Софийски Университет "св. Климент Охридски"
Факултет по Математика и Информатика

Тороидални компактификации на дискретни фактори на комплексното двумерно кълбо

Дисертационен труд

на **Панчо Георгиев Бешков**

за придобиване на образователната и научна степен "Доктор"
в професионално направление 4.5 Математика, докторска програма
“Алгебра, топология и приложения”

Научен ръководител: проф. д-р Азнив Киркор Каспарян

София

февруари, 2022

Съдържание

Глава 0

Увод

Ограничена област $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}^N$ е симетрична, ако за всяка точка $z \in \mathcal{D}$ съществува холоморфна инволюция $\sigma_z : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ с единствена фиксирана точка z. Всяка ограничена симетрична област $\mathcal{D} = G/K$ е хомогенно пространство на редуктивна група на Ли G. Ограничена симетрична област $\mathcal{D}$ е неприводима, ако не може да се представи като директно произведение на ограничени симетрични области с по-малка размерност. Комплексното 2-мерно кълбо $\mathbb{B} = \{z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \,|\, |z_1|^2 + |z_2|^2 < 1\}$ е единствената неприводима ограничена симетрична област с комплексна размерност 2.

Благодарение на хомогенността си относно действието на унитарната група

$$U(1,2) = \left\{ g \in \mathrm{GL}(3,\mathbb{C}) \,|\, \mathcal{H}_{1,2}(gz, gz') = \mathcal{H}_{1,2}(z, z'),\, \forall z, z' \in \mathbb{B} \right\}$$

на ермитова форма $\mathcal{H}_{1,2} : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ със сигнатура $(1,2)$, кълбото $\mathbb{B}$ има много фактори $\mathbb{B}/\Gamma$ по дискретни подгрупи $\Gamma < U(1,2)$. Най-интересни са факторите $\mathbb{B}/\Gamma$ с краен $U(1,2)$-инвариантен обем, чиито съответни групи Γ се наричат решетки на $U(1,2)$. Решетка $\Gamma < U(1,2)$ е аритметична, ако съществува числово поле $\mathbb{Q} \subseteq k \subset \mathbb{C}$ с пръстен от цели числа $\mathcal{O}_k$, така че $\Gamma \cap \mathrm{GL}(3, \mathcal{O}_k)$ е с краен индекс в Γ и в $\mathrm{GL}(3, \mathcal{O}_k)$.

Реалният ранг на ограничена симетрична област $\mathcal{D} = G/K$ е максималната размерност на абелева подгрупа $A < G < \mathrm{GL}(N, \mathbb{C})$, чиито елементи се диагонализират едновременно над $\mathbb{R}$. Маргулис доказва в [34], че всички решетки Γ в групата G от холоморфни изометрии на неприводима ограничена симетрична пбласт $\mathcal{D} = G/K$ с реален ранг ≥ 2 са аритметични. Комплексното 2-мерно кълбо е неприводима ограничена симетрична област с реален ранг 1 и неговата група от холоморфни изометрии $U(1,2)$ има неаритметични решетки. Първите примери за неаритметични решетки $\Gamma < U(1,2)$ се появяват в статията на Мостов [38] от 1980г. По-нататъшни конструкции се дължат на статиите [9], [10] на Делин-Мостов, статиите [11], [12] на Деро, статиите [13], [14] на Деро, Паркър и Пупе и т.н. Миналата година, Балди и Улмо доказват в [4], че ако фактор $\mathbb{B}/\Gamma$ по решетка $\Gamma < U(1,2)$ съдържа безбройно много максимални комплексни напълно геодезични подмногообразия, то Γ е аритметична решетка. Нашият подход за изучаване на некомпактните фактори $\mathbb{B}/\Gamma$ на кълбото с гладки тороидални компактификации $(\mathbb{B}/\Gamma)'$ се прилага едновременно към аритметични и неаритметични решетки $\Gamma < U(1,2)$.

Гладките компактни фактори на кълбото $\mathbb{B}/\Gamma$ се характеризират топологично чрез равенство на техните числа на Чърн. Да напомним, че за произволна комплексна проективна повърхнина $X \subset \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$, числото на Чърн $c_2(X) \in \mathbb{Z}$ е Ойлеровата характеристика на X, а $c_1^2(X) = K_X^2 \in \mathbb{Z}$ е индексът на самопресичане на каноничния дивизор K_X на X. Статията [48] на Ван де Вен от 1966г. доказва, че минималните комплексни проективни повърхнини от общ тип удовлетворяват неравенството $c_1^2(X) \leq 8c_2(X)$. По-късно, в [5] Богомолов подобрява тази оценка с $c_1^2(X) \leq 4c_2(X)$. Като следствие от съществуването на решение на уравнението на Монж-Ампер, статията на Яо [49] установява, че гладка минимална повърхнина $X \subset \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ от общ тип е фактор на кълбото $X = \mathbb{B}/\Gamma$ тогава и само тогава, когато $c_1^2(X) = 3c_2(X)$. Същият резултат е доказан независимо от Мияока в [35]. Много автори наричат $c_1^2(X) = 3c_2(X)$ равенство на Богомолов-Мияока-Яо.

Чрез алгебрична теория на числата, Прасад и Юнг установяват съществуването на краен брой аритметични решетки $\Gamma < SU(1,2)$ с гладък компактен фактор $\mathbb{B}/\Gamma$. Те доказват, че всяка такава решетка Γ отговаря на напълно реално числово поле k, проста алгебрична група $G(k)$ над k, чисто имагинерно квадратично разширение $l \supset k$ и алгебра с деление $\mathcal{D}$ с център l. Съществува единствен клас от дискретни нормирания ν_o на k, така че групата $G(k_{\nu_o}) \simeq SU(1,2)$ над попълнението $k_{\nu_o} \simeq \mathbb{R}$ е некомпактна. За всеки друг неархимедов клас от дискретни нормирания $\nu \neq \nu_o$ на k, групата $G(k_\nu) \simeq SU(3)$ е компактна. След класификация на k, l и $\mathcal{D}$, Прасад и Юнг описват аритметичните решетки $\Gamma < SU(1,2)$ с гладък компактен фактор $\mathbb{B}/\Gamma$. Използвайки компютърни имплементации, Картрайт и Стигър намират в [8] представяния на всички аритметични решетки $\Gamma < SU(1,2)$ с гладки компактни фактори $\mathbb{B}/\Gamma$.

Преобладаваща част от решетките $\Gamma < U(1,2)$ имат некомпактни фактори $\mathbb{B}/\Gamma$. Възниква необходимостта от построяване на компактификации на такива $\mathbb{B}/\Gamma$. Гранична точка $z \in \partial\mathbb{B} = \left\{ z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \,|\, |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1 \right\}$ е Γ-рационална, ако решетката $\Gamma < U(1,2)$ пресича стабилизатора $\mathrm{Stab}_{U(1,2)}(z)$ в решетка $\Gamma \cap \mathrm{Stab}_{U(1,2)}(z)$ на $\mathrm{Stab}_{U(1,2)}(z)$. Множеството $\partial_\Gamma \mathbb{B}$ на Γ-рационалните гранични точки на $\mathbb{B}$ има действие на Γ с краен брой орбити, които се наричат Γ-параболични точки. От резултатите на Бейли и Борел от [3] следва, че присъединяването на Γ-параболичните точки $\partial_\Gamma \mathbb{B}/\Gamma$ към $\mathbb{B}/\Gamma$ води до комплексно проективно многообразие

$$\widehat{\mathbb{B}/\Gamma} = (\mathbb{B}/\Gamma) \coprod (\partial_\Gamma \mathbb{B}/\Gamma)\,.$$

Дори когато факторът $\mathbb{B}/\Gamma$ е гладък, компактификацията на Бейли-Борел $\widehat{\mathbb{B}/\Gamma}$ има особености в Γ-параболичните точки $\partial_\Gamma \mathbb{B}/\Gamma$. Разрешението на параболичните особености на $\widehat{\mathbb{B}/\Gamma}$ дава тороидалната компактификация $(\mathbb{B}/\Gamma)'$ на $\mathbb{B}/\Gamma$. За произволна ограничена симетрична област $\mathcal{D} = G/K$ и произволна решетка $\Gamma < G$ от холоморфни изометрии на $\mathcal{D}$ с некомпактен фактор $\mathcal{D}/\Gamma$, тороидалните компактификации на $\mathcal{D}/\Gamma$ са построени от Аш, Мъмфорд, Рапопорт и Таи в [1].

В [39] Мъмфорд обобщава равенството на Богомолов-Мияока-Яо $c_1^2(\mathbb{B}/\Gamma) = 3c_2(\mathbb{B}/\Gamma)$ за гладки компактни фактори $\mathbb{B}/\Gamma$ на кълбото и извежда негов аналог за гладките тороидални компактификации $(\mathbb{B}/\Gamma)'$. Нека $D := (\mathbb{B}/\Gamma)' \setminus (\mathbb{B}/\Gamma)$ е тороидалният компактифициращ дивизор на гладка тороидална компактификация $X = (\mathbb{B}/\Gamma)'$, $\overline{c_2}(X, D) := e(X \setminus D) = e(\mathbb{B}/\Gamma)$ е Ойлеровата характеристика на $\mathbb{B}/\Gamma$, а $\overline{c_1}^2(X, D) := (K_X + D)^2$ е индексът на самопресичане на логаритмично-каноничния дивизор $K_X + D$ на (X, D). Мъмфорд доказва, че ако (X, D) е от логаритмично общ тип, т.е., ако достатъчно висока тензорна степен на линейното разслоение, отговарящо на $K_X + D$ задава проективен морфизъм на X върху повърхнина, то $\overline{c_1}^2(X, D) \leq 3\overline{c_2}(X, D)$ с равенство $\overline{c_1}^2(X, D) = 3\overline{c_2}(X, D)$ тогава и само тогава, когато $X = (\mathbb{B}/\Gamma)'$ е гладка тороидална компактификация с тороидален компактифициращ дивизор D. Отсега нататък ще казваме, че $\overline{c_1}^2(X, D), \overline{c_2}(X, D)$ са логаритмичните числа на Чърн на (X, D), а $\overline{c_1}^2(X, D) = 3\overline{c_2}(X, D)$ е логаритмичното равенство на Богомолов-Мияока-Яо.

Дисертационният труд изучава гладките тороидални компактификации $(\mathbb{B}/\Gamma)'$ на некомпактни фактори $\mathbb{B}/\Gamma$ на комплексното двумерно кълбо $\mathbb{B}$ по решетка $\Gamma < U(1, 2)$. По-точно, той се концентрира върху крайните неразклонени покрития

$$f : (\mathbb{B}/\Gamma_2)' \longrightarrow (\mathbb{B}/\Gamma_1)'$$

на гладки тороидални компактификации, които се ограничават до крайни неразклонени покрития $f : \mathbb{B}/\Gamma_2 \to \mathbb{B}/\Gamma_1$ на съответните фактори на кълбото и върху някои числови инварианти на гладките тороидални компактификации $X = (\mathbb{B}/\Gamma)'$, които са бирационални на линейчата повърхнина $r : Y \to B$ с елиптична база B. Гореспоменатите оригинални резултати на дисертацията съставят трета и четвърта глави. Нека $L_1 \simeq \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ е гладка неприводима рационална крива върху повърхнина X, чието свиване не поражда особеност. Тогава индексът на самопресичане на L_1 е $L_1^2 = -1$ и L_1 се нарича накратко (-1)-крива върху X. Произволно неразклонено покритие $f : X_2 \to X_1$ от степен $d \in \mathbb{N}$ на гладки повърхнини се ограничава до неразклонено покритие $f : L'' \to L'$ от степен d на обединението L' на рационалните (-1)-криви върху X_1 чрез обединението L'' на гладките рационални (-1)-криви върху X_2. Нека $D^{(j)} := (\mathbb{B}/\Gamma_j)' \setminus (\mathbb{B}/\Gamma_j)$ е тороидалният компактифициращ дивизор на $\mathbb{B}/\Gamma_j$, а $\rho_j : (\mathbb{B}/\Gamma_j)' \to Y_j$ е крайна редица от свивания на (-1)-криви към минимална повърхнина Y_j. Дисертацията построява взаимно еднозначно съответствие между крайните неразклонени покрития $f : (\mathbb{B}/\Gamma_2)' \to (\mathbb{B}/\Gamma_1)'$ на гладки тороидални компактификации, които се ограничават до крайни неразклонение покрития $f : \mathbb{B}/\Gamma_2 \to \mathbb{B}/\Gamma_1$ от същата степен и крайните неразклонени покрития $\varphi : Y_2 \to Y_1$ на съответните минимални модели, които се ограничават до крайни неразклонени покрития $\varphi : \rho_2\left(D^{(2)}\right) \to \rho_1\left(D^{(1)}\right)$ от същата степен. Гореспоменатите крайни неразклонени покрития задават частична наредба $\succeq$ в множеството Σ на гладките тороидални компактификации $(\mathbb{B}/\Gamma)'$. Минималните елементи $(\mathbb{B}/\Gamma_o)' \in \Sigma$ относно $\succeq$ се наричат примитивни, а максималните $(\mathbb{B}/\Gamma_1)' \in \Sigma$ наричаме наситени. Глава 3 на дисертацията установява, че всяко $(\mathbb{B}/\Gamma)' \in \Sigma$ доминира някакъв примитивен елемент $(\mathbb{B}/\Gamma_0)' \in \Sigma$. Необходимо и достатъчно условие за съществуването на наситен елемент $(\mathbb{B}/\Gamma_1)' \in \Sigma$ с $(\mathbb{B}/\Gamma_1)' \succ (\mathbb{B}/\Gamma)'$ е крайността на фундаменталната група $\pi_1(Y)$ на минимален модел Y на $(\mathbb{B}/\Gamma)'$. Третата глава характеризира наситените и примитивните $(\mathbb{B}/\Gamma)' \in \Sigma$ с неположителна размерност на Кодаира $\kappa(\mathbb{B}/\Gamma)' \in \{-\infty, 0\}$. Ако $\beta : X = (\mathbb{B}/\Gamma)' \to Y$ свива непресичащи се гладки рационални (-1)-криви и $D := X \setminus (\mathbb{B}/\Gamma)$ е тороидалният компактифициращ дивизор на X, доказваме че относителната група от бихоломорфизми $\mathrm{Aut}(X,D)$ е крайна и изоморфна на $\mathrm{Aut}(Y,\beta(D))$.

