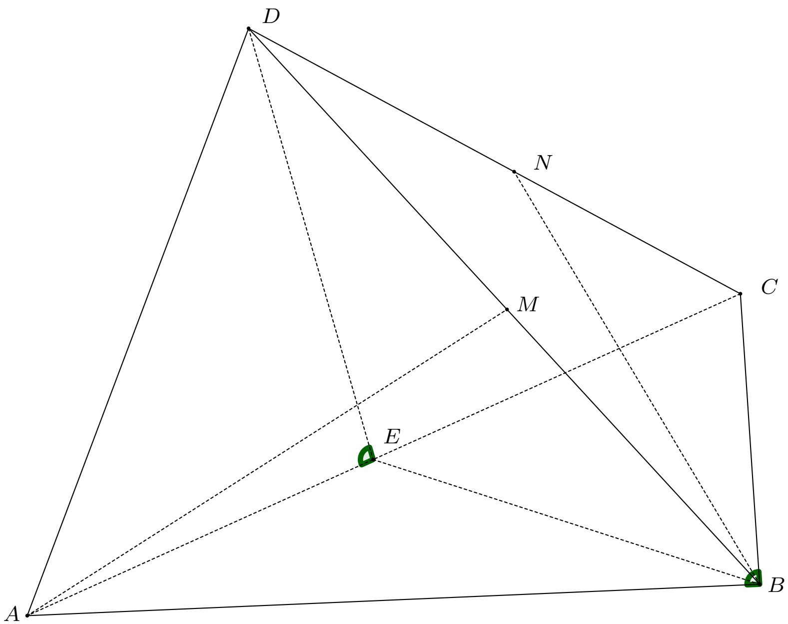
Нека E е средата на хипотенузата AC. От условието за околните ръбове получаваме, че проекцията на D върху основата ABC е центъра на описаната около триъгълника ABC, а това е точка E. Нека $AC = 2p$. Полагаме $\overrightarrow{\mathbf{a}} = \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{\mathbf{b}} = \overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{\mathbf{c}} = \overrightarrow{ED}$. Тогава $\overrightarrow{\mathbf{a}}^2 = \overrightarrow{\mathbf{b}}^2 = 2p^2$, $\overrightarrow{\mathbf{c}}^2 = p^2$ и $\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\overrightarrow{\mathbf{b}} = \overrightarrow{\mathbf{a}}\,\overrightarrow{\mathbf{c}} = \overrightarrow{\mathbf{b}}\,\overrightarrow{\mathbf{c}} = 0$.

От условието

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{EB}\right) = \\ = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathbf{a}} + \overrightarrow{\mathbf{b}}\right) + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathbf{c}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{\mathbf{a}}\right).$$

От $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{\mathbf{b}} + \overrightarrow{\mathbf{a}}$ получаваме $\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{\mathbf{a}} + \dfrac{3}{4}\overrightarrow{\mathbf{b}} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathbf{c}}$. По същия начин

$$\overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{\mathbf{c}}\right) + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathbf{a}} =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(-\overrightarrow{\mathbf{b}} + \overrightarrow{\mathbf{a}}) + \overrightarrow{\mathbf{c}}\right) + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathbf{a}} = \frac{3}{4}\overrightarrow{\mathbf{a}} - \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathbf{b}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathbf{c}}.$$



Тогава $\overrightarrow{AM}^2 = \overrightarrow{BN}^2 = \dfrac{3}{2}p^2$, $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BN} = \dfrac{1}{4}p^2$ и

$$\cos\sphericalangle(\overrightarrow{AM},\ \overrightarrow{BN}) = \frac{\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BN}}{\left|\overrightarrow{AM}\right|.\left|\overrightarrow{BN}\right|} = \frac{1}{6}.$$

12 клас

Задача 1. Дадени са правите

$$g_1\colon 4x + y - 7 = 0, \qquad g_2\colon 8x - 3y + 1 = 0$$

и точка $S(3,5)$.

а) Намерете върховете на успоредник $ABCD$ с център S, на който две от страните лежат върху правите g_1 и g_2.

б) Намерете лицето на успоредника.

