**Софийски университет „Св. Климент Охридски”**
**Факултет по математика и информатика**

**Илиана Иванова Цветкова**

# ИЗВЪНКЛАСНАТА РАБОТА ПО МАТЕМАТИКА В НАЧАЛЕН И ПРОГИМНАЗИАЛЕН ЕТАП – ВАЖЕН ФАКТОР ЗА ОТКРИВАНЕ И РАЗВИВАНЕ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ТАЛАНТ

**Дисертация**

**за придобиване на образователната и научна степен „доктор“**
**в област на висше образование 1. Педагогически науки,**
**професионално направление 1.3. Педагогика на обучението по...**

**Докторска програма**
**„Методика на обучението по математика и информатика“**

**Научен ръководител**
**проф. Кирил Банков**

**София, 2023**

# Съдържание

# Увод

От април 2018 година България вече е член на Европейската STEM коалиция. STEM (Science, Technology, Engineering, Maths) е концепция за обучение, която се стреми да вдъхнови младите да се развиват в сферата на науката и технологиите. Целта ѝ е да се развие естественото любопитство на децата, учениците и студентите, творческият им потенциал, умението да наблюдават, да правят хипотези и изводи, да търсят решения, както и да правят подобрения и иновации. С този подход, те се учат да наблюдават, изследват, експериментират и обясняват, а не просто да запомнят и възпроизвеждат информация.

STEM науките и задълбоченото им изучаване в училище имат водеща роля за бъдещите постижения на учениците и тяхното образователно и професионално развитие, и косвено върху всички области на обществото. Някои от целите, които са заложени в Националната програма „Изграждане на училищна STEM среда“ на МОН (https://web.mon.bg/bg/100835) са:

Повишаване на мотивацията на учениците за учене по природни науки и математика;

Създаване на възможности за проектно-базирано обучение, интегративно знание, обучение по научни теми и промяна на образователните парадигми;

Повишаване на ангажираността, уменията и постиженията на учениците (дигитална грамотност; дигитални изкуства и креативност; умения, свързани с изискванията на индустрията; умения за разрешаване на реални проблеми от живота и бизнеса; математическо мислене; умения за създаване на технологични решения; работа в екип, критично мислене и др.);

Съществена роля за неформалното обучение в извънкласни занимания в STEM науките имат учителите, които мотивират учениците да участват в тях и ръководят тяхната подготовка.

“В бъдеще ще са необходими кадри със задълбочени познания по математика, информационни технологии, както и с добри дигитални умения. Сегашните деца ще трябва да могат да моделират, да създават дигитално съдържание “, беше заявено от министърът на образованието и науката в края на 2018 година (https://www.mon.bg/bg/news/3279). Очакванията бяха, че  над 16 500 занимания по интереси ще се провеждат в 2249 училища в страната до края на 2019 г. Близо 60% от тях са избрали направленията от STEM – „Дигитална креативност“, „Математика“, „Технологии“ и „Природни науки“.

Идеите на МОН за задълбочаване на познанията по математика и технологиите във връзка с участието на България в STEM коалицията, за мен не са нови. Като дългогодишен учител в СМГ, работата ми е тясно свързана със задълбочено развитие на математическите способности на изявени ученици още от началните класове в училище. Заявеното от МОН желание за насочена работа в тази насока е стимулът, който ме насърчи да напиша този дисертационен труд.

Като разглеждаме спецификата на работата с млади математически таланти, достигаме до изводите, че извънкласната работа, започнала в начален и прогимназиален етап, е съществена за развитието и реализацията на учениците. Правилно подбраните теми за извънкласна работа, разглеждани в развитие в няколко класа, дават възможност за по-пълно, дълбоко и трайно усвояване на знания. Подборът на задачите с нарастваща трудност, както и нестандартни задачи, провокиращи творческо мислене е съществен за създаване на успешни и реализирани млади таланти. Възможността за изява на състезания е силен допълнителен мотивиращ фактор за развитие на математическия талант.

Талантът се проявява чрез постиженията на конкретния ученик и развитието му трябва да бъде оценено. Най-често оценяването на математическите способности на талантливите деца става при явяването им на състезания. Тогава те са оценени от независима комисия и оценката се изразява в точки и подредба в класирането. Когато състезанията са отборни, оценка (класиране) получава целият отбор, но това не дава добра представа за участието на всеки отделен ученик при изпълнението на общата задача. В дисертационния труд е разгледан авторски метод за оценяване на индивидуалните участници при работа в екип.

**Целта** на тази дисертация е да се мотивира нуждата от развиване на математическия талант още от последните класове на началния етап или най-късно в прогимназиалния етап на образование. Това дава възможност за пълно разгръщане на таланта и неговата реализация в средното училище, а по-късно в университета и в живота като цяло.

**Актуалността** на избраната тема се обуславя от необходимостта:

- ✓ да се разгърнат уменията, способностите и потенциала на учениците в областта на математиката, информатиката и технологиите;
- ✓ да се открият, развият и подкрепят математическите таланти и да се спомогне за тяхната реализация и личностно развитие;
- ✓ да се формират и развият у учениците потребности за самостоятелно развитие на компетентности, съществени за реализацията в живота

**Хипотеза** – Ранното откриване и целенасоченото развитие на математическия талант е предпоставка за неговата успешна реализация.

Акцентът е върху откриването, развитието и реализацията на математическия талант.

**Обектът на изследването е** извънкласната работа (организация, обем, съдържание и методи) по математика с ученици от 8 до 14 годишна възраст.

**Предметът на изследването е** създаване на интерес към извънкласните занимания по математика на ученици посещаващи школи по математика към СМГ, от втори до седми клас, както и методи на формиране на познавателни умения, откриване, развиване и обучение на математически таланти.

За постигане на поставената цел са изпълнени следните **задачи**:

1. Проучване на методическа, педагогическа и психологическа литература на утвърдени автори, с фокус развитие и реализиране на таланти, математически таланти и състезателна математика.

2. Анализиране и синтезиране на изучените идеи и предлагане на модел за реализиране на обучение, в което максимално се развива математическия талант и ефективно се реализира в училище и след завършване на средно образование.

3. Разработване на методически материали за извънкласна работа по математика.

4. Разработване на методика за оценяване на индивидуалните ученици при работа в екип (например, при отборни състезания).

5. Провеждане на анкетно проучване сред ученици и родители относно влиянието на обучението в извънкласни занимания по математика и реализацията им на различни математически състезания и в живота.

Използваните в изследването методи са:

1. Проучване на методическа, педагогическа и психологическа литература на утвърдени автори по изследвания проблем.

2. Анализ и синтез на теоретичното проучване на поставения проблем и изграждане на авторската концепция.

3. Педагогическо наблюдение.

4. Анкетно проучване.

5. Статистическа обработка на получени анкетни данни.

Дисертационният труд се състои от:

*Увод*.

Глава 1. *Ролята на извънкласната подготовка и състезанията за откриване и развиване на математическия талант*. В тази глава се разглеждат теоретични постановки свързани с работа с талантливи и надарени ученици и спецификата на работата с деца с математически талант. Разглежда се ролята на извънкласните форми на работа за развитие и изява на таланта.

Глава 2. *Анализ на учебните програми по математика в начален и прогимназиален етап*. Главата съдържа кратък преглед на учебните програми по математика за задължителна подготовка и тяхното надграждане в програмите за извънкласна работа по математика по които предимно работи авторът и други негови колеги в СМГ. Прави се анализ на съдържанието им.

Глава 3. *Педагогически експеримент на изследването*. Тук се разглежда спецификата на видовете педагогически изследвания и подходи. Обосновава се защо за това изследване избран качествения подход. Представени са някои от постиженията на учениците, с които е работил авторът.

Глава 4. *Системи от задачи*. В тази глава са систематизирани задачи по определени тематики, които дават възможност за надграждане в различни класове.

Глава 5. *Оценяване на математическия талант*. В тази глава се разглеждат основни принципи при оценяване и авторска методика на оценяване на индивидуални ученици при работа в екип.

*Заключение.*

*Използвана литература.*

*Приложения*.

# ГЛАВА 1. Ролята на извънкласната подготовка и състезанията за откриване и развиване на математическия талант[1]

**Математически талант – що е то?**

Какво е талант и кой може да се нарече талантлив? Има ли разлика между талантлив, надарен и изявен ученик? В книгата на Серебряков и Лангер (1999, с. 82) се отбелязва, че *терминът надарен като описание на много умно дете, е бил приет вместо интелигентен или способен, защото се очаква да е с по-широк обхват и да включва и деца с други таланти, различни от тези, които са пряко свързани с интелигентността.* По-нататък авторите подчертават, че по-подходящо би било да се използва понятието *надареност*. Надарени са децата, чието умствено развитие е над средното и способностите им се развиват толкова бързо, че имат нужда и полза от специално подбрани образователни програми. Табов (2004, с. 31) подчертава, че талантът може да се интерпретира като *творческа надареност* и предпочита да говори за *изявени ученици* – такива, които проявяват комбинация от естествени пасивни заложби и активни под формата на стремеж към тяхната реализация чрез участие в различни състезания и допълнително (извън рамките на учебната програма) обучение. В настоящия труд ще приемем терминът *изявени ученици*, защото той позволява да се избегнат някои нюанси, които носят другите гореспоменати понятия, въпреки, че често се приемат за взаимозаменяеми. Специално внимание е отделено на ранното откриване на пасивните заложби на талантливия ученик, което може да стане още в началния етап на обучение и се обръща внимание на въпроса защо е важно да се развият активните аспекти от таланта колкото е възможно по-рано.

Първата стъпка е да бъде открит таланта, следващата е да се развие, а третата е да се съхрани.

**Как да разпознаем (открием) таланта?**

Талантът е като самородното злато. Първо трябва да положим усилия да го открием, пресявайки много пясък. След това трябва да го обработим и полираме, за да заблести. Математическият талант също трябва да бъде търсен и то сред малките ученици. Те все още не са научени на клишета, не са тренирани да изпълняват процедури и не са наплашени, че математиката е страшна. В тази възраст може лесно да се открие кой има математически заложби, защото формалните знания, придобити в училище, са все още малко и за откриването на решението на по-труден казус се изисква предимно логическо мислене.

Повечето родители смятат детето си за талантливо, но има разлика между ученик с високи постижения в училище и дете, което е интелектуално надарено. Откриването на таланта в ранните училищни години не винаги е лесна задача. Все пак надарените деца имат специални

[1] Голяма част от тази глава е публикувана в Цветкова, 2023.

черти, които могат да помогнат за идентифицирането им сред останалите ученици. Серебряков и Лангер (1999, с. 83) определят 20 показатели, които според тях са характерни за талантливите деца:

*Ако децата ви са надарени, те може:*

- *Да притежават силни способности за мислене, да работят с абстракции, да обобщават конкретни факти, да разбират значения и да виждат взаимовръзки.*
- *Да проявяват голямо интелектуално любопитство.*
- *Да учат лесно и с готовност.*
- *Да имат широк кръг интереси.*
- *Да притежават силна способност да приковават внимание, която им позволява да се концентрират и да упорстват при решаване на задачи и преследване на интереси.*
- *Да превъзхождат с речника си количествено и качествено другите деца на тяхната възраст.*
- *Да имат способност да работят ефективно и самостоятелно.*
- *Да се научат да четат рано.*
- *Да проявяват голям интерес към наблюдение.*
- *Да показват инициатива и оригиналност в интелектуалната работа.*
- *Да проявяват будност и бърза реакция към нови идеи.*
- *Да са в състояние да запомнят бързо.*
- *Да проявяват жив интерес към природата на човека и вселената.*
- *Да притежават необикновено въображение.*
- *Да проследяват лесно сложни упътвания.*
- *Да четат бързо.*
- *Да имат няколко хобита.*
- *Да четат с интерес литература в различни области.*
- *Често и ефективно да използват библиотека.*
- *Да превъзхождат другите по математика, особено при решаване на задачи.*

От това се вижда, че едно талантливо дете трябва да притежава комбинация от интелектуални, емоционални и психологически качества. Неслучайно в днешно време се говори не просто за интелигентност, а за различни видове интелигентност: логико-математическа, физическа, лингвистична, емоционална и др. (Гарднър, 2014) Откриването на способностите на децата е обект на съвместната работа на родители, психолози и педагози. Понякога талантливите деца крият способностите си, за да се приспособят и да се слеят с групата на популярните деца в класа, като това невинаги съвпада по приоритети с високото ниво на образование. В книгата „Проверете интелигентността на вашето дете“, авторите подчертават, че силният контраст между надареното дете и съучениците му не винаги е добре приет. Той дори може да попречи на развитието на детето и по този начин да лиши обществото от реализацията на таланта му. Надарените деца обикновено се превръщат във влиятелни и проспериращи възрастни хора, които максимално допринасят развитието на обществото и съхраняването на света за следващото поколение. Най-често те са тези които могат най-много да спомогнат за решаване на сериозни световни проблеми, с които се сблъсква човечеството. Това ни дава сериозно основание положим усилия за оказване на всестранна помощ на тези деца, за да имат възможност да разгърнат потенциала си (Серебряков и Лангер, 1999, с. 89).

Разбира се в основата стои семейството – там най-често за първи път са забелязани и развити качествата на детето. В изследванията на ранното детско развитие има всеобщ консенсус, че този период е от ключово значение за развитието на интелекта на едно дете. „Бъдещите способности на детето и тяхната ефективност са силно повлияни от предучилищната му домашна среда.“ (Серебряков и Лангер, 1999, с. 91). Много често семейната среда не е достатъчна да развие и подкрепи математическия талант на едно дете. Понякога родителите са твърде заети, за да се занимават целенасочено с подготовката на детето си или не притежават знанията и нямат компетентностите, които са необходими за обучението на надарено дете. Бързата, гъвкава и нестандартна мисъл, която притежават тези деца, понякога е плашеща и дори учителите в начален курс, които не са с математическо образование, усещат, че нямат капацитет да развиват способностите на такива деца. Мъдрите учители насочват тези деца към състезания по математика, където да се тества талантът и евентуално се провежда специализирана подготовка.

В България има няколко състезания по математика за ученици в началното училище. Дори за I клас има международни (Европейско кенгуру, Математика без граници, Бобър), национални (Математически турнир „Иван Салабашев“, Черноризец Храбър“, Viva математика с компютър) и регионални състезания по математика (Софийски математически турнир, Коледно и Великденско математическо състезание). Тези събития са най-добрите места, където могат да бъдат открити талантливите и надарени ученици. Родителите, които смятат детето си за надарено или изключително, обикновено го записват за участие в някои от тези състезания. Резултатите от състезанието и възможността за сравняване с постиженията на останалите участници дават възможност да се направи по-ясна преценка за способностите на детето. Понякога учителите могат да преценят това по-добре, защото мнението им е много по-обективно и базирано на по-широк поглед върху способностите на повече ученици. Ето защо учителите също могат да имат съществен принос в откриването на надарените деца (Tsvetkova, 2016.).

Състезанията по математика за учениците от начален курс продължават от 60 до около 120 минути. Повечето от задачите са с избираем отговор, тъй като по-малките ученици изпитват затруднение да представят пълно и аргументирано решение. Също така, този вид задачи са с по-кратки условия, което улеснява прочитането и възприемането им от деца, които скоро са се научили да четат и да разбират текст. Тези състезания са добър стимул за родителите, които смятат детето си изключително или надарено, да проверят дали наистина детето притежава математически способности и ако преценят, че е така, да го насочат за подготовка в извънкласни дейности, предлагани от профилните математически гимназии. Това понякога правят и учителите в начален курс, забелязвайки пъргавия ум или логическата мисъл у някое дете.

Табов (2004) показва дълбоките връзки между селекцията и мотивацията при съвременните форми на работа с изявените ученици и обосновава схващането, че *процесът на продължаваща в цялата училищна възраст от III – IV клас селекция на учениците с математически способности е и един от мощните стимули за продължаване и интензификация на интересите и усилията за усъвършенстване на математическите им познания.* Той прави извода, че *системата на състезания по математика през училищната възраст на децата влияе и става стимулиращ и мотивиращ елемент в допълнителното (извънкласно) обучение по математика.*

**Как да развием и съхраним таланта?**

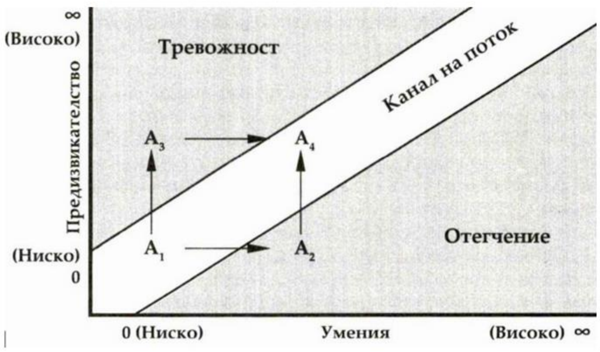
След откриването на таланта, той трябва да се развие. Това може да стане с целенасочена продължителна работа, както от детето и неговия ръководител/учител. Учителят е този, който знае как да насочва и направлява подготовката на ученика, да му дава възможност за изява, която да повиши мотивацията за още работа, която да доведе да по-пълна реализация на таланта.

Проучване на британското Министерство на образованието (Marland, 1971). води до заключение, че изявените деца показват признаци на талант чрез висок коефициент на интелигентност (IQ) още в ранна детска възраст, но сам по себе си висок IQ не е гаранция за успех. Подчертава се ключовата роля, която играят амбицията, енергията и решителността, както и семейната и социалната среда. *Много умните деца могат да са с еднакви интелектуални способности, но те са изключително различни като личности интереси и постижения* Ролята на учителя е не само да обучава талантливото дете в академичен аспект, но и да се стреми да му подсигури подходяща среда, за да може да развие таланта си. Най-напред трябва да му се помогне ефективно да учи и научава. След това да се насочи към подходящи цели и да му се даде възможност да провери напредъка си. За оценяване на ефекта от обучението трябва да се определи измерител. Талантът е конструкт, който подлежи на измерване. За някои аспекти на измерването на таланта е посветена глава 5.

В изследването на Министерството на образованието във Великобритания (Marland, 1971) се посочва, че много често надарените деца не разгръщат пълния си потенциал и въпреки, че показват по-високи от средните резултати, не успяват да покажат максимално способностите си. Най-честата причина за това е липсата на стимули. Освен стимулираща среда, над 70% посочили, че им липсва квалифициран човек – наставник, който да работи целенасочено с тях.

Такъв наставник за талантливите в математическа насока ученици най-често е учителят по математика. Какви качества трябва да има той, за да може да разпознае и ефективно да подкрепи талантливия ученик? В хабилитационния труд Банков (2012) посочва, че *така се приближихме до друго професионално изискване към учителя по математика: да умее да представя сложни математически идеи във вид, в който те могат да бъдат представени на учениците. Една от силните страни на математиката е възможността идеите да се „компресират" в силно абстрактен вид. Така, използвайки подходящи символи за представяне на математическите абстракции, математиците изучават съответните обекти и структури, въвеждайки нови идеи в същия абстрактен вид. В работата си учителят трябва да „разопакова" онова, което математиците са компресирали.* Подготовката на учителите по математика трябва да съдържа две основни части. Те трябва да са добре подготвени като математици, да са добре запознати с дяловете от математиката, които се изучават в училище, с тяхната структура, логически връзки между тях, методите на доказателства. Това е една от основните цели на академичната им подготовка. Другата е свързана с педагогическите им умения, които трябва да усвоят. Тъй като една от целите на обучението е учениците да запомнят и разберат онова, което учат, голямо внимание се отделя на този елемент от обучението по математика. От гледна точка на дидактиката на математиката, освен изучаването и познаването на математическите връзки, важно е още да се разбере какво означава *да се изгражда математическа теория, да се дават валидни аргументи, да се оценяват аргументи, изказани от други, да се осъзнае значението на математиката зад границите на ежедневието* (Банков 2012, с. 237).

Тази последна област свързана с контакта „ученик-учител" е изключително важна. Един внимателен и опитен учител може точно и вярно да прецени как да подбере учебния материал и как да го поднесе на своите ученици така, че да провокира интереса им, да ги мотивира да работят активно и да развиват своите индивидуални качества. Подборът на задачите трябва да е съобразен с нивото на подготовка на учениците, техните лични интелектуални и емоционални качества, да бъде за тях предизвикателство, да ги мотивира да работят на горния праг на възможностите си, без обаче да ги стресира или демотивира с прекалено трудни и изглеждащи непостижими за тях задачи. Това е обяснено в книгата „Поток" на Михай Чиксентмихай. Той развива концепцията за поток като *състоянието, при което човек е така потопен в заниманието си, че сякаш нищо друго няма значение* (Чиксентмихай 2016, с. 10). После доказва, че всички дейности, които се извършват в състояние на поток, пораждат чувство




*Защо комплексността на съзнанието нараства в резултат на потоковите преживявания*

*Фиг. 1. Развитието на човек при определена дейност*
*Източник: (Чиксентмихай, 2016)*

за откривателство и мотивират човека да се развива и правят Аза му по-комплексен. На Фигура 1 е изобразено развитието на човек при конкретна дейност. По двете оси са отбелязани уменията и предизвикателствата. В началото на дейността човек няма почти никакви умения и минимално постижение е предизвикателство за него (точка А1), но той е в потока. Ако бързо подобри уменията си, без да се променят предизвикателствата, настъпва отегчение (точка А2); ако предизвикателството е твърде голямо настъпва тревожност (точка А3). За да попадне отново в потока, човекът трябва едновременно да подобри уменията си и да повиши предизвикателствата. Затова за да развиват таланта на учениците, задачите поставени пред тях трябва не само да звучат забавно, но и умерено предизвикателно, без да са прекалено лесни.

Съхраняването на таланта е може би най-важната част от работата ни. Ако едно талантливо дете, което вече е изявило своите способности не бъде поставено в подходящата среда – конкурентна, но и подкрепяща, най-вероятно талантът му ще залинее и няма да може да се разгърне и изяви.

В програма във Великобритания, ръководена от д-р Бриджис, наречена Брентуудският експеримент (Inglis, 1971), група надарени деца са изведени от училище и в продължение на 30 седмици са занимавани допълнително. Първият проблем, който възникнал бил, че не могат да се намерят подходящи учители за тях. В обичайната среда учителите не се срещали с деца с толкова пъргав ум, способност за правене на нестандартни логически връзки и бърз темп на учене. Попадайки сред толкова надарени деца, преподавателите били несигурни в подготовката си и силно обезпокоени. От експеримента станало ясно, че когато надарените деца се обучават в среда с преобладаващ брой деца със средностатистически възможности, те свикват със занижените очаквания на учителите и родителите, съответно и те снижават изискванията към самите себе си. Целта на експеримента била да покаже, че попадайки в конкурентна среда, сред деца със сходни интереси и таланти, надарените повишават изискванията към себе си и стават по-самокритични.

Друг недостатък на съвместното обучение на средноинтелигентни и талантливи деца е „тенденцията към нетърпеливост“. Според резултатите от Брентуудският експеримент, надарените деца бързо правят това, което учителят им възлага, уморяват се и се отегчават и това положение може да доведе до развитие на „пеперуден ум“ – такъв който трудно се концентрира, освен ако на детето не се предложи достатъчно предизвикателства и стимули. Става ясно, че учениците показват слаби постижения, когато имат сили в излишък над това, което изисква в училище. *Такова дете може да бъде първо в класа и пак от гледна точка на интелектуалните му дарби да има слаби постижения*“ (Серебряков, Лангер, 1999, стр. 89 – 90). В тези случаи остава измамното усещане, че детето показва високи постижения, защото те са такива спрямо резултатите на останалите деца, но са слаби в сравнение с интелектуалните възможности на талантливото дете. *Затова недостатъчната изява може да остане* *неразпозната, така че детето да плува в плитки води напълно задоволително, но използвайки малко от своите способности* (Серебрякови Лангер, 1999, стр. 90 – 91).

Надарените деца понякога несъзнателно поставят ниски прагове пред себе си. За учениците, които са свикнали с бърз и лесен успех, е предизвикателство да се срещнат със собствените си грешки и провали. Те не само трябва да се научат да приемат неуспеха, но по-важното е, да се научат да си поставят високи цели. При поставянето на целите също трябва да се търси баланса. Ако целта е прекалено висока, детето може да се обезкуражи и да се откаже, особено ако мине през прекалено много провали и неуспехи. Целта трябва да е винаги малко над възможностите, за да е възможно да бъде достигната, но с цената на известни усилия, така че да се избягват продължителни поредици само от успехи или само от провали.

Надареното дете, според Бриджис, *се нуждае от много учене, доста повече от нормалното* и *идеята за надареното дете, което само си проправя път и само се оправя* е напълно погрешна (Серебряков и Лангер, 1999, с. 91)

**Как талантът да намери своята изява?**

На практика тези теоретични постановки са реализирани в работата на Софийска математическа гимназия „Паисий Хилендарски“. Още през 80-те години на 20-ти век започва експериментално обучение на ученици отначало в шести клас, а по-късно и в пети клас, които имат подчертан интерес и талант в математиката. Подборът на учениците се прави въз основа първоначално на един изпит, а по-късно на база на резултатите от няколко състезания по математика. Най-важното състезание, което има най-голяма тежест при образуване на приемния бал е „Откриване на млади таланти“, което до скоро беше организирано от самото училище, а последните години стана национално. През последните 20 години, учениците, проявяващи интерес и талант в математиката, започват подготовка още от началното училище, като да се насочват към по-специализирано обучение по математика. Това е необходимо, защото всеки талант трябва да се подкрепя, развива и стимулира. Софийската математическа гимназия предлага възможност за обучение и развиване на математически умения за ученици от 2. до 4. клас, като им предлага извънкласни занимания в събота и неделя. Висококвалифицирани учители обучават тези ученици да решават нестандартни задачи, помагайки им да развият логическото си мислене. Това обучение не надхвърля знанията по аритметика, придобити по време на задължителното обучение, но подчертава тяхното нестандартно приложение. Учителите използват диаграми, таблици, схеми и т.н., за да активират интелектуалните способности на учениците.

Повечето ученици, които посещават тези извънкласни дейности, запазват интереса си към математиката и развиват математическите си способности. След като завършат 4. клас, кандидатстват за обучение в Софийска математическа гимназия и други специализирани училища с акцент върху обучението по математика (ПЧМГ, 125. ОУ, ЧУ „Св. София“ и др.).

Състезанието „Откриване на млади таланти“ се състои от 15 задачи с избираем отговора, 5 задачи с кратък отворен отговор и 2 задачи, чието решение трябва да бъде подробно обяснено и обосновано.