Освен покритията на гладки тороидални компактификации $(\mathbb{B}/\Gamma)'$, дисертационнният труд дискутира броя на параболичните точки и броя на ненапълно геодезичните пунктирани сфери $L_i \setminus D \subset \mathbb{B}/\Gamma$ за гладки $(\mathbb{B}/\Gamma)'$, чийто минимален модел Y има разслоение $r : Y \to B$ чрез рационални прави над елиптична крива B. Основно средство за изучаване на гореспоменатите числови инварианти е логаритмичното равенство на Богомолов-Мияока-Яо на двойка (X,D), съставена от гладка тороидална компактификация $X = (\mathbb{B}/\Gamma)'$ и нейния тороидален компактифициращ дивизор

$$D := X \setminus (\mathbb{B}/\Gamma) = \sum_{j=1}^{k} D_j$$

с гладки елиптични неприводими компоненти D_j. Ако $\beta : X \to Y$ е свиването на неприводимите гладки рационални (-1)-криви $L_i \simeq \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \simeq S^2$, $1 \leq i \leq s$ върху $X = (\mathbb{B}/\Gamma)'$ към минимална линейчата повърхнина $r : Y \to B$ с елиптична база B, доказваме, че $C_j := \beta(D_j)$ са гладки елиптични криви, върху които разслоението $r : Y \to B$ се ограничава до крайни неразклонени покрития $r|_{C_j} : C_j \to B$ от степен $d_j \in \mathbb{N}$. Ако $d_j = 1$ за всички $1 \leq j \leq k$ и всички C_j са сечения на $r : Y \to B$, то логаритмичното равенство на Богомолов-Мияока-Яо за (X,D) се изразява чрез индексите на пресичане $L_i.D$ за $1 \leq i \leq s$. Ако съществува поне едно $d_j > 1$, то логаритмичното равенство на Богомолов-Мияока-Яо за (X,D) е изразено чрез $L_i.D$ за $1 \leq i \leq s$ и чрез индексите на самопресичане C_j^2 за $1 \leq j \leq k$. Това позволява извеждането на неравенство върху $L_i.D$ за $1 \leq i \leq s$. И в двата случая се установява наличието на пунктирана сфера $L_i \setminus D \subset \mathbb{B}/\Gamma$, която не е напълно геодезично вложена в $\mathbb{B}/\Gamma$. Като друго следствие от логаритмичното равенство на Богомолов-Мияока-Яо са изведени долни граници върху броя k на параболичните точки на $\mathbb{B}/\Gamma$, в зависимост от съществуването или, съответно, несъществуването на $d_j > 1$. За сравнително малки k са намерени долни граници $\mu_k \geq 2$ върху броя на ненапълно геодезичните $L_i \setminus D \subset \mathbb{B}/\Gamma$ в съответните случаи.

Да разгледаме накратко някои работи на други автори, които са свързани с оригиналните резултати на дисертацията. Покритията на фактори на $\mathbb{B}$ по решетки $\Gamma < U(1,2)$ са изучавани от Улудаг, Стоувър, Ди Чербо и Стоувър и т.н. Улудаг построява безкрайна редица от разклонени покрития на особени фактори на кълбото, които са бирационални на проективната равнина $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. В [45] Стоувър показва, че съществуват точно два особени некомпактни фактора на кълбото $\mathbb{B}/\Gamma_1$, $\mathbb{B}/\Gamma_2$ с минимален инвариантен обем и произволен гладък некомпактен фактор $\mathbb{B}/\Gamma$ с минимален обем или, еквивалентно, с минимална Ойлерова характеристика 1, е покритие на $\mathbb{B}/\Gamma_1$ или на $\mathbb{B}/\Gamma_2$ от степен 72. Статията [18] на Ди Чербо и Стоувър установява, че съществуват пет фактора на кълбото $\mathbb{B}/\Gamma_j$, $1 \leq j \leq 5$ с гладки тороидални компактификации $(\mathbb{B}/\Gamma_j)'$ и Ойлерова характеристика $e(\mathbb{B}/\Gamma_j) = 1$. Един от тях, $\mathbb{B}/\Gamma_1 = \mathbb{B}/\Gamma_{\mathrm{Hir}}$ е примерът на Хирцебрух от [25] с абелев минимален модел A_{Hir}. Останалите - $\mathbb{B}/\Gamma_2, \ldots, \mathbb{B}/\Gamma_5$ са бирационални на би-елиптични повърхнини. В [16] Ди Чербо и Стоувър доказват, че произволно покритие на Галоа $\zeta_G : A \to A_{\mathrm{Hir}} = A/G$ с крайна група на Галоа G

без фиксирани точки, отговаря на неразклонено G-Галоа покритие

$$\zeta'_G : \mathbb{B}/\Gamma_G \longrightarrow \mathbb{B}/\Gamma_{\mathrm{Hir}} = (\mathbb{B}/\Gamma_G)/G$$

на фактори на кълбото. Разглежданията от Глава 3 обобщават гореспоменатия резултат. Като приложение на съответствието между неразклонените крайни покрития на Галоа на A_{Hir} и неразклонените крайни покрития на Галоа на $\mathbb{B}/\Gamma_{\mathrm{Hir}}$, [16] доказва, че за всяко $n \in \mathbb{N}$ съществуват не бихоломорфни фактори на кълбото $\mathbb{B}/\Gamma_1, \ldots, \mathbb{B}/\Gamma_n$ с една и съща тороидална компактификация $(\mathbb{B}/\Gamma_1)' = (\mathbb{B}/\Gamma_2)' = \ldots = (\mathbb{B}/\Gamma_n)'$. В [17] Ди Чербо и Стоувър построяват редица $(\mathbb{B}/\Gamma_n)'$ от гладки тороидални компактификации с Ойлерови характеристики $e(\mathbb{B}/\Gamma_n) = n$ и би-елиптични минимални модели. Крайни неразклонени покрития на примера на Хирцебрух $(\mathbb{B}/\Gamma_{\mathrm{Hir}})'$ са използвани в статията [46] на Стоувър за конструкция на безкрайни редици $(\mathbb{B}/\Gamma_{n,1})'$, $(\mathbb{B}/\Gamma_{n,2})'$ от гладки тороидални компактификации. Ойлеровите характеристики $e(\mathbb{B}/\Gamma_{n,1})$ и броевете $\nu(\mathbb{B}/\Gamma_{n,1})$ на параболичните точки на $\mathbb{B}/\Gamma_{n,1}$ клонят към ∞ за $n \to \infty$. Втората редица $\mathbb{B}/\Gamma_{n,2}$ има $\lim\limits_{n\to\infty} e(\mathbb{B}/\Gamma_{n,2}) = \infty$ и ограничени $\nu(\mathbb{B}/\Gamma_{n,2})$. Използвайки примерите за неаритметични решетки от статията [9] на Делин-Мостов, Стоувър построява редица $\mathbb{B}/\Gamma_{n,3}$ с линеен растеж на $e(\mathbb{B}/\Gamma_{n,3})$ и $\nu(\mathbb{B}/\Gamma_{n,3})$ относно n.

Известно е, че всички гладки компактни фактори $\mathbb{B}/\Gamma$ са от общ тип. Статията [25] на Хирцебрух и публикациите [28], [29] на Холцапфел предоставят примери на гладки тороидални компактификации $(\mathbb{B}/\Gamma)'$ с абелев минимален модел. Работата [37] на Момот конструира гладки тороидални компактификации $(\mathbb{B}/\Gamma)'$ с размерност на Кодаира $\kappa(\mathbb{B}/\Gamma)' = 1$. Статията [17] на Ди Чербо и Стоувър установява съществуването на гладки тороидални компактификации $(\mathbb{B}/\Gamma)'$ с би-елиптичен минимален модел. Преобладаваща част от гладките тороидални компактификации са от общ тип. В [29] Холцапфел доказва, че произволна гладка тороидална компактификация $(\mathbb{B}/\Gamma_0)'$ с абелев минимален модел има гладко крайно разклонено покритие $(\mathbb{B}/\Gamma)'$ от общ тип. Съществуването на гладки тороидални компактификации $(\mathbb{B}/\Gamma)'$ с размерност на Кодаира $\kappa(\mathbb{B}/\Gamma)' = -\infty$ е отворен проблем. Нетороидални рационални компактификации на фактори на кълбото се изучават от Холцапфел, Пинейро и Владов в [27] и от Улудаг в [47]. Част от тези компактификации имат изолирани циклични особености. Статията [30] на Каспарян и Коцев дава пример за компактификация на фактор на кълбото с изолирани циклични особености, която е бирационална на минимална линейчата повърхнина с елиптична база. Глава 4 от дисертацията установява някои числови ограничения върху гладките тороидални компактификации $X = (\mathbb{B}/\Gamma)'$, чийто минимален модел Y е линейчата повърхнина $r : Y \to B$ с елиптична база B. Това поставя под въпрос съществуването на такива $\mathbb{B}/\Gamma$.

Факторите на кълбото $\mathbb{B}/\Gamma$ и техните компактификации обобщават естествено Римановите повърхнини от род ≥ 2, които са гладки компактни фактори на единичния диск $\Delta = \{t \in \mathbb{C} \,|\, |t| < 1\}$. Друга мотивация за изучаване на $\mathbb{B}/\Gamma$ е наличието на пространства от модули на комплексни проективни многообразия, които са фактори на кълбото. Нека N е комплексно многообразие. Фиксирайки структурата на реално аналитично многообразие върху N и променяйки комплексната структура върху N, получаваме фамилия $\pi : \mathfrak{N} \to \mathfrak{M}$ над комплексно аналитично пространство $\mathfrak{M}$, параметризираща класовете на изоморфизъм на комплексните структури върху N. При някои допълнителни технически ограничения, $\mathfrak{M}$ се нарича пространство от модули на N. Нека

$$V := \{a = (a_1, \ldots, a_4) \in \mathbb{C}^4 \,|\, a_1 + \ldots + a_4 = 0\} \simeq \mathbb{C}^3$$

и

$$V_o := \{a \in V \,|\, a_i \neq a_j, \, \forall 1 \leq i \neq j \leq 4\}.$$

Всяка точка $a \in V_o$ отговаря на гладка крива на Пикар

$$C_3(a_1, \ldots, a_4) := \left\{ x = [x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \,\middle|\, x_0 x_2^3 = \prod_{i=1}^{4} (x_1 - a_i x_0) \right\},$$

която е от род 3. За произволна пермутация $\sigma \in S_4$, $C_3(a_1, \ldots, a_4)$ и $C_3(a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(4)})$ съвпадат. Ако $a' = (a'_1, \ldots, a'_4) = \lambda a = (\lambda a_1, \ldots, \lambda a_4)$ за някое $\lambda \in \mathbb{C}^*$, то $C_3(a'_1, \ldots, a'_4)$ е изоморфна на $C_3(a_1, \ldots, a_4)$. По този начин, отвореното подмножество

$$\mathfrak{M}_o := (V_o/S_4)/\mathbb{C}^* = (V_o/\mathbb{C}^*)/S_4 \subset (V/\mathbb{C}^*)/S_4 = \mathbb{P}(V)/S_4 = \mathbb{P}^2(\mathbb{C})/S_4$$