Решение:

а) Единият от върховете на успоредника е пресечната точка A на правите g_1 и g_2. От системата $\left|\begin{array}{l} 4x + \ \ y = \ \ 7 \\ 8x - 3y = -1 \end{array}\right.$, получаваме, че $A(1,3)$. Ако $C(x,y)$ е срещуположният на A връх, то $\dfrac{1+x}{2} = 3$ и $\dfrac{3+y}{2} = 5$ и $C(5,7)$. Правата $g_1'\colon 4x+y-27=0$ е успоредна на g_1 и минава през точката C. Аналогично, правата $g_2'\colon 8x-3y-19=0$ е успоредна на g_2 и минава през C. Тогава пресечните точки B на g_1' и g_2 и D на g_2' и g_1 са другите два върха на успоредника. Решавайки системите $\left|\begin{array}{l} 4x + \ \ y = \ 27 \\ 8x - 3y = -1 \end{array}\right.$ и $\left|\begin{array}{l} 8x - 3y = 19 \\ 4x + \ \ y = \ \ 7 \end{array}\right.$, получаваме, че $B(4,11)$ и $D(2,-1)$.

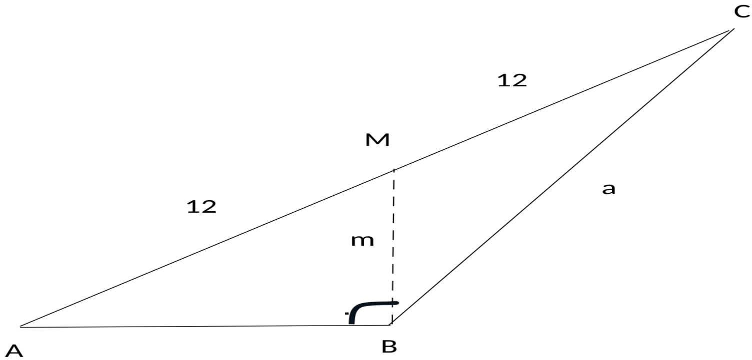
б) Намираме координатите на векторите $\overrightarrow{AB}(3,8)$ и $\overrightarrow{AD}(-1,4)$, откъдето последователно получаваме, че $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = 29$, $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{73}$, $\left|\overrightarrow{AD}\right| = \sqrt{17}$,

$$\cos\sphericalangle(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}) = \frac{29}{\sqrt{1241}}, \qquad \sin\sphericalangle(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}) = \frac{20}{\sqrt{1241}}.$$

Тогава лицето на успоредника е $\sqrt{73}\sqrt{17}\dfrac{20}{\sqrt{1241}} = 20$.

Задача 2. В триъгълника ABC медианата BM ($M \in AC$) е перпендикулярна на страната AB. Да се намери най-голямата стойност на периметъра на триъгълника ABC, ако е дадено, че $AC = 24$.

Решение:



Нека означим дължината на медианата BM с m. От формулата за дължината на медианата $4BM^2 = 2AB^2 + 2BC^2 - AC^2$ получаваме $BC^2 = 3m^2 + 12^2$. За периметъра на триъгълника ABC имаме $P(m) = 24 + \sqrt{12^2 - m^2} + \sqrt{3m^2 + 12^2}$, като $m \in (0, 12)$. Имаме $P'(m) = \dfrac{-2m}{2\sqrt{12^2 - m^2}} + \dfrac{3.2m}{2\sqrt{3m^2 + 12^2}} = m\left(\dfrac{3}{\sqrt{3m^2 + 12^2}} - \dfrac{1}{\sqrt{12^2 - m^2}}\right)$. Уравнението $P'(m) = 0$ има единствен корен $m_0 = \sqrt{96}$ в интервала $(0, 12)$. За $m > 0$ имаме, че $P'(m) > 0$ в интервала $(0, m_0)$ и $P'(m) < 0$ в интервала $(m_0, 12)$. Тогава функцията $P(m)$ расте в първия интервал и намалява във втория. Най-голямата стойност на периметъра на триъгълника се достига за $m = m_0 = \sqrt{96}$ и е $P(\sqrt{96}) = 24 + \frac{48}{\sqrt{96}}$.