Учениците, приети да учат в Софийската математическа гимназия, могат да получат допълнително обучение по математика. За тях училището организира извънкласна работа по математика, 3 – 4 учебни часа седмично, предимно в събота. Учителите по математика от училището са разработили специално подготвени програми за това обучение. Тези програми разширяват темите, изучавани в училище, а също така съдържат някои теми, които не се изучават в задължителния учебен план. Участието в тези извънкласни занимания не е задължително и е безплатно за учениците. В по-младите възрастови групи (класовете от 5. до 7.) има много ученици, които желаят да посещават тези дейности. По-късно, когато трудността на изучавания материал се увеличава, броят на участниците намалява. Обикновено тези, които отпадат от извънкласни занимания са ученици, които постигат добри резултати главно благодарение на старанието и трудолюбието си, без да имат специален математически талант. Някои талантливи ученици са немотивирани, небрежни и непостоянни. Те също напускат заниманията.

В своята книга *Изключителните* Малкълм Гладуел критикува доминантното послание в обществения дискурс, което твърди, че успехът на индивида може да бъде обяснен изцяло с личните му качества. Той подробно изследва скритите предимства, менторството, културното наследство и дори случайността, които могат да изиграят ключова роля във формирането на характера, упорството и уникалната перспектива, която носят хората, които виждаме като изключително успешни и изявени (Гладуел, 2010, с. 27). Обучението в специализирано училище е едно от тези предимства за развиването и реализацията на математическия талант.

Въпреки, че не отрича важността на вродените способности за постигането на успех, Гладуел подчертава, че дарбата по рождение играе много по-незначителна роля в сравнение с подготовката. *Нещо повече – хората на върха работят не само повече или много повече от другите. Те работят много, **много** повече* (Гладуел, 2010, с. 46) Идеята, че съвършенството при изпълнение на някаква сложна задача изисква фиксиран минимум практика, изплува отново и отново в изследванията по въпросите за експертните способности. Всъщност изследователите са съгласни, че е налице нещо което те наричат магическо число на истинското експертно познание: десет хиляди часа.

Изследвания проведени с професионалисти в широк спектър от области и експертизи сочат, че това е минималното време целенасочена практика, което е необходимо за да се достигне до майсторство на световно ниво. Резултатите са повторени при изучаване на композитори, баскетболисти, писатели, кънкьори, концентриращи пианисти, шахматисти и др. *Досега никой не е попаднал на случай, в който майсторството от световна класа да е постигнато за по-малко време. Изглежда това е периодът необходим на мозъкът да* *асимилира всичко необходимо за постигането на истинско майсторство* (Гладуел, 2010, с. 48 – 49).

Разбира се, десет хиляди часа осъзнати упражнения могат да отнемат 3, 10 или 20 години, в зависимост от интензивността на работата, а и проучванията уточняват, че това е минимума, но не е единственото условие да се постигне майсторство на световно ниво. Все пак е добра индикация за това, че колкото по-рано започне да се развива математическото мислене у надарените ученици, толкова по-скоро има вероятност да достигнат до майсторство от този ранг.

Изследователят М. Гладуел разказва за експерименталното държавно училище Академия KIPP (съкращението идва от Knowledge Is Power Program) и конкретно за обучението по математика. Той обяснява, че стандартният подход за обучение по математика поощрява тези, които схващат бързо, а не тези които мислят задълбочено. Бързото темпо на обяснение на сложни и абстрактни математически модели създава усещането, че някои ученици се справят с математиката, а на други не им върви и това ги поставя в „кутийки“ от ранна възраст. Всъщност, математическото мислене понякога изисква да забавим темпото, да направим проверка, да разгледаме алтернативи, преди да прибързаме с отговора. Изследванията показват, че когато забавим скоростта резултатите са по-добри, материалът се усвоява по-качествено и запаметяваме повече (Гладуел 2010, с. 271). За да направим математиката смислена, трябва да позволим на учениците си да видят тясната взаимовръзка между усилията, които полагат и възнаграждението, което получават под формата на знания, умения и самочувствие.

Подготвяйки се за обучение и попадайки в Софийска математическа гимназия, нашите ученици имат условията да се упражняват целенасочено, под ръководството на добри професионалисти, приблизително осем – девет хиляди часа. Ако приемем, че едно дете е посещавало подготвителен курс във 2., 3. и 4. клас (което е вярно за почти всички ученици, приети в 5. клас на СМГ) по два астрономически часа седмично в продължение на 30 седмици (каквато е продължителността стандартните подготвителни курсове в повечето школи за извънкласна подготовка), при подготовката на домашните си работи си е отделяло също толкова време в първите два класа и по четири часа-пет в четвърти клас, което е обичайно за интензивната подготовка преди конкурса, то за това време вече е натрупало около петстотин часа тренировка. Попадайки в специализирано училище, учениците за осемте години обучение имат средно по 10 часа седмично в задължителната учебна програма, четири часа специализирана подготовка за състезания, средно 34 – 36 учебни седмици на година. Ако приемем, че най-мотивираните отделят още толкова време за подготовка вкъщи (което е напълно реалистично, имайки предвид опита ми през годините) и като добавим допълнителните подготовки преди сериозни състезания, ще се окаже, че най-добрите ученици, реализирани като успешни състезатели, са добавили още около и дори над осем хиляди часа. С опита от началното училище общо се доближава границата от десет хиляди часа. Някои ученици вероятно я достигат и евентуално дори надминават (съдейки по успехите и резултатите им).

*Понякога мислим, че да си да си добър по математика е вродена способност. Или я имаш, или не. Това не е толкова способност, колкото отношение. Ще се усъвършенстваш в математиката, ако имаш желание да пробваш. ... Успехът е функция на упоритостта и трудолюбието, на желанието да се работи здраво* (Гладуел, 2010, с. 255).

**Ролята на математическите състезания за изявата на таланта**

Едно от нещата, което най-силно мотивира учениците да отделят толкова много време за занимания с математика, е безспорно възможността да участват в национални и международни състезания. Това твърдение се подкрепя и от Й. Табов (2004), който в своята дисертация обосновава тезата, че чрез математическите състезания в страната ни, а и в повечето европейски и други водещи държави в света се създава и поддържа среда и ситуация за изява на надарените (талантливите, способните) ученици. В нея и чрез нея те се превръщат в изявени ученици – надарени ученици, търсещи изява и реализация. Лазаров (2011) въвежда понятието „математически усет“ (sens of mathematics), който може да бъде развиван с подготовка за математически състезания и подпомага изявата на таланта.

През годините на 21 век в България започнаха да се организират все повече и най-различни състезания по математика – регионални и национални, и стана традиция много български ученици да взимат участие и в международни състезания. Вече бяха споменати някои състезания за най-малките ученици. За по-големите възрастови групи има различни по тип състезания, даващи възможност за изява на ученици с различни качества и таланти. За надарените с бърза мисъл и математическа интуиция най-вълнуващи са състезанията с многобройни задачи с избираем отговор (например „Европейско Кенгуру“, Коледно и Великденско математическо състезание и др.). Най-високи резултати на Националната олимпиада, Есенните, Зимните и Пролетните математически състезания постигат учениците със задълбочена, но и бърза мисъл, т.е. тези, които могат много добре да анализират сложни и нестандартно поставени задачи, да ги преформулират и по този начин да ги сведат към познат тип задача, а след като достигнат до решение – да го аргументират и представят добре. Възможност за изява имат и учениците, които не са от състезателен тип, но имат нагласа за научна и изследователска работа – това са сесиите на Ученическия институт по математика и информатика (УчИМИ), на които се представят реферативни разработки.

Специално внимание трябва да се отдели на развитието на математическия талант и мотивирането на учениците, които не са комплексни състезатели и чиято сила е в отделен дял на математиката – например геометрия, алгебра или комбинаторика, но не са да толкова добри в други области. Най-подходяща форма за изява за такива ученици са отборните състезания. Индивидуалните качества на всеки ученик могат да бъдат подобрени и използвани по време на екипна работа. В един отбор има нужда от хора с различни качества и нагласи и тогава всеки може да покаже своята най-силна страна. В България има единствено състезание, провеждано в един ден, в което има отборен етап. Това е Математическия турнир „Акад. Кирил Попов“, Шумен. За сравнение, всички азиатски състезания, в които участват български отбори, имат отборен етап. Там има много видове отборни състезания, които изискват и развиват различни качества у учениците. Някои примери за състезания от различни типове са:

(1) Всеки отбор (състоящ се от четири члена) работи върху осем или десет задачи, които трябва да се разпределят между четиримата участника в рамките на пет минути. След това всеки състезател решава собствените си задачи и не е позволено да общува с останалите членове на отбора. Всички имат 60 минути за работа, което включва и изписване на решенията. В този случай е важно задачите да се разпределят между участниците правилно, имайки предвид интересите и възможностите на всеки от тях. Обикновено всеки участник работи върху две задачи, но може да се прецени и един ученик да решава само най-трудната, според мнението на отбора, задача, а някой от останалите да решава три задачи, или някой, които не се чувства уверен в знанията си, може да вземе една от задачите, за да се чувства по-спокоен и да допринесе за успеха на отбора. Всеки участник в този формат на състезание е длъжен да реши поне една задача. Пример за такива състезания за ученици до 13,5 години е По Льон Кук – Хонг Конг и IMC (International Mathematics Competition), което всяка година се провежда в различна страна..

(2) Дадени са десет задачи, осем от които се разпределят между членовете на отбора, които отново са четири (като в (1)) и се решават в рамките на 40 минути. След това на отбора се дават последните две задачи за решаване със съвместни усилия. Тук, в допълнение към адекватното разпределение на задачите, от решаващо значение е работата на екипа върху останалите две задачи, защото те обикновено са изследователски и с творчески характер. Учениците често се разпределят по двойки за решаване на задачите и допълват своите интереси и знания. Например, алгебрист и геометър може успешно да работят заедно, както и находчив ученик може да се комбинира с друг, който има чувство към детайла в изписването на решението. Друг подход е целия отбор да работи по всички задачи, като всеки член има да разрешава различен аспект на всяка задачата. Такова е състезанието International World Youth Mathematics Competition.

(3) Четири задачи са дадени за работа общо на целия отбор. Това е един от предпочитаните от децата формати, защото е по-емоционален и по-атрактивен. Някои от задачи са свързани с практическата работа: да се направи рисунка (схема), чертеж или някакъв предмет и има поставени творчески и изследователски проблеми за разрешаване. При решаването на последните, дори деца без очевидни математически способности могат ползотворно да вземат участие в работата на отбора и да са ефективни при извършването на практическата работа. В същото време всички имат възможност да участват в творческия процес при обсъждане и

решаване на задачите и има възможност да се учат един от друг. При такъв тип работа съотборниците споделят и обменят опит около нови методи на решаване, необичайни начини на разсъждение и аналитично мислене. По този начин всеки ученик допринася към резултата на отбора. Всички са заинтересовани и имат възможност да се включат в състезанието, а това води до повишаване на интереса им към математиката и до натрупване на нови знания, дори без да се осъзнава. Единственото за сега българско състезание с отборен етап от този тип е Математически турнир „Акад. Кирил Попов“, Шумен.

(4) Дадени са задачи, които са решават в последователност (верижно, каскадно). Решението на задачата за даден член от отбора зависи от отговора, който ще получи негов съотборник в предишната задача. В този род състезания реда, в който са подредени учениците, е най-важен. Състезателите се подреждат възходящо според тяхната подготовка. Капитан на отбора става най-добре подготвения ученик. След старта на състезанието, всички започват да решават и да предават напред отговорите. Целта на всеки отбор е да достигне до правилен отговор на задачата на Капитана си, като това трябва да стане максимално бързо. По време на провеждане на състезанието участниците не комуникират помежду си. В този тип състезания представянето на всеки член на отбора е еднакво важно. Това създава чувство на лична отговорност. Примери за такова състезание е World Mathematics Team Championship.

(5) Едно от любимите за учениците отборни състезания е Математическите боеве, които се провеждат в продължение на няколко дни. При тях отборите се състоят от 4 до 6 души, един от които е капитан. Капитаните сутринта получават 8 задачи и до обяд отборите подготвят своите решения. След това се тегли жребии и се избират двойки отбори, които влизат в математически бой. Капитаните решават едновременно една и съща задача с кратък числов отговор. Отборът, чиито капитан отговори пръв, предизвиква противника да изложи решението на една от задачите. Журито оценява верността на показаното, като предизвикващият отбор има право да попълни пропуски в решението на противника и да спечели допълнителни точки. След това ролите се разменят. В такова състезание учениците трябва да могат де изложат решението пълно и аргументирано, което особено за малки ученици е голямо предизвикателство. Пример за подобно състезание е Фестивал на младите математици – математически боеве, провеждано през септември в Созопол.

По време на състезание психическото натоварване върху децата е много голямо. Те влагат много емоции, воля и желание за победа. Ако „прехвърчат искри” между тях, това може да доведе до сериозни конфликти. Затова е необходимо на тренировъчните отборни състезания да се изпробват как работят различни конфигурации от състезатели, за да се изберат правилно подходящите екипи. Също така трябва внимателно да се избере капитанът на всеки отбор. Той трябва да е човекът с най-голям авторитет, който може да вземе възможно най-правилното решение, когато това се налага, и да има влияние върху съотборниците си, за да може да ги успокои и да помогне, ако назреят конфликти. Такъв човек е не непременно най-талантливият математик, защото често най-способните, най-умните, гениалните деца за по-затворени, по-трудно контактуват или са прекалено критични към останалите. При внимателно наблюдение на работата на отборите по време на тренировъчните състезания може да се забележи кои деца имат едновременно лидерски качества и математически талант. Именно измежду тях е подходящо да се избират капитани на отборите.

**Как на практика откриваме и развиваме математическите таланти в СМГ?**

Работата ми в СМГ като ръководител на школи за извънкласна подготовка по математика може да се разглежда като педагогически експеримент, който е проведен с ученици в извънкласна работа по математика от три випуска. Випуск 2004, 2012 и 2020. С всички тях съм работила от 5 до 12 клас. Преди постъпването си в СМГ учениците също са имали извънкласна подготовка.

Първоначалният подбор за участие в занятията по математика за извънкласна работа е изцяло съобразен с желанията на учениците. Не е имало никакъв предварителен тест за определяне на нивото на подготовка или математическите способности. Разбира се самият факт, че децата учат в специализирано училище с профил математика, означава, че те имат повишен интерес към тази учебна дисциплина. Голяма част от участниците в извънкласните занимания са участвали в национални състезания по математика и са били сред наградените, а някои от тях имат награди и на международни състезания – златни, сребърни и бронзови медали на МОМ, БОМ, БОМО и др.

Подготовката за състезания включва два основни елемента:

- Обща теоретическа и практическа подготовка
- Тренировъчни състезания

Определящо за общата подготовка са типовете задачи, които най-често се дават на състезания. Тук имам предвид, „че такива са задачите, включвани в темите на състезания, и задачите, включени в утвърдени „олимпиадни сборници”. От съдържателна гледна точка обаче за основни признаци, по които се разпознават състезателните задачи, се счита тяхната „трудност” и „нестандартност”. Нестандартност означава, че такъв тип задачи не се среща в училищните учебници и сборници и че решаването им не се свежда единствено до формалното прилагане на методите и алгоритмите, изучавани в училище.” (Табов, 2004). Разбира се има известна разлика в тематиката и стила на задачите, давани на състезания, но най-общо бихме могли да ги разделим на следните основни групи – алгебра (за най-малките ученици – аритметика), геометрия, теория на числата (за учениците от пети клас нагоре) и комбинаторика. Имайки предвид голямото разнообразие от задачи, трудно бихме могли в рамките на подготовката в школите да разгледаме всички основни типове, а и винаги може да се даде задача, която да не се причислява към конкретен тип.

Общата теоретическа и практическа подготовка се състои в излагане на теоретични знания, групирани тематично в отделни методически единици по различни теми за извънкласна работа по математика и разглеждане на задачи свързани с тях. „При решаване на дадена математическа задача можем да разграничим два елемента: рутинен, който се състои в прилагането на определени „стандартни” математически техники, като аритметични действия, тъждествени преобразувания и др., и евристичен, който обикновено назоваваме с термини като „досещане” (Табов, 2004). Теория се налага да се изучава, защото, има задачи, чиито решения представляват комбинация от голям брой „стандартни” (рутинни) операции на базата на теорията. Тя се излага сбито, но включва всички необходими за решаването на задачите дефиниции и твърдения, като болшинството от тях се доказват и доказателствата се съобразяват с възрастта и натрупаните до момента знания на децата. Тъй като за целия разглеждан период са проведени много такива занятия, не е възможно да бъдат изложени в настоящата разработка. Занятието се провежда в рамките на три учебни часа и обикновено започва с дефиниции и формулировки, даване на конкретен пример, за да могат да се изяснят по-добре новите понятия. Следва приложение на новите знания в задачи с нарастваща трудност. В края на занятието се задават задачи за домашна работа, свързани с изучаваната тематика.

Вторият аспект на подготовката са тренировките. За индивидуалните състезания подготовката е перманентна и тренировъчни състезания се провеждат само когато е необходимо да се определи отборът, който представя гимназията на даден турнир. Подготовката за отборни състезания е съобразена с различните видове – с избираем отговор, с кратък отворен отговор или с подробно аргументирано решение, а също така дали състезанието има индивидуален етап или е само отборно.

При едно тренировъчно отборно състезание в което всеки отбор участва с по 4 души, всички ученици получават екземпляр от теста и имат възможност да изберат своя стратегия на работа. Могат да си разпределят задачите поравно и всеки да решава по 4 задачи. Обикновено стратегията е да се предоставя на по-малко подготвените да изберат своите задачи, а най-добрите се „нагърбват” с по-трудните. Разбира се за тази стратегия учениците трябва добре да се познават помежду си и също така всеки да може правилно да преценяват възможностите и знанията си. В противен случай може да се окаже, че някой се е заел с непосилна за себе си задача. За да се избегне подобна ситуация в началото, когато все още участниците нямат достатъчно добра себеоценка, е подходящо предварително учениците да се разделят по двойки. Във всяка двойка всеки решава една и съща задача самостоятелно, а после решенията се разменят, проверяват и обсъждат. При наличие на време се пререшават. Това дава по-голяма сигурност за верността на отговорите на задачите (Tsvetkova, 2008) .

Тренировъчните състезания се провеждат по-рядко през годината и интензивността им нараства с наближаване на участие в едно или друго реално състезание. През учебната година се сформират различни отбори с цел да се установи кои екипи работят ефективно и дали са подходящо избрани участниците във всеки от тях. При тренировките отборите обикновено се състоят от четири човека, тъй като това е броят на участниците в един отбор на повечето състезания. За да работи ефективно един отбор, при сформирането му стремежът е да се включат хора с различни качества. Тъй като рядко се срещат ученици, които са еднакво добри по алгебра, геометрия, теория на числата и комбинаторика (това, както бе отбелязано, са най-често срещаните области от математиката, от които се дават задачи на състезанията), в отбора се включват (когато има тази възможност) по един състезател с изявени качества във всяка една от тези области. По този начин се осигуряват хора, които успешно да се справят с всички видове задачи и същевременно всеки да има възможност най-пълно да изяви способностите си.

Друг критерии за сформиране на отборите е във всеки от тях да има човек, който е с много добра техника на смятане. Той трябва да проверява (или да извършва) почти всички пресмятания. По този начин се свеждат до минимум техническите грешки. Това е важно, защото много от талантливите ученици имат достатъчно натрупани знания, генерират прекрасни идеи за решаване на задачите, използват различни подходи за атакуване на задачите, но епизодично допускат дребни изчислителни грешки. В немалко състезания се очаква не да се даде пълно и аргументирано решение, а само да се посочи числов отговор. В този случай е добре да има човек, който бързо ще разбере идеята на решението и да извърши прецизно всички изчисления или да проверява детайлно написаните от съотборниците му решение.

За състезанията в които се очаква да се изпише подробно и аргументирано решение е необходимо в отбора да има човек, който бързо и добре разбира идеите на решенията и след това може подробно, изчерпателно, прегледно и ясно да ги изложи в писмен вид. Разбира се не по-малко важно е състезателите в един отбор да могат добре да се „сработят”, което, особено за по-малките ученици, не е винаги лесно. Тъй като обикновено състезателите са ярки индивидуалности, с висока самооценка и самочувствие, понякога им е трудно да приемат чуждо мнение по отношение на решението на дадена задача, особено когато идва от връстник. Това може да представлява сериозна пречка за екипната работа в отбора, тъй като може да се затрудни достигането на съгласие по верността на решението на една или повече задачи и дори да породи до възникване на сериозни противоречия.

Освен състезанията, някои ученици участват и в други форми за развиване на математическия талант. Това са разработка на реферати, участие в УчИМИ, включване в проекти, някои от които може да са свързани с други научни дисциплини. Тези форми са по-подходящи за ученици, които нямат много бърза мисъл и услужлива памет, но са способни продължително време да работят задълбочено върху дадена тема. С тях се работи индивидуално и обикновено имат научен ръководител или консултант, който може да е техният учител, научен работник, университетски преподавател или друг човек с подходяща квалификация.

## ГЛАВА 2. Анализ на учебните програми в начален и прогимназиален етап

За да разберем по-добре необходимостта от допълнителна работа за развиването на математическия талант е необходимо да направим кратък анализ на учебните програми по математика в начален етап – 2-4 клас и в прогимназиален етап – 5-7 клас, които са обект на изследването.

Съвременното общество се променя изключително бързо и това поставя нови изисквания към образованието на децата, особено в частта математика, логика, работа с данни, оценяване на достоверност на информацията, адаптивност и умение за учене през целия живот. Ускореното технологично развитие и достъпната информационна среда правят излишно заучаването на конкретни факти и много по-ценно става умението да се работи с широко достъпната информация. Често се срещаме с проблеми, за които нямаме необходимата информация и знания и трябва да търсим тяхното разрешаване единствено на базата на логиката и обработката на максимално достъпната информация.

Нови акценти стават водещи в световното образователното пространство: грамотност – четивна, математическа, природонаучна; ключови компетентности; активно обучение в конструктивистка среда (проблемно-изследователски подходи); обучение през целия живот, включително неформално (в извънинституционална среда); умения за самостоятелно учене и рефлексия; интердисциплинарност на обучението.

Безспорно има базисни знания, които трябва да бъдат научени и добре усвоени, за да ни дадат свободата да ги ползваме ефективно в случаите, когато се изисква много повече от директното им приложение. Такива са знанията по аритметика, които основно се изучават в начален етап.

Ще се спрем на целите, които си поставяме при завършване на съответния етап. В таблицата по-долу са синтезирани и обединени целите на обучението по математика в две групи – 2-4 клас и 5-7 клас, тъй като в учебните програми са синхронизирани и еднотипни както за начален етап, така и за прогимназиален етап. По-съществена разликата има единствено в 7 клас, където започва изграждането на основата на евклидовата геометрия (точка 6).

Учебната програма по математика за IV клас е в сила от учебната 2019/2020 година, за V клас е в сила от учебната 2021/2022 година, за VI клас е в сила от учебната 2022/2023 година и за VII клас е в сила от учебната 2023/2024 година. Въпреки, че има известни промени, основното учебно съдържание е същото, което се изучава през последните 20 години.

В началния етап се отделя 46 – 50 % от времето за преподаване на нови знания и също толкова за затвърждаването им. В прогимназиалния етап времето отделено за нови знания е 60%, докато за упражнения са предвидени 32%.

| Цели на обучението по математика |
|---|
| **2. клас, 3. клас и 4. клас** |
| 1. Овладяване на знания за естествените числа съответно до 100; 1000 и над 1000.<br>2. Усвояване на алгоритми за събиране и изваждане на числа съответно до 100; 1000 и над 1000.<br>3. Усвояване на алгоритми за таблично умножение и деление и умножение и деление съответно с едноцифрено или двуцифрено число.<br>4. Задълбочаване на знанията за геометричните фигури.<br>5. Разширяване на знанията за мерните единици.<br>6. Изграждане на система за решаване на текстови задачи. |
| **5. клас, 6. клас и 7. клас** |
| 1. Овладяване на знания за рационалните числа.<br>2. Пресмятане на числови изрази съдържащи събиране, изваждане, умножение, деление и степенуване на рационални числа.<br>3. Решаване на линейни и някои свеждащи се към линейни уравнения и линейни неравенства<br>4. Усвояване на знания за основните геометрични фигури и тела и елементите им<br>5. Прилагане на знания и алгоритми за намиране на лице и периметър на фигура и повърхнина и обем на тяло.<br>6. Овладяване на знания за ъгли, успоредни прави, признаци за еднаквост на триъгълници, зависимости между ъгли и страни в триъгълник, видове и свойства на успоредници.<br>7. Усвояване на логически знания – употребата на логическите съюзи, използване на доказателство на твърдение.<br>8. Умения за моделиране с числов израз или алгебричен израз, линейно уравнение и неравенство и интерпретиране на резултат.<br>9. Умения за събиране, организиране и разчитане на данни, пресмятане на вероятност. |

Учениците от 2 и 3 клас изучават математика 3,5 часа седмично, докато тези от 4, 5, 6 и 7 клас – 4 часа седмично.

Забелязва се дисбаланс между времето отделено за упражнение и нови знания, особено при прехода от начален в прогимназиален етап. За учениците от 4 клас е предвидено 50% от времето за упражнения, а следващата година учениците от 5 клас имат едва 32% за това.

В начален етап се изучават и усвояват предимно алгоритми за пресмятане, които са еднотипни за едноцифрени, двуцифрени и многоцифрени числа. Минимални са знанията за геометричните фигури, предимно свързани с разпознаването им, начертаване и измерване. В прогимназиален етап още първата година се включват на области на компетентности като логически знания, моделиране и елементи на вероятности и статистика. Това прави прехода от четвърти в пети клас много труден за голяма част от учениците. Умните и интелигентни децата, които имат интерес към обучението скучаят в часовете по математика в начален етап, защото изучавания материал е лесен и еднообразен за тях. Едновременно с това те остават с убеждението, че математиката е равнозначна на аритметика и науката се развиват единствено като се смята с все по-големи числа. Лекотата с която усвояват преподаваното в часовете прави трудно сравняването на постиженията на децата, защото много от тях се справят с поставените задачи и единствен критерий остава скоростта, с която ги изпълняват. У интелигентните деца остава убеждението, че да си добър по математика означава единствено да смяташ с големи числа, колкото се може по-бързо. Същите тези деца, попадайки в пети клас и срещайки професионално преподавана материя, като новия материал е разнообразен и се трупа бързо, часовете за упражнения намаляват, а навици за системно и задълбочено учене на математика не са изградени, не успяват да се справят и бързо започват да губят интерес, а естествено и нивото им на подготовка и усвояване на знания спада.