на особеното проективно многообразие $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})/S_4$ параметризира класовете на изоморфизъм на гладките криви на Пикар. В [26] Холцапфел доказва, че $\mathfrak{M}_o = \mathbb{B}/\Gamma_o$ е фактор на комплексното двумерно кълбо $\mathbb{B}$ по решетка $\Gamma_o < U(1,2)$. Затворената обвивка $\mathrm{Cl}(\mathfrak{M}_o) = \mathbb{P}^2(\mathbb{C})/S_4$ е особено рационално многообразие. Точките от $\mathrm{Cl}(\mathfrak{M}_o) \setminus \mathfrak{M}_o$ параметризират изродени, особени комплексни равнинни проективни криви. Друг пример за пространство от модули, покрито от $\mathbb{B}$, е даден в статията [20] на Долгачёв и Кондо. Нека $p_i := [a_i : 1] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, $1 \leq i \leq 5$ са пет различни точки от проективната права и

$$C(p_1, \ldots, p_5) := \left\{ x = [x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \,\middle|\, x_0^6 = x_0 \prod_{i=1}^{5} (x_1 - a_i x_2) \right\}.$$

Цикличната група $\mathbb{C}_5 = \langle e^{\frac{2\pi i}{5}} \rangle = \left\{ e^{\frac{2\pi i s}{5}} \,\middle|\, 0 \leq s \leq 4 \right\}$ от ред 5 действа върху $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ по правилото

$$\mathbb{C}_5 \times \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C}), \quad \left(e^{\frac{2\pi i s}{5}}, [x_0 : x_1 : x_2] \right) \mapsto \left[e^{\frac{2\pi i s}{5}} x_0 : x_1 : x_2 \right]$$

и запазва кривите $C(p_1, \ldots, p_5)$ за всички $p_1, \ldots, p_5 \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Двойното покритие

$$\widehat{S}(p_1, \ldots, p_5) \longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C}),$$

разклонено над $C(p_1, \ldots, p_5) \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ има K3 разрешение на особеностите $S(p_1, \ldots, p_5)$ с действие на $\mathbb{C}_5$. Пространството от модули $\mathfrak{M}$ на такива $S(p_1, \ldots, p_5)$ е изоморфно на пространството от модули $\mathfrak{M}_1$ на подмножествата

$$\{p_1, \ldots, p_5 \,|\, p_i \neq p_j, \, \forall 1 \leq i \neq j \leq 5\} \subset \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$$

и $\mathfrak{M}_1 = \mathbb{B}/\Gamma_1$ се оказва фактор на кълбото.

Дисертационният труд се състои от увод, четири глави и библиография от 50 заглавия. В глави 1 и 2 са събрани някои предварителни сведения за числа на Чърн на алгебрични повърхнини, логаритмичното равенство на Богомолов-Мияока-Яо, характеризиращо гладките тороидални компактификации $(\mathbb{B}/\Gamma)'$ на фактори на кълбото $\mathbb{B}/\Gamma$ и конструкцията на $(\mathbb{B}/\Gamma)'$. Последните две глави покриват оригиналните резултати на автора от статиите [6], съответно, [7]. По-точно, глава 1 започва с напомняне на понятията за холоморфно векторно разслоение $\mathcal{E}$ над комплексно многообразие M и функциите на прехода на $\mathcal{E}$. Тя обяснява защо холоморфните линейни разслоения над M се класифицират с кохомологичната група $H^1(M, \mathcal{O}^*)$. Следващата разгледана тема е взаимно еднозначното съответствие между дивизорите и линейните разслоения над M. Глава 1 напомня понятията за ермитова метрика h върху холоморфно векторно разслоение $\pi : \mathcal{E} \to M$ и свързаност D върху $\mathcal{E}$. Използвайки метода на Картан на подвижните репери (виж [21]), тя се съсредоточава върху единствената свързаност върху $\pi : \mathcal{E} \to M$, която е съгласувана с ермитовата метрика h и комплексната структура върху $\mathcal{E}$. Матрицата на кривината Θ на тази свързаност относно ортонормиран репер на $\mathcal{E}$ е описана подробно. Накратко е напомнена класификацията на Енрикес-Кодаира на минималните гладки комплексни проективни повърхнини. Въведени са класовете на Чърн на холоморфните векторни разслоения като кохомологичните класове на елементарните симетрични полиноми на елементите на матрицата на кривината Θ. Това позволява определянето на числата на Чърн на гладка комплексна проективна повърхнина и формулирането на равенството на Богомолов-Мияока-Яо, характеризиращо компактните гладки фактори на кълбото $\mathbb{B}/\Gamma$, както и логаритмичното равенство на Богомолов-Мияока-Яо, описващо гладките тороидални компактификации $(\mathbb{B}/\Gamma)'$ и техните тороидални компактифициращи дивизори $D := (\mathbb{B}/\Gamma)' \setminus (\mathbb{B}/\Gamma)$.

Втората глава е посветена на конструкцията на тороидалната компактификация $(\mathbb{B}/\Gamma)'$ на фактор $\mathbb{B}/\Gamma$ на комплексното двумерно кълбо $\mathbb{B}$ по решетка $\Gamma < U(1,2)$. Започвайки от нулата, тя описва транзитивното действие на $U(1,2)$ върху $\mathbb{B}$, $\partial\mathbb{B}$ и $\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \setminus (\mathbb{B} \cup \partial\mathbb{B})$, отъждествявайки съответните стабилизатори с $U_1 \times U_2$, максимална параболична подгрупа P of $U(1,2)$ и, съответно, с $U(1,1) \times U_1$. Доказва се, че P е максимална собствена подгрупа на $U(1,2)$. Групата P е разрешима, а оттам и минимална параболична подгрупа на $U(1,2)$. Втората глава описва прецизираното разлагане на Лангландс на максималната параболична подгрупа $P_o := \mathrm{Stab}_{U(1,2)}(1,0) < U(1,2)$, стабилизираща $(1,0) \in \partial\mathbb{B} = \{z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$. Това позволява дискутирането на хоросферичното разлагане на $\mathbb{B}$, отговарящо на P_o, както и съответната реализация на $\mathbb{B}$ като област на Зигел. Максимална параболична подгрупа P на $U(1,2)$ е Γ-рационална, ако $\Gamma \cap P$ е решетка на P. Да означим с $\mathrm{MPar}(\Gamma)$ множеството на Γ-рационалните максимални параболични подгрупи на $U(1,2)$ и да разгледаме центъра $Z(N_P)$ на унипотентния радикал N_P на някое $P \in \mathrm{MPar}(\Gamma)$. Тогава $\Gamma \cap Z(N_P)$ е решетка на реалната 1-мерна група на Ли $Z(N_P)$ и факторът $\mathbb{B}/[\Gamma \cap Z(N_P)]$ е фамилия от пунктирани дискове с променлив радиус, параметризирана с комплексната права $N_P/Z(N_P) \simeq \mathbb{C}$. Присъединявайки центровете на тези дискове получаваме частичната компактификация $(\mathbb{B}/[\Gamma \cap Z(N_P)])'$ в $P \in \mathrm{MPar}(\Gamma)$. Да отбележим, че комплексно аналитичното пространство $(\mathbb{B}/[\Gamma \cap Z(N_P)])'$ не е компактно, независимо от неговото име. Решетката Γ действа чрез спрягания върху $\mathrm{MPar}(\Gamma)$ с краен брой орбити, отговарящи на Γ-параболичните точки $\partial_\Gamma \mathbb{B}/\Gamma$. За произволно $\gamma \in \Gamma$ спрягането

$$\psi_\gamma : \mathbb{B}/[\Gamma \cap Z(N_P)] \longrightarrow \mathbb{B}/[\Gamma \cap Z(N_{\gamma P \gamma^{-1}})]$$

с γ се продължава до бихоломорфизъм

$$\psi_\gamma : (\mathbb{B}/[\Gamma \cap Z(N_P)])' \longrightarrow \left(\mathbb{B}/[\Gamma \cap Z(N_{\gamma P \gamma^{-1}})]\right)'$$

и задава действие на Γ върху непресичащото се обединение

$$\coprod_{P \in \mathrm{MPar}(\Gamma)} (\mathbb{B}/[\Gamma \cap Z(N_P)])' \tag{0.1}$$

на частичните компактификации в Γ-рационалните максимални параболични подгрупи $P < U(1,2)$. Тороидалната компактификация $(\mathbb{B}/\Gamma)'$ се определя като Γ-факторът на (0.1). Нека $\beta : X = (\mathbb{B}/\Gamma)' \to Y$ е свиването на гладките рационални (-1)-криви $L_i \simeq \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \simeq S^2$, $1 \leq i \leq s$ върху гладка тороидална компактификация $X = (\mathbb{B}/\Gamma)'$, а $D := X \setminus (\mathbb{B}/\Gamma)$ е тороидалният компактифициращ дивизор на $\mathbb{B}/\Gamma$. Глава 2 обяснява накратко защо индексите на пресичане $L_i.D \geq 4$ са по-големи или равни на 4 за всички $1 \leq i \leq s$ с равенство $L_i.D = 4$ тогава и само тогава, когато пунктираната сфера $L_i \setminus D$ е напълно геодезично вложена в $\mathbb{B}/\Gamma$.

Третата глава отразява резултатите на статията [6]. По-точно, тя дискутира взаимно еднозначното съответствие между неразклонените покрития

$$f : X_2 = (\mathbb{B}/\Gamma_2)' \longrightarrow (\mathbb{B}/\Gamma_1)' = X_1$$

от степен d на гладки тороидални компактификации и неразклонените покрития $\varphi : Y_2 \to Y_1$ от степен d на техните минимални модели, които са съгласувани с крайна редица $\rho_2 : X_2 \to Y_2$ от свивания на (-1)-криви. Нека $f : M \to f(M)$ е сюрективно холоморфно изображение на комплексни многообразия, N е комплексно аналитично подпространство на M или отворено подмножество на M и $f(N) \cap f(M \setminus N) = \emptyset$. Като подготовка се установява, че ако две от изображенията

$$f : N \longrightarrow f(N), \quad f : M \setminus N \longrightarrow f(M \setminus N), \quad f : M \longrightarrow f(M)$$

са неразклонени покрития от степен $d \in \mathbb{N}$, то и третото изображение е неразклонено покритие от същата степен d. Нека $f : X \to X'$ е неразклонено покритие от степен d на гладки проективни повърхнини, а $D = \coprod_{j=1}^{k} D_j$ е дивизор върху X с непресичащи се гладки неприводими компоненти D_j, така че $f : D \to f(D)$ е неразклонено покритие от степен d. Установено е, че тогава $f : D_j \to f(D_j)$ са неразклонени покрития от степен d_j на гладки криви $f(D_j)$ и $f(D_j)$ се пресичат тогава и само тогава, когато съвпадат. За произволна гладка неприводима рационална крива $C' \subset X'$ е доказано, че пълният пра-образ $f^{-1}(C') = \coprod_{i=1}^{d} C_i$ се състои от d непресичащи се гладки неприводими рационални криви $C_i \subset X$, върху които f се ограничава до бихоломорфизъм

$f : C_i \to C'$, $\forall 1 \leq i \leq d$. Нека $\rho_1 : X_1 \to Y_1$ е композиция на краен брой свивания на (-1)-криви и $\varphi : Y_2 \to Y_1$ е неразклонено покритие от степен d. Тогава разслоеното произведение изпълнява комутативната диаграма

$$\begin{array}{ccc} X_2 = X_1 \times_{Y_1} Y_2 & \xrightarrow{\rho_2} & Y_2 \\ \downarrow f & & \downarrow \varphi \\ X_1 & \xrightarrow{\rho_1} & Y_1 \end{array} \tag{0.2}$$