Задача 3. Да се докаже, че ако k е естествено число, то уравнението

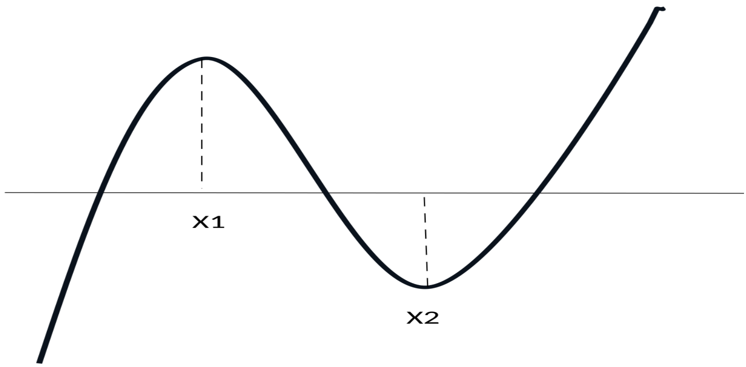
$$x^3 + 6kx^2 + 9k^2x + 3k^2 = 0$$

има три различни реални корена.

Решение: Разглеждаме функцията $f(x) = x^3+6kx^2+9k^2x+3k^2$. Имаме $f'(x) = 3x^2+12kx+9k^2 = 3(x^2+4kx+3k^2)$. Уравнението $f'(x) = 0$ има корени $x_1 = -3k$ и $x_2 = -k$, като от $k > 0$ имаме $x_1 < x_2$. Тогава $f(x)$ расте в интервала $(-\infty, x_1)$, намалява в интервала (x_1, x_2) и расте в интервала (x_2, ∞). Условието уравнението да има три различни реални корена влече условието $f(x_1)f(x_2) < 0$. Но

$$\begin{aligned} f(x_1)f(x_2) = &\big((-3k)^3 + 6k(-3k)^2 + 9k^2(-3k) + 3k^2\big) \times \\ &\times \big((-k)^3 + 6k(-k)^2 + 9k^2(-k) + 3k^2\big) = \\ &= 3k^2(-4k^4 + 3k^3) = 3k^4(-4k+3). \end{aligned}$$

Така $f(x_1)f(x_2) < 0$ за естествено k е равносилно на $-4k+3 < 0$. Последното е в сила за $k > \frac{3}{4}$ и е изпълнено за всички естествени k.



Мусала Софт, част от Qinshift, е водеща софтуерна компания, специализирана в IT консултиране, изграждане и внедряване на сложни и мащабни софтуерни проекти.

Сред клиентите на фирмата са: IBM, VMWare, SAP, Experian, Bosch, Deutsche Telekom, A1, Vivacom, Банка ДСК/OTP Group, ProCredit Bank, Commerzbank, Generali, BMW, Митническите служби на Холандия, НАП-България, Mubadala и др. Компанията влияе на европейско и глобално ниво чрез международните си инициативи като състезанието за програмиране CodeIT.bg, работата с образователни институции и неправителствени организации.

Диджитал Лайтс е българска софтуерна компания, разработваща иновативни решения в областите мобилност, космос, търговия и дигитален HR. Създадена през 2018-та година, компанията се нарежда сред най-бързо растящите компании в българския ИТ сектор за последните години и вече е носител на редица награди, сред които „Екип на годината" и „Най-добър нов бизнес" за 2023-та година (присъждат се от списание Мениджър), „Impact Star" (присъжда се от Deloitte) и други.

УЧАСТНИЦИ В МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ТУРНИР ВИДИН – ВРАЦА – МОНТАНА – БОТЕВГРАД

ПРОФИЛИРАНА ПРИРОДО-МАТЕМАТИЧЕСКА ГИМНАЗИЯ „ЕКЗАРХ АНТИМ I“ – ГР. ВИДИН

ПРОФИЛИРАНА ПРИРОДО-МАТЕМАТИЧЕСКА ГИМНАЗИЯ „АКАДЕМИК ИВАН ЦЕНОВ“ – ГР. ВРАЦА

ПРИРОДО-МАТЕМАТИЧЕСКА ПРОФИЛИРАНА ГИМНАЗИЯ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“ – ГР. МОНТАНА

ПРОФИЛИРАНА ПРИРОДО-МАТЕМАТИЧЕСКА ГИМНАЗИЯ „АКАД. ПРОФ. Д-РАСЕН ЗЛАТАРОВ“ – ГР. БОТЕВГРАД