Тези факти вероятно са ключови за широкия интерес на учениците от начален етап към математическите състезания и извънкласните форми на работа по математика, предлагани от различни школи. Там учениците се срещат с друго лице на математиката – забавна, провокираща, нестандартна. Виждат, че има задачи по математика в които не пресмятаме нищо или почти нищо. Децата забелязват, че да разбереш условието на задачата е почти толкова важно, колкото и да измислиш и да опишеш решението, а и че може решенията да са повече от едно. Срещат се с необходимостта да мислят задълбочено и продължително върху един проблем. Лазаров (2023) показва, че „алгоритмичното мислене, заедно с определени дедуктивни умения, е основата, върху която се формира математическо мислене от висок порядък.“

Разликите в акцентите на учебните програми и в начина на преподаване в начален и прогимназиален етап навярно е и една от основните причини за резкия спад в интереса към математиката на  учениците, които са имали високи оценки на НВО по математика в 4 клас, а от там и към състезанията по математика, ако не се обучават в специализирани училища или паралелки с разширено изучаване на математика. Не би могло да се каже, че извън специализираните училища остават само деца, които не се интересуват от математика и нямат такива способности. Наблюденията от приема в СМГ след 4 клас показват, че едва 20% от кандидатстващите са приети, като разликата в бала за прием на приетите и на приблизително 60% от неприетите е в рамките на няколко точки, което не е съществен показател за знанията и подготовката на децата. Предимството, което получават децата, учещи в специализирани паралелки и училища е основно възможността за допълнителни учебни часове по математика, в които да се упражнят достатъчно добре новите знания, както и възможността за извънкласна работа с талантливите ученици.

Повече от 20 години в СМГ се провеждат извънкласни занимания по математика за ученици от 2, 3 и 4 клас. В течение на тези години се оформи и тематика, която е подходяща за съответния клас. Част от темите бяха оформени в две книги – „Математическа читанка" (Златилов, Тонова и др., 2000) и „Първа математическа читанка" (Златилов, Цветкова и др., 2006), а по-късно разширени и допълнени в книгите НЕМО за 2., 3. и 4. клас (Цветкова, Панделиева и др., 2015, 2016 а, 2016 б). Тези учебни помагала се ползват и от други школи и училища. Темите, които са разработени в тях и по които се подготвят ученици от втори, трети и четвърти клас в извънкласните занимания, ръководени от учители на СМГ са следните:

*Втори клас:*

1. Да се подредим в редичка (Сравняване на числа, намиране на най-голямо и най-малко число измежду поредица от числа, намиране на стойност на параметър, за която е изпълнено числово неравенство.)
2. В страната на фигурите – Фигуроландия (Разпознаване на различни видове геометрични фигури, преброяване на фигури – триъгълници, квадрати, правоъгълници, окръжности в по-сложни конструкции.)
3. Преди да потеглим (Разлика между цифра и число, значение на позицията на цифрите в числата.)
4. Да станем детективи (Логически задачи.)
5. Да върнем времето назад – 1 част. (Метод на инверсията или решаване на задачи отзад-напред – с една верижка и само събиране и изваждане)
6. Колко е часът? (Задачи за часовници и време – разпознаване на часа, записан в различен формат или изобразен върху часовник с циферблат, събиране и изваждане на часове и минути.)
7. Коя дата е днес? (Задачи свързани с календар – запознаване с броя на дните в различните месеци, определяне на ден от седмицата за минала или бъдеща дата.)
8. Защо Пепеляшка не закъсня? (Задачи за подредени предмети и разстояния между тях.)
9. Колко тежи? (Задачи за претегляне на равновесни везни, сравняване на предмети по тежест.)
10. Магията на квадрата (Магически квадрати и други магически фигури.)
11. Как отсечките отведоха НЕМО в Сладиландия (Моделиране на текстови задачи с помощта на отсечки.)
12. Хайде на пазар на планета Чуден дар (Задачи за покупки – определяне на цени и количества.)
13. Да преброим цифрите и числата (Броене на цифри и на числа в дадена числова поредица.)

14. Обиколки във Фигуроландия (Намиране на обиколки на основни геометрични фигури.)
15. Да върнем времето назад – 2 част (Метод на инверсията или решаване на задачи отзад-напред – с една верижка и четирите аритметични действия.)
16. И ние можем да си измислим действие. (Измислени аритметични действия.)
17. Преброяване на възможности или Снежните приключения без НЕМО (Преброяване на възможности чрез изброяването им или граф-дърво.)
18. Приказни ребуси (Аритметични ребуси.)

*Трети клас:*

1. Кой е оставил тези следи. (Логически задачи.)
2. Отвара за болна змия. (Задачи за преливане.)
3. Естествени числа ли? (Действия с естествени числа, приложение на свойства на четността.)
4. За аритметиката и армията. (Приложение на правилата за действия с естествени числа.)
5. Кой е по-по- най…(Свойства на аритметичните действия, приложение.)
6. Задачи за художници. (Моделиране на текстови задачи с кръгове на Ойлер.)
7. Пътешествие назад във времето. (Метод на инверсията или решаване на задачи отзад-напред – с една и две верижки.)
8. Колко си висок? (Измерване, мерни единици, преминаване от една мерна единица в друга.)
9. Защо обикаляш? (Обиколки на основни геометрични фигури и конструкции от тях.)
10. Как се разменят стоки? (Задачи за претегляне на равновесни везни и размяна на предмети с равни стойности.)
11. Да подредим. (Преброяване на възможности – комбинаторни задачи решавани с изброяване или граф-дърво.)
12. Колко е часът? (Задачи за часовници – събиране и изваждане на часове и минути, задачи за броене на цифри в записа на часове.)
13. Календар и време (Задачи за календар – определяне на ден от седмицата за минала или бъдеща дата.)
14. За влаковете и отсечките. (Моделиране на текстови задачи с помощта на отсечки.)
15. Колко глави и крака? (Моделиране на текстови задачи с елементарни системи уравнения, без да се използва формален запис или по аритметичен начин.)
16. Как се измислят нови действия? (Измислени аритметични действия.)
17. Обичате ли да пазарувате? (Задачи за покупки – моделиране на текстови задачи с елементарни системи уравнения, без да се използва формален запис.)
18. Кой е по-бърз? (Задачи за движение.)
19. Да построим триъгълник. (Неравенство на триъгълника.)
20. Цифроландия. (Броене на цифри и на числа.)

21. Приказни ребуси. (Аритметични ребуси.)

*Четвърти клас:*

1. Фокуси в математиката? (Действия с естествени числа, приложение на разпределителното свойство.)

2. Колекция. (Метод на инверсията, решаване на задачи отзад-напред – с една, две и три верижки.)

3. Алиса, Черната царица…(Приложение на принципа на Дирихле.)

4. Искате ли да станете банкери. (Задачи за претегляне на равновесни везни и размяна на предмети с равни стойности.)

5.Толерантност към различието. (Задачи за покупки – моделиране на текстови задачи с елементарни системи уравнения, без да се използва формален запис)

6. Трудните думички в геометрията. (Обиколки на по-сложни геометрични фигури.)

7. За ябълките и игрите. (Моделиране на текстови задачи с помощта на отсечки.)

8. За химията и вулканите. (Броене на цифри и на числа в числови поредици.)

9. Цифромания (Броене на цифри и на числа в числови поредици.)

10. Кой на кого е кръстен. (Задачи за римски цифри и календар.)

11. Сговорна дружина машина ремонтира. (Преброяване на възможности – комбинаторни задачи, решавани по различни начини.)

12.За котките и мишките. (Моделиране на текстови задачи за пропорции.)

13. Царица ли е математиката. (Сумиране по метода на Гаус.)

14. За пиратите, математиката… ( Моделиране на текстови задачи с кръгове на Ойлер.)

15. Космическа зоологическа градина. (Моделиране на текстови задачи с диофантови уравнения.)

16.Срещи и раздели. (Задачи за движение.)

17. Хайде на рожден ден. (Моделиране на текстови задачи със системи уравнения, които не се решават със събиране, без да се използва формален запис.)

18. Може ли да разделим по равно. (Деление с остатък.)

19. Да начертаем футболно игрище (Намиране на лице на правоъгълник и квадрат.)

20. Къщичка за морско свинче. (Най-малка обиколка, най-голямо лице на правоъгълник.)

21. Работилничка за букви и цифри. (Аритметични ребуси.)

22. На колко си години. (Моделиране на текстови задачи с десетичен запис на числа.)

В посочената по-горе програма се забелязва повторение на дадени теми в два или три класа, като във всеки следващ клас задачите се усложняват в съответствие с новите знания, усвоени от децата в училище. Такива са темите за календар, моделиране с отсечки или с верижка (метод на инверсията), намиране на обиколки на геометрични фигури, аритметични ребуси, комбинаторни задачи, преброяване на цифри и числа в поредици от числа, задачи за размяна на стоки и покупки, моделирани със системи уравнения, без да се използва формален запис. Разработка на две такива теми може да се намери в глава 4. Целта на тази структура е да се развива логическото мислене на децата в съответствие с възрастта им, като актуализираме и затвърждаваме и стари знания. От друга страна темите са в известен смисъл независими и написани така, че всяко дете, което има повишен интерес към математиката да може да започне заниманията си в произволен момент. Такова дете, ако е мотивирано и талантливо, може да е пропуснало подготовката във втори или трети клас и въпреки това успешно да усвои знанията, предвидени за четвъртокласници.

Подготовката на децата по тази тематика служи като основа за успешното им представяне на различни математически състезания, някои от които служат като основание за прием в СМГ, а и в други училища с разширена подготовка по математика в прогимназиалния етап на обучение.

Постъпвайки в тези специализирани паралелки и училища, децата вече имат нагласа и подготовка за изучаване на извънкласна математика. В СМГ учениците получават възможност да изучават математика в избираеми и факултативни учебни часове, което дава възможност за достатъчно подробно изучаване на учебния материал и неговото задълбочаване и разширяване. Освен това учениците имат възможност да посещават школи по математика, където изучават теми извън учебното съдържание. Във възрастовата група 5-7 клас учениците, посещаващи тези школи са обикновено между 70% и 90% от всички деца в съответния випуск в училище. Всеки ръководител на школа е свободен да избере темите, които да разгледа с учениците си, но благодарение на дългогодишния опит на преподавателите и сътрудничеството между тях, може да се каже че са се оформили основните теми, разглеждани на тези занятия. И в тази възрастова група има преливане на някои теми от клас в клас, с усложняване на задачите. Има и теми по-тясно свързани с учебния материал за конкретния клас.

Тук представяме обобщените теми по които се работи от 5 до 7 клас в школите за извънкласна работа в СМГ.

**Теми за извънкласна работа 5 – 7 клас**

*Теми за 5. клас*

1. Естествени числа. Сумиране по метода на Гаус.
2. Признаци за делимост на 4, на 25, на 11 и други.
3. НОК и НОД – текстови задачи.
4. Диофантови уравнения – различни методи за решаване.
5. Аритметични ребуси с дробни числа.
6. Взаимно прости числа – свойства, връзка с делимост.
7. Деление с остатък – аритметика на остатъците.
8. Египетски дроби, пресмятане на някои числови изрази с обикновени дроби.
9. Задачи за намиране на част от цяло, процент, промил.

10. Комбинаторика – начини за преброяване.
11. Метод на допускане на противното.
12. Принцип на Дирихле.
13. Принцип на крайния елемент.
14. Инварианти.
15. Триъгълник – равнолицевост, свойство на медианата.
16. Метод на бояджията.
17. Успоредник – равнолицевост.
18. Трапец – равнолицевост.
19. Четириъгълник – равнолицевост.
20. Намиране лица на фигури.
21. Текстови задачи за проценти.
22. Задачи с логически характер.

*Теми за 6. клас*

1. Задачи за намиране на част от цяло, процент, промил, проба и карат.
2. Разрязване. Покриване. Оцветяване.
3. Делимост в множеството на целите числа.
4. Делимост и степени.
5. Приложение на делимостта.
6. Диофантови уравнения – различни методи за решаване.
7. Комбинаторни задачи.
8. Разположение на числа в таблици и схеми.
9. Лица на геометрични фигури свързани с пропорции.
10. Симетрия на геометрични фигури. Координатна система – приложения.
11. Теореми на Чева и Менелай.
12. Принцип на Дирихле в геометрията.
13. Инварианти, полуинварианти.
14. Метод на допускане на противното.
15. Математически игри. Стратегии.
16. Принцип на крайния елемент.
17. Триангулация.

*Теми за 7. клас*

1. Пермутации. Вариации. Комбинации.
2. Вероятност
3. Сравнения - свойства и приложения.
4. Теорема на Ферма. Приложения.
5. Решаване на неопределени уравнения чрез сравнения.

6. Принцип на Дирихле и групи от числа.
7. Инварианти.
8. Полуинварианти.
9. Метод на крайния елемент.
10. Математически игри и стратегии.
11. Допълнителни построения в геометрията.
12. Доказване на условни тъждества.
13. Доказване на неравенства.
14. Доказване на условни неравенства.
15. Приложение на математическата индукция за доказване на равенства и неравенства.
16. Триангулация.
17. Нютонов бином.
18. Разрязване. Покриване. Оцветяване.

От този списък се вижда, че част от темите, изучавани в школите от 2 до 4 клас продължават да се изучават и в прогимназиален етап. Също така се появяват теми, които се базират на изученото в часовете от задължителната програма, като го надграждат. Целта е да се разширят знанията и да се развият уменията за решаване на задачи чрез анализ и синтез, индуктивни разсъждения, използване на метода на допускане на противното и логически разсъждения. Също така е важно и процесът на формиране и развитие на алгоритмично мислене да бъде плавен и устойчив, като внимателно се подбират и системите от задачи в учебната литература.(Лазаров 2023). Уменията, които развиват учениците в този етап на обучението си са изключително полезни за по-нататъшното им развитие и като математици и състезатели по математика. Опитът, който натрупват за решаване на сериозни задачи с относително малко знания по математика им помага в по-нататъшното им развитие като математици, когато се срещат и трябва да разрешават отворени проблеми.

# ГЛАВА 3. Педагогически експеримент на изследването

В педагогическите изследвания, както и в другите научни изследвания, целта е да се изучат и опишат нови процеси и явления, да се направят изводи за причините, които са ги породили, да се създадат правила или да се формулират закономерности.

Според своята проблемна насоченост изследванията могат да се класифицират като *фундаментални, приложни и развойни*. *Фундаменталните* са насочени предимно към общите концепции на науката и са предимно теоретични. *Приложните* са ориентирани към практическа цел и са „…мост между научното откритие и неговото използване в практиката." (Бижков, Краевски, 2002). *Развойните* могат да се разглеждат като финален етап на изследователска работа.

Според предмета на изследователската дейност те могат да се определят като *теоретични*, които обосновават създаването на правила закономерности и *емпирични*, които „по пътя на целенасочена и специално създадена за всеки конкретен случай организация на изследването се получават емпирични данни за реално съществуващи педагогически явления и процеси." (Бижков, Краевски, 2002).

Според целта си, научните изследвания могат да бъдат класифицирани като *търсещи, описателни и обяснителни*. *Търсещите* са „ориентирани към по-близко запознаване с явленията, които възнамеряваме да изследваме, по-точно формулиране на проблем на изследването и, донякъде, конструиране на хипотеза или изследователски въпрос."( Господинов, Б., Сариева, Й. и др.). *Описателни* са „насочени към изграждане на по-точни представи за някои явления, позволяващи ни по-добре да формулираме проблема и хипотезата." *Обяснителни* – „тези изследвания са ориентирани към проверка на причинни връзки. Ако резултатите от изследването може да се използват за потвърждаване на това, че едно явление предизвиква друго явление, може да се направи опит да се даде обяснение на второто явление. Затова изследването, проверяващо хипотези се нарича обяснително изследване. Този вид изследване е подходящо тогава, когато знаем за дадено явление достатъчно, за да започнем да търсим обяснение на това, защо явлението е такова, каквото е." (Господинов, Б., Сариева, Й. и др.).

Изследователските подходи в научните педагогически изследвания най-общо можем да разделим на количествен и качествен. Основните им характеристики, според (Господинов, Б., Сариева, Й. и др.) са систематизирани в таблица 1.

| | Количествен подход | Качествен подход |
|---|---|---|
| Разбиране на действителността | Съществува една реалност, която може да бъде разделяна и изучавана на части; действителността е обективна. | Съществуват много реалности и те се изучават цялостно; действителността е „субективна“. |
| Начини на познание | Знанието се създава в процеса на строго логическо обосноваване и аргументация; създадено е главно по дедуктивен път. | Знанието е личностно конструирано и контекстуално ограничено; създадено е главно по индуктивен път |
| Отношение към ценностите | Процесът на изследване е „ценностно независим” и „безпристрастен”. Изследователят е изолиран и независим от участниците в изследването и от анализа на данните | Процесът на изследване е „ценностно обременен”. Изследователят и участниците в изследването влизат в „изследователско партньорство”, за да произведат данни |
| Приложимост на резултатите | Резултатите от изследването се обобщават извън конкретното време, хора, място и контекст. Данните съществуват независимо и отделно от участниците в изследването, които ги осигуряват. | Резултатите от изследването осигуряват по-пълно разбиране за отделна личност, проблем или събитие. Данните са „изражение” на участниците в изследването, които ги осигуряват. |

Таблица 1

Разликите между тези два подхода се отразяват в организиране и протичане на изследователския процес във всеки от тях. При провеждане на количественото изследване се спазват строги правила и процедури, има предварително определена последователност от стъпки, които трябва да се извървят. При провеждане на качествените изследвания „Процесът е все едно движение напред-назад между фактите и тяхната интерпретация, между отговори на въпросите и създаване на теория…“ (Господинов, Б., Сариева, Й. и др.). Има разлика и в методите на за събиране на данни за изучаваните обекти. Докато при количествения подход се събира голяма база данни  и се използват стандартизирани методи за изучаването им, то качествения подход се опира на задълбочени изследвания на дадените явления, като броят на изследваните обекти е минимален. Детайлното изучаване на дадено явление и взаимовръзката му с други явления при качествения подход е свързано с неструктурирани наблюдения, работа с фокус-групи, проучване на отделен случай.

Имайки предвид всичко това, смятам, че с основание настоящата изследователска работа може да се отнесе към приложните, по своята проблемна насоченост, емпиричните, според предмета на изследователската дейност и обяснителните, според целта си. Това води до избор на изследователски подход, отговарящ на тези характеристики. Поради невъзможността да се съберат големи количества стандартизирана информация, да се използва дедуктивен подход на познание, и съществуването на много тясна връзка между изследователят и изследваните обекти, подходящо е да се прилага качествения изследователски подход.

Педагогическото наблюдение, което проведох е върху учениците, посещаващи школа за извънкласна работа по математика, от три випуска, завършили 12. клас съответно през 2004, 2012 и 2020 г. С всички тях съм работила от 5 до 12 клас в СМГ и преди постъпването си в СМГ са посещавали школи за извънкласна подготовка.

Първоначалният подбор за участие в школата по математика за извънкласна работа е изцяло съобразен с желанията на учениците. Не е имало никакъв предварителен тест за определяне на нивото на подготовка или математическите способности. Разбира се самият факт, че децата учат в специализирано училище с профил математика, означава, че те имат повишен интерес към тази учебна дисциплина. В прогимназиалния етап по-голям брой ученици посещават извънкласните занимания, но в по-горните класове броят им намалява, обикновено остава постоянен след 8 – 9 клас. По-долу е даден списъкът на учениците, активно участвали в школата по време на педагогическия експеримент. Всички те са участвали в национални състезания по математика и са били сред наградените, а някои от тях имат награди и на международни състезания:

***Випуск 2004:***

Артур Киркорян, Божидар Величков, Васил Константинов, Диана Дамянова, Християна Видинова, Александра Кючукова, Мариела Вачева, Явор Стоев, Корнелия Иванова, Любен Чернев, Силвия Николова.

Най-значителни международни награди имат:

*Артур Киркорян:* "Туймаада" 2003 г. – сребърен медал, БОМ 2004 г. – сребърен медал МОМ 2004 г. – златен медал

*Божидар Величков*: "Туймаада" 2003 г. – златен медал, "Туймаада" 2004 г. – сребърен медал

*Явор Стоев*: "Туймаада" 2004 г. – сребърен медал

***Випуск 2012:***

Богдан Станков, Радослав Кафов, Рафаел Рафаилов, Иван Божилов, Елена Димитрова, Калоян Попзлатев, Кристиан Токмаков, Любомир Папазов, Марио Даскалов, Полина Стефанова, Теодор Маринов, Димитър Димитров, Райна Андреева, Петър Буюклиев, Христо Буюклиев, Тодор Марков.

Най-значителни международни награди имат:

*Богдан Станков:* МОМ – 2011 г. сребърен медал, 2012 г. – златен медал, БОМ – г. и 2012. г – сребърен медал

*Рафаел Рафаилов:* МОМ 2011 г. и 2012 г. – сребърен медал, МБОМ – 2008 г. – сребърен медал, RSI (Research Science Institute, MIT) – топ 5

*Радослав Кафов:* БОМ – 2012 г. – бронзов медал

*Тодор Марков:* МОМ – 2012г. – бронзов медал

***Випуск 2020:***

Александър Василев, Борис Панайотов, Гергана Чолакова, Деница Павлова, Добрина Енева, Евгени Кайряков, Елена Кескинова, Иван Андонов, Иво Петров, Катерина Кунева, Кирил Павлов, Лилия Вигенина, Петър-Делян Шентов, Димитър Христов, Петър Лангов, Ханг Та, Александър Банков, Дамян Францов, Александър Радославов.

Най-значителни международни награди имат:

*Евгени Кайряков:*

БОМ – 2018 – златен медал и пълен брой точки, 2019 – сребърен медал

Romanian Master of Mathematics – 2019 и 2020 – сребърни медали

Жаутиковска олимпиада по математика – 2019 – златен медал и първо място и 2020 – златен медал

Международна олимпиада на Мегаполисите – 2018 – сребърен медал, 2019 – златен медал

МОМ – 2019 и 2020 г. – бронзови медали

*Иво Петров:*

Младежка Балканиада по Математика – 2016 – сребърен медал

World Mathematics Team Competition – 2016 – златен медал

International Mathematics Competition – 2015 – златен медал

Всерусийска Олимпиада по Математика – 2018 – златен медал

МОМ – 2019 г. – сребърен медал.

Физика:

Международната олимпиада по физика – 2018 и 2019 – сребърни медали

Международна олимпиада на Мегаполисите – 2018 и 2019 – сребърни медали

Жаутиковската олимпиада по математика, физика и информатика – 2018 и 2019 – бронзови медали

European Union Science Olympiad – 2018 – сребърен медал

Експериментална олимпиада по физика – 2019 – бронзов медал

Европейска олимпиада по Физика – 2019, 2020 –бронзови медали

*Петър Лангов:*

Всерусийската Олимпиада по Математика – 2018 г. бронзов медал, Всерусийската Олимпиада по Математика – 2019 г. сребърен медал

*Александър Радославов:* Олимпиадата на мегаполисите в Москва – 2018 г. и 2019 г. – златен и сребърен медал по информатика, Балканиадата по информатика – 2019 г. – почетна грамота

*Дамян Францов:*

Международната олимпиада по химия – 2019 г., 2020 г. – сребърен и бронзов медал

Менделеевската олимпиада по химия– 2019 г., 2020 г. – сребърни медали

Международната олимпиада на Метрополисите**, химия** – 2018 г., 2019 г. – златен и сребърен медал

По-горе са изброени само най-впечатляващите постижения на учениците на международни състезания. В началото на века броят на международните състезания, достъпни за българските ученици не беше много голям. През последните години учениците имат възможност да участват в значително по-голям брой състезания, вече има и състезания по физика и химия. В последния ми випуск – 2020 година имаше ученици, които от математика се ориентираха към химия, физика или информатика, а Иво Петров успоредно се състезаваше в две дисциплини. Всички те продължиха да посещават школата по математика, защото знанията им бяха полезни и за другите дисциплини. Те твърдят, че първо си решават задачата „математически“, а после я обличат в конкретна форма – химична, физична или информатична. Всички споменати ученици са се обучавали по математика от начален или най-късно в прогимназиален етап, повечето – само в СМГ.

Подготовката за състезания, включително отборни, включва два основни елемента:

- Обща теоретическа и практическа подготовка.
- Тренировъчни състезания.

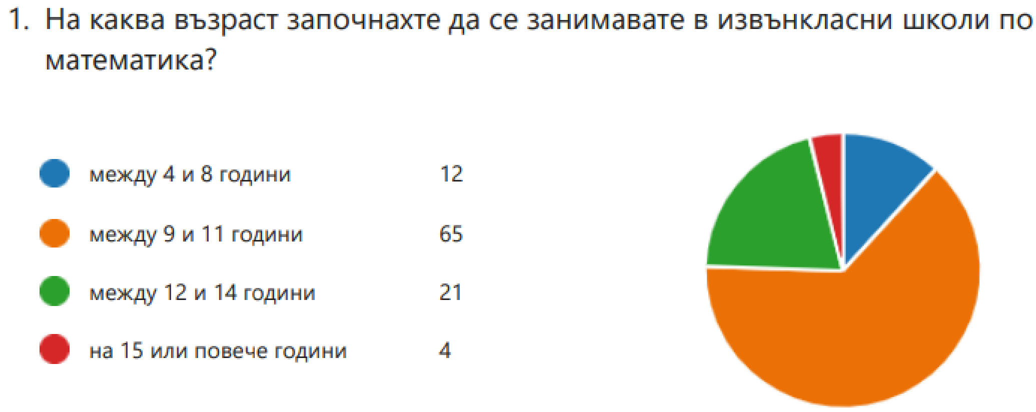
Определящо за общата подготовка са типовете задачи, които най-често се дават на състезания. Тук имам предвид, „че такива са задачите, включвани в темите на състезания, и задачите, включени в утвърдени „олимпиадни сборници”. От съдържателна гледна точка обаче за основни признаци, по които се разпознават състезателните задачи, се счита тяхната „трудност” и „нестандартност”. Нестандартност означава, че такъв тип задачи не се среща в училищните учебници и сборници и че решаването им не се свежда единствено до формалното прилагане на методите и алгоритмите, изучавани в училище.” (Табов, Й., 2004). Разбира се има известна разлика в тематиката и стила на задачите, давани на различни състезания, но най-общо бихме могли да ги разделим на следните основни групи – алгебра (за най-малките ученици – аритметика), геометрия, теория на числата (за учениците от пети клас нагоре) и комбинаторика. Имайки предвид голямото разнообразие от задачи, трудно бихме могли в рамките на подготовката в школите да разгледаме всички основни типове, а и винаги може да се даде задача, която да не се причислява към конкретен тип.