и дава повърхнина X_2 с неразклонено покритие $f : X_2 \to X_1$ от степен d, както и с композиция на краен брой свивания на (-1)-криви $\rho_2 : X_2 \to Y_2$, така че f и φ са съгласувани с ρ_2. Още повече, за произволни (евентуално приводими) дивизори $D^{(i)} \subset X_i$, които не съдържат неприводима компонента на изключителния дивизор на $\rho_i : X_i \to Y_i$, $f : D^{(2)} \to D^{(1)}$ е неразклонено покритие от степен d тогава и само тогава, когато ограничението $\varphi : \rho_2\left(D^{(2)}\right) \to \rho_1\left(D^{(1)}\right)$ е неразклонено покритие от степен d. В частност, ако $\rho_1 : X_1 = (\mathbb{B}/\Gamma_1)' \to Y_1$ е свиването на гладките неприводими рационални (-1)-криви върху гладка тороидална компактификация $X_1 = (\mathbb{B}/\Gamma_1)'$, то произволно неразклонено покритие $\varphi : Y_2 \to Y_1$ от степен d издърпва X_1 до гладка тороидална компактификация $X_2 = (\mathbb{B}/\Gamma_2)'$ с неразклонени покрития $f : X_2 \to X_1$, $f : \mathbb{B}/\Gamma_2 \to \mathbb{B}/\Gamma_1$ от степен d. Обратно, да предположим, че $\rho_1 : X_1 \to Y_1$ е композиция на краен брой свивания на (-1)-криви и $f : X_2 \to X_1$ е неразклонено покритие от степен d. Тогава разлагането на Щайн на $\rho_1 f : X_2 \to Y_1$ предоставя комутативна диаграма (0.2) на разслоено произведение, където ρ_2 е крайна редица от свивания на (-1)-криви, φ е неразклонено покритие от степен d и f, φ са съгласувани с ρ_2. В резултат, произволно неразклонено покритие $f : X_2 \to X_1 = (\mathbb{B}/\Gamma_1)'$ от степен d на гладка тороидална компактификация $X_1 = (\mathbb{B}/\Gamma_1)'$ и произволна композиция на краен брой свивания на (-1)-криви $\rho_1 : X_1 \to Y_1$ към минимална повърхнина Y_1 индуцира комутативна диаграма (0.2), където $X_2 = (\mathbb{B}/\Gamma_2)'$ е гладка тороидална компактификация, $\rho_2 : X_2 \to Y_2$ е крайна редица от свивания на (-1)-криви към минимална повърхнина Y_2 и морфизмите $\varphi : Y_2 \to Y_1$, $\varphi : \rho_2(X_2 \setminus (\mathbb{B}/\Gamma_2)) \to \rho_1(X_1 \setminus (\mathbb{B}/\Gamma_1))$ са неразклонени покрития от степен d. По този начин, първият параграф на глава 3 установява, че произволно крайно неразклонено покритие на дефиниционната област или областта от стойности на $\rho_1 : X_1 = (\mathbb{B}/\Gamma_1)' \to Y_1$ индуцира комутативна диаграма (0.2) на разслоено произведение. Вторият параграф на трета глава доказва, че съвместимите крайни неразклонени покрития чрез дефиниционната област или чрез областта от стойности на $\rho_2 : X_2 = (\mathbb{B}/\Gamma_2)' \to Y_2$ се продължават до комутативна диаграма (0.2) на разслоено произведение. По-точно, нека $\rho_2 : X_2 = (\mathbb{B}/\Gamma_2)' \to Y_2$ е композиция на краен брой свивания на (-1)-криви от гладка тороидална компактификация $X_2 = (\mathbb{B}/\Gamma_2)'$ към минимална повърхнина Y_2 и $f : X_2 \to f(X_2) = X_1$ е неразклонено покритие от степен d, което е съгласувано с ρ_2 и се ограничава до неразклонено покритие $f : \mathbb{B}/\Gamma_2 \to f(\mathbb{B}/\Gamma_2)$ от степен d. Дисертацията доказва, че гореспоменатите предположения са достатъчни за съществуването на комутативна диаграма (0.2) на разслоено произведение. Обратно, ако $X_2 = (\mathbb{B}/\Gamma_2)'$ е гладка тороидална компактификация с тороидален компактифициращ дивизор $D^{(2)} := X_2 \setminus (\mathbb{B}/\Gamma_2)$, $\rho_2 : X_2 = (\mathbb{B}/\Gamma_2)' \to Y_2$ е крайна редица от свивания на (-1)-криви към минимална повърхнина Y_2 и $\varphi : Y_2 \to \varphi(Y_2)$ е неразклонено покритие от степен d, което е съгласувано с ρ_2 и се ограничава до неразклонено покритие $\varphi : \rho_2\left(D^{(2)}\right) \to \varphi\rho_2\left(D^{(2)}\right)$ от степен d, то съществува комутативна диаграма (0.2) на разслоено произведение. Последният, трети параграф на трета глава интерпретира нетривиалните крайни неразклонени покрития $f : X_2 = (\mathbb{B}/\Gamma_2)' \to (\mathbb{B}/\Gamma_1)' = X_1$ на гладки тороидални компактификации, удовлетворяващи (0.2), като частична наредба $X_2 \succeq X_1$ в множеството $\mathcal{S}$ на гладките тороидални компактификации на некомпактни фактори на кълбото $\mathbb{B}/\Gamma$. Максималните елементи на $\mathcal{S}$ относно $\succeq$ се наричат наситени, а минималните са примитивни. Доказва се, че произволна гладка тороидална компактификация $X = (\mathbb{B}/\Gamma)'$ доминира примитивна $X_0 = (\mathbb{B}/\Gamma_0)'$. За разлика от това, гладка тороидална компактификация $X = (\mathbb{B}/\Gamma)'$ се доминира от наситена $X_1 = (\mathbb{B}/\Gamma_1)' \in \mathcal{S}$ тогава и само тогава, когато X има крайна фундаментална група $\pi_1(X)$. Последният параграф на глава 3 дискутира наситеността и примитивността на гладките тороидални компактификации $X = (\mathbb{B}/\Gamma)'$ с размерност на Кодаира $\kappa(X) \in \{-\infty, 0\}$. Той установява, че $X = (\mathbb{B}/\Gamma)'$ е наситена тогава и само тогава, когато X е рационална повърхнина или X има K3 минимален модел. Ако $X = (\mathbb{B}/\Gamma)'$ е рационална повърхнина или минималният модел Y на X е повърхнина на Енрикес, то X е примитивна. Нека $\rho : X = (\mathbb{B}/\Gamma)' \to Y$ е композиция на краен брой свивания на (-1)-криви, които трансформират гладка тороидална компактификация в абелева или K3 минимална повърхнина Y, а $D := X \setminus (\mathbb{B}/\Gamma)$ е тороидалният компактифициращ дивизор на $\mathbb{B}/\Gamma$. В такъв случай, X е непримитивна тогава и само тогава, когато Y има нетривиален автоморфизъм $g : Y \to Y$ без фиксирани точки, който запазва $\rho(D)$. В случая на K3 повърхнина Y, g трябва да е от ред 2. След като забелязва, че в някои случаи непримитивността на $X = (\mathbb{B}/\Gamma)'$ се свежда до съществуване на елемент на относителната група от бихоломорфизми $\mathrm{Aut}(Y, \rho(D))$ без фиксирани точки, последният параграф на глава 3 установява, че ако изключителният дивизор $E(\rho) = \coprod_{i=1}^{s} L_i$ на $\rho : X = (\mathbb{B}/\Gamma)' \to Y$ е непресичащо се обединение на гладки неприводими рационални (-1)-криви L_i, то относителните групи от бихоломорфизми $\mathrm{Aut}(X, D) = \mathrm{Aut}(X, D, E(\rho))$ и $\mathrm{Aut}(Y, \rho(D)) = \mathrm{Aut}(Y, \rho(D), \rho(D)^{\mathrm{sing}})$ имат естествен изоморфизъм, трансформиращ елементите на $\mathrm{Aut}(X, D)$ без фиксирани точки върху елементите на $\mathrm{Aut}(Y, \rho(D))$ без фиксирани точки. Освен това е доказано, че $\mathrm{Aut}(X, D)$ е крайна група.

Последната, четвърта глава на дисертацията представя резултатите на статията [7]. Да предположим, че $\beta : X = (\mathbb{B}/\Gamma)' \to Y$ е свиване на гладки неприводими рационални (-1)-криви L_i, $1 \leq i \leq s$ върху гладка тороидална компактификация $X = (\mathbb{B}/\Gamma)'$ към минимална линейчата повърхнина $r : Y \to B$ с елиптична база B и $D := X \setminus (\mathbb{B}/\Gamma) = \sum_{j=1}^{k} D_j$ е тороидалният компактифициращ дивизор на $\mathbb{B}/\Gamma$. Доказано е, че $C_j := \beta(D_j)$ са такива гладки неприводими елиптични криви върху Y, че ограниченията $r : C_j \to B$ са крайни неразклонени покрития от степен $d_j \in \mathbb{N}$. Нека $B_0 \subset Y$ е сечение на разслоението $r : Y \to B$ чрез рационални прави, с минимален индекс на самопресичане $\delta = B_0^2$. Съгласно теорема на Нагата от [40],

$\delta \leq g(B) = 1$ не надминава рода $g(B) = 1$ на B. За $\delta < 0$ работата [7] доказва , че произволна гладка неприводима елиптична крива $C_j \subset Y$ е сечение на $r : Y \to B$. В случая $\delta = B_0^2 \in \{0, 1\}$ може да има гладки неприводими елиптични криви $C_j \subset Y$ с $\deg \left[r|_{C_j} : C_j \to B \right] = d_j > 1$ и $C_j^2 = 0$. Глава 4 редуцира логаритмичното равенство на Богомолов-Мияока-Яо за (X, D) към

$$\sum_{i=1}^{s} (L_i.D - 4) = \sum_{j=1}^{k} C_j^2.$$

Ако всички C_j са сечения на $r : Y \to B$, това равенство е еквивалентно на

$$(k-1) \left[\sum_{i=1}^{s} (L_i.D - 4) \right] = \sum_{i=1}^{s} L_i.D(L_i.D - 1).$$

Когато $\deg \left[r|_{C_j} : C_j \to B \right] = d_j > 1$ за поне едно $1 \leq j \leq k$, получаваме неравенството

$$(k-2) \left[\sum_{i=1}^{s} (L_i.D - 4) \right] \geq \sum_{i=1}^{s} (L_i.D - 1)(L_i.D - 2).$$

В резултат, поне една пунктирана сфера $L_i \setminus D$, възникваща от (-1)-крива $L_i \simeq \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \simeq S^2$ върху $X = (\mathbb{B}/\Gamma)'$, трябва да не е напълно геодезично вложена в $\mathbb{B}/\Gamma$. Ако всички C_j са сечения на $r : Y \to B$, доказано е, че броят k на параболичните точки на $\mathbb{B}/\Gamma$ е $k \geq 15$. Ойлеровата характеристика на $\mathbb{B}/\Gamma$ се оказва $e(\mathbb{B}/\Gamma) = s \geq 14$. За произволно естествено $15 \leq k \leq 62$ е пресметната явна долна граница $\mu_k \geq 2$ върху броя на ненапълно геодезичните $L_i \setminus D \subset \mathbb{B}/\Gamma$. Аналогично, ако съществува $1 \leq j \leq k$ с $\deg \left[r|_{C_j} : C_j \to B \right] = d_j > 1$ и $C_j^2 = 0$, доказано е, че $\mathbb{B}/\Gamma$ има $k \geq 12$ параболични точки и Ойлеровата характеристика $e(\mathbb{B}/\Gamma) = s \geq 11$. За произволно $12 \leq k \leq 44$ са намерени явни долни граници $\mu_k \geq 2$ върху броя на ненапълно геодезичните $L_i \setminus D \subset \mathbb{B}/\Gamma$.

Научни приноси

По преценка на автора, научните приноси на дисертационния труд са следните:

1. Явна конструкция на взаимно еднозначно съответствие между крайните неразклонени покрития $X_1 = (\mathbb{B}/\Gamma_1)' \to X = (\mathbb{B}/\Gamma)'$ на гладка тороидална компактификация $X = (\mathbb{B}/\Gamma)'$ и крайните неразклонени покрития $Y_1 \to Y$ на минимален модел Y на X.

2. Явна конструкция на взаимно еднозначно съответствие между крайните неразклонени покрития $X = (\mathbb{B}/\Gamma)' \to X_1 = (\mathbb{B}/\Gamma_1)'$ чрез гладка тороидална компактификация $X = (\mathbb{B}/\Gamma)'$, които са съгласувани с редица $\rho : X \to Y$ от свивания на гладки неприводими рационални (-1)-криви към минимална повърхнина Y и крайните неразклонени покрития $Y \to Y_1$, съгласувани с ρ.

3. Крайните неразклонени покрития $X_2 = (\mathbb{B}/\Gamma_2)' \to X_1 = (\mathbb{B}/\Gamma_1)'$ на гладки тороидални компактификации, които са съгласувани с редица $\rho_2 : X_2 \to Y_2$ от свивания на (-1)-криви към минимална повърхнина Y_2 и индуцират крайни неразклонени покрития $Y_2 \to Y_1$ на минималния модел Y_1 на X_1 задават частична наредба в множеството $\mathcal{S}$ на гладките тороидални компактификации $(\mathbb{B}/\Gamma)'$ на факторите $\mathbb{B}/\Gamma$ на комплексното двумерно кълбо $\mathbb{B}$ по решетка $\Gamma < U(1,2)$. Минималните елементи на $\mathcal{S}$ се наричат примитивни, докато максималните са наситени. Произволно $X = (\mathbb{B}/\Gamma)' \in \mathcal{S}$ доминира някоя примитивна $X_0 = (\mathbb{B}/\Gamma_0)' \in \mathcal{S}$. Гладка тороидална компактификация $X = (\mathbb{B}/\Gamma)'$ се доминира от наситена $X_1 = (\mathbb{B}/\Gamma_1)'$ тогава и само тогава, когато X има крайна фундаментална група $\pi_1(X)$. С помощта на свойствата на минималните проективни повърхнини Y с неположителна размерност на Кодаира, дисертацията характеризира наситените и примитивните е $X = (\mathbb{B}/\Gamma)' \in \mathcal{S}$ с минимален модел Y.

4. Нека $X = (\mathbb{B}/\Gamma)'$ е гладка тороидална компактификация с тороидален компактифициращ дивизор $D := X \setminus (\mathbb{B}/\Gamma)$ и $\beta : X \to Y$ е крайна редица от свивания на (-1)-криви към минимална повърхнина Y, чийто изключителен дивизор $E(\beta) = \coprod_{i=1}^{s} L_i$ има непресичащи се неприводими компоненти L_i. Доказано е, че групата $\mathrm{Aut}(X, D) = \mathrm{Aut}(X, D, E(\beta))$ е крайна и изоморфна на $\mathrm{Aut}(Y, \beta(D)) = \mathrm{Aut}(Y, \beta(D), \beta(D)^{\mathrm{sing}})$.

5. Нека $\beta : X = (\mathbb{B}/\Gamma)' \to Y$ е свиване на гладки неприводими рационални (-1)-криви L_i, $1 \leq i \leq s$ върху гладка тороидална компактификация $X = (\mathbb{B}/\Gamma)'$ към линейчата повърхнина $r : Y \to B$ с елиптична база B, а $D := X \setminus (\mathbb{B}/\Gamma) = \sum_{j=1}^{k} D_j$ е тороидалният компактифициращ дивизор на $\mathbb{B}/\Gamma$ с гладки елиптични неприводими компоненти D_j. Глава 4 изразява в явен вид логаритмичното равенство на Богомолов-Мияока-Яо за (X, D) чрез индексите на пресичане $L_i.D$ и индексите на самопресичане $\beta(D_j)^2$ на гладките елиптични криви $\beta(D_j) \subset Y$. Ако всички $\beta(D_j)$ са сечения на $r : Y \to B$, то логаритмичното равенство на Богомолов-Мияока-Яо за (X, D) е изразено само чрез $L_i.D$, $1 \leq i \leq s$. Когато $r|_{\beta(D_j)} : \beta(D_j) \to B$ е от степен $d_j > 1$ за поне едно $1 \leq j \leq k$, то от логаритмичното равенство на Богомолов-Мияока-Яо за (X, D) е изведено неравенство за $L_i.D$, $1 \leq i \leq s$.

6. Чрез споменатото в 5. равенство, съответно неравенство за $L_i.D$, $1 \leq i \leq s$ са намерени долни граници за броя k на параболичните точки на $\mathbb{B}/\Gamma$, който съвпада с броя на гладките елиптични неприводими компоненти D_j на тороидалния компактифициращ дивизор $D = X \setminus (\mathbb{B}/\Gamma) = \sum_{j=1}^{k} D_j$.

7. Доказано е, че за фактор на кълбото $\mathbb{B}/\Gamma$ с гладка тороидална компактификация $(\mathbb{B}/\Gamma)'$, чийто минимален модел е линейчата повърхнина $r : Y \to B$ с елиптична база B, съществува ненапълно геодезична пунктирана сфера $L_i \setminus D \subset \mathbb{B}/\Gamma$, възникваща от гладка неприводима рационална (-1)-крива $L_i \simeq \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \simeq S^2$ върху $(\mathbb{B}/\Gamma)'$.

8. Нека $\beta : X = (\mathbb{B}/\Gamma)' \to Y$ е свиване на гладки неприводими рационални (-1)-криви L_i, $1 \leq i \leq s$ върху гладка тороидална компактификация $X = (\mathbb{B}/\Gamma)'$ към минимална линейчата повърхнина $r : Y \to B$ с елиптична база B и $D = X \setminus (\mathbb{B}/\Gamma) = \sum_{j=1}^{k} D_j$ е тороидалният компактифициращ дивизор на $\mathbb{B}/\Gamma$. Ако $r|_{\beta(D_j)} : \beta(D_j) \to B$ са бихоломорфизми за всички $1 \leq j \leq k$, предполагаме, че $k \leq 62$. Ако съществува $1 \leq j \leq k$ с $\deg \left[f|_{\beta(D_j)} : \beta(D_j) \to B \right] > 1$, нека $k \leq 44$. Четвърта глава на дисертацията извежда явни долни граници $\mu_k \geq 2$ върху броя на ненапълно геодезичните $L_i \setminus D \subset \mathbb{B}/\Gamma$, в зависимост от $\deg \left(r|_{\beta(D_j)} \right) = 1$, $\forall 1 \leq j \leq k$ или от съществуването на $\deg \left(r|_{\beta(D_j)} \right) > 1$ за някое $1 \leq j \leq k$.

Апробация на резултатите

Резултатите на дисертационниа труд са публикувани в следните две статии:

- Beshkov P., Kasparian A., Sankaran G.: Saturated and primitive smooth compactifications of ball quotients, *Ann. Sofia Univ., Fac. Math. and Inf.*, **106**, 2019, 53–77.
- Beshkov P., Kasparian A.: Lower bounds on the number of cusps of a toroidal compactification with a ruled minimal model, *C. R. Acad. Bulg. Sci.*, **74(8)**, 2021, 1120–1127.

Научните приноси на дисертацията са докладвани на:

1. Национален семинар по кодиране ”Професор Стефан Додунеков”, 2018.
2. Национален семинар по кодиране ”Професор Стефан Додунеков”, 2019.
3. Пролетна научна сесия на Факултета по математика и информатика на Софийски университет ”св. Климент Охридски”, 2019.
4. Пролетна научна сесия на Факултета по математика и информатика на Софийски университет ”св. Климент Охридски”, 2021.

Декларация за оригиналност на представените резултати

Декларирам, че настоящият дисертационен труд съдържа оригинални резултати, получени при проведени от мен научни изследвания (с подкрепата и съдействието на научния ми ръководител и всичките ми съавтори). Резултатите, които са получени, описани и публикувани от други учени, са надлежно и подробно цитирани в библиографията.

Настоящата работа не е прилагана за придобиване на научна степен в друго висше училище, университет или научен институт.

Подпис:

(Панчо Георгиев Бешков)

Глава 1

Логаритмично равенство на Богомолов-Мияока-Яо

Настоящата глава е съставена от предварителни сведения за холоморфни векторни разслоения $\mathcal{E}$ над комплексни многообразия M, техните класове и числа на Чърн. Преобладаваща част от материала е взета от книгата [21] на Грифитс и Харис. Да напомним, че гладко комплексно разслоение $\mathcal{E}$ от ранг $k \in \mathbb{N}$ над гладко комплексно многообразие M е такава фамилия $\mathcal{E} = \cup_{x \in M} \mathcal{E}_x$ от комплексни линейни пространства $\mathcal{E}_x \simeq \mathbb{C}^k$, за която проекцията $\pi : \mathcal{E} \to M$, $\pi(\mathcal{E}_x) = x$, $\forall x \in M$ е гладко изображение и за всяко $x_0 \in M$ съществува отворено подмножество $U \subseteq M$, съдържащо x_0 и дифеоморфизъм $\varphi_U : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{C}^k$ с $\varphi_U(\mathcal{E}_x) = x \times \mathbb{C}^k$ за $\forall x \in U$. Изображението φ_U се нарича тривиализация на $\mathcal{E}$. Ако $\varphi_U : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{C}^k$ и $\varphi_V : \pi^{-1}(V) \to V \times \mathbb{C}^k$ са тривиализации на $\mathcal{E}$ и $U \cap V \neq \emptyset$, то гладкото изображение $g_{UV} : U \cap V \to \mathrm{GL}(k, \mathbb{C})$ с

$$g_{UV}(x) := \varphi_U \varphi_V^{-1} : \{x\} \times \mathbb{C}^k \longrightarrow \{x\} \times \mathbb{C}^k \quad \text{за} \quad \forall x \in U \cap V$$

се нарича функция на прехода на $\mathcal{E}$ относно тривиализациите φ_U, φ_V. Непосредствено се вижда, че

$$g_{UV}(x) g_{VU}(x) = (\varphi_U \varphi_V^{-1})(\varphi_V \varphi_U^{-1})|_{\{x\} \times \mathbb{C}^k} = \mathrm{Id}_{\{x\} \times \mathbb{C}^k} = E_k$$

е единичната матрица E_k и

$$g_{UV}(x) g_{VW}(x) g_{WU}(x) = (\varphi_U \varphi_V^{-1})(\varphi_V \varphi_W^{-1})(\varphi_W \varphi_U^{-1})|_{\{x\} \times \mathbb{C}^k} = \mathrm{Id}_{\{x\} \times \mathbb{C}^k} = E_k$$

за $\forall x \in U \cap V \cap W$.

Обратно, за произволно отворено покритие $M = \cup_{\alpha \in A} U_\alpha$ на комплексно многообразие M и произволни гладки изображения $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{GL}(k, \mathbb{C})$, изпълняващи равенствата

$$g_{\alpha\beta}(x) g_{\beta\alpha}(x) = E_k \quad \text{за} \quad \forall x \in U_\alpha \cap U_\beta \quad \text{и}$$

$$g_{\alpha\beta}(x) g_{\beta\gamma}(x) g_{\gamma\alpha}(x) = E_k \quad \text{за} \quad \forall x \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$$

съществува единствено комплексно векторно разслоение $\pi : \mathcal{E} \to M$ от ранг k с функции на прехода $\{g_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta \in A}$. По-точно, $\mathcal{E} = \cup_{\alpha \in A}(U_\alpha \times \mathbb{C}^k)$ е обединението на множествата $U_\alpha \times \mathbb{C}^k$ за $\forall \alpha \in A$, в което произволна точка $(x, v) \in U_\beta \times \mathbb{C}^k$ се отъждествява с $(x, g_{\alpha\beta}(x)v) \in U_\alpha \times \mathbb{C}^k$.

Ако комплексно векторно разслоение $\pi : \mathcal{E} \to M$ има такава структура на комплексно многообразие, че за всяка точка $x \in M$ съществува отворена околност $x \in U \subseteq M$ и бихоломорфна тривиализация $\varphi_U : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{C}^k$, ще казваме че $\pi : \mathcal{E} \to M$ е холоморфно комплексно разслоение. Ако $M = \cup_{\alpha \in A} U_\alpha$ е отворено покритие на комплексно многообразие M и $\{\varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{C}^k\}_{\alpha \in A}$ е холоморфна тривиализация на $\pi : \mathcal{E} \to M$, то функциите на прехода $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{GL}(k, \mathbb{C})$ са холоморфни. Обратно, произволно отворено покритие $M = \cup_{\alpha \in A} U_\alpha$ и произволна система от холоморфни функции $\{g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{GL}(k, \mathbb{C})\}_{\alpha,\beta \in A}$, изпълняващи равенствата

$$g_{\alpha\beta}(x) g_{\beta\alpha}(x) = E_k \quad \text{за} \quad \forall x \in U_\alpha \cap U_\beta \quad \text{и}$$

$$g_{\alpha\beta}(x) g_{\beta\gamma}(x) g_{\gamma\alpha}(x) = E_k \quad \text{за} \quad \forall x \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$$

задават еднозначно холоморфно векторно разслоение $\pi : \mathcal{E} \to M$ с функции на прехода $\{g_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta \in A}$.