Общата теоретическа и практическа подготовка се състои в преподаване на теоретични знания, групирани тематично в отделни методически единици по различни теми за извънкласна работа по математика и разглеждане на задачи свързани с тях. „При решаване на дадена математическа задача можем да разграничим два елемента: *рутинен*, който се състои в прилагането на определени „стандартни” математически техники, като аритметични действия, тъждествени преобразувания и др., и *евристичен*, който обикновено назоваваме с термини като „досещане” (Табов, Й., 2004). Теория се налага да се изучава, защото, има задачи, чиито решения „представляват комбинация от голям брой „стандартни” (рутинни) операции” (Табов, Й., 2004) на базата на теорията. Тя се излага сбито, но включва всички необходими за решаването на задачите дефиниции и твърдения, като болшинството от тях се доказват и доказателствата се съобразяват с възрастта и натрупаните до момента знания на децата. Тъй като за целия разглеждан период са проведени много такива занятия, не е възможно да бъдат изложени всичките в настоящата разработка. Занятието се провежда в рамките на три учебни часа и обикновено започва с дефиниции и формулировки на базата на конкретен пример, за да могат да се изяснят по-добре новите понятия. В края на занятието се дават задачи за домашна работа, свързани с изучаваната тематика.

Вторият аспект на подготовката са тренировките. Те са съобразени с видовете състезания, индивидуално или отборно, в които участват учениците, както и с формàта на задачите – с избираем отговор, с кратък отворен отговор или с подробно аргументирано решение. Тренировките се провеждат през цялата учебна година, като са по-интензивни и целенасочени преди всяко състезание.

Характерно за изброените по-горе успешни състезатели по математика е, че всички те за започнали заниманията си с извънкласна и състезателна математика в начална та училищна степен или най-късно от началото на прогимназиален етап. Всички те са се явявали на математически състезания – основно Националната олимпиада по математика, но и на много други национални и регионални състезания. В гимназиален етап всички те са се развили като талантливи и успешни състезатели, но не само по математика, а и по сродни дисциплини, в чиято основа са знанията по математика – физика, информатика, математическа лингвистика, химия, астрономия. Всички те продължават (някои вече са завършили) образованието си в най-добрите университети в България и в света и имат изключителни успехи, включително и в научната сфера.

Тези мои наблюдения разширих с анонимна анкета (Приложение 1), която помолих да попълнят бивши ученици на СМГ. От отговорите на първия въпрос в анкетата става ясно, че само 3,9% от всички отговорили са започнали да се занимават със състезателна математика едва постъпвайки в гимназия. Всички останали за започнали заниманията си по-рано, като най-голям е броят на започналите занимания между 9 и 11 годишна възраст – 63%. Ето и някои от въпросите на анкетата и отговорите им.






От всички попълнили в анкетата, 88% са посочили, че са участвали в математически състезания в начален или прогимназиален етап.

Твърдението на 80% от анкетираните, че участието в извънкласните занимания значително или съществено е повлияло върху развитието им като професионалисти и реализацията им в живота.

От анкетата може да се направи заключението, че ранното включване в извънкласните занимания по математика и участието в математически състезания съществено влияе върху постиженията в обучението, професионалната и житейска реализация.

# ГЛАВА 4. Системи от задачи

*При изявените ученици на преден план излиза задачата; в процеса на нейното решаване се въвеждат необходимите нови понятия и се изяснява същността на нова идея или нов метод. (Табов, 2004, увод)*

В тази глава са дадени две системи от задачи за работа с талантливи ученици. Тематиката на всяка от тях дава възможност да се развие в няколко последователни класа. Така учениците имат възможност да затвърждават темата през различни години. Задачите са подбрани в съответствие с възрастта на учениците и техните знания, придобити от задължителната учебна програма. Подобни системи от задачи могат да се намерят още в: Tsvetkova 2010; Bankov, Tsvetkova 2014 и 2015.

## 1. Ребуси

Една от темите, които могат да се разглеждат в няколко поредни класа е „Ребуси". Решаването на аритметични ребуси изисква единствено знания за начина на извършване на аритметичните действия, което прави темата подходяща за различни възрастови групи. Същевременно могат да се съставят ребуси, които изискват много и различни съображения, за да се намери решението им. Също така фактът, че има ребуси, които имат повече от едно решение или нямат решение среща малките ученици с непознати за тях до този момент проблеми, тъй като задачите които решават в училище обикновено имат единствен верен отговор. Това създава усещането у малките и умни деца, че е достатъчно наум да съобразят или пресметнат нещо или да „налучкат" полуинтуитивно отговора за да твърдят, че са решили задачата. Ето защо едно от най-тежките препятствия за най-малките ученици, при решаване на ребуси е аргументацията, защо това е единствено (ако е такова) решението и защо сме сигурни, че са намерени всички решения на ребуса.

За да могат да се справят с решаването на ребуси, даваме на децата система от принципи (правила), които да им помагат, като броят им се увеличава в съответствие със знанията, които учениците имат. Част от тези принципи съответстват на свойствата на аритметичните действия и на числата. Също така препоръчваме да не се правят хаотични проверки, а да се прецени кои от символите можем еднозначно да определим. За тези, които не можем веднага да определим, записваме възможни стойности, като се опитваме да преценим кога имаме възможно най-малко проверки. Най-често започваме от цифрата на единиците или от най-старшия разред или от символа, който се среща най-често. Когато алгоритъмът изисква разклоняване, учим децата да проследят всички разклонения и методично да изчерпат всички възможности. По този начин няма опасност да се пропусне решение, а ако ребусът няма решение, можем да го докажем. Важно е учениците да разберат, че да се реши един ребус, означава да се намерят *всичките* му решения или да се покаже, че няма такива.

Тъй като подходите за решаване на ребуси могат да бъдат различни, в процеса на работа учениците виждат, че до решение на една задача може да се стигне по различни пътища, някои от които по-кратки или по-елегантни от други. Това показва богатството на математиката, стимулира любопитството и творческото начало у децата. Като добавим удовлетворението и гордостта, които малките ученици изпитват след като решат една нелека задача, за която често и родителите не са в състояние да помогнат, можем да кажем, че темата „Ребуси“ е изключително полезна за развитието на младите математици.

Тук предлагаме задачи от тема „Ребуси“, които да се разгледат последователно от втори до шести клас.

***Втори клас***

Всички задачи по-долу са взети от Цветкова, Панделиева, и др. 2015.

Основните принципи за решаване на ребуси, достъпни за 2. клас:

1) ☺ + ☺ = ☺ означава, че зад ☺ се крие цифрата 0, защото само 0 + 0 = 0.
2) А ако имаме ☺ + ☼ = ☻♣, можем със сигурност да кажем, че ☻= 1, защото, ако съберем две едноцифрени числа и се получава двуцифрено, то ще има цифра на десетиците 1.
3) От ☺ + ☺ = ☼☻, можем да направим извода, че ☼ = 1, а ☺ е по-голямо от 4, защото събираме две еднакви едноцифрени числа и получаваме двуцифрено.

**Задача 1**. Решете ребуса ☺☺ + ☼☼ = ☺☺☻.

**Решение.** Като използваме правило 2) виждаме, че ☺ = 1 и се получава 11+ ☼☼ =11☻. ☼ = 9, защото, ако ☼ = 8 или по-малко, няма да се получи трицифрен сбор. Следователно ☻= 0 и решението на ребуса е 11+ 99 =110.

**Задача 2**. Решете ребуса:

**а)** 80 – ** = 7* **б)** *** – ** = 1 **в)** ** + ** = 22

**Задача 3**. Решете ребуса:

**а)** АА + ББ = 33 **б)** А + А + А + А + А = МА **в)** И . 6 = СИ

**г)** АА + Б = БВ, където АА е възможно най-голямото нечетно число.

**Задача 4**. Колко решения има ребусът **ИИ . 3 = СС** ? Напишете ги.

**Задача 5**. Попитали Мая колко рибки има. Тя отговорила: Толкова, колкото е произведението на едноцифреното число М със 7, което произведение има последна цифра М.

**Задача 6**. Ако съберете пет еднакви едноцифрени числа ще получите нечетно число с първа цифра 3. Кои са числата?

**Задача 7**. Ако съберете едноцифрено число с двуцифрено число със същата цифра на единиците и цифра на десетиците с 4 по-голяма, ще получите най-малкото трицифрено число. Намерете числата.

*Трети клас*

Всички задачи по-долу са взети от Цветкова, Панделиева, и др. 2016 а.

Основните правила за решаване на ребуси се разширяват:

1) ☺ + ☺ = ☺ означава, че зад ☺ се крие цифрата 0, защото само 0 + 0=0.
2) А ако имаме ☺ + ☼ = ☻♣, можем със сигурност да кажем, че ☻= 1, защото, ако съберем две едноцифрени числа и се получава двуцифрено, то ще има цифра на десетиците 1.
3) От ☺ + ☺ = ☼☻, можем да направим извода, че ☼ = 1, а ☺ е по-голямо от 4, защото събираме две еднакви едноцифрени числа и получаваме двуцифрено.
4) Ако съберем две еднакви числа, ще получим четно число.
5) Ако умножим едно число с 5, то произведението ще завършва на 0 или 5.

**Задача 1**. Решете ребуса АБ + АВ = ВБВ.

**Задача 2**. Решете ребуса ААБ + АБ = ВББ.

**Задача 3**. Решете ребуса ** +** = 197.

**Задача 4**. Решете ребуса:

**а)** Е + АА = ИИИ

**б)** НММ + МЕМ = ОКК

**в)** ИЛИ + ЛЛИ=МИГГ

**Задача 5**. Колко решения има ребусът Е + МА = ОГИ? Напишете ги.

**Задача 6**. Кои числа се крият зад думата МУХА от ребуса

УХА + УХА + ИХА = МУХА

**Задача 7**. Намерете колко РИБА имам във вировете, като решите

ВИР + ВИР = РИБА

**Задача 8**. Решете ребуса:

**а)** 3*1+*4*+612=*075 **б)** 100 –*7= 2* **в)** 5*8+84*=1*69

**г)** 1*7.*=13* **д)** *1.9=** **е)** 80*:*=4*3

**Задача 9**. Решете ребуса:

**а)** ЕХХ – ДДА = АДА **б)** КОН . 4 = ДОЛ

**Решение. а)** По-лесно е ребусът да се реши, като се запише със събиране АДА + ДДА = ЕХХ. Виждаме, че Х е четно число, защото е сбор на две еднакви числа А + А (Правило 4). Като съберем А + Д, не се получава пренос, защото сборът ЕХХ е също трицифрено число, а Д + Д дава пренос 1, а А + А не дава пренос, защото вече установихме, че Х е четно число. Това означава, че А = 1, 2, 3 или 4, а Д = 5, 6, 7 ,8 или 9. Ако А =1, то Х = 2 и Д = 6 и се получава 822 – 661 = 161. Но дали това е единствено решение? Ако А = 2, то Д = 7, но тогава А + Д + 1 пренос = 10 и сборът става четирицифрен. По същите причини А не може да бъде 3 или 4. Решението е единствено.

**б)** Цифрата К е 1 или 2, защото иначе произведението няма да е трицифрено число. Цифрата О може да е: 0 и тогава 4.Н не дава пренос; 3 и тогава 4.Н дава пренос 1; 9 и тогава 4.Н дава пренос 3. След проверка на всички случаи се откриват решенията: 198.4=792, 102.4=408, 234.4=936, 201.4=804 и 134.4=536.

**Задача 10**. На три картички са написани три различни цифри. С тях е наредено най-голямото възможно трицифрено число, а след това следващото по големина трицифрено число. Ако съберем тези числа ще получим 1656. Кои са цифрите върху картичките?

**Задача 11**. Дядо има НУЛА + ЕДИН + ДВА + ТРИ = ШЕСТ коня. Колко коня има дядо ще разберете, като решите ребуса.

***Четвърти клас***

Всички задачи по-долу са взети от Цветкова, Панделиева, и др. 2016 б. Има две изключения, които са указани.

Допълнените правила за решаване на ребуси са:

- ☺ + ☺ = ☺ означава, че зад ☺ се крие цифрата 0, защото само 0 + 0 = 0.
- ␣ ☺ + ␣ ☺ + 1 = ␣☺ означава, че зад ☺ се крие цифрата 9, защото само

  ␣ 9 + ␣ 9 + 1 = ␣ 9 – тук символът ␣ означава, че на това място може да има една или повече цифри, които в момента не ни интересуват.
- А ако имаме ☺ + ☼ = ☻♣, можем със сигурност да кажем, че ☻ = 1, защото, ако съберем две едноцифрени числа и се получава двуцифрено, то ще има цифра на десетиците 1.
- От ☺ + ☺ = ☼☻ можем да направим извода, че ☼ = 1, а ☺ е по-голямо от 4.
- Ако съберем две еднакви числа, ще получим четно число.
- Ако съберем две еднакви числа и имаме 1 пренос, ще получим нечетно число.
- Ако умножим едно число с 5, то произведението ще завършва на 0 или 5.
- ␣ А . ␣ А = ␣ Б – Б е някоя измежду цифрите 0, 1, 4, 5, 6 или 9.

**Задача 1.** Решете ребуса.

**а)** ЕДНО – ДВЕ = ДВЕ

**б)** КИС + КСИ = ИСК

**в)** ПОЛЕТ . Т = АААААА (Раковска, Тонов и др., 2007)

**г)**

```
* * * * * * * | * *
* * *           * * 8 * *
      * *
      * *
        * * *
        * * *
            0
```

(Раковска, Тонов и др., 2007)

**д)** ЕВА . 3 = АДАМ

**е)**

```
  А Б В
+   Г Д Е
---------
Ж З И К
```

**ж)** АХ . УХ = 2001

**з)** АААА – ВВВ + СС – К = 1234

**и)**

```
АБ + 8 = ЗВ
 –   –    –
ГД + В = ГВ
-----------
ГБ + З = АД
```

**Решение**. **а)** Да запишем ребуса със събиране ДВЕ + ДВЕ = ЕДНО. Ясно е, че Е = 1, защото събираме две трицифрени числа и получаваме четирицифрено, а преносът може да е само 1, следователно О = 2. Зад Д се крие цифрата 9, според второто правило. Сега вече ребусът изглежда така: 9В1 + 9В1 = 19Н2. Оттук нататък В + В трябва да дава пренос, значи, В е 5, 6, 7 или 8, но не може В да е равно на 6 защото тогава Н ще е равно на 2, но О е равно на 2. Отговорите са 951 + 951 = 1902, 971 + 971 = 1942, 981 + 981 = 1962 .

```
*1 × ** = **0
6* : *7 =   *
** + ** =  20
*2 −  * =   *
-------------
*** + ** = 1**
```

**Задача 2**. Разшифровайте ребуса, като замените звездичките с цифри така, че да са изпълнени равенствата във всички редици и всяко от числата в последния ред да е равно на сумата от числата в стълба над него.

**Задача 3**. Броят на дисковете на Георги е равен на трицифрено число с равни цифри на стотиците и десетиците и цифра на единиците 5. Той искал да нареди дисковете в няколко кутии и започнал да слага възможно най-големия равен брой дискове във всяка кутия. Останали му 8 диска. Ако броят на кутиите е едноцифрено число, то колко са кутиите, по колко диска има във всяка от тях и колко диска общо има Георги?

**Задача 4**. Едно число ще наричаме „магическо“, ако е трицифрено, записва се с различни цифри и сборът от цифрата на единиците и цифрата на стотиците му е два пъти по-малък от цифрата на десетиците му. Намерете всички магически числа.

***Пети клас***

В пети клас към правилата се добавят и знанията за разлагане на числа на множители, което е ключов момент при решаване на повечето ребуси с умножение.

**Задача 1**. Решете ребуса, като **ч** означава четна цифра, а **н** – нечетна цифра.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | ч | ч | н |
| | | | н | н |
| | ч | н | ч | н |
| | ч | н | н | |
| н | н | н | н | н |

**Решение**. Да заменим четните цифри с гласни букви, а нечетните - със съгласни букви. Тъй като A е поне 2 и C е нечетно и AEB.C = УНК, то C > 1 и C < 5 => C = 3, следователно и A = 2. От AEB.D = IFUG следва, че I = 2 и D ≥ 5, но F е нечетно => D = 9, а Y = 8, за да има пренос. От там определяме последователно E = 8, F = 5 H = 5 K = 5 и L = M = 1. Решението е:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| × | | A | E | B |
| | | | C | D |
| | I | F | U | G |
| + | Y | H | K | |
| L | M | N | P | R |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | 2 | 8 | 5 |
| | X | | 3 | 9 |
| | 2 | 5 | 6 | 5 |
| + | 8 | 5 | 5 | |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 5 |

**Задача 2**. Решете ребуса:

**а)**АХ . УХ = 2001

**б)** АС . СС . К = 2002

**в)** БАО . БА . Б = 2002

**Упътване**. **а)** Разлагаме 2001=3.23.29.

**Отговор**. **б)** 29.69 = 20012002 = 91.11.2.

**Решение. в)** Разлагаме на множители 2002 = 2. 7. 11. 13. Ако Б ≥ 2, то БА ≥ 20 и БАО ≥ 200 => БАО.БА.Б ≥ 200.20.2 = 8000 > 2002 => Б = 1, Б ≠ А => БА = 13 или БА = 14 = 2.7. Ако БА = 13, БАО = 2002 : 13 = 154 => А = 5 ≠ 3. Тогава БА = 14, БАО = 143.

**Отговор**: 143. 14. 1 = 2002

**Задача 3**. Решете ребуса, ако сборът АЛФА + БЕТА е най-голям

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | *А* | *Л* | *Ф* | *А* |
| + | *Б* | *Е* | *Т* | *А* |
| | *Г* | *А* | *М* | *А* |
| *Д* | *Е* | *Л* | *Т* | *А* |

**Решение**. 5895 + 6475 + 2505 = 14875

***Шести клас***

В шести клас добавяме и знания за степени, свойства на делимостта, а също и методи за решаване на ребуси, като използваме десетичен запис на числата.

**Задача 1**. Числото **ABCDEF** е написано с различни цифри, разположени от ляво на дясно в нарастващ ред. Освен това числото е точен квадрат. Намерете числото.

**Решение.** Да запишем ребусът така $(100x + 10y + z)^2$ =ABCDEF. За да са разположени от ляво на дясно в нарастващ ред цифрите трябва A ≤ 4 и следователно F ≥ 6. Тъй като F е последна цифра на точен квадрат => F = 6 или F = 9. При F = 6 , единствена възможност за числото е

123456 . Като разложим на множители получаваме 123456 = 2.2.2.2.2.2.3.643, но 643 не се дели на 3, следователно не е точен квадрат. При F = 9, $z = 3$ или $z = 7$. От $A \leq 4 \Rightarrow x \leq 7$ .

Ако $x = 7$, то ABCDEF > 490 000 – противоречие с подредбата на цифрите. Ако $x = 1$ или $x = 2$ получаваме 5-цифрено число, а търсеното е шестцифрено.

Ако $x = 6$, то ABCDEF > 360 000 – противоречие с подредбата на цифрите.

Ако $x = 5$, то ABCDEF = 256789, но $503^2 = 253009$, а $507^2 = 257049$. Също така ABCDEF > 345 678, при $y = 8$ или $y = 9$ и $z = 3$ или $z = 7$ .

Ако $x = 4$, то ABCDEF >160 000, => A = 2 при $y = 8$ или $y = 9$ и $z = 3$ или $z = 7$ – няма решение.

Ако $x = 3$, A = 1, $y \geq 4$..

**Отговор**: $367^2 = 134689$.

**Задача 2**. Да се намери такова четирицифрено число $\overline{xyzt}$, така че частното $\frac{\overline{xyzt}}{\overline{xy} + \overline{zt}}$ да е най-малко. (Раковска, Тонов и др., 2007)

**Задача 3**. Да се намерят всички трицифрени числа $\overline{abc}$, за които $\overline{abc} = 3.\overline{cba} + 1$. (Раковска, Тонов и др., 2007)

**Задача 4**. На дъската са написани няколко естествени числа като разликата на две произволно избрани съседни числа е равна на едно и също число. Ани заменила в този запис различните цифри с различни букви, а еднаквите цифри – с еднакви букви. На дъската се получил записа Т, ЕЛ, ЕК, ЛА, СС. Намерете първоначално написаните числа.

**Решение.** Да означим разликата между две съседни числа с $d$. Забелязваме, че ЕЛ и ЕК се намират в една десетица, следователно $d$ е едноцифрено число. Освен това Т + d = ЕЛ, което означава, че Е = 1, Л = 2 и С = 3. Получаваме Т, 12, 1К, 2А, 33, от където

$$+\left|\begin{array}{l} 1K - 12 = d \\ 2A - 1K = d \\ 33 - 2A = d \end{array}\right.$$

Следователно 33 – 12 = $3d$ и $d = 7$.

**Отговор**: 5, 12, 19, 26, 33.

**Задача 5.** Да се намери числото $\overline{xxyy}$, ако е известно, че е точен квадрат.

**Решение**. Използваме $\overline{xxyy}$ = 1000x + 100x +10y +y = 11( 100$x$ + $y$) , следователно $\overline{xxyy}$ = $11^2$. $t^2$. Тогава $100x + y = 99x + (x + y) = 11. t^2$, т.е. $x + y$ се дели на 11 и тъй като това са цифри, $x + y = 11$. От $99x + 11 = 11. t^2$, $9x + 1 = t^2$, $x = 7$, $t = 8$, $y = 4$. Решение: $7744 = 88^2$.

**Задача 6.** Да се намери четирицифрено число $\overline{1xyz}$, ако две от числата $\overline{xz}$ , $\overline{yx} + 1$ и $\overline{yz} - 2$ се делят на 7, а $x + 2y + z = 29$.

**Отговор.** 1968.

**2. Метод за решаване на задачи отзад-напред**

Друга тема, която може да се разглежда в развитие от втори до пети клас, е приложение на метода решаване на задачи отзад-напред в текстови задачи и задачи за намиране на неизвестно число. Този метод използва схеми (наричаме ги „верижки“), които помагат за проследяване на действията, описани в условието на задачата и дават възможност да се намери решението започвайки от последното извършено действие и връщайки се назад. Така стъпка по стъпка се достига до началната ситуация, което обикновено се търси в задачата. Този начин на решаване на задачи е популярен също така като „рачешки задачи“. Този метод изключително много опростява решението на задачата, която обикновено може да се реши и чрез съставяне на уравнение. Уравнението, обаче често е непосилно за решаване не само за малките, но и за по-големите ученици. Тази особеност на метода ни подсеща, че може да го използваме и за решаване на уравнения, но той не винаги приложим в този аспект.

Във втори клас разглеждаме темата в две отделни части, като в първата са включени само действия събиране и изваждане, а във втората и умножение и деление. Това е необходимо, тъй като второкласниците през първия учебен срок все още не знаят таблицата за умножение, а е добре първо да се запознаят с метода, да го упражнят и овладеят за действията събиране и изваждане. Така по-лесно разбират и усвояват приложението на метода когато се наложи да ползват и четирите аритметични действия. За тях все още е много трудно да правят разлика между „с 2 повече“ и „ два пъти повече“ и затова втората част е предвидена да се изучи в края на учебната година.

Задачите, които се разглеждат в трети клас са с по-високо ниво на сложност, което се изразява освен с по-дълги текстове на задачите, с повече действия, така и с допълнителни въпроси, свързани със ситуацията от задачата. Освен, че питаме „Колко е имало в началото?“, питаме и „Кой по колко е взел/получил?“ Докато във втори клас се ограничаваме до задачи, които се решават с една „верижка“, тук вече включваме и задачи с две „верижки“. Също така показваме как могат да се решават задачи за намиране на неизвестно число, като ползваме същия метод.

В четвърти клас освен, че преговаряме метода, като решаваме задачи с една или две „верижки“, но включваме и изучаваните вече половинки, третинки, четвъртинки. Също така се разглеждат задачи с три верижки и дробни части, което е ново ниво на познание. В този тип задачи е важно да се следят действията на трите обекта едновременно и да се вижда връзката между тях и последствията. Едно от трудните за разбиране за децата неща е, че ако един човек дава на друг половината от предметите, които има (т.е. неговите намаляват наполовина), то на другия не се удвояват, защото той има друго количество. Също така, ако някой даде третинка от предметите, които има на другиго, то за него остават не една, а две третинки.

Акцентът на задачите, които се решават по метода за решаване на задачи отзад-напред в пети клас е използването на обикновени дроби. Докато в четвърти клас само се докосваме до тази идея, в пети клас я развиваме изцяло, като се основаваме на по-сериозните знания на учениците за действия с дроби, понятието част от число и процент.

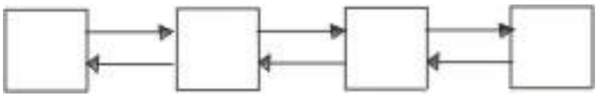
***Втори клас***

Всички задачи по-долу са взети от Цветкова, Панделиева, и др. 2015.

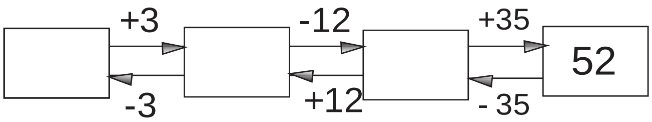
*Първа част – задачи само със събиране и изваждане.*

**Задача 1**. Намислих едно число, към него прибавих 3, от получения сбор извадих 12, след това прибавих числото 35 и получих 52. Кое число съм намислил?

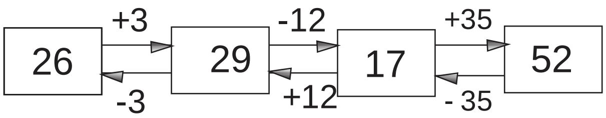
**Решение.** Ще решим задачата като „върнем времето назад“. Рисуваме схемата



Горните стрелки показват последователността на извършените действия, а долните стрелки – връщането обратно. До всяка стрелка пишем съответното действие, а в последното квадратче числото  52. Получава се схемата:




След това започваме да я попълваме отзад – напред, както се движат раците. В първото квадратче се получи търсеното число.




**Задача 2**. Баба Пепа изпече сладки и ги сложи в една чиния. Теа беше много гладна и веднага си взе 12 сладки, след нея мина Теди и си взе 8 сладки, а по-късно Ани си взе само 3 сладки, защото беше на диета. Тогава в чинията останаха 4 сладки. Колко сладки изпече баба Пепа?