Холоморфните векторни разслоения $\pi : \mathfrak{L} \to M$ от ранг 1 се наричат холоморфни линейни разслоения. Ако $M = \cup_{\alpha \in A} U_\alpha$ е отворено покритие с тривиализации

$$\varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{C}$$

и $f_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}^*$ са неанулиращи се функции, то

$$\psi_\alpha := f_\alpha \varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{C},$$

$$\psi_\alpha(x) = f_\alpha(x) \varphi_\alpha(x), \quad \forall x \in U_\alpha$$

са също тривиализации на $\pi : \mathfrak{L} \to M$. Обратно, нека $\{g_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta \in A}$ и $\{h_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta \in A}$ са функции на прехода на линейни разслоения $\mathfrak{L}_1 \to M$, съответно, $\mathfrak{L}_2 \to M$ и съществуват холоморфни неанулиращи се функции $f_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}^*$ с

$$h_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} \frac{f_\alpha}{f_\beta}.$$

Тогава произволна тривиализация $\varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{C}$ на $\mathfrak{L}_1 \to M$ с функции на прехода $\varphi_\alpha \varphi_\beta^{-1} = g_{\alpha\beta}$ дава тривиализация $\psi_\alpha = f_\alpha \varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{C}$ на $\mathfrak{L}_1 \to M$ с функции на прехода

$$\psi_\alpha \psi_\beta^{-1} = (f_\alpha \varphi_\alpha)(f_\beta \varphi_\beta)^{-1} = (\varphi_\alpha \varphi_\beta^{-1}) \frac{f_\alpha}{f_\beta} = g_{\alpha\beta} \frac{f_\alpha}{f_\beta} = h_{\alpha\beta}.$$

Следователно $\mathfrak{L}_2 = \mathfrak{L}_1$ и $\{g_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta \in A}$, $\{h_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta \in A}$ са функции на прехода на едно и също холоморфно линейно разслоение над M.

Твърдим, че холоморфните линейни разслоения $\pi : \mathfrak{L} \to M$ се описват от кохомологичната група $H^1(M, \mathcal{O}^*)$ на снопа $\mathcal{O}^*$ на неанулиращите се локални холоморфни функции върху комплексното многообразие M. По-точно, функциите на прехода $g = \{g_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta\in A}$ на $\pi : \mathfrak{L} \to M$ образуват 1-коцикъл, съгласно определението $(\delta g)_{\alpha\beta\gamma} := g_{\alpha\beta}g_{\beta\gamma}g_{\alpha\gamma}^{-1} = \mathrm{Id}$ на ко-граничния оператор δ. Ако $\{g_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta\in A}$ и $\{h_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta\in A}$ са функции на прехода на едно и също линейно разслоение $\pi : \mathfrak{L} \to M$, то съществуват тривиализации $\varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{C}$ и $\psi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{C}$ с

$$g_{\alpha\beta}h_{\alpha\beta}^{-1} = (\varphi_\alpha\varphi_\beta^{-1})(\psi_\alpha\psi_\beta^{-1})^{-1} = (\varphi_\alpha\psi_\alpha^{-1})(\varphi_\beta\psi_\beta^{-1})^{-1}.$$

Понеже φ_α и ψ_α са тривиализации на едно и също холоморфно линейно разслоение, съществуват неанулиращи се холоморфни функции $f_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}^*$ с $\varphi_\alpha = f_\alpha\psi_\alpha$. В резултат,

$$g_{\alpha\beta}h_{\alpha\beta}^{-1} = f_\alpha f_\beta^{-1}$$

са ко-граници и кохомологичните класове $[(g_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta\in A}] \in H^1(M, \mathcal{O}^*)$ отговарят еднозначно на холоморфните линейни разслоения $\pi : \mathfrak{L} \to M$.

Комплексно аналитична хиперповърхнина $D \subset M$ е подмножество на комплексно многообразие M, така че за всяка точка $x \in D$ съществуват отворена околност $x \in U \subseteq M$ и холоморфна функция $f : U \to \mathbb{C}$ с $D \cap U = \{u \in U \mid f(u) = 0\}$. Хиперповърхнина $D \subset M$ е неприводима, ако не може да се представи като обединение на две различни хиперповърхнини. Произволна $\mathbb{Z}$-линейна комбинация $D = z_1D_1 + \ldots + z_sD_s$, $z_i \in \mathbb{Z}$ на неприводими хиперповърхнини $D_i \subset M$ се нарича дивизор върху M.

Произволен дивизор $D \subset M$ с локални мероморфни уравнения $f_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, $D \cap U_\alpha = \{x \in U_\alpha \mid f_\alpha(x) = 0\}$ върху отворено покритие $M = \cup_{\alpha\in A}U_\alpha$ отговаря на линейно разслоение $\pi : \mathfrak{L}_D \to M$. По-точно,

$$g_{\alpha\beta} = \frac{f_\alpha}{f_\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathbb{C}^*$$

са локални холоморфни неанулиращи се функции, изпълняващи равенствата

$$g_{\alpha\beta}g_{\beta\alpha} = 1, \quad g_{\alpha\beta}g_{\beta\gamma}g_{\gamma\alpha} = 1 \quad \text{за} \quad \forall \alpha, \beta, \gamma \in A$$

и $\{g_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta\in A}$ са функции на прехода на холоморфното линейно разслоение $\mathfrak{L}_D$ на M. За да проверим коректността на определението на съответствието $D \mapsto \mathfrak{L}_D$, да изберем други локални мероморфни уравнения $f'_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ на

$$D \cap U_\alpha = \{x \in U_\alpha \mid f'_\alpha(x) = 0\}.$$

Тогава

$$t_\alpha := \frac{f'_\alpha}{f_\alpha} : U_\alpha \longrightarrow \mathbb{C}^*$$

са локални неанулиращи се холоморфни функции. Използвайки $\{f'_\alpha\}_{\alpha\in A}$, получаваме функциите на прехода

$$h_{\alpha\beta} = \frac{f'_\alpha}{f'_\beta} = \frac{t_\alpha f_\alpha}{t_\beta f_\beta} = g_{\alpha\beta}\frac{t_\alpha}{t_\beta}$$

на линейното разслоение $\pi : \mathfrak{L}_D \to M$ с функции на прехода $\{g_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta\in A}$ и доказваме коректността на определението на $D \mapsto \mathfrak{L}_D$. Ако $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$ и $\{g_\alpha\}_{\alpha\in A}$ са локални уравнения на дивизори D, съответно G, то $\{f_\alpha g_\alpha\}_{\alpha\in A}$ са локални уравнения на $D+G$. Следователно $\mathfrak{L}_{D+G} = \mathfrak{L}_D \otimes \mathfrak{L}_G$.

Всяка глобална мероморфна функция $f : M \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ определя главен дивизор $\operatorname{div}(f) \subset M$. По-точно, ако $H \subset M$ е неприводима комплексно аналитична хиперповърхнина, $x \in H$ и $h : U \to \mathbb{C}$ е локална определяща функция на H в U, т.е. $H \cap U = \{y \in U \,|\, h(y) = 0\}$, то кратността $k := \operatorname{ord}_{H,x}(g)$ на локална холоморфна функция $g : U \to \mathbb{C}$ по протежение на H в x е максималното $k \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$, за което съществува разлагане $g = h^k g_0$ в локалния пръстен $\mathcal{O}_{M,x} \ni g_0$ на x в M. За произволни достатъчно близки точки $x, y \in H$ е изпълнено $\operatorname{ord}_{H,x}(g) = \operatorname{ord}_{H,y}(g)$ и това ни дава възможност да определим $\operatorname{ord}_H(g) := \operatorname{ord}_{H,x}(g)$ за коя и да е точка $x \in H$. Ако мероморфната функция $f : M \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ има локално представяне $f = \frac{g}{h}$ чрез холоморфни функции g, h, то определяме

$$\operatorname{div}(f) := \operatorname{div}(g) - \operatorname{div}(h),$$

където

$$\operatorname{div}(g) := \sum_H \operatorname{ord}_H(g) H \quad \text{и} \quad \operatorname{div}(h) := \sum_H \operatorname{ord}_H(h) H.$$

Дивизор $D = \sum_{i=1}^{k} z_i H_i$ е ефективен, ако $z_i \in \mathbb{N}$ за $\forall 1 \leq i \leq k$. Главните дивизори на локалните холоморфни функции върху M са ефективни. Съгласно $\mathfrak{L}_{D+G} = \mathfrak{L}_D \otimes \mathfrak{L}_G$ за произволни дивизори D, G върху M, достатъчно е да проверим, че произволно линейно разслоение $\pi : \mathfrak{L} \to M$ с непостоянни локални холоморфни сечения $\{s_\alpha\}_{\alpha\in A}$ отговаря на ефективен дивизор върху M, за да получим, че произволно холоморфно линейно разслоение над M отговаря на дивизор върху M. Наистина,

$$D_\alpha := \{x \in U_\alpha \,|\, s_\alpha(x) = 0\}$$

са локални ефективни дивизори поради холоморфността на $s_\alpha : U \to \mathbb{C}$. Вземайки предвид, че $\frac{s_\alpha}{s_\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathbb{C}^*$ са локални холоморфни функции, фамилията $\{D_\alpha\}_{\alpha\in A}$ определя глобален ефективен дивизор върху M.

Ако $\operatorname{div}(f)$ е главен дивизор на глобална мероморфна функция $f : M \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, то за произволно отворено покритие $M = \cup_{\alpha\in A} U_\alpha$ локалните уравнения на $\operatorname{div}(f)$ са ограниченията $f_\alpha := f|_{U_\alpha} : U_\alpha \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, така че функциите на прехода $g_{\alpha\beta} = \frac{f_\alpha}{f_\beta} = 1$ на $\mathfrak{L}_{\operatorname{div}(f)} \to M$ са тривиални и $\mathfrak{L}_{\operatorname{div}(f)} \simeq= M \times \mathbb{C}$ е тривиалното линейно разслоение. Обратно, ако локалните уравнения $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$ на дивизор $D \subset M$ задават тривиалното линейно разслоение $\mathfrak{L}_D = M \times \mathbb{C}$, то съществуват локални неанулиращи се функции $h_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}$ с

$$\frac{f_\alpha}{f_\beta} = g_{\alpha\beta} = \frac{h_\alpha}{h_\beta} \quad \text{за} \quad \forall \alpha, \beta \in A, \quad U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset.$$

Тогава

$$f := \frac{f_\alpha}{h_\alpha} = \frac{f_\beta}{h_\beta} : M \longrightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

е глобална мероморфна функция и дивизорът $D = \operatorname{div}(f)$ е главен.

Гладко сечение σ на гладко векторно разслоение $\pi : \mathcal{E} \to M$ над отворено подмножество $U \subseteq M$ е гладко изображение $\sigma : U \to \mathcal{E}$ с $\pi\sigma(x) = x$ за $\forall x \in U$. В случай, че $\pi : \mathcal{E} \to M$ е холоморфно векторно разслоение, холоморфно сечение σ на $\mathcal{E}$ над отворено подмножество $U \subseteq M$ е холоморфно изображение $\sigma : U \to \mathcal{E}$ с $\pi\sigma(x) = x$ за $\forall x \in U$. Холоморфен репер на $\mathcal{E}$ над отворено подмножество $U \subseteq M$ е такава наредена k-торка $(\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$ от холоморфни сечения $\sigma_i : U \to \mathcal{E}$ на $\pi : \mathcal{E} \to M$, за която $\sigma_1(x), \ldots, \sigma_k(x)$ е $\mathbb{C}$-базис на $\mathcal{E}_x = \pi^{-1}(x)$ за $\forall x \in U$. Всяко гладко сечение $\sigma : U \to \mathcal{E}$ на $\pi : \mathcal{E} \to M$ над U може да се представи като линейна комбинация

$$\sigma = \sum_{i=1}^{k} f_i \sigma_i$$

на $\sigma_i : U \to \mathcal{E}$, чиито коефициенти f_i са гладки функции $f_i : U \to \mathbb{C}$. Сечението $\sigma : U \to \mathcal{E}$ е холоморфно тогава и само тогава, когато $f_i : U \to \mathbb{C}$ са холоморфни функции за $\forall 1 \leq i \leq k$. Ако $\pi : \mathcal{E} \to M$ е холоморфно векторно разслоение от ранг k над комплексно многообразие M, то върху пространството $\mathcal{A}^{p,q}(\mathcal{E})$ на диференциалните (p, q)-форми със стойности в $\mathcal{E}$ има коректно определен оператор

$$\overline{\partial} : \mathcal{A}^{p,q}(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathcal{A}^{p,q+1}(\mathcal{E}).$$

Елементите на $\mathcal{A}^{p,q}(\mathcal{E})$ над отворено подмножество $U \subseteq M$ са от вида

$$\omega = \sum_{i=1}^{k} \omega_i \otimes \sigma_i,$$

където $\omega_i \in \mathcal{A}^{p,q}(U)$ са диференциални (p, q)-форми над U, а $(\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$ е холоморфен репер на $\mathcal{E}$ над U. Определяме

$$\overline{\partial}\omega := \sum_{i=1}^{k} \overline{\partial}\omega_i \otimes \sigma_i$$

и проверяваме, че $\overline{\partial}\omega$ не зависи от избора на $(\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$. По-точно, ако $(\sigma'_1, \ldots, \sigma'_k)$ е друг холоморфен репер на $\mathcal{E}$ над U, то

$$\sigma_i = \sum_{j=1}^{k} g_{ij} \sigma'_j$$

за холоморфни функции $g_{ij} : U \to \mathbb{C}$ и

$$\sigma = \sum_{i=1}^{k} \omega_i \otimes \sigma_i = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} g_{ij} \omega_i \otimes \sigma'_j.$$

В резултат,

$$\overline{\partial}\sigma = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\overline{\partial}(g_{ij}\omega_i)\otimes\sigma'_j = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}g_{ij}\overline{\partial}(\omega_i)\otimes\sigma'_j =$$
$$= \sum_{i=1}^{k}\overline{\partial}(\omega_i)\otimes\left(\sum_{j=1}^{k}g_{ij}\sigma'_j\right) = \sum_{i=1}^{k}\overline{\partial}(\omega_i)\otimes\sigma_i$$

не зависи от избора на холоморфен репер $(\sigma_1,\ldots,\sigma_k)$ на $\mathcal{E}$ над U.

Като пример да разгледаме n-мерно комплексно многообразие M, $x\in M$ и координатна карта $\varphi_U : U \to \mathbb{C}^n$ върху отворена околност U на x върху M. Ако $(z_1,\ldots,z_n)\in\mathbb{C}^n$ са холоморфни координати върху U с център x и $z_j = x_j + iy_j$ за $i := \sqrt{-1}\in\mathbb{C}$, $\forall 1\leq j\leq n$, то диференциалът

$$(d\varphi_U)_x : T_x^{\mathbb{C}}U = T_x^{\mathbb{C}}M \longrightarrow T_{\varphi_U(x)}^{\mathbb{C}}\mathbb{C}^n = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\left(\frac{\partial}{\partial x_j},\frac{\partial}{\partial y_j}\,\Big|\,1\leq j\leq n\right)$$

на φ_U в $x\in U$ е $\mathbb{C}$-линеен изоморфизъм на комплексифицираните допирателни пространства. Вземайки предвид

$$\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\left(\frac{\partial}{\partial x_j},\frac{\partial}{\partial y_j}\,\Big|\,1\leq j\leq n\right) = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\left(\frac{\partial}{\partial z_j},\frac{\partial}{\partial \overline{z_j}}\,\Big|\,1\leq j\leq n\right),$$

разлагаме

$$T_x^{\mathbb{C}}M = T_x^{1,0}M\oplus T_x^{0,1}M$$

в директна сума на холоморфното допирателно пространство

$$T_x^{1,0}M := \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\left((d\varphi_U)_x^{-1}\frac{\partial}{\partial z_j}\,\Big|\,1\leq j\leq n\right)$$

към M в x и анти-холоморфното допирателно пространство

$$T_x^{0,1}M := \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\left((d\varphi_U)_x^{-1}\frac{\partial}{\partial \overline{z_j}}\,\Big|\,1\leq j\leq n\right)$$

към M в x. Обединението

$$T^{\mathbb{C}}M := \cup_{x\in M}T_x^{\mathbb{C}}M$$

на комплексифицираните допирателни пространства $T_x^{\mathbb{C}}M := T_x^{\mathbb{R}}M\otimes\mathbb{C}$ към M в $x\in M$ е комплексно разслоение с тривиализации

$$d\varphi_U : \cup_{x\in U}T_x^{\mathbb{C}}M \longrightarrow U\times\mathbb{C}^{2n}$$

върху координатните карти U на M. Ако $(z_1,\ldots,z_n)$ са холоморфни координати върху $\varphi_U(U)\subseteq\mathbb{C}^n$, а $(w_1,\ldots,w_n)$ са холоморфни координати върху $\varphi_V(V)\subseteq\mathbb{C}^n$, то функциите на прехода на $T^{\mathbb{C}}M$ са Якобиевите матрици

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial w_1}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial w_1}{\partial z_n} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial w_n}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial w_n}{\partial z_n} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \frac{\partial \overline{w_1}}{\partial \overline{z_1}} & \dots & \frac{\partial \overline{w_1}}{\partial \overline{z_n}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \frac{\partial \overline{w_n}}{\partial \overline{z_1}} & \dots & \frac{\partial \overline{w_n}}{\partial \overline{z_n}} \end{pmatrix}.$$

Функциите на прехода на $T^{1,0}M$ са

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial w_1}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial w_1}{\partial z_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial w_n}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial w_n}{\partial z_n} \end{pmatrix}.$$

Слоевете на ко-допирателното векторно разслоение $(T^{\mathbb{C}}M)^*$ на M са $\mathbb{C}$-линейните пространства $(T^{\mathbb{C}}_xM)^*$ на $\mathbb{C}$-линейните функционали $T^{\mathbb{C}}_xM \to \mathbb{C}$. Дуалното разслоение $(T^{1,0}M)^*$ на $T^{1,0}M$ се нарича холоморфно ко-допирателно разслоение на M, а $(T^{0,1}M)^*$ е анти-холоморфното ко-допирателно разслоение на M.

Ермитова метрика върху комплексно векторно разслоение $\pi : \mathcal{E} \to M$ е гладка фамилия $\{h_x\}_{x\in M}$ от ермитови скаларни произведения

$$h_x : \mathcal{E}_x \times \mathcal{E}_x \longrightarrow \mathbb{C}$$

върху слоевете $\mathcal{E}_x = \pi^{-1}(x)$ на $\mathcal{E}$. Ако $(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$ е гладък репер на $\mathcal{E}$ върху отворено подмножество $U \subseteq M$, то за всички $1 \leq i, j \leq k$, то функциите

$$h_{ij} : U \longrightarrow \mathbb{C}, \quad h_{ij}(x) := h_x(\sigma_i, \sigma_j), \quad \forall 1 \leq i, j \leq k$$

са гладки. Репер $(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$ на $\pi : \mathcal{E} \to M$ върху отворено подмножество $U \subseteq M$ е ортонормиран, ако във всяка точка $x \in U$ векторите $\sigma_1(x), \dots, \sigma_k(x) \in \mathcal{E}_x = \pi^{-1}(x) \simeq \mathbb{C}^k$ образуват ортонормиран базис относно h_x.

Холоморфно векторно разслоение $\pi : \mathcal{E} \to X$ с ермитова метрика се нарича ермитово векторно разслоение. Свързаност D върху комплексно векторно разслоение $\pi : \mathcal{E} \to M$ е изображение

$$D : \mathcal{A}^0(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathcal{A}^1(\mathcal{E})$$

на снопа $\mathcal{A}^0(\mathcal{E})$ на гладките сечения на $\mathcal{E}$ в снопа $\mathcal{A}^1(\mathcal{E})$ на диференциалните 1-форми със стойности в $\mathcal{E}$, което изпълнява правилото на Лайбниц-Нютон

$$F(f\sigma) = df \otimes \sigma + fD(\sigma)$$

за произволно гладко сечение $\sigma : U \to \mathcal{E}$ и произволна гладка функция $f : U \to \mathbb{C}$ върху отворено подмножество $U \subseteq M$. Нека $(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$ е локален репер на $\pi : \mathcal{E} \to M$ над отворено подмножество $U \subseteq M$. За всяко $1 \leq s \leq n$ можем да представим

$$D(\sigma_i) = \sum_{j=1}^{k} \theta_{ij}\sigma_j$$

чрез подходящи 1-форми θ_{ij}. Казваме, че $\theta = (\theta_{ij})_{i,j=1}^k$ е матрицата на свързаността D. Да забележим, че $(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$ и $\theta = (\theta_{ij})_{i,j=1}^k$ определят еднозначно свързаността D. По-точно, произволно сечение $\sigma : U \to \mathcal{E}$ може да се представи във вида

$$\sigma = \sum_{i=1}^k f_i \sigma_i$$

чрез гладки функции $f_i : U \to \mathbb{C}$. Тогава правилото на Лайбниц-Нютон дава

$$D(\sigma) = \sum_{i=1}^k D(f_i \sigma_i) = \sum_{i=1}^k df_i \otimes \sigma_i + f_i D(\sigma_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^k df_i \otimes \sigma_i + f_i \left(\sum_{j=1}^k \theta_{ij} \sigma_j \right) = \sum_{j=1}^k \left(df_j + \sum_{i=1}^k f_i \theta_{ij} \right) \sigma_j$$

след размяна на реда на сумиране.

Да забележим, че матрицата $\theta = (\theta_{ij})_{i,j=1}^k$ на свързаността D зависи от избора на репер $(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$ Ако $(\sigma'_1, \dots, \sigma'_k)$ е друг репер на $\pi : \mathcal{E} \to M$, то съществуват гладки функции $g_{ij} : U \to \mathbb{C}$, така че

$$\sigma'_i = \sum_{j=1}^k g_{ij} \sigma_j.$$

Ако $h = (h_{ij})_{i,j=1}^k = g^{-1}$ е обратната матрица на $g = (g_{ij})_{i,j=1}^k$, то $\sigma_i = \sum\limits_{j=1}^k h_{ij} \sigma'_j$ и

$$D(\sigma'_i) = \sum_{j=1}^k dg_{ij} \otimes \sigma_j + \sum_{j=1}^k \sum_{s=1}^k g_{ij} \theta_{js} \sigma_s =$$

$$= \sum_{j=1}^k \sum_{r=1}^k dg_{ij} \otimes (h_{jr} \sigma'_r) + \sum_{j=1}^k \sum_{s=1}^k \sum_{r=1}^k g_{ij} \theta_{js} h_{sr} \sigma'_r =$$

$$= \sum_{r=1}^k \left[\sum_{j=1}^k (dg_{ij}) h_{jr} + \sum_{j=1}^k \sum_{s=1}^k g_{ij} \theta_{js} h_{sr} \right] \otimes \sigma'_r$$

след размяна на реда на сумиране. Следователно матрицата $\theta' = (\theta'_{ij})_{i,j=1}^k$ на D спрямо репера $(\sigma'_1, \dots, \sigma'_k)$ има елементи

$$\theta'_{ij} = \sum_{p=1}^k (dg_{ip}) h_{pj} + \sum_{p=1}^k \sum_{q=1}^k g_{ip} \theta_{pq} h_{qj} \quad \text{за} \quad \forall 1 \leq i, j \leq k \quad \text{и}$$

$$\theta' = (dg)h + g\theta h = (dg)g^{-1} + g\theta g^{-1}.$$

Нека $\pi : \mathcal{E} \to M$ е ермитово разслоение над комплексно многообразие M. Произволна свързаност

$$D : \mathcal{A}^0(\mathcal{E}) \to \mathcal{A}^1(\mathcal{E}) = \mathcal{A}^{1,0}(\mathcal{E}) \oplus \mathcal{A}^{0,1}(\mathcal{E})$$

се разлага в сума $D = D' + D''$, където $D' : \mathcal{A}^0(\mathcal{E}) \to \mathcal{A}^{1,0}(\mathcal{E})$ изобразява гладките сечения на $\mathcal{E}$ в $\mathcal{E}$-значни $(1,0)$-форми, а стойностите на $D'' : \mathcal{A}^0(\mathcal{E}) \to \mathcal{A}^{0,1}(\mathcal{E})$ са $\mathcal{E}$-значни $(0,1)$-форми. Ако $D'' = \overline{\partial}$, ще казваме че свързаността $D = D' + \overline{\partial}$ е съвместима с комплексната структура. Свързаност $D : \mathcal{A}^0(\mathcal{E}) \to \mathcal{A}^1(\mathcal{E})$ е съгласувана с метрика h върху $\mathcal{E}$, ако

$$dh_x(\xi, \eta) = h_x(D\xi, \eta) + h_x(\xi, D\eta)$$

за произволни гладки сечения ξ, η.