**Задача 3.** Намислих си едно число. От него извадих 6, към полученото прибавих 13 и после извадих половината на 6. Резултата, който се получи, е 56. Кое число съм си намислил?

**Задача 4.** В кошница имаше орехи. Лора взе 18 ореха, след това дойде дядо ѝ и добави в кошницата 63 ореха, а после по-малкото братче на Лора си взе 24 ореха. Така в кошницата останаха точно 76 ореха. Колко ореха имаше в кошницата първоначално?

**Задача 5.** Червената Шапчица беше набрала гъбки в кошницата си и изведнъж Кумчо Вълчо изскочи пред нея и ѝ взе 42 от гъбите. Червената Шапчица се разплака, но си намери още 19 гъбки, а после срещна Баба Меца, която ѝ подари 24 от своите гъби. После Червената Шапчица срещна едно сладко зайче и му подари 7 от гъбките си. В кошничката ѝ останаха 50 гъбки, достатъчни за да сготви на баба си. Колко гъбки имаше Червената Шапчица преди да срещне Кумчо Вълчо?

**Задача 6.** Злати се разхождаше по права алея. Направи няколко крачки от началото на алеята до дървото, което расте на нея. След това се върна 6 крачки назад, после изтича 14 крачки напред, върна се 13 крачки назад и отново измина 31 крачки напред. Така Злати се оказа на 44 крачки от началото на алеята. На колко крачки от началото на алеята е дървото?

**Задача 7.** На първата спирка в автобуса се качиха няколко пътника. На втората спирка 7 от тях слязоха и се качиха 19. На третата спирка слязоха 21, а се качиха 32. На четвъртата спирка слязоха 28, а се качиха 4 и на последната спирка слязоха 13 души и автобуса се изпразни. Колко пътници се качиха на първата спирка?

**Задача 8.** Намислих си едно число, от него извадих 56, след това прибавих 17, а после извадих най-малкото двуцифрено число. Получих 49. Кое число си намислих?

**Задача 9.** Проф. Банков тръгна за семинар. В резервоара на колата му имаше няколко литра бензин. Докато пътуваше през задръстванията в София, бензинът му намаля с 8 литра, затова на първата бензиностанция професорът наля 25 литра и продължи пътя си. В края на магистралата бензинът беше намалял с 14 литра, а докато пристигне на семинара бензинът намаля с още 7 литра и в резервоара останаха само 5 литра. С колко литра бензин тръгна от София проф. Банков?

**Задача 10.** Иво и Боби имаха по няколко стъклени топчета. Иво не харесваше 3-те жълти и ги даде на Боби. После Боби даде на Иво 19 сини и 4 червени топчета. Иво върна на Боби 11от топчетата. Накрая Иво имаше 13 топчета.

**а)** Колко топчета имаше Иво в началото?

**б)** Колко топчета имаше Боби в началото, ако те бяха с 29 повече от тези на Иво? А колко бяха накрая?

**Задача 11.** На празникът на цветята Явор купи няколко лалета. Пет от тях подари на баба си, после едно даде на чистачката в училище. Три от лалетата бяха за красиво момиче от съседния клас, а седем Явор даде на сестра си. Като прецени, че остават много малко лалета, той купи още четири. Получи се букет от 9 лалета, който Явор подари на майка си. Колко лалета купи Явор в началото?

**Задача 12.** Когато дискотеката започна, на дансинга имаше само няколко деца. После в танците се включиха още 43 деца, но след бавната песен 37 от тях седнаха по местата си. Когато пуснаха любим хит, нови 29 деца се включиха в танците, а след малко започнаха да танцуват още 54 деца. В края на дискотеката, от дансинга си тръгнаха 52 уморени деца и останаха 48 ентусиасти. Колко деца имаше на дансинга в началото на дискотеката?

**Задача 13.** Гошко и Митко имат колекции от колички. Митко дал 12 от своите на Гошко. Гошко си купил 3 нови и после дал от колекцията си на Митко толкова, колкото е най-малкото двуцифрено число с еднакви цифри. Митко подарил на Гошко 26 нови колички и 3 от своята колекция. Сега вече Гошко има толкова колички, колкото е най-голямото двуцифрено число.

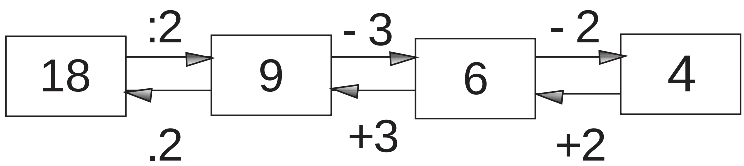
Колко колички имал Гошко в началото? Колко колички е имал Митко в началото, ако общо двамата са имали 100 колички? Колко колички има Митко накрая?

*Втора част – задачи с четирите аритметични действия.*

**Задача 1.** Малката цветарка продала няколко карамфила, но не помни колко. На въпросът колко пари е спечелила от продажбата им, тя отговорила:

– В кошничката ми имаше няколко карамфила. Половината от тях купи елегантен господин, три карамфила купи малко момче за майка си, по един карамфил купиха двама младежи за приятелките си и в кошничката останаха 4. Всеки карамфил струва 2 лева.

**Решение**. Да пресметнем колко карамфила е имала в началото, като решим „рачешки” задачата.




Имала е 18 карамфила и са ѝ останали 4. Значи си продала 14, по 2 лева всеки, което прави 28 лева.

**Задача 2.** На паркинг има няколко коли. Половината от тях са бели, половината от останалите – червени, 6 – сини и последните 4 – черни. Колко коли има на паркинга?

**Задача 3.** Малкият магьосник имаше няколко риби в аквариума си. Той докосна с вълшебната си пръчка аквариума и рибите в него се удвоиха. След второто докосване 6 от рибите се превърнаха във водорасли, след третото – броят на рибите намаля на половина и след четвъртото – 5 охлювчета се превърнаха в риби. Накрая в аквариума плуваха 12 риби. Колко риби имаше в началото в аквариума на Малкият магьосник?

**Задача 4.** На 1 май в моята градинка цъфнаха няколко цветя. На следващия ден цъфнаха още 3, след това цъфнаха още толкова, колкото бяха разцъфтели в момента, после увехнаха 8, а буря унищожи половината от останалите. Тогава в градинката останаха 5 разцъфнали цветя. Колко цветя цъфнаха на 1 май в моята градинка?

**Задача 5.** Пепи имаше няколко зайчета. След 3 месеца те увеличиха броя си 4 пъти. След още 2 месеца зайчетата удвоиха броя си и тогава Пепи подари 3 зайчета на Сашо и 4 зайчета на Яна. Останалите зайчета Пепи раздели по равно между тримата си братовчеди. Всеки от тях получи по 3 зайчета. Колко зайчета имаше Пепи в началото?

**Задача 6.** Деница има няколко шестици в бележника. Половината от тях са по математика, половината от останалите – по български език, три шестици са ѝ писали по рисуване и пет шестици има по останалите предмети. Колко шестици има Деница общо в бележника си?

**Задача 7.** Баба Славка омеси тесто и го сложи в няколко форми да втасва. След 1 час тестото увеличи обема си и вече бяха запълнени 3 пъти повече форми, а след още половин час с него се запълниха още толкова форми, колкото вече бях пълни. Тогава баба Славка сложи всичките 18 форми да се пекат. Колко форми запълваше тестото в началото?

**Задача 8.** Вещицата омагьоса Малечка-Палечка и всеки ден тя ставаше два пъти по-ниска. След 5 дни Малечка-Палечка беше висока само 3 сантиметра. Колко сантиметра беше тя в началото?

**Упътване**: Когато се налага, заместете умножението със събиране.

**Задача 9.** Иван купи кутия с балони. Даде на брат си 12 балона, на сестра си 13 балона, половината от останалите наду и използва за украса, а 8 от останалите след това приготви за забавно състезание. Така в кутията останаха 2 резервни балона. Колко балона имаше в началото Иван?

**Задача 10.** Фокусникът извади от магическия си цилиндър няколко гълъба, след това с магическата си пръчка увеличи броят им три пъти, после от наметалото си измъкна 3 зайчета и накрая от ръкава си извади два пъти повече от зайчетата – кученца. Колко гълъба извади фокусникът от цилиндъра си, ако накрая на сцената имаше общо 33 животни?

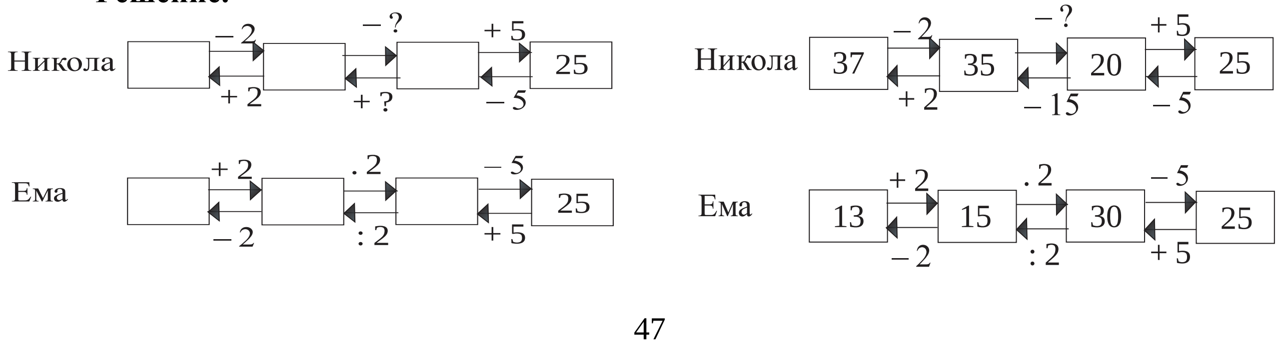
***Трети клас***

Всички задачи по-долу са взети от Цветкова, Панделиева, и др. 2016 а.

**Задача 1.** Нина събра пълна шепа мидички от плажа и тръгна към дома си. По пътя видя едно разплакано дете и му даде 4 мидички за да се успокои. След това срещна приятелката си Гери и ѝ даде половината от мидичките, които имаше в момента. След това на съседчето Лили даде 7 от мидичките си и се прибра у дома. Там даде половината от мидичките, които си донесе, на братчето си Борко, а останалите добави в кутийката си, където вече имаше 11 мидички. Нина преброи всички мидички в кутийката си – бяха 29. Колко мидички имаше в шепата на Нина в началото?

**Задача 2.** Майката на Никола и Ема им донесе от най-вкусните бонбони, които и двамата обожават. Те се втурнаха и всеки грабна колкото може. Ема обаче не беше доволна, защото нейните бонбони бяха много малко. Затова Никола ѝ даде първо 2 бонбона, а после още толкова, колкото тя вече имаше. Сега пък нейните бяха повече и тя му даде 5. Накрая настъпи спокойствие, защото и двамата имаха по 25 бонбона. По колко бонбона бе взел всеки от тях в началото?

**Решение.**



Правим схема с две „верижки“. При второто действие на Никола бонбоните на Ема се удвояват и над стрелката записваме „ . 2“, но не знаем колко бонбона е дал Никола и затова в неговата „верижка“ записваме над стрелката „– ?“ и ще разберем на колко е равен въпросителният знак.

**Задача 3.** Хензел и Гретел напълниха кошничките си с курабийки от покрива на захарната къщичка и тръгнаха към дома. Най-напред Хензел изяде 3 от своите курабийки, после даде 4 на Гретел. След това Гретел изяде две от своите и даде на Хензел толкова курабийки, колкото той имаше в момента и после още 5. Тогава се оказа, че и двамата имат по равен брой курабийки. Ако от покрива Хензел и Гретел са взели общо 71 курабийки, по колко е имал всеки от тях в кошничката си в началото?

**Задача 4.** Доби и Коби имат огромен пакет с бонбони, които си разделили по „братски“. След това Доби изял 5 бонбон от своите и дал половината от останалите на Коби. Коби изял 9 бонбона от своите и дал половината от останалите на Доби. Накрая Доби изял още 5 от своите бонбони и му останали 50, а Коби изял още 2 от своите и му останали 30. Колко бонбона са имали двамата в началото общо и как са ги разделили?

**Задача 5.** На масата бяха оставени кана и бутилка в които има мляко. Дойде Митко и изпи 200 милилитра мляко от бутилката, а после досипа от каната в бутилката толкова, колкото имаше в момента в нея. След него дойде Сашо, изпи 400 милилитра от бутилката и изсипа половината от останалото в нея в каната. Така в каната имаше най-малкото четирицифрено число милилитри мляко, а в бутилката 400 милилитра. По колко милилитра мляко имаше в началото във всеки съд?

**Задача 6.** Намерете неизвестното число от равенството ($x$ +13) – 18 = 5.

**Решение**. $\boxed{x} \overset{+13}{\rightleftarrows} \boxed{\phantom{00}} \overset{-18}{\rightleftarrows} \boxed{5}$ $x =$…..

**Задача 7.** Намислих си едно число. Умножих го по 2, към полученото прибавих 5 и резултата разделих на 3. Получих 7. Кое число съм си намислил?

**Задача 8.** Попитали Катя на колко е години. Тя отговорила: „ Ако към възрастта ми добавиш 7 години, полученото разделиш на 6, а след това умножиш числото 33 с получения резултат, ще получиш най-голямото двуцифрено число.“ На колко години е Катя?

**Задача 9.** На карнавал наградили четирите децата с най-интересни костюми с бонбони. На първото дали 1 бонбон, половината от останалите и още 2 бонбона. На второто дали 2 бонбона, половината от останалите и още 3 бонбона, на третото дете дали 3 бонбона, половината от останалите и още 4 бонбона и на четвъртото дете дали 4 бонбона, половината от останалите и още 5 бонбона. Тогава в кутията останали 7 бонбона. Колко бонбона е имало в кутията в началото? Колко бонбона е получило всяко от четирите деца?

**Задача 10.** На първата гара във влака се качиха няколко пътници, на втората никой не слезе, но се качиха още 9. Третата гара беше голяма и на нея слязоха половината от пътниците във влака и след това се качиха 48. На четвъртата гара отново слязоха половината от пътниците и след това се качиха 56, на петата гара слязоха 62 и се качиха само 7. Следващата гара беше последна и от влака слязоха всичките 85 пътници. Колко пътници се качиха във влака на първата гара?

**Задача 11.** В лаборатория в една колба поставили определен брой бактерии. След известно време те удвоили броя си. Когато им прибавили хранителен разтвор, броят на бактериите станал три пъти по-голям, отколкото до този момент. След това изложили колбата на слънце и половината бактерии загинали. На следващия ден се увеличили с 94, но когато колбата била оставена в хладилник, останали само четвъртинка от бактериите, които имало в нея. Преброили ги под микроскоп и се оказало, че са 97. Колко бактерии са поставили в колбата в началото?

**Задача 12.** Петър и Петя имали по различен брой мартенички, общо 72. Най-напред Петър дал на Петя толкова, колкото тя имала, след това Петя дала на Петър толкова, колкото той имал в момента и после още 4. Тогава броят мартенички, които всеки имал се изравнил. Колко мартенички е имал всеки в началото?

**Задача 13.** Стоян и Стойна отишли да берат ябълки. Всеки напълнил по една кошничка. Като се прибрали, Стоян дал на Стойна първо 3 ябълки, после половината от ябълките, които му останали. След това Стойна изяла една ябълка и му върнала 5 от ябълките и тогава Стойна вече имала два пъти повече ябълки от Стоян. Ако двамата общо имали 99 ябълки, по колко е имал всеки в началото?

**Задача 14.** Намерете неизвестното число $x$ от равенството:

**а)** $((x - 12) : 7 - 2 + 12) . 5 = 200$ **б)** $(m - 3).7 - 126 = 49.6$

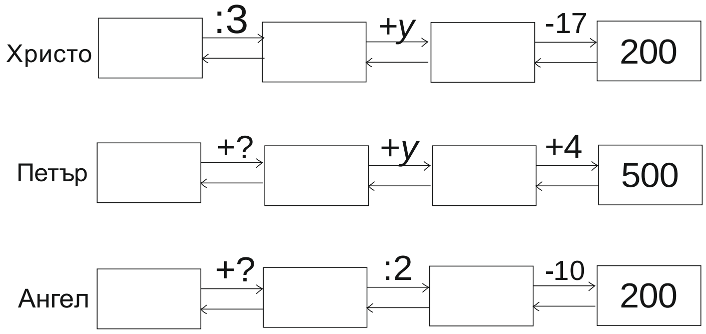
**в)** $((k + 7) . 5 - 13 + 3):6 = 15$ **г)** $((p - 12) : 7 + 1) .5 = 20$

***Четвърти клас***

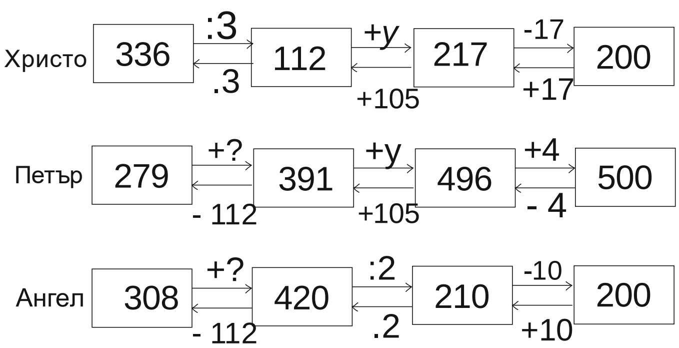
Всички задачи по-долу са взети от Цветкова, Панделиева, и др. 2016 б.

**Задача 1.** Познавам трима братя: Христо, Петър и Ангел. Те имат колекция от сувенирни модели малки автомобилчета и непрекъснато ги разменят помежду си. Ето какво направиха веднъж. Христо раздели своите автомобилчета на 3 равни части и всеки от братята взе по една. След това Ангел раздели своите автомобилчета на две равни части, едната остави за себе си, а другите раздели поравно между Христо и Петър. Христо подари на приятели 17 от автомобилчетата си, Петър си купи още 4, а Ангел загуби 10 от своите. Накрая Христо и Ангел имаха по равен брой, Петър – два пъти и половина повече от Христо, а общият брой на автомобилчетата и на тримата беше 900. Колко автомобилчета са имали тримата общо в началото? Кой от тях по колко е имал тогава?

**Решение**. Веднага може да намерим, че в началото тримата общо са имали 900 + 17 – 4 + 10 = 923 автомобилчета. Освен това може да кажем и кой по колко е имал в края. Ако половината автомобилчета на Христо означим с $x$, то всичките му автомобилчета са $2x$. Толкова са и на Ангел, а Петър ще има $5x$. Общо тримата са имали $9x = 900$. Тогава $x = 100$, Христо и Ангел са имали по 200, а Петър – 500 автомобилчета. За да намерим по колко са били в началото, рисуваме три „верижки“.




Тъй като не знаем по колко автомобилчета са получили първо Петър и Ангел, а после – Христо и Петър, но знаем, че са получавали по едно и също количество, пишем еднакви знаци над стрелките. След това се връщаме обратно. Тогава разбираме, че след като Ангел е оставил за себе си 210, то другите двама са получили по 105 автомобилчета. Получаваме:




Това означава, че в началото Христо е имал 336, Петър – 279, а Ангел – 308 автомобилчета.

**Задача 2.** Баба Мара дала череши на внучетата си Владо и Мартин. Владо преброил черешите си и видял, че са по-малко от тези на Мартин, но решил да му даде половината от своите. Мартин му върнал 4 череши, а останалите разделил на 3 равни части. Една от тях изял, другата дал на Владо, а третата оставил за себе си. Владо изял 3 от черешите си, а баба Мара дала на Мартин толкова, колкото имал в момента. Накрая и двамата имали по 20 череши. По колко са имали в началото?

**Задача 3.** Катя сгъва правоъгълна покривка, като при всяко сгъване дължината ѝ намалява три пъти, а ширината – два пъти. След три сгъвания размерите на сгънатата покривка били 24 см ширина и 25 см дължина. Намерете първоначалните размери на покривката.

**Задача 4.** Надя, Ели и Диди колекционират и си разменят календарчета. Най-напред Надя раздели своите календарчета на две равни части, половината остави за себе си, а другите раздели поравно между Ели и Диди. След това Диди раздели своите календарчета на три равни части и даде по една третинка на Ели и Надя. След нея и Ели раздели своите календарчета, но на две равни части. Едната половинка раздели поравно между Надя и Диди, а другата остави за себе си. Тогава Диди реши да даде на Ели 3 календарчета, за да имат двете поравно. Ако накрая трите момичета имат общо 328 календарчета, а Надя има 154, то по колко календарчета е имала всяка от тях в началото?

**Задача 5.** Малката принцеса имала вълшебен храст с рози. Всяка сутрин при изгрев-слънце на него разцъфтявали нови 4 рози. По-късно през деня малката принцеса откъсвала 5 рози, от които правела букет, а до вечерта увяхвали още две рози. На 15-ия ден малката принцеса откъснала последните 5 рози. Колко рози е имало на храста, преди тя да започне да бере?

**Задача 6.** Катеричките Кики, Кати и Коко си събрали лешници за зимата. Преброили ги – общо 153. Не могли да устоят на вкусната гледка и всеки хапнал от своите лешници. Кики изяла три, Кати – един, а Коко – два. След това Кики разделила своите лешници на три еднакви купчинки. Едната оставила за себе си и благородно подарила на Кати и Коко по една. Веднага след това и Кати постъпила по същия начин. После Коко решила да раздели своите лешници на 5 еднакви купчинки. Две от тях оставила за себе си, толкова дала и на Кати, а на Кики дала само една. Накрая Коко имала 34 лешника, а Кики – с един повече от Кати. По колко лешника е имала всяка катеричка в началото?

**Задача 7.** За детски празник направили томбола, в която наградите били стикери. Първо наградата си получил Томи. Той взел третинка от всички стикери и още един стикер. След това награда получила Мими. Тя взела първо един и след това – половината от останалите стикери. Нели била веднага след това и ѝ дали най-напред един, после – половината от останалите стикери, и още един стикер. Накрая Бойко взел половината от останалите стикери и после – още седем. Останали пет неспечелени стикера. Колко стикера са раздадени в тази томбола и по колко стикера е спечелило всяко дете?

**Задача 8.** В три кофи има общо 35 литра вода. От първата прелели във втората толкова, колкото имало в нея в момента, а след това излели 3 литра от първата кофа. По-късно от втората прелели в третата толкова, колкото имало в нея в началото, след което веднага отлели 2 литра от третата кофа. Тогава водата в трите кофи станала поравно. По колко литра вода е имало във всяка кофа в началото?

**Задача 9.** Полските мишки Али, Бали и Вали събрали общо 53 жълъда. Бали дала половината от своите на Вали, след това Вали дала половината от тези, които имала в момента, на Али, а после и Али разделила половината от жълъдите, които имала в момента, между Бали и Вали, като Вали взела два пъти повече. Накрая Вали имала 23 жълъда, а Али и Бали – поравно. Коя мишка по колко жълъда е имала в началото?

**Задача 10.** Минчо, Данчо и Ганчо имат общо 32 монети. Ганчо дал на Минчо толкова, колкото Минчо имал в момента. След това Минчо дал на Данчо толкова, колкото Данчо имал в момента. Накрая Данчо дал на Ганчо толкова, колкото Ганчо имал в момента. Оказало се, че Ганчо има с 5 монети повече от Данчо, а Минчо има само една монета. Кой по колко монети е имал в началото?

**Задача 11.** Ники, Ема и Мила имаха общо 168 светещи раковини. Ники даде половината от своите на Ема и Мила, които си ги разделиха поравно. После Ема даде на Мила 6 светещи раковини, а Оги даде на Ники 12 нови светещи раковини. Оказа се, че сега Ники има два пъти повече светещи раковини от Мила, Мила има два пъти повече от Оги, а Ема – три пъти повече от Оги. Кой колко светещи раковини е имал в началото?

***Пети клас***

**Задача 1**. На група от 9 деца раздават ябълки. На първото дали 1 ябълка и една десета от останалите, на второто – две ябълки и една десета от останалите, на третото – 3 ябълки и една десета от останалите и т.н. Оказало се, че всички деца получили по равен брой ябълки. Колко са били ябълките?

**Задача 2**. Един ученик прочел една книга за 3 дни. През първия ден прочел половината от книгата и още 16 страници, втория ден –  от останалото и още 20 страници, третия ден – 75% от новия остатък и още 30 страници. От колко страници е била книгата?

**Задача 3.** Мая трябвало да реши определен брой задачи за един месец. През първата седмица тя решила $\frac{1}{3}$ от всички задачи, през втората седмица решила $\frac{1}{3}$ от останалите ѝ задачи, през третата седмица – $\frac{1}{3}$ от новия остатък и за четвъртата седмица ѝ останали още 8 задачи. Колко задачи е трябвало да реши Мая?

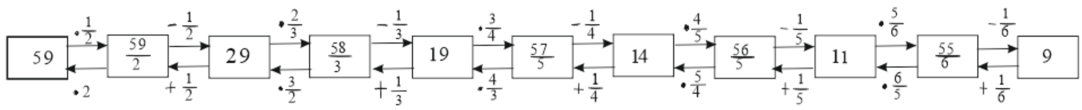
**Задача 4**. Пътник трябвало да измине дадено разстояние за 3 дни с велосипед. През първия ден той изминал $\frac{1}{3}$ от целия път, без два километра, втория ден – 50% от останалия път, без три километра и през третия ден $\frac{8}{9}$ от останалия път и още 6 километра. Колко километра е изминал туристът през трите дни? По колко километра на ден е изминавал?

**Задача 5.** Златина дала половината от парите си за рокля, след това изпила едно кафе за 2 лева. По-късно със 75% от останалите ѝ пари си купила чанта, а гроздето, което купила по-късно, струвало 6 лева. За $\frac{1}{7}$ от останалите ѝ пари си купила химикалка и се оказало, че в портмонето ѝ има 12 лева. Колко пари е имала Златина в портмонето си в началото? (Тя не е имала други пари, освен тези в портмонето.)

**Задача 6.** Евгени има зайка-майка, която родила зайчета. Той дал на приятелите си половината от зайчетата и още половин зайче. Половината от останалите и още половин зайче дал на братовчедите си. На баба си Евгени дал половината от останалите зайчета и още половин зайче, а останалото едно зайче, запазил за себе си. Колко зайчета е родила зайка-майка на Евгени? По колко зайчета е раздавал всеки път?

**Задача 7.** Асен има кокошки, които снесли много яйца. Той занесъл всичките яйца на пазара да ги продава. Първия ден продал половината от тях и още половин яйце. Втория ден продал $\frac{1}{3}$ от останалите и още $\frac{1}{3}$ яйце. Третия ден продал $\frac{1}{4}$ от останалите и $\frac{1}{4}$ яйце, четвъртия ден – $\frac{1}{5}$ от останалите и $\frac{1}{5}$ яйце, петия ден – $\frac{1}{6}$ от останалите и $\frac{1}{6}$ яйце и му останали 9 яйца. Колко яйца са снесли кокошките на Асен и по колко е продавал всеки път?

**Решение.** Рисуваме „верижката“ , като трябва да съобразим, че щом Асен е продал $\frac{1}{3}$ от яйцето, то са му останали $\frac{2}{3}$ и аналогично за останалите продажби.




Получаваме, че в началото Асен е имал 59 яйца.

Тук е добре да направим коментар, че при всяка продажба се получава цяло число яйца, което съответства на житейската практика. След първата продажба са му останали 29 яйца, следователно е продал 59 – 29 = 30 яйца. Аналогично пресмятаме, че втория ден е продал 10, третия – 5, на четвъртия – 3 и последния – 2 яйца.

# ГЛАВА 5. Оценяване на математическия талант

Развитието на математическия талант трябва да бъде оценявано. За всяко оценяване е нужно подходящ вид измерване. Талантът е конструкт, който подлежи на измерване.

„Конструкт е психологическо свойство (качество) на човека, което не може да бъде директно измерено с инструмент (уред). То е хипотетично понятие, плод на мисълта на учените, които го използват, за да обяснят някои страни от поведението на човека. Степента (големината) на определен конструкт за даден човек може да бъда определена (измерена) само като се наблюдава поведението на човека. Следователно, за да се измери конструкт, трябва да се стимулира проявлението му и да се наблюдава полученото поведение (резултатите).“ (Банков, К., 2012).

Талантът се проявява чрез постиженията на конкретния ученик. Следователно, за да измерим таланта е нужно да измерим ученически постижения. Това става като се стимулират ученическите постижения и се измерва наблюдавания ефект от тази стимулация. Инструментът, с който става стимулирането, се нарича тест, а процесът на стимулиране – тестиране. Наблюдаваният ефект е писмената работа на ученика, на която по дадени правила се съпоставят числа във вид на точки или оценка.

Когато се измерват постиженията по математика на талантливи ученици, често се използват задачите, които учениците решават на състезания от математика. Резултатите от класирането на състезания са една от възможните мерки, които използваме.

Когато работим с талантливи деца, имаме нужда да следим техния напредък и развитие. Усещането за успешното изграждане на таланта не е достатъчно. Трябва да се намерят измерими обекти, които да следим и да показват напредъка на ученика. Също така, трябва да можем да оценим постижението на детето спрямо общоприети стандарти и по този начин да оценим дали става дума за талант или за старателен и изпълнителен ученик. Така наречените познавателни равнища дават възможност да преценим правилно кои постижения са наистина високи и над обичайните. Една от най-популярните структури на познавателните области е на Блум, публикувана през 1956 година (Bloom, 1956). Той класифицира познавателните равнища на обучението от най-ниското (възпроизвеждане на информация) до най-високото (прилагане на научено знание или придобито умение в качествено нова ситуация). Класификацията е известна като таксономия на Блум.

Децата, притежаващи математически талант, трябва да извървят пътя на овладяване на всички нивата на познание. А следващата стъпка е да бъде оценен напредъкът им. Най-често оценяването на математическите способности на талантливите деца става при явяването им на състезания. При част от състезанията, в които се излага подробно аргументирано решение, те са оценени от независима комисия, оценката се изразява в точки и подредба в класирането. В състезанията, които са с избираем отговор се избягва субективността на оценката на журито, но пък има вероятност от налучкване на верният отговор. За минимизиране на този ефект се прави разлика между „грешен отговор” и „празен отговор” като се дава различна оценка. Например за попълнен верен отговор се дават 9 точки, за непопълнен – 3 точки и за грешен – 0 точки. Друг подход е като се увеличи на броят на дистракторите (Табов, 2009). „При висока мотивация и интелигентност на оценяваните може да се създават и прилагат усъвършенствани тестове с по-сложни правила, които водят до по-точна оценка; такива са описани например в статиите Pollard 1987 и Clark & Pollard 1989.)“ (Табов, 2009). Тези начини на оценяване са добре известни и се прилагат от много години.

Част от състезанията са отборни или имат отборен етап. Когато състезанията са отборни, оценка (класиране) получава целият отбор, но това не дава добра представа за участието на всеки отделен ученик при изпълнението на общата задача. Този факт ни предизвика за да потърсим начин да оценим участието на отделните членове на екипа. Такова оценяване е полезно като обратна връзка за състезателите при участието им в отборни състезания.

По-долу е разгледан един метод за оценяване на индивидуалните участници при работа в екип. Методът е приложим както за отборни състезания, така и за екипна работа в редовните часове на обучение в училище.

**Оценяване при работа в екип**

Изминалите години на пандемична ситуация показаха колко важно е взаимодействието с другите деца за израстването и правилното формиране на детето като личност. За да направят училището по-привлекателно, учителите трябва да използват едно от най-големите му предимства – социалната среда. Това прави екипната работа все по-предпочитан метод както за преподаване, така и за оценка на знанията на учениците.

Navarro описва работата в екип като способност да си сътрудничим с другите и да допринасяме за работата на общ проект. Екипните задачи имат определени характеристики, които изискват специфично поведение от членовете на екипа, въпреки че те трябва да работят повече или по-малко координирано (Navarro, J.,2017). Въпреки че работата в екип е групова дейност, оценката на членовете на екипа трябва да бъде индивидуална. Това означава, че учителят би искал да даде оценка както на целия екип, така и на всеки един участник в отбора (екипа).

Едно от уменията на 21-ви век е съвместното разрешаване на проблеми и методите за оценката им, описани например от Care и др. (Care, C. Scoular, and P. Griffin, 2016) и Hao и др. (Hao, L., 2017). Съвместното решаване на задачи се определя като дейности, които включват взаимодействия между група от хора. Това е идеята, заложена в отборните състезания, а именно, да оцени до колко талантливите ученици могат да обединят усилия за постигане на обща цел. Екипните дейности се използват в училище както за повишаване на мотивацията на учениците, така и за тяхното оценяване. Развиването на уменията за сътрудничество и работа в екип между учениците променя атмосферата в класната стая и ролята на учителя по време на урока. Екипната работа в училище предполага взаимодействие между ученици и учители, в което всеки участва със своя опит, знания и умения. Умението за ефективна работа с други хора, за изграждане на обща стратегия за вземане на решения, развива критичното мислене, решаване на задачи, комуникативни умения и творчество. Работата в екип е ключово умение за днешната работна среда, където взаимодействието и обменът на идеи са важни. През последните десетилетия университетските преподаватели и учителите вече са признали, че времето в класната стая може да бъде посветено на групови упражнения и задачите могат да бъдат разпределени така, че всеки ученик да играе роля в обучението на другите членове на класа. Такива идеи са обсъждани от Gehringer и др. в панел на 37-ия технически симпозиум на Групата по специални интереси за обучение по компютърни науки (SIGCSE), (Gehringer et al, 2006).

Работата в екип има своите особености и трудности. От една страна е важно как да се определят отборите, така че учениците да работят ефективно и почти безконфликтно, както подчертават (Howe, A. et al, 2007) и (Thurston, A. et al, 2010). От друга страна, важен е и подборът на учебните задачи, тъй като не всички теми или задачи са подходящи за работа в екип. Например, Navarro и др. обръщат внимание, че когато се дават неподходящи задачи, отборите не работят като истински екипи, защото това не е необходимо (Navarro, J.,2017). От трета страна, ученето е групова дейност, но оценяването трябва да е индивидуално. Това показва сложността на оценяването на постиженията на учениците при работа в екип, дори и когато учителят има сериозна теоретична подготовка за оценяване на ученическите постижения. Сложно е да се оценяват отделни ученици, които работят в екип, изпълнявайки обща задача. Такива проблеми са докладвани от много автори, например от Kubincová и Kolčák (Kubincová, Z. and Kolčák, K., 2021).

Обичайната практика всички ученици в екипа да получат еднакви оценки, съответстващи на крайната оценка на решените от целия отбор задачи, не дава добра представа за приноса на всеки отделен ученик в екипа. Много често няколко члена в отбора работят активно и извършват голям процент от работата, докато други почти не участват или участието им е неефективно. Понякога има ученици, които не само не подкрепят общата работа, но дори и пречат тя да бъде свършена. В тези случаи една и съща оценка за всички членове на отбора не само че не удовлетворява някои от тях, но и по никакъв начин не отразява реалния принос на всеки ученик. Това демотивира учениците и руши доверието в процеса на оценяване. Когато отборите работят в класната стая, този недостатък може да бъде преодолян до известна степен, като учителят наблюдава работата на учениците и след това обосновава различните оценки въз основа на тези наблюдения. Но обективността на наблюденията на учителя може да бъде поставена под въпрос, когато има повече отбори или поради ситуация, когато един от екипите ангажира вниманието на учителя за по-дълго време и той няма възможност да наблюдава ефективно работата на другите отбори. Ситуацията е още по-сложна, когато отборите получават дългосрочна задача за работа извън класната стая. Тогава учителят може да оцени само крайния резултат от изпълнението на поставената задача.

Друг подход за оценка на отделните ученици в екип, който се използва от някои учители, е да се поиска от всеки отбор да избере ръководител на екипа (лидер), който да ръководи отбора по време на изпълнение на задачата. След това учителят оценява задачата и ръководителя на отбора. Оценката на ръководителя е равна на оценката на поставената от учителя задача. Лидерът, от своя страна, оценява останалите членове на отбора по такъв начин, че техните оценки да не могат да надвишават тези на проекта. От този подход възникват различни проблеми. Например: (1) Понякога учениците избират грешен ръководител на отбор. Той не успява да ръководи изпълнението на задачата. В такъв случай дори членовете на отбора да са добре подготвени, силно мотивирани и да имат необходимите знанията, крайният резултат не е задоволителен. Така тези ученици не могат да получат високи резултати, което поражда тяхната неудовлетвореност, води до конфликти в отбора и ниска мотивация за работа. (2) Понякога избраният лидер на отбора се държи като шеф, непрекъснато натоварва всички останали със задачи, без да прави нищо сам. За крайна оценка дава ниски оценки на членовете на отбора и твърди, че по-голямата част от работата е свършил сам. Това също така създава негодуване сред членовете на отбора и невъзможност да получат оценката, която заслужават. (3) Понякога има ръководители на отбори, които използват позицията си, за да „накажат“ съученик, с когото имат разногласия, като съзнателно му дадат по-ниска оценка.

Има разработени методи за оценяване на учениците, работещи в екип. Например, Bailey и др. доразработват скала за измерване на индивидуалното участие в срещи на интердисциплинарен екип (Bailey, M.,1983). По-късно Urness описва техника, подходяща за оценка на екипната работа в курсове по компютърни науки в колежи. Изисква се всеки ученик да оцени своя съотборник с помощта на въпроси, класирани по скала на Ликерт от 1 до 5 (Urness, T., 2009). Issa описва оценка на работата в екип, която се прилага във висшето образование. Методът е предназначен да насърчи учениците да повишават и подобряват своите умения за работа в екип, комуникация, критично и творческо мислене, грамотност в областта на информационните технологии и информатиката (Issa, T.2012).

Методът, който е представен тук, дава по-пълна картина на работата на екипа, като включва оценки за основните дейности, извършвани от членовете на отбора от момента на създаването му до изпълнението на съвместната задача.

**Описание на метода**

Да разгледаме следния контекст. Учениците в един клас са разделени на няколко отбори. (Или участниците в отборно състезание, които по също са разделени на отбори.) В идеалния случай броят на учениците в отборите трябва да е равен, въпреки че методът работи и когато този брой е различен. Учителят задава задача на всеки отбор. Задачата може да бъде една и съща за всички отбори или да има различни задачи за отборите. Предложеният метод описва как след изпълнение на задачата(-ите) членовете на всеки отбор получават индивидуални оценки. Оценките в училище (или на състезание) обикновено имат числово изражение. Ето защо разработеният метод дава цифрови оценки в скала от цели числа между 0 и 100 включително. Ще опишем метода, като вземем предвид един конкретен отбор. Същата процедура се прилага за всеки от отборите.

След приключване на работата на отбора, учителят оценява изпълнението на задачата и изразява тази оценка в брой точки с цяло число между 0 и 100, т.е. най-ниската оценка е 0, а най-високата е 100. Означаваме това число (оценката на учителя ) с $t$. Според обичайната практика, описана по горе, би трябвало всички ученици от отбора да получат една и съща оценка, която е равна на крайната оценка, поставена от учителя, т.е. всеки ученик трябва да получи крайна оценка от $t$ точки. Ако има $k$ ученика в един отбор, общата им оценка трябва да бъде $kt$ точки, които са поравно разпределени между тях. Това ще бъде така, ако всеки член е допринесъл с коефициент 1 за екипната работа и следователно той заслужава $1.t = t$ точки. Тъй като признаваме, че приносът на членовете на отбора не винаги е равен, предложеният метод обяснява как тези $kt$ точки могат да бъдат разпределени между членовете на отбора по такъв начин, че получените точки да съответстват на мнението на отбора за приноса на всеки от неговите членове. С други думи, за всеки от тях ще изчислим тежест $w$, която съответства на неговия принос въз основа на оценката на членовете на отбора. Тогава точките за всеки член ще бъдат $wt$, а не точно $t$.

За по-активните членове тези тегла $w$ ще бъдат по-големи от 1, което означава, че крайните им точки ще бъдат по-големи от оценката на учителя за проекта $t$. За по-пасивните членове теглата ще бъдат по-малки от 1. Сборът от всички тегла обаче трябва да бъде равна на $k$, тъй като общият брой точки за всички членове на отбора трябва да бъде $kt$.

Нека започнем от факта, че членовете на отбора знаят най-добре кой каква част от работата е свършил. Поради това включваме така наречената 360-градусова обратна връзка – всеки оценява всички в отбора, включително и себе си. За да бъде тази оценка по-прецизна, учителят трябва да подготви не само задачата за отбора, но и да определи основните дейности, които трябва да бъдат извършени за изпълнението на тази задача. Нека означим тези дейности с $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Идеята е тези дейности да се използват за 360-градусова обратна връзка.

Освен оценката на учителя (като $t$ точки) на цялата изпълнена задача, всеки ученик попълва карта за оценка на всички участници в отбора, включително и за себе си. Тази карта съдържа самооценка и партньорска оценка на другите участници в отбора. Тези оценки също се изразяват в точки като цели числа между 0 и 100. За да направят оценките по-обективни и да улеснят учениците, тези общо 100 точки се разпределят върху различните основни дейности на съвместната работа, т.е. самооценките и партньорските оценки са на всяка от основните дейности на съвместната работа. По този начин се обръща внимание на всеки аспект от работата и на приноса на всеки участник.

Нека броят на членовете на отбора е $k$ и техните имена (или идентификатори) са $S_1, S_2, \ldots, S_k$.

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Отбор:** | | | | | | | | | | | | | |
| **Ученик** | | **Дейност** | | | | | | | | | | | |
| **Код** | **Име** | **A1** | | | **A2** | | | **A3** | | | **...** | | |
| | | до a1 точки | | | до a2 точки | | | до a3 точки | | | ... | | |
| | | S1 | S2 | .. | S1 | S2 | ... | S1 | S2 | ... | ... | ... | ... |
| Si | | *xi* 1A1 | xi2A1 | ... | xi1A2 | xi2A2 | ... | xi1A3 | xi2A3 | ... | ... | ... | ... |

*Фиг*. 2

На Фиг. 2 е представена карта за оценяване, попълнена от ученика $S_i$. На фигурата максималните точки за всяка от основните дейности $A_1, A_2, \ldots, A_n$ са означени съответно с $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 100$. Ученикът $S_i$ е попълнил числата в последния ред на картата. Например $x_{i1A1}, x_{i2A1}, \ldots, x_{ikA1}$ са точките, които този ученик е поставил на съответните членове на отбора (включително на себе си) за първата дейност $A_1$. Всички тези точки трябва да са цели числа между 0 и $a_1$ включително. След това са точките $x_{i1A2}, x_{i2A2}, \ldots, x_{ikA2}$, присвоени от $S_i$ на членовете на отбора за втората дейност $A_2$ (те не трябва да са по-големи от $a_2$) и т.н.

Следващата стъпка е да се изчислят общите точки на всеки член на отбора за всяка от основните дейности. Например, за члена на отбора $S_1$ за дейност $A_1$ това число е

$$S_1(A_1) = x_{11A1} + x_{21A1} + \ldots + x_{k1A1};$$

за дейност $A_2$ е

$$S_1(A_2) = x_{11A2} + x_{21A2} + \ldots + x_{k1A2};$$

и така нататък. Ако съберем тези числа за всеки член, ще получим точките, които всеки участник в отбора е получил въз основа на самооценката и партньорската оценка.

Например за $S_1$ тези точки са

$$S_1(A) = S_1(A_1) + S_1(A_2) + \ldots + S_1(A_n).$$

Общият резултат на всички членове на отбора е

$$T = S_1(A) + S_2(A) + \ldots + S_k(A).$$

Сега съпоставяме тегло за всеки член на отбора, изчислено по такъв начин, че сборът от теглата да е равна на $k$. Следователно, съответните тегла за членовете $S_1, S_2, \ldots, S_k$ са $w_1 = kS_1(A)/T$, $w_2 = kS_2(A)/T$, $\ldots$, $w_k = kS_k(A)/T$. Вече можем да изчислим съответните точки за всеки от членовете на отбора $S_1, S_2, \ldots, S_k$, които са $w_1t, w_2t, \ldots, w_kt$.

**Основни дейности**

Дефинирането на основните дейности е важна част от методологията. Това трябва да се направи от учителя едновременно с възлагането на задачата(-ите). Тези дейности зависят много от предмета на екипната работа и от поставената задача. Има обаче някои основни части от отборната работа, които трябва да се вземат предвид. Те са:

- Организация на процеса – Това е първата стъпка след създаването на отбора. В зависимост от това дали задачите са краткосрочни (за един или няколко учебни часа) или дългосрочни (за няколко седмици или месеци), този етап може да варира от само устно споразумение или разпределение на работата до по-дълго, подробно и аргументирано разпределение на роли и планиране на дейности. Правилната организация на процеса е много важна за по-нататъшната успешна работа на отбора и трябва да се вземе предвид активното участие на учениците в него.

- Реална работа по проекта – това са дейностите, които учениците извършват за решаване на задачата. При краткосрочни задачи дейностите на всички членове на отбора са приблизително еднакви или сходни. При дългосрочни задачи ролите могат да бъдат разпределени така, че всеки човек да изпълнява различна дейност. В края на този етап от работата, учениците трябва да са решили задачата и да са получили резултат от работата си.
- Представяне на работата и нейната защита – това е моментът, в който отборът представя получените резултати. В случай на краткосрочни задачи, това може да бъде решение на математическа задача, кратко есе или разказ по зададената тема, заключение от експеримент и др. При дългосрочни задачи това може да бъде представяне на изграден модел или друг по-обемен материал.
- Оценка и анализ на резултатите – това е последният етап от работата на отбора. Той може да направи самооценка на своите постижения и да анализира целия работен процес. По този начин всеки може да даде обратна връзка на останалите за това как вижда своето участие и участието на останалите членове на отбора в цялостната работа. Оценката за свършената работа се дава и от учителя, която е обективна и съответства на получения краен резултат, но не може да бъде много точна за това колко и с какво е допринесъл всеки член на отбора, особено при дългосрочни задачи.

**Пример**

Ето пример за проведено оценяване по стереометрия на ученици от 12 клас. Отборите се състоят от трима ученици, подбрани така, че всеки отбор да има или ученик с отлична подготовка, или двама ученика с много добра подготовка по стереометрия. По време на работа учениците имат възможност да обсъждат идеи и решения. За 60 минути те трябва да решат две задачи и да опишат подробно решението им. След това учителят избира един от учениците в отбора, който да обясни пред класа решението на една от двете задачи. Това мотивира всеки ученик в отбора да се опита добре да разбере решението на задачите, за да може да го обясни, ако е необходимо. На учениците бяха поставени следните задачи:

**Задача 1.** В правилна четириъгълна пирамида $ABCDQ$ с връх $Q$ и обем $V$ точките $M$ и $N$ са среди съответно на ръбовете $AQ$ и $DQ$. Намерете обема на:

**а)** пирамида $ABDM$;

**б)** пирамида $ADMNB$.

**Задача 2**. Цилиндър с квадратно осно сечение е вписан в конус. Горната основа на цилиндъра разделя височината на конуса в съотношение 2 : 3, считано от върха, и отрязва пресечен конус. Намерете повърхнината на конуса, ако повърхнината на пресечения конус е по-голяма от повърхнината на цилиндъра със $171\pi$ cm$^2$.

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O | P | Q |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Отбор: | СМГ-2 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3 | Ученик | | Дейност | | | | | | | | | | | | | | |
| 4 | Код | Име | Решава задачи | | | Обсъжда и обяснява задачи | | | Описва | | | Организира процеса | | | Създава комфорт | | |
| 5 | | | до 40 точки | | | до 20 точки | | | до 25 точки | | | до 10 точки | | | до 5 точки | | |
| 6 | | | А | Б | В | А | Б | В | А | Б | В | А | Б | В | А | Б | В |
| 7 | А | Ани | 40 | 30 | 40 | 20 | 10 | 20 | 25 | 15 | 25 | 10 | 5 | 10 | 5 | 0 | 2 |
| 8 | Б | Иван | 30 | 35 | 40 | 10 | 20 | 20 | 25 | 15 | 25 | 5 | 5 | 10 | 5 | 0 | 2 |
| 9 | В | Цвети | 30 | 33 | 40 | 20 | 15 | 20 | 25 | 20 | 25 | 10 | 5 | 10 | 5 | 0 | 2 |
| 10 | Сбор | | 100 | 98 | 120 | 50 | 45 | 60 | 75 | 50 | 75 | 25 | 15 | 30 | 15 | 0 | 6 |
| 11 | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 12 | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 13 | | Общ брой точки върху заданието | | Код | Сбор точки | | (Части)*3 | | Код | Точки върху заданието | | | Оценка | | | Проверка | ОК |
| 14 | | 85 | | А | 265 | | 1.04 | | А | 88.45 | | | мн. добър 5 | | | | |
| 15 | | | | Б | 208 | | 0.82 | | Б | 69.42 | | | добър 4 | | | | |
| 16 | | | | В | 291 | | 1.14 | | В | 97.13 | | | отличен 6 | | | | |
| 17 | | | | Сбор | 764 | | 3 | | Сбор | 255.00 | | | | | | | |
| 18 | | | | | | | | | | | | | | | | | |

*Фиг.* 3

На Фиг. 3 е показана таблица в Excel, показваща оценките на един от отборите. На тази фигура оценката на учителя за цялата задача е 85 точки, въведена в клетка B14.

Основните дейности на екипната работа в случая са: Решаване на задачи, Обсъждане и обяснение на задачи, Описване, Организиране на процеса, Създаване на комфортна работна среда. Те са записани на ред 4. В следващия ред с номер 5 са дадени максималните точки за всяка от тези дейности, като техният сбор е 100. По-долу са участниците в отбора с техните имена. В този пример имаме трима участници А, Б и В. Клетките от C7 до Q10 съдържат оценката на участниците по основните елементи на екипната работа. Например при решаване на задачи ученик А оценява себе си, Б и В съответно с 40, 30 и 40 точки (клетки C7, D7 и E7). За тази дейност А получава съответно 30 и 30 точки от Б и В (клетки C8 и C9) и следователно той/тя получава общо 100 = 40 + 30 + 30 точки за решаване на задачи (клетка C10).

След като тези данни бъдат въведени, в клетките EF14, EF15, EF16 и EF17 се изчисляват общият брой точки на всеки участник в отбора и общият брой точки на целия отбор. Следващата колона в клетки G14, G15 и G16 съдържа теглото на всеки ученик. След това в клетките JKL14, JKL15 и JKL16 тези тегла се използват за изчисляване на приноса в точки на всеки от тримата членове на отбора към оценката на учителя, която е 85 точки в този пример. Така участниците А и Б, които имат тежести 1 и по-голяма от 1, получават  85 и повече от 85 точки, докато В имат тежест по-малка от 1 и получават точки по-малко от 85. Накрая тези точки се преобразуват в оценки, използвани в българските училища.

**Приложение на метода**

Представеният метод за оценяване е прилаган многократно в часовете по математика на ученици от Софийската математическа гимназия. Методът е широко приложим, защото:

- Може да се използва за екипна работа по различни учебни предмети;
- Броят и имената на основните дейности могат да бъдат различни;
- Броят на участниците в отборите може да бъде различен;

• Може да се използва за ученици с различни способности и възрасти от начални до гимназиални училища от всякакъв вид;

• Може да се използва както за краткосрочни (до няколко часа), така и за дългосрочни (няколко дни или седмици) задачи за работа в екип.

• Може да се използва както в редовните учебни часове, така и в тренировка за отборни състезания, а и за самите състезания..

Не всички теми по математика са подходящи за работа в екип. Темите, които изискват упражняване на умения за изчисляване, прилагане на конкретна формула или други упражнения, е по-подходящо да се оставят като самостоятелна работа. Темите, подходящи за краткосрочна работа в екип са тези, в които се прилагат логика и повече креативност, съчетават знания от различни клонове на математиката, анализ на зададените условия или отделни елементи от решението, които са относително самостоятелни и изискват повече техническо време. Такива са задачите за моделиране с уравнения или системи от уравнения или многостъпкови геометрични задачи. Тези теми са трудни за повечето деца. Когато учениците са оставени да работят индивидуално по тях, често не напредват достатъчно и губят интерес. Работата в екип дава възможност на всеки да се включи в работата, като всеки участник допринася за общия успех според възможностите си. Чрез въвеждането на описания начин на оценяване, се дава възможност на всеки ученик, участващ в решаването на задачата според силите си, да придобие знания и да получи оценка, съответстваща на неговите знания, умения и усилия.

Пандемичната обстановка през последните две учебни години не позволяваше екипна работа в учебните часове. През този период беше подходящо да се приложи методът на оценка в дългосрочен проект. Ето един пример. В 6-ти клас учениците се запознават с основните тела като призма, пирамида, цилиндър, конус и сфера. В края на изучаването на този раздел учениците от 6 клас от Софийската математическа гимназия с които работих бяха разделени на отбори от по 5 души. Те получиха задачата да направят модел на град с помощта на изучаваните тела. Имаха 4 седмици, за да подготвят този проект. Отборите имаха възможност да се срещнат онлайн или лично, да изберат стратегия за задачата и да я реализират. В 360-градусовата оценка на работата им включихме дейности, различни от описаните на фиг. 2. Те са: Изработка на елементи за проекта – до 30 точки, Осигуряване на материали и монтаж на елементи – до 30 точки, Проектиране елементите и цялостния проект – до 25 т., Организиране на процеса – до 10 т. и Създаване на комфортна среда за работа – до 5 т.

**Валидиране на метода**

Проведохме анонимно проучване сред учениците от 12 клас в две паралелки: една „обикновена“ (учениците не са състезатели по математика) от 21 ученици (12А клас) и една от 23 ученици, голямата част от които – състезатели (12Е клас) (Приложение 2). Въпросите в анкетата се отнасят до екипната работа в часовете по математика. Резултатите са показани на таблици 2 и 3.

| | 12 А клас | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Въпрос: | Определено ДА | ДА | Не мога да преценя | НЕ | Определено НЕ |
| 1. Харесва ли ви да работите в отбори в часовете по математика? | 6 | 12 | 3 | | |
| 2.Смятате ли, че по този начин използвате по-ефективно времето в часовете? | 6 | 8 | 7 | | |
| 3. Мислите ли, че по този начин научавате повече? | 5 | 7 | 5 | 3 | |
| 4. Мислите ли, че може да се оценява обективно работата ви, ако работите в отбори? | 4 | 8 | 6 | 3 | |
| 5.Мислите ли, че предложения от г-жа Цветкова метод на оценяване е обективен? | 6 | 6 | 5 | 3 | |
| 6. Отборната работа повишава ли мотивацията ви за учене? | 4 | 7 | 6 | 4 | |

Таблица 2

| | 12 Е клас | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Въпрос: | Определено ДА | ДА | Не мога да преценя | НЕ | Определено НЕ |
| 1. Харесва ли ви да работите в отбори в часовете по математика? | 13 | 9 | 1 | | |
| 2.Смятате ли, че по този начин използвате по-ефективно времето в часовете? | 3 | 7 | 5 | 6 | 2 |
| 3. Мислите ли, че по този начин научавате повече? | 4 | 8 | 6 | 5 | |
| 4. Мислите ли, че може да се оценява обективно работата ви, ако работите в отбори? | 4 | 11 | 4 | 4 | |
| 5.Мислите ли, че предложения от г-жа Цветкова метод на оценяване е обективен? | 9 | 6 | 4 | 3 | 1 |
| 6. Отборната работа повишава ли мотивацията ви за учене? | 7 | 7 | 6 | 2 | 1 |

Таблица 3

Проучването показва, че повече ученици от „обикновената“ паралелка смятат, че времето се използва по-ефективно при работа в екип, докато в по-силния клас това не е така. Възможно обяснение е, че имайки трудна математическа задача, по-слабите ученици, ако работят самостоятелно, обикновено не напредват и през повечето време им е скучно, защото не знаят как да започнат да решават задачата. При работа в екип те веднага започват да обсъждат, коментират и се опитват да се включат, което помага за разбирането на задачата. Състезателите обикновено могат да решават задачите самостоятелно. Работейки в екип, те трябва да отделят време за обясняване на решението на другите членове на екипа, смятат това време за неефективно използвано. Те предпочитат да използват времето за решаване на други задачи. По отношение на метода на оценяване по-голямата част от учениците и в двата класа са доволни.

Постиженията при екипната работа са малко по-добри отколкото при индивидуална за някои ученици. Възможно обяснение може да бъде, че децата обичат да работят в екип. Това повишава техния интерес и ги включва по-добре в ученето. Също така, докато работят в екип по проект, те прекарват повече време в трупане на знания и това се случва по незабележим за тях начин. Получаването на по-високи оценки им дава увереност, че могат да допринесат за успеха на екипа. Тази оценка повишава тяхното самочувствие и интерес към изучавания предмет, както и мотивацията за учене като цяло.

Методът беше представен на „открит урок” в Софийската математическа гимназия. На него присъстваха други учители от различни учебни предмети в училището и наблюдаваха урока. Всички те изразиха задоволство и мнение, че методът е приложим за някои от техните уроци и проекти.

Валидирането на предложения метод е чисто качествено. Няма данни и статистически анализи за сравнение на предложения метод с други техники за индивидуална оценка на членовете на екипа. Въпреки това казаното по-горе може да доведе до убеждението, че методът е смислен и дава обективни резултати, съответстващи на мнението на учителя за знанията на учениците.

В контекста на оценяване на развитието на таланта, може да се направят следните изводи, свързани с използване на разгледания метод:

1. При ученици от горните класове (гимназиален етап), оценяване на таланта на най-силните състезателите е по-подходящо да се прави въз основа на индивидуалната работа на всеки ученик. При останалите състезатели, както и при ученици, които нямат амбицията и възможността да се явяват на математически състезания, екипната работа и разгледаният метод са по-подходящи. Този извод е въз основа на проведената анкета.

2. При учениците от по-долните класове (начален и прогимназиален етап), оценяването на таланта може да се прави както с индивидуални задания, така и с екипна работа и разгледания метод. Този извод се основава на факта, че част от състезанията за по-малките ученици са или отборни или имат отборен етап. Лични наблюдения показват, че екипната работа при малките ученици е за предпочитане както от емоционална гледна точка, така и като възможност за изява.

**Други аспекти при оценяване на работата на екип**

Разгледаният метод за оценка на индивидуалния принос на всеки ученик при работа в екип е фокусиран върху самооценките и партньорските оценки на участниците върху съдържателната работа по проектната задача. Това е заложено в основните дейности, върху които се правят тези оценки. Извън рамките на метода са въпроси, свързани с ефективната работа на екипа, координацията между членовете му, увереността, че всеки влага максимума за постигане на резултат и други въпроси, които са по-близко до психологическия климат в екипа, отколкото до работата по същността на поставената задача. Има разработени методики, в които са описани различни схеми за самооценка и партньорска оценка на различни елементи от психологическия климат в екипа. По-долу са дадени само няколко примера за такива изследвания.

Работата в екип изисква от членовете да координират своите решения и действия, за да постигнат общите си цели. За да се постигне успешно нивото на координация, членовете на екипа се нуждаят от споделена информираност за ролите, задачите и действията на съотборниците си. Един такъв модел за измерване на ефективната работа на екипи е предложен от (Cannon-Bowers, Salas & Converse, 1993), както и от (Stout, Cannon-Bowers, Salas & Milanovich, 1999).

Една схема за измерване на взаимна информираност на екипа, т.е. до каква степен членовете на екипа са информирани за дейностите на други членове на екипа е представена от (MacMillan, Paley & Entin, 2004). Измерването става с три вида въпросници за информираност: за задачите, за натовареността и за общата работа. Всеки член на екипа попълва тези три въпросника.

Изследването на (Toledo, Cosculluela, Orús & Rivera-Torres, 2021) е проведено със студенти от университет, които се оценяват чрез работа в екипи. Целта е да се анализират, в статистически термини, възприятията на студентите относно ползите от тази система за оценяване. Събирането на данни става с въпросник, който се попълва от всеки участник в изследването.

В работата (Shiba, Sugawara, 2014) също се разглежда оценяване на университетски студенти, които се оценяват чрез работа в екип. Като подчертават, че всеки от участниците в даден екип е най-подходящият оценител на съотборниците си, те се фокусират върху някои „безотговорни“ студенти, които представят спорни оценки за другите членове, което води до неточни оценки за целия екип. Целта на тяхното изследване е чрез прост метод за взаимно оценяване да генерират мрежи за доверие, изразяващи разстоянията между оценките дадени от членовете на екипа. След това спорните оценки се изключват и студентите се оценяват отново. Изследвана е и стратегия за откриване „безотговорните“ студенти.

Тук може да се спомене и цитираната вече работа (Urness, T., 2009). Неговото изследване е върху оценка на взаимодействието между партньорите в екипна работа в курсове по компютърни науки.

# Заключение

Настоящата разработка е резултат от дългогодишната работа на автора с ученици, притежаващи математически талант. Работата с тези ученици е както урочна, така и извънкласна, като тук са описани наблюдения и резултати свързани с основно с извънкласната подготовка. За фокус на дисертацията е избрана извънкласната работа с ученици в начален и прогимназиален етап и значението ѝ за откриването и развиването на математическия талант.

В разработката се опитвам да обобщя що е талант и по-конкретно – математически талант. Търся отговори на въпросите как и къде се откриват децата с математически способности, как се разпознават надарените и талантливите, кои са факторите, които влияят върху откриването, развитието и изявата на таланта.

*Основната теза в дисертацията е, че за да се открие и развие успешно математическия талант у децата е необходимо да се започне активна извънкласна работа (т. нар. школи по математика) в начален или прогимназиален етап на образованието, а за развитието на този талант основен инструмент са състезателните задачи, подготовката и участието в математически състезания*.

За да подкрепя тази теза анализирах публикации свързани с откриване и развитие на таланта изобщо и на математическия конкретно. Направените изводи са, че за много от талантите и специално за математическия талант, ранното откриване и активната работа в специализирана среда са съществени за развиването и за успешната му изява. За откриването на математическа дарба важна роля играят родителите (семейството) и учителите, а индикатор за наличие на талант най-често е успешното представяне на математически състезания. За развиването и изявата на таланта решаваща роля имат освен личната мотивация и мотивиращата учебна среда, още и включване на естествената склонност на децата да се състезават, чрез участието им в разнообразни математически състезания.

**Конкретни приноси** в разработката са:

1. Направен е анализ на методите и начините на откриване на деца с математически талант и работата с тях.
2. Разработена е програма за извънкласна работа по математика за ученици от 2 до 7 клас.
3. Разработени са учебни материали по тази програма за ученици от 2 до 4 клас, които се ползват и от други школи за извънкласна работа по математика.
4. На практика са приложени методите за работа с талантливи ученици от няколко випуска на СМГ.
5. Проучено е въздействието на този начин на работа върху развитието и изявата на талантите.
6. Представени са авторски методически разработки за решаване на задачите от тези теми.

7. Предложен е авторски метод за оценяване на индивидуалните постижения на всеки ученик, участващ в отбор.

От проведените наблюдения и изследвания може да се направят следните изводи:

- Ранното откриване на математическия талант е съществено за неговото развиване.
- Развиването и изявата на таланта могат да стават успоредно, като взаимно се подпомагат.
- Математическите състезания са мощен инструмент за развиването на таланта.
- Ученици, които са се занимавали с извънкласна работа по математика и са участвали в състезания още от начален или прогимназиален етап на образованието си имат успешна професионална и житейска реализация.

Тези изводи **потвърждават поставената работна хипотеза**, а именно, че ранното откриване и целенасоченото развитие на математическия талант е предпоставка за неговата успешна реализация.

За ефективността на разгледаната система на работа с талантливи ученици можем да съдим от следните факти:

- Всички състезатели (без един) от националния отбор по математика през последните 13 години са започнали обучението си в школи най-късно в прогимназиален етап (Приложение 3).
- Всички ученици на СМГ, участващи в международни състезания – По Льон Кук – Хонг Конг и IMC във възрастова група до 13,5 години завоюват медали или призови отличия.
- Все повече училища включват в програмите си интензивно изучаване на математика, включително извънкласна работа с ученици от прогимназиален етап – НПМГ, ЧОУ „Св. София“, ПЧМГ, ЧОУ „Питагор“ и др. и интересът към обучението в тези училища расте.

## Литература


Банков, К. (2012). *Широкомащабни оценъчно-диагностични педагогически изследвания*. Хабилитационен труд за академичната длъжност „професор“. София.

Бижков, Г., Краевски, В. (2002). *Методология и методи на педагогическите изследвания*. Пето издание. Университетско издателство „Св. Климент Охридски“, София.

Гарднър, Х. (2014). *Множество интелигентности*. Издателство „Изток – Запад“. София.

Гладуел, М. (2010). *Изключителните*. Жанет 45, Пловдив.

Господинов, Б., Сариева, Й. и др. *Ръководство за обучение на докторанти*, Проект № BG051PO001-3.3.06/0026: „Развитие и усъвършенстване на междуфакултетска Докторантска програма в областта на педагогическите изследвания и електронното обучение в СУ”, София.

Златилов, В., Тонова, Т. и др. (2000). *Математическа читанка*. Труд и прозорец. София.

Златилов, В., Цветкова, И. и др. (2006). *Първа математическа читанка*. Труд. София.

Иванова-Неделчева, А. (2018). *Логико-репродуктивен модел в обучението на математически таланти (5 – 8 клас)*. Дисертационен труд за придобиване на образователна и научна степен „доктор“. Шумен.

Лазаров, Б. (2023). *Образователни цели и типове алгоритмично мислене в теми от турнира „Черноризец Храбър“ за II – IV клас*. Професионално образование, Том 25, бр. 2, 103-119. София.

Раковска, Д., Тонов, И. и др. (2007). *Математически състезания 4.–7. клас*. Регалия 6, София

Серебряков, В., Ст. Лангер. (1999). *Проверете интелигентността на своето дете*. Лик. София.

Табов, Й. (2004). *Подбор, подготовка за решаване и оценяване на задачи за математически състезания*. Дисертация за присъждане на научната степен „доктор на педагогическите науки”. София.

Табов, Й. (2009). *Тестовете с избираем отговор: кога и какви, а не за или против*. Теория и методология на обучението по естествени науки и математика. „Неофит Рилски“, с. 183-188. Благоевград.

Цветкова, И. Панделиева, В. и др. (2015). *НЕМО Математически пътешествия и приключения за 2 клас*. БГ Учебник. София.

Цветкова, И. Панделиева, В. и др. (2016 а). *НЕМО Математически пътешествия и приключения за 3 клас*. БГ Учебник. София.

Цветкова, И. Панделиева, В. и др. (2016 б). *НЕМО Математически пътешествия и приключения за 4 клас*. БГ Учебник. София.

Цветкова, И. (2023). *Ролята на извънкласната подготовка и състезанията за откриване и развиване на математическия талант*. Математическото образование 75-годишна мисия и история. Университетско издателство „Св. Климент Охридски“. София

Чиксентмихай, М. (2016). *Поток*. Хермес. Пловдив

Bankov, K. I. Tsvetkova, (2014). *Figures whit Equal Areas in Convex Quadrilateral, Mathematics Lessons Learned from Across the World, Prekindergarten – Grade 8*. National Council of Teachers of Mathematics.

Cannon-Bowers, J.A., Salas, E., & Converse, S. (1993). *Shared mental models in expert team decision making*. In N.J. Castellan, Jr. (Ed.) Current Issues in Individual and Group Decision Making (pp 221-246) Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Bankov, K. I. Tsvetkova. (2015). *Inscribed Quadrilaterals, Mathematics Lessons Learned from Across the World, Grades 7 – 12*. National Council of Teachers of Mathematics.

Care, E., C. Scoular, and P. Griffin. (2016) *Assessment of collaborative problem solving in education environments.* Applied Measurement in Education. Volume 29 (4), 2016: 21st Century Skill Assessment.

Clark, D., G. Pollard. (1989). *An optimal scoring system for multiple choice competitions and an analysis of candidates responses under two different methods of scoring*. Mathematics Competitions Vol. 2 No. 2, 33-36.

Gehringer, E., K. Deibel, J. Hamer, and K. Whittington. (2006). *Cooperative learning: beyond pair programming and team projects*. Proceedings of the 37th SIGCSE technical symposium on Computer science education.

Hao, J, L. Liu, A. von Davier, and P. Kyllonen. (2017). *Initial steps towards a standardized assessment for collaborative problem solving (cps): practical challenges and strategies*. In Innovative Assessment of Collaboration. Methodology of Educational Measurement and Assessment, A. von Davier, M. Zhu, and P. Kyllonen, Eds. Springer.

Howe, A., Tolmie, A. Thurston, K. Topping, D. Christie, K. Livingston, E. Jessiman, and C. Donaldson. (2007). *Group work in elementary science: Towards organisational principles for supporting pupil learning.* Learning and Instruction, Volume 17 (5).

Inglis, W. B. (1971). *Review of Gifted Children and the Brentwood Experiment, by S. A. Bridges*. British Journal of Educational Studies, 19(2).

Issa, T. (2012). *Promoting learning skills through teamwork assessment and self/peer evaluation in higher education*. IADIS International Conference on Cognition and Exploratory Learning in Digital Age (CELDA).

Kubincová, Z. and K. Kolčák. (2021). *Team assessment and self assessment in high school – preliminary results*. 19th International Conference on Information Technology Based Higher Education and Training (ITHET).

Lazarov,B. (2011). Monster problems design and sense-of-mathematics building. The 6th Congress of WFNMC – The Proceedings. (pp72-78). Riga.

Marland, S.P. (1971). *Education of the Gifted and Talented* – Volume 1: Report to the Congress of the United States by the U. S. Commissioner of Education.

MacMillan, J., Paley, M. J., Entin, E. B., & Entin, E. E. (2004). *Questionnaires for distributed assessment of team mutual awareness*. Handbook of human factors and ergonomics methods, 51-1

Navarro, J., L. Bosch, M. Palacín, M. Solé, R. Berger, D. Leiva, F. Ceppi, and J. Castellano. (2017). Teamwork: *Assessment of teamwork competence in higher education*. 3rd International Conference on Higher Education Advances, HEAd'17, Universitat Politecnica de Valencia, Valencia.

Shiba, Y., Sugawara, T. (2014). *Fair assessment of group work by mutual evaluation based on trust network*. 2014 IEEE Frontiers in Education Conference (FIE) Proceedings, Madrid, Spain.

Stout, R.J., Cannon-Bowers, J.A., Salas, E., & Milanovich, D.M. (1999). *Planning, shared mental models, and coordinated performance: An empirical link is established*. Human Factors, 41(1) 61-71.

Thurston, A., K. Topping, A. Tolmie, D. Christie, E. Karagiannidou, and P. Murray. (2010). *Cooperative Learning in Science: Follow-up from primary to high school*. International Journal of Science Education. Volume 32 (4).

Toledo, S. V., Csculluela, C. L., Orús, M. L., & Rivera-Torres, P. (2021). *The Mutual Assessment System in Teamwork: The Value of the Individual Grade*. Practical Assessment, Research & Evaluation, 26(3).

Tsvetkova, I. (2008). *Preparing Students for Team Competitions in Mathematics – Possibility to Work with All Students*. Paper presented in DG-9 "Promoting creativity for all students in mathematics education" at ICME-11, Monterrey, Mexico, July 6 – 13, 2008.

Tsvetkova, I. (2010). *Applications of Semi-Invariants in Solving Math Competition Problems*. Mathematics Competitions. Volume 23 (2).

Tsvetkova, I. (2016). *Mathematics Competitions as a Tool for Development of Gifted Students*. Mathematics Competitions. Paper presented in TCG-30 at ICME-13 Hamburg, Germany, July 24-31, 2016.

Tsvetkova, I., K. Bankov. (2022). *Method for assessing individual students in teamwork at school*. 20th International Conference on Information Technology Based Higher Education and Training (ITHET).

Urness, T. (2009*). Assessment using peer evaluations, random pair assignment, and collaborative programing in CS1*. Journal of Computing Sciences in Colleges. Volume 25 (1).

Web страници

1) Математическо състезание „По Льон Кук – Хонг Конг" (https://www.poleungkuk.org.hk/en/news-of-education/competition)
2) Математическо състезание International World Youth Mathematics Competition (https://chiuchang.org/en/about-en/imas-en/)
3) Математическо състезание World Mathematics Team Championship (http://wmtc.international/?ckattempt=1)
4) International Mathematics Competition (https://www.imc-math.org.uk/)
5) www.problems.ru
6) www.klasirane.com
7) https://web.mon.bg/bg/100835
8) https://www.mon.bg/bg/news/3279
9) https://www.imo-official.org/results.aspx

## Публикации на автора, свързани с темата на дисертацията


Цветкова, И. (1996). *За инициалите, нарежданията и още нещо*. Математика плюс, бр.3-4.

Цветкова, И. (1997). *Вълшебните квадрати*. Математика плюс, бр.3-4.

Цветкова, И. (1998). *Деление с остатък*. Математика плюс, бр.4.

Цветкова, И. (2000). *Урок по рисуване*. Математика плюс, бр.3.

Цветкова, И. (2003). *Как да приготвим отвара за болна змия?.* Математика плюс, бр.3.

Минчева, Л., Цветкова, И. (2003). *Размисли след една разходка*. Математика плюс, бр.3.

Цветкова, И., Минчева, Л. (2003). *Ако се дели*. Математика плюс, бр.4.

Златилов, В., Тонова, Т. и др. (2000). *Математическа читанка*. Труд и прозорец. София.

Цветкова, И. (2005). *Кой гледа рибката?*. Математика плюс, бр.4.

Златилов, В., Цветкова, И. и др. (2006). *Първа математическа читанка*. Труд. София.

Цветкова, И. (2007). *Хайде да се забавляваме*. Математика плюс, бр.4.

Цветкова, И., Панделиева, В. и др. (2015). *НЕМО Математически пътешествия и приключения за 2 клас*. БГ Учебник. София.

Цветкова, И., Панделиева, В. и др. (2016 а). *НЕМО Математически пътешествия и приключения за 3 клас*. БГ Учебник. София.

Цветкова, И. Панделиева, В. и др. (2016 б). *НЕМО Математически пътешествия и приключения за 4 клас*. БГ Учебник. София.

Цветкова, И. (2023). *Ролята на извънкласната подготовка и състезанията за откриване и развиване на математическия талант*. Математическото образование 75-годишна мисия и история. Университетско издателство „Св. Климент Охридски“. София.

Bankov, K. I. Tsvetkova, (2014). *Figures whit Equal Areas in Convex Quadrilateral, Mathematics Lessons Learned from Across the World, Prekindergarten – Grade 8*. National Council of Teachers of Mathematics.

Bankov, K. I. Tsvetkova. (2015). *Inscribed Quadrilaterals, Mathematics Lessons Learned from Across the World, Grades 7 – 12*. National Council of Teachers of Mathematics.

Tsvetkova, I. (2010). *Applications of Semi-Invariants in Solving Math Competition Problems*. Mathematics Competitions. Volume 23 (2).

Tsvetkova, I. (2016). *Preparation of 5–7 grade students for mathematics competitions: area problems.* Mathematics Competitions. Volume 29 (2).

Tsvetkova, I. (2017). *Discovering, Development, and Manifestation of Mathematical Talent*. In “Competitions for Young Mathematicians. Perspectives from Five Continents”. ICME-13 Monographs. Editor: Alexander Soifer. Springer. (Referred in WoS and Scopus.)

Tsvetkova, I., K. Bankov. (2022). *Method for assessing individual students in teamwork at school*. 20th International Conference on Information Technology Based Higher Education and Training (ITHET). (Referred in WoS.)

Tsvetkova, I. (2024). *A Few Notes on the Bulgarian National Competition "Discovery of Young Talents"*. In book: Engaging Young Students in Mathematics through Competitions – World Perspective and Practice, Volume III, World Scientific. (приета за печат)

Tsvetkova, I. (2024). *The Role of Extracurricular Training and Competitions in Discovering and Developing of Mathematical Talent*. (приет доклад за Международния конгрес по математическо образование, ICME-2024, юли 2024, Сидней Австралия)

**Декларация за оригиналност**

от Илиана Иванова Цветкова
докторант на самостоятелна подготовка
към докторска програма „Методика на обучението по математика и информатика“
при ФМИ на СУ „Св. Климент Охридски“

Във връзка с провеждането на процедура за придобиване на образователната и научна степен „доктор“ в ФМИ на СУ „Св. Климент Охридски“ и защита на представения от мен дисертационен труд, декларирам:

Резултатите и приносите на проведеното дисертационно изследване, представени в дисертационния ми труд на тема „Извънкласната работа по математика в начален и прогимназиален етап – важен фактор за откриване и развиване на математическия талант“ са оригинални и не са заимствани от изследвания и публикации, в които нямам участия.

Декларатор:
Илиана Цветкова

София, 2023 г.

# Доклад за сходство

11/19/23, 4:44 PM Strikeplagiarism.com Report

StrikePlagiarism.com Sofia University St. Kliment Ohridski

Дата на доклада 11/19/2023
Дата на промените ---

Докладът не е оценен.

## Метаданни

Заглавие
**Disertacionen trud.pdf**

Автор (и)
**Илиана Цветкова**

Координатор
**Илиана Цветкова**

Организационна единица
**Deanary**

## Предупреждения и сигнали

В този раздел ще намерите информация относно изкривяванията на текста. Тези изкривявания в текста може да показват ВЪЗМОЖНИ манипулации в текста. Изкривяванията в текста може да са умишлени, но най-често те са технически грешки при конвертиране на документ и записването му, затова ви препоръчваме да подходите към анализа на този модул с пълна отговорност. Ако имате въпроси, моля, свържете се с нашия екип за поддръжка.

| | | |
|---|---|---|
| Замяна на букви | β | 26 |
| Разредки | A→ | 0 |
| Микро пространства | | 179 |
| Бели знаци | | 0 |
| Перифрази (SmartMarks) | a | 167 |

## Запис на приликите

Моля, обърнете внимание, че високите стойности на коефициентите не означават автоматично плагиатство. Докладът трябва да бъде анализиран от упълномощено лице.

| 9.78% 9.78% КС1 | 7.24% 7.24% КС2 | 2.43% 2.43% КЦ |
|---|---|---|
| **25** Дължината на фразата за SC 2 | **28500** Дължина в думи | **179632** Дължина в символи |

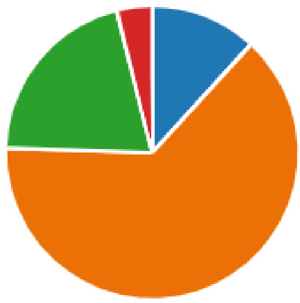
## Приложение 1

## Влиянието на извънкласната работа по математика върху личностното развитие

102 Отговори

1. На каква възраст започнахте да се занимавате в извънкласни школи по математика?

| | |
|---|---|
| между 4 и 8 години | 12 |
| между 9 и 11 години | 65 |
| между 12 и 14 години | 21 |
| на 15 или повече години | 4 |

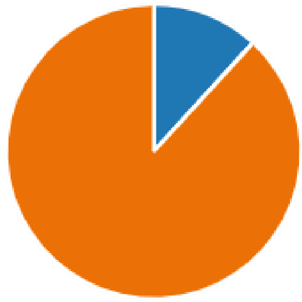


2. Кои учебни помагала сте ползвали в начален етап за извънкласни занимания по математика?

| | |
|---|---|
| „НЕМО” | 8 |
| „Математическа читанка“ | 38 |
| „Математика за таланти“ | 25 |
| Други | 28 |

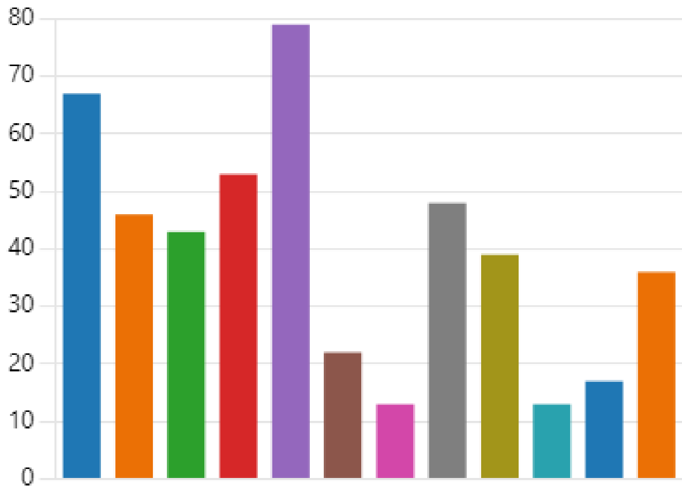
3. Участвали ли сте в математически състезания в начален и/или прогимназиален етап?

| | |
|---|---|
| Не | 12 |
| Да | 90 |



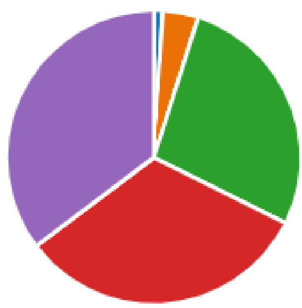
4. В кои от състезанията сте участвали в начален и/или прогимназиален етап?

| | |
|---|---|
| Математически турнир „Черноризец Храбър“ | 67 |
| Математически турнир „Иван Салабашев“ | 46 |
| "Европейско кенгуру" | 43 |
| Пролетни/зимни математически състезания | 53 |
| Национална олимпиада по математика | 79 |
| Математически турнир „Академик Кирил Попов“ | 22 |
| „Математика без граници“ | 13 |
| Софийски математически турнир | 48 |
| „Откриване на млади таланти“ | 39 |
| Фестивал на младите математици | 13 |
| Някое от азиатските математически състезания | 17 |
| Други | 36 |



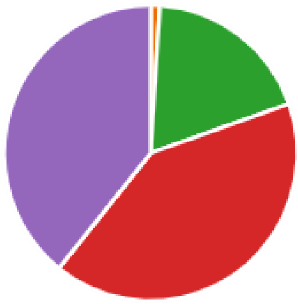

5. Как оценявате влиянието на участието в извънкласни занимания по математика при професионалното ви ориентиране?

| | |
|---|---|
| Изобщо не повлия | 1 |
| Слабо повлия | 4 |
| Донякъде повлия | 28 |
| Значително повлия | 33 |
| Съществено повлия | 36 |



6. Как оценявате влиянието на участието в извънкласни занимания по математика върху постиженията в обучението или реализация в работата ви?

| | |
|---|---|
| Изобщо не повлия | 0 |
| Слабо повлия | 1 |
| Донякъде повлия | 19 |
| Значително повлия | 42 |
| Съществено повлия | 40 |



7. Вие сте:

| | |
|---|---|
| жена | 47 |
| мъж | 54 |

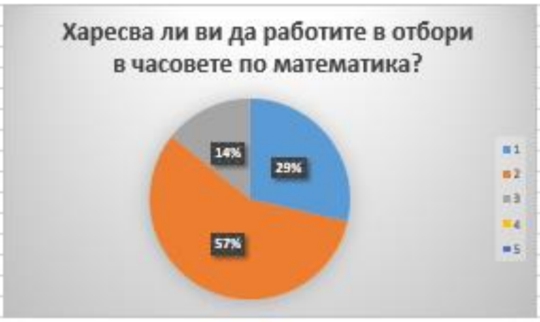
8. Вашата възраст е:

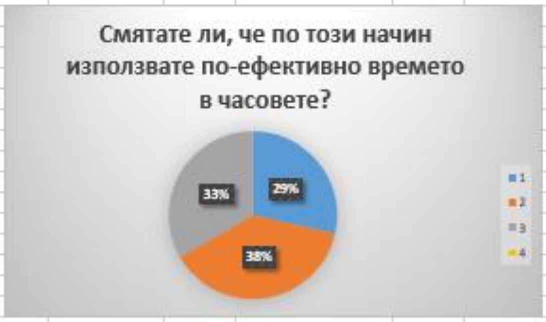
| | |
|---|---|
| под 19 години | 7 |
| между 19 и 25 | 34 |
| между 26 и 40 | 48 |
| над 40 | 13 |

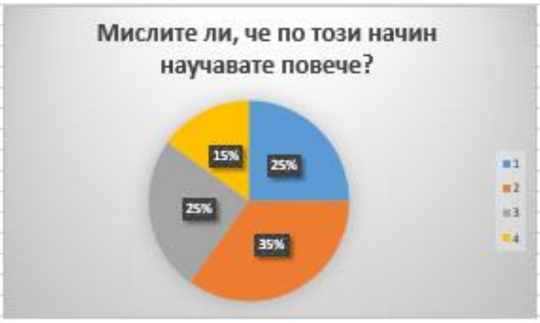
## Приложение 2

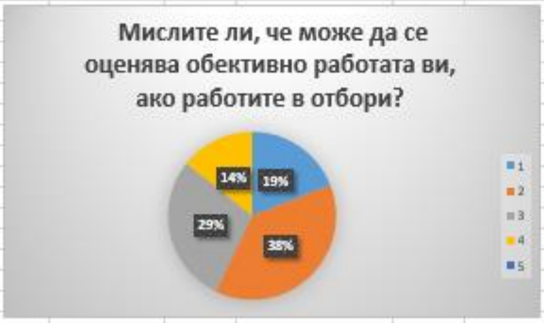
## Анкета за работата в отбори и нейното оценяване

| Анкета за работата в отбори и нейното оценяване | | | 12 А клас | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Въпрос: | Определено | ДА | Не мога да преце | НЕ | Определено НЕ | |
| 1. Харесва ли ви да работите в отбори в часовете по математика? | 6 | 12 | 3 | | | 21 |
| 2.Смятате ли, че по този начин използвате по-ефективно времето в ч | 6 | 8 | 7 | | | 21 |
| 3. Мислите ли, че по този начин научавате повече? | 5 | 7 | 5 | 3 | | 20 |
| 4. Мислите ли, че може да се оценява обективно работата ви, ако ра | 4 | 8 | 6 | 3 | | 21 |
| 5.Мислите ли, че предложения от г-жа Цветкова метод на оценяване | 6 | 6 | 5 | 3 | | 20 |
| 6. Отборната работа повишава ли мотивацията ви за учене? | 4 | 7 | 6 | 4 | | 21 |

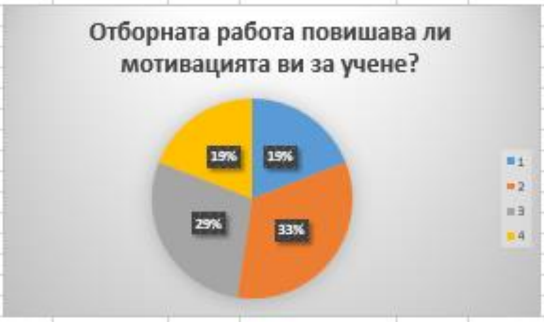


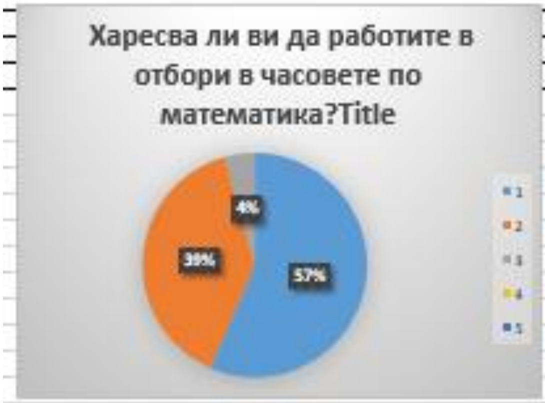



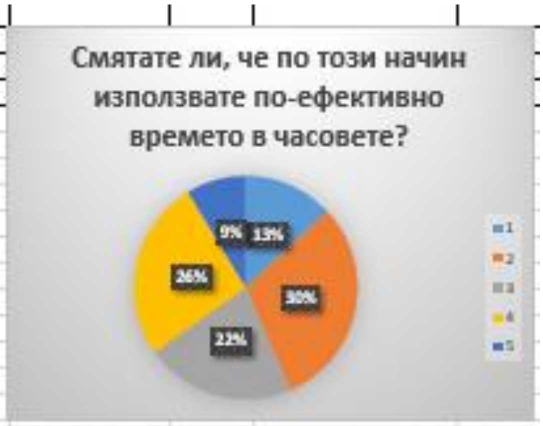



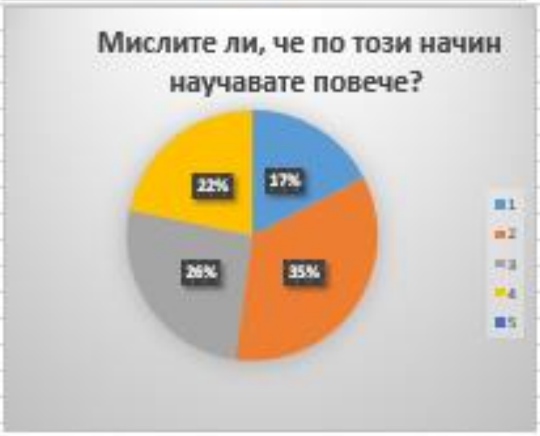


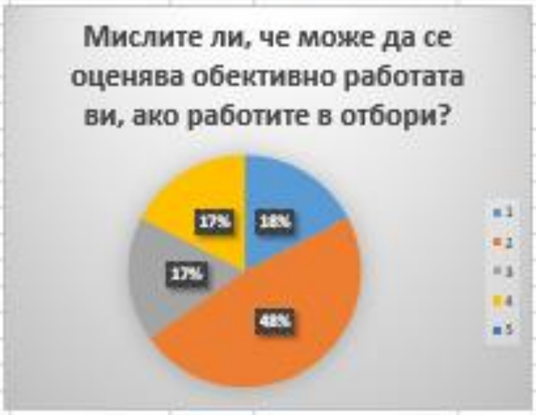


| Анкета за работата в отбори и нейното оценяване | | | 12 Е клас | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Въпрос: | Определено ДА | ДА | Не мога да преценя | НЕ | Определено НЕ | |
| 1. Харесва ли ви да работите в отбори в часовете по математика? | 13 | 9 | 1 | | | 23 |
| 2.Смятате ли, че по този начин използвате по-ефективно времето в часовете? | 3 | 7 | 5 | 6 | 2 | 23 |
| 3. Мислите ли, че по този начин научавате повече? | 4 | 8 | 6 | 5 | | 23 |
| 4. Мислите ли, че може да се оценява обективно работата ви, ако работите в отбори? | 4 | 11 | 4 | 4 | | 23 |
| 5.Мислите ли, че предложения от г-жа Цветкова метод на оценяване е обективен? | 9 | 6 | 4 | 3 | 1 | 23 |
| 6. Отборната работа повишава ли мотивацията ви за учене? | 7 | 7 | 6 | 2 | 1 | 23 |
| | | | | | | |

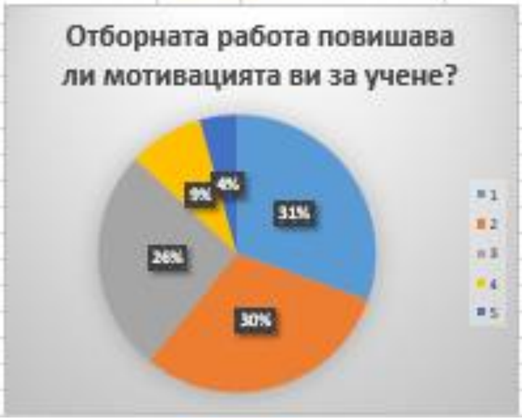






## Приложение 3

## Резултати на българският национален отбор на Международната олимпиада по математика

Информацията е от официалния сайт на МОМ:
https://www.imo-official.org/results.aspx

| Year | Contestant [♀♂][←] | P1 | P2 | P3 | P4 | P5 | P6 | Училище | Total | Rank | | Award |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | Abs. | Rel. | |
| 2023 | Bozhidar Dimitrov | 7 | 7 | 1 | 7 | 0 | 0 | МГ Силистра | 22 | 220 | 64.51 % | Bronze medal |
| 2023 | Angel Hristov | 7 | 7 | 1 | 7 | 2 | 0 | МГ Бургас | 24 | 145 | 76.66 % | Bronze medal |
| 2023 | Marin Hristov | 7 | 7 | 7 | 7 | 6 | 2 | СМГ | 36 | 23 | 96.43 % | Gold medal |
| 2023 | Vesselin Markovich | 7 | 0 | 0 | 7 | 7 | 0 | МГ Варна | 21 | 237 | 61.75 % | Bronze medal |
| 2023 | Iliyas Noman | 7 | 1 | 0 | 7 | 5 | 0 | СМГ | 20 | 259 | 58.18 % | Bronze medal |
| 2023 | Ivan Tagarev | 7 | 7 | 1 | 7 | 2 | 2 | СМГ | 26 | 128 | 79.42 % | Silver medal |
| 2022 | Bozhidar Dimitrov | 7 | 7 | 0 | 7 | 7 | 0 | МГ Силистра | 28 | 146 | 75.34 % | Bronze medal |
| 2022 | Marin Hristov | 7 | 7 | 2 | 7 | 6 | 4 | СМГ | 33 | 45 | 92.52 % | Silver medal |
| 2022 | Borislav Kirilov | 7 | 7 | 5 | 7 | 7 | 2 | ПЧМГ | 35 | 32 | 94.73 % | Gold medal |
| 2022 | Martin Kopchev | 7 | 7 | 1 | 7 | 7 | 1 | ПМГ Габрово | 30 | 84 | 85.88 % | Silver medal |
| 2022 | Ivan Tagarev | 7 | 7 | 1 | 7 | 7 | 0 | СМГ | 29 | 112 | 81.12 % | Silver medal |
| 2022 | Nicola Tsachev | 7 | 7 | 0 | 7 | 1 | 0 | ПЧМГ | 22 | 286 | 51.53 % | Honourable mention |
| 2021 | Diyan Dimitrov | 7 | 0 | 0 | 7 | 5 | 0 | СМГ | 19 | 151 | 75.73 % | Silver medal |
| 2021 | Cuong Do | 7 | 0 | 0 | 7 | 0 | 0 | СМГ | 14 | 218 | 64.89 % | Bronze medal |
| 2021 | Stefan Hadzhistoykov | 7 | 1 | 0 | 7 | 7 | 0 | СМГ | 22 | 63 | 89.97 % | Silver medal |
| 2021 | Borislav Kirilov | 7 | 0 | 1 | 7 | 7 | 7 | ПЧМГ | 29 | 24 | 96.28 % | Gold medal |
| 2021 | Martin Kopchev | 7 | 1 | 0 | 7 | 0 | 0 | ПМГ габрово | 15 | 180 | 71.04 % | Bronze medal |
| 2021 | Iliyas Noman | 7 | 0 | 0 | 7 | 7 | 0 | СМГ | 21 | 105 | 83.17 % | Silver medal |
| 2020 | Diyan Dimitrov | 7 | 1 | 0 | 3 | 1 | 0 | СМГ | 12 | 358 | 41.95 % | Honourable mention |
| 2020 | Cuong Do | 7 | 0 | 0 | 7 | 7 | 0 | СМГ | 21 | 206 | 66.67 % | Bronze medal |
| 2020 | Stefan Hadzhistoykov | 7 | 0 | 0 | 6 | 1 | 0 | СМГ | 14 | 317 | 48.62 % | Honourable mention |
| 2020 | Evgeni Kayryakov | 7 | 2 | 0 | 7 | 7 | 0 | СМГ | 23 | 162 | 73.82 % | Bronze medal |
| 2020 | Borislav Kirilov | 7 | 1 | 3 | 7 | 7 | 1 | ПЧМГ | 26 | 121 | 80.49 % | Silver medal |
| 2020 | Martin Kopchev | 7 | 0 | 7 | 7 | 1 | 0 | ПМГ Габрово | 22 | 181 | 70.73 % | Bronze medal |

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2019 | Cuong Do | 7 | 6 | 0 | 7 | 7 | 0 | СМГ | 27 | 101 | 83.87 % | Silver medal |
| 2019 | Evgeni Kayryakov | 7 | 6 | 1 | 7 | 7 | 0 | СМГ | 28 | 65 | 89.68 % | Silver medal |
| 2019 | Borislav Kirilov | 7 | 6 | 0 | 7 | 7 | 0 | ПЧМГ | 27 | 101 | 83.87 % | Silver medal |
| 2019 | Kristian Minchev | 7 | 6 | 0 | 6 | 7 | 0 | МГ Бургас | 26 | 122 | 80.48 % | Silver medal |
| 2019 | Ivo Petrov | 7 | 6 | 0 | 7 | 7 | 0 | СМГ | 27 | 101 | 83.87 % | Silver medal |
| 2019 | Kristiyan Vasilev | 7 | 7 | 1 | 0 | 2 | 0 | ПЧМГ | 17 | 275 | 55.81 % | Bronze medal |
| 2018 | Borislav Antov | 7 | 7 | 2 | 7 | 7 | 1 | СМГ | 31 | 34 | 94.44 % | Gold medal |
| 2018 | Kiril Bangachev | 7 | 3 | 0 | 7 | 7 | 1 | СМГ | 25 | 131 | 78.08 % | Silver medal |
| 2018 | Atanas Dinev | 7 | 4 | 0 | 7 | 1 | 0 | МГ Бургас | 19 | 215 | 63.91 % | Bronze medal |
| 2018 | Konstantin Garov | 7 | 7 | 0 | 7 | 6 | 2 | МГ Бургас | 29 | 61 | 89.88 % | Silver medal |
| 2018 | Ivan-Aleksandar Mavrov | 7 | 7 | 0 | 7 | 7 | 2 | СМГ | 30 | 49 | 91.91 % | Silver medal |
| 2018 | Kristiyan Vasilev | 7 | 2 | 0 | 0 | 1 | 2 | ПЧМГ | 12 | 338 | 43.17 % | Honourable mention |
| 2017 | Kiril Bangachev | 7 | 4 | 0 | 7 | 1 | 0 | СМГ | 19 | 115 | 81.43 % | Silver medal |
| 2017 | Atanas Dinev | 7 | 3 | 0 | 7 | 0 | 0 | МГ Бургас | 17 | 188 | 69.54 % | Bronze medal |
| 2017 | Ivan Ganev | 7 | 7 | 0 | 7 | 0 | 2 | АК(СМГ) | 23 | 64 | 89.74 % | Silver medal |
| 2017 | Konstantin Garov | 5 | 7 | 0 | 7 | 0 | 0 | МГ Бургас | 19 | 115 | 81.43 % | Silver medal |
| 2017 | Violeta Naydenova | 7 | 7 | 0 | 7 | 0 | 0 | СМГ | 21 | 82 | 86.81 % | Silver medal |
| 2017 | Hristo Papazov | 7 | 3 | 0 | 7 | 0 | 0 | АК(СМГ) | 17 | 188 | 69.54 % | Bronze medal |
| 2016 | Daniel Atanasov | 7 | 1 | 1 | 7 | 3 | 7 | СМГ | 26 | 68 | 88.85 % | Silver medal |
| 2016 | Aleksandar Cherganski | 7 | 5 | 0 | 7 | 7 | 0 | СМГ | 26 | 68 | 88.85 % | Silver medal |
| 2016 | Atanas Dinev | 7 | 0 | 0 | 7 | 4 | 0 | МГ Бургас | 18 | 206 | 65.89 % | Bronze medal |
| 2016 | Violeta Naydenova | 7 | 3 | 0 | 7 | 2 | 0 | СМГ | 19 | 184 | 69.55 % | Bronze medal |
| 2016 | Hristo Papazov | 7 | 1 | 2 | 7 | 0 | 0 | АК(СМГ) | 17 | 224 | 62.90 % | Bronze medal |
| 2016 | Stanislav Slavov | 7 | 3 | 0 | 7 | 2 | 7 | СМГ | 26 | 68 | 88.85 % | Silver medal |
| 2015 | Aleksandar Cherganski | 7 | 1 | 1 | 7 | 0 | 2 | СМГ | 18 | 140 | 75.87 % | Bronze medal |
| 2015 | Lyuben Lichev | 7 | 3 | 7 | 7 | 1 | 0 | МГ Плевен | 25 | 40 | 93.23 % | Silver medal |
| 2015 | Denitsa Markova | 4 | 1 | 0 | 7 | 1 | 0 | СМГ | 13 | 283 | 51.04 % | Honourable mention |

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2015 | Violeta Naydenova | 7 | 6 | 1 | 7 | 1 | 0 | СМГ | 22 | 76 | 86.98 % | Silver medal |
| 2015 | Emiliyan Rogachev | 4 | 2 | 0 | 2 | 1 | 0 | СМГ | 9 | 365 | 36.81 % | |
| 2015 | Alexander Tenev | 7 | 0 | 0 | 2 | 1 | 3 | СМГ | 13 | 283 | 51.04 % | Honourable mention |
| 2014 | Stanislav Chobanov | 7 | 0 | 1 | 7 | 0 | 0 | МГ Варна | 15 | 296 | 47.23 % | Honourable mention |
| 2014 | Nguyen Dung | 7 | 6 | 0 | 7 | 2 | 0 | СМГ | 22 | 124 | 78.00 % | Silver medal |
| 2014 | Lyuben Lichev | 7 | 6 | 1 | 7 | 1 | 0 | МГ Плевен | 22 | 124 | 78.00 % | Silver medal |
| 2014 | Denitsa Markova | 4 | 1 | 0 | 7 | 2 | 0 | СМГ | 14 | 321 | 42.75 % | Honourable mention |
| 2014 | Pavlena Nenova | 7 | 5 | 0 | 7 | 0 | 0 | СМГ | 19 | 221 | 60.64 % | Bronze medal |
| 2014 | Viktor Radivchev | 7 | 7 | 0 | 7 | 7 | 0 | МГ Варна | 28 | 50 | 91.23 % | Silver medal |
| 2013 | Lyuben Lichev | 3 | 2 | 2 | 7 | 3 | 0 | МГ Плевен | 17 | 211 | 60.08 % | Bronze medal |
| 2013 | Todor Mihaylov Markov | 0 | 0 | 0 | 7 | 3 | 0 | МГ Бургас | 10 | 322 | 38.97 % | Honourable mention |
| 2013 | Petar Penkov | 7 | 7 | 0 | 7 | 2 | 0 | СМГ | 23 | 138 | 73.95 % | Bronze medal |
| 2013 | Viktor Radivchev | 7 | 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | МГ Варна | 14 | 279 | 47.15 % | Honourable mention |
| 2013 | Emiliyan Rogachev | 7 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | СМГ | 10 | 322 | 38.97 % | Honourable mention |
| 2013 | Yordan Yordanov | 7 | 5 | 3 | 7 | 5 | 0 | МГ Варна | 27 | 101 | 80.99 % | Silver medal |
| 2012 | Ivailo Hartarsky | 7 | 0 | 0 | 4 | 0 | 0 | СМГ | 11 | 315 | 42.49 % | Honourable mention |
| 2012 | Todor Mihaylov Markov | 7 | 7 | 0 | 6 | 0 | 1 | МГ Бургас | 21 | 112 | 79.67 % | Silver medal |
| 2012 | Todor Sivkov Markov | 7 | 1 | 0 | 7 | 0 | 0 | СМГ | 15 | 229 | 58.24 % | Bronze medal |
| 2012 | Viktor Radivchev | 7 | 0 | 0 | 7 | 0 | 1 | МГ Варна | 15 | 229 | 58.24 % | Bronze medal |
| 2012 | Rafael Rafailov | 7 | 7 | 0 | 7 | 0 | 0 | СМГ | 21 | 112 | 79.67 % | Silver medal |
| 2012 | Bogdan Stankov | 7 | 7 | 7 | 7 | 4 | 1 | СМГ | 33 | 17 | 97.07 % | Gold medal |
| 2011 | Kubrat Danailov | 7 | 0 | 3 | 7 | 2 | 1 | АК( СМГ) | 20 | 171 | 69.75 % | Bronze medal |
| 2011 | Milen Ivanov | 7 | 0 | 0 | 2 | 2 | 1 | НПМГ | 12 | 320 | 43.24 % | Honourable mention |
| 2011 | Rafael Rafailov | 7 | 0 | 1 | 7 | 7 | 1 | СМГ | 23 | 83 | 85.41 % | Silver medal |
| 2011 | Bogdan Stankov | 7 | 1 | 6 | 7 | 6 | 0 | СМГ | 27 | 55 | 90.39 % | Silver medal |
| 2011 | Victor Valov | 7 | 0 | 3 | 7 | 2 | 1 | СМГ | 20 | 171 | 69.75 % | Bronze medal |

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2011 | Zhivko Zhechev | 7 | 0 | 2 | 7 | 3 | 0 | МГ Шумен | 19 | 186 | 67.08 % | Bronze medal |
| 2010 | Kubrat Danailov | 7 | 0 | 0 | 7 | 1 | 0 | АК( СМГ) | 15 | 226 | 56.81 % | Bronze medal |
| 2010 | Yoan Delchev | 7 | 0 | 0 | 7 | 1 | 0 | СМГ | 15 | 226 | 56.81 % | Bronze medal |
| 2010 | Aleksandar Makelov | 7 | 7 | 1 | 7 | 1 | 0 | МГ Бургас | 23 | 64 | 87.91 % | Silver medal |
| 2010 | Lyuboslav Nikolaev Panchev | 7 | 7 | 0 | 7 | 1 | 7 | СМГ | 29 | 18 | 96.74 % | Gold medal |
| 2010 | Victor Valov | 6 | 7 | 0 | 7 | 1 | 0 | СМГ | 21 | 106 | 79.85 % | Silver medal |
| 2010 | Zhivko Zhechev | 7 | 1 | 0 | 7 | 0 | 0 | МГ Шумен | 15 | 226 | 56.81 % | Bronze medal |