Твърдение 1.1. *Върху произволно ермитово векторно разслоение $\pi : \mathcal{E} \to M$ над комплексно многообразие M, съществува единствена свързаност $D : \mathcal{A}^0(\mathcal{E}) \to \mathcal{A}^1(\mathcal{E})$, която е съгласувана с комплексната структура и с метриката h върху $\mathcal{E}$. Казваме, че D е метричната свързаност на $\mathcal{E}$.*

Доказателство. Нека $(\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$ е холоморфен репер на $\mathcal{E}$, а $h_{ij}(x) := h_x(\sigma, \sigma_j)$ за $\forall 1 \leq i, j \leq k$. Ако

$$D = D' + \overline{\partial} : \mathcal{A}^0(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathcal{A}^{1,0}(\mathcal{E}) \oplus \mathcal{A}^{0,1}(\mathcal{E})$$

е свързаност, съгласувана с комплексната структура, то матрицата θ на D спрямо репера $(\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$ се състои от $(1,0)$-форми. Съгласно

$$D(\sigma_i) = \sum_{s=1}^{k} \theta_{is}\sigma_s, \quad D(\sigma_j) = \sum_{t=1}^{k} \theta_{jt}\sigma_t,$$

съгласуваността на D с метриката h се свежда към

$$\begin{aligned} dh_{ij} = dh_x(\sigma_i, \sigma_j) &= h_x\left(\sum_{s=1}^{k} \theta_{is}\sigma_s, \sigma_j\right) + h_x\left(\sigma_i, \sum_{t=1}^{k} \theta_{jt}\sigma_t\right) = \\ &= \sum_{s=1}^{k} \theta_{is}h_{sj} + \sum_{t=1}^{k} \overline{\theta_{jt}} h_{it}, \end{aligned}$$

където $\sum\limits_{s=1}^{k} \theta_{is}h_{sj}$ е диференциална форма от тип $(1,0)$, а $\sum\limits_{t=1}^{k} \overline{\theta_{jt}} h_{it}$ е дифиеренциална форма от тип $(0,1)$. Следователно

$$\partial h_{ij} = \sum_{s=1}^{k} \theta_{is}h_{sj} \quad \text{и} \quad \overline{\partial} h_{ij} = \sum_{t=1}^{k} h_{it}\overline{\theta_{jt}} \quad \text{за} \quad \forall 1 \leq i, j \leq k,$$

откъдето

$$\partial h = \theta h \quad \text{и} \quad \overline{\partial}(h) = h\overline{\theta}$$

за матрицата $h = (h_{ij})_{i,j=1}^{k}$. В резултат,

$$\theta = (\partial h)h^{-1}$$

е единствената матрица на свързаност $D : \mathcal{A}^0(\mathcal{E}) \to \mathcal{A}^1(\mathcal{E})$, която е съгласувана с комплексната структура и с метриката h върху $\mathcal{E}$. Непосредствено се проверява, че

$$D = (\partial + \theta) + \overline{\partial} : \mathcal{A}^0(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathcal{A}^{1,0}(\mathcal{E}) \oplus \mathcal{A}^{0,1}(\mathcal{E})$$

е свързаност върху $\mathcal{E}$, която е съгласувана с комплексната структура и с метриката.

□

Ако $\pi : \mathcal{E} \to M$ е ермитово векторно разслоение над комплексно многообразие M, $D : \mathcal{A}^0(\mathcal{E}) \to \mathcal{A}^1(\mathcal{E})$ е свързаност върху $\mathcal{E}$, съгласувана с комплексната структура и метриката на $\mathcal{E}$, а $(\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$ е ортонормиран репер на $\mathcal{E}$, то

$$h_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{за } 1 \leq i = j \leq k, \\ 0 & \text{за } 1 \leq i \neq j \leq k, \end{cases}$$

откъдето

$$0 = dh_{ij} = \sum_{s=1}^{k} \theta_{is}\delta_{sj} + \sum_{t=1}^{k} \overline{\theta_{jt}}\delta_{it} = \theta_{ij} + \overline{\theta_{ji}} \quad \text{за всички} \quad 0 \leq i, j \leq k.$$

С други думи, матрицата $\theta = -\overline{\theta}^t$ на D е косо-ермитова относно ортонормиран базис.

Ако $D : \mathcal{A}^0(\mathcal{E}) \to \mathcal{A}^1(\mathcal{E})$ е свързаност върху комплексно векторно разслоение $\mathcal{E} \to M$ над комплексно многообразие M, то за $\forall p \in \mathbb{N}$ имаме оператор

$$D : \mathcal{A}^p(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathcal{A}^{p+1}(\mathcal{E}).$$

По-точно, за произволно отворено подмножество $U \subseteq M$, произволна локална p-форма $\psi \in \mathcal{A}^p(U)$ върху U и произволно гладко сечение $\xi : U \to \mathcal{E}$, определяме

$$D(\psi \wedge \xi) = d\psi \otimes \xi + (-1)^p \psi \wedge D(\xi),$$

използвайки правилото на Лайбниц-Нютон. Това дава възможност да разгледаме оператора

$$D^2 : \mathcal{A}^0(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathcal{A}^2(\mathcal{E}).$$

За произволно гладко сечение $\sigma : U \to \mathcal{E}$ и произволна гладка функция $f : U \to \mathbb{C}$ имаме

$$D^2(f\sigma) = D(df \otimes \sigma + fD(\sigma)) = -df \wedge D(\sigma) + df \wedge D(\sigma) + fD^2(\sigma) = fD^2(\sigma).$$

Следователно операторът D^2 е линеен относно гладките функции върху M и отговаря на гладко сечение Θ на $\wedge(T^{\mathbb{R}}M)^* \otimes \mathrm{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{E}) = \wedge^2(T^{\mathbb{C}}M)^* \otimes (\mathcal{E}^* \otimes \mathcal{E})$, където $(T^{\mathbb{C}}M)^*$ е комплексифицираното ко-допирателно разслоение на M, а $\mathcal{E}^* \to M$ е дуалното векторно разслоение на $\pi : \mathcal{E} \to M$, съставено от $\mathbb{C}$-линейните функционали $\mathcal{E}_x^* := \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{E}_x, \mathbb{C})$, $x \in M$ върху слоевете $\mathcal{E}_x$ на $\mathcal{E}$. Нека $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$ е репер на $\mathcal{E}$, а $(\sigma_1^*, \ldots, \sigma_k^*)$ е дуалният репер на $(\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$, т.е.

$$\sigma_i^*(\sigma_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{за } 1 \leq i = j \leq k, \\ 0 & \text{за } 1 \leq i \neq j \leq k. \end{cases}$$

Тогава $\{\sigma_i^* \otimes \sigma_j \,|\, 1 \le i, j \le k\}$ е репер на $\mathcal{E}^* \otimes \mathcal{E}$ и сечението $\Theta \in \wedge^2(\mathcal{E}^* \otimes \mathcal{E})$ се задава с матрица Θ^σ от 2-форми, т.е.

$$D^2(\sigma_i) = \sum_{j=1}^{k} \Theta^\sigma_{ij} \otimes \sigma_j \quad \text{за} \quad \forall 1 \le i \le k.$$

Казваме, че Θ^σ е матрицата на кривината на свързаността D спрямо репера σ на $\mathcal{E}$. Ако

$$\sigma'_i = \sum_{j=1}^{k} g_{ij}\sigma_j, \quad \forall 1 \le i \le k$$

е друг репер на $\mathcal{E}$ и $g^{-1} = (g^{-1}_{pq})^k_{p,q=1}$ е матрицата, изпълняваща равенствата

$$\sigma_i = \sum_{j=1}^{k} g^{-1}_{ij}\sigma'_j \quad \text{за} \quad \forall 1 \le i \le k,$$

то

$$D^2\sigma'_i = D^2\left(\sum_{j=1}^{k} g_{ij}\sigma_j\right) = \sum_{j=1}^{k} g_{ij} D^2(\sigma_j) =$$

$$= \sum_{j=1}^{k}\sum_{s=1}^{k} g_{ij}\Theta^\sigma_{js} \otimes \sigma_s = \sum_{j=1}^{k}\sum_{s=1}^{k}\sum_{t=1}^{k} g_{ij}\Theta^\sigma_{js} g^{-1}_{st}\sigma'_t.$$

Оттук, матрицата $\Theta^{\sigma'}$ на D^2 спрямо репера $\sigma' = (\sigma'_1, \ldots, \sigma'_k)$ има елементи

$$\Theta^{\sigma'}_{it} = \sum_{j=1}^{k}\sum_{s=1}^{k} g_{ij}\Theta^\sigma_{js} g^{-1}_{st} \quad \text{за} \quad 1 \le i, t \le k \quad \text{и}$$

$$\Theta^{\sigma'} = g\Theta^\sigma g^{-1}.$$

Ако θ е матрицата на D спрямо репер $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$, то $D(\sigma_i) = \sum\limits_{j=1}^{k} \theta_{ij}\sigma_j$, откъдето

$$D^2(\sigma_i) = D\left(\sum_{j=1}^{k} \theta_{ij}\sigma_j\right) = \sum_{j=1}^{k}[d\theta_{ij} \otimes \sigma_j - \theta_{ij} \wedge D(\sigma_j)] =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} d\theta_{ij} \otimes \sigma_j - \sum_{j=1}^{k} \theta_{ij} \wedge \left(\sum_{s=1}^{k} \theta_{js}\sigma_s\right) = \sum_{s=1}^{k}\left[d\theta_{is} - \sum_{j=1}^{k} \theta_{ij} \wedge \theta_{js}\right] \otimes \sigma_s$$

и матрицата Θ^σ на D^2 спрямо репера σ е

$$\Theta^\sigma = d\theta - \theta \wedge \theta.$$

Горното равенство се нарича структурно уравнение на Картан.

Ако $\pi : \mathcal{E} \to M$ е ермитово разслоение и свързаността $D : \mathcal{A}^0(\mathcal{E}) \to \mathcal{A}^1(\mathcal{E})$ е съгласувана с комплексната структура върху $\mathcal{E}$, то от $D'' = \overline{\partial}$ следва $(D'')^2 = \overline{\partial}^2 = \mathbb{O}$ и матрицата Θ^σ на D^2 спрямо гладък репер $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$ на $\mathcal{E}$ има $(\Theta^\sigma)^{0,2} = \mathbb{O}_{k\times k}$. Още повече, ако D е съгласувана с метриката върху $\mathcal{E}$ и σ е ортонормиран репер на $\mathcal{E}$, то матрицата θ на D спрямо репера σ е косо-ермитова, откъдето матрицата $\Theta^\sigma = d\theta - \theta \wedge \theta$ на D^2 спрямо σ е също косо-ермитова, съгласно

$$\overline{(\Theta^\sigma)}^t = \overline{(d\theta - \theta \wedge \theta)}^t = d\overline{\theta}^t + \overline{\theta}^t \wedge \overline{\theta}^t = -d\theta + \theta \wedge \theta = -\Theta^\sigma.$$

(Тук използваме $(\theta_1 \wedge \theta_2)^t = -\theta_2^t \wedge \theta_1^t$ за произволни матрици θ_1, θ_2 от 1-форми.) Следователно

$$(\Theta^\sigma)^{2,0} = \left[- \left(\overline{\Theta^\sigma}\right)^t \right]^{2,0} = \left[- (\Theta^\sigma)^t \right]^{0,2} = \left[- (\Theta^\sigma)^{0,2} \right]^t = \mathbb{O}_{k\times k}^t = \mathbb{O}_{k\times k}$$

и матрицата Θ^σ на кривината D^2 на метричната свързаност D върху $\mathcal{E}$ спрямо ортонормиран репер $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$ е косо-ермитова матрица от $(1,1)$-форми. В резултат, $\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Theta$ е ермитова матрица от $(1,1)$-форми. Съгласно Твърдение 1.1, матрицата на $D : \mathcal{A}^0(\mathcal{E}) \to \mathcal{A}^1(\mathcal{E})$ е $\theta = (\partial h)h^{-1}$, където h е ермитовата метрика върху $\mathcal{E}$, с която е съгласувана D. Вземайки предвид, че матрицата Θ на $D^2 : \mathcal{A}^0(\mathcal{E}) \to \mathcal{A}^2(\mathcal{E})$ се състои от $(1,1)$-форми, получаваме че

$$\Theta = d\theta - \theta \wedge \theta = d\left((\partial h)h^{-1}\right) - \left[(\partial h)h^{-1}\right] \wedge \left[(\partial h)h^{-1}\right] = -(\partial h) \wedge (\overline{\partial} h^{-1}).$$

От $hh^{-1} = E_k$ за единичната матрица E_k пресмятаме, че $(\overline{\partial} h)h^{-1} + h(\overline{\partial} h^{-1}) = \mathbb{O}$, така че $\overline{\partial} h^{-1} = -h^{-1}(\overline{\partial} h)h^{-1}$ и

$$\Theta = (\partial h) \wedge \left[h^{-1}(\overline{\partial} h)h^{-1}\right]$$

спрямо произволен репер $(\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$ на $\mathcal{E}$. Ако реперът $(\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$ е ортонормиран, то $hh^{-1} = E_k$ и

$$\Theta = (\partial h) \wedge (\overline{\partial} h).$$

Да напомним, че комплексното проективно пространство $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ се състои от правите $l(v) \subset \mathbb{C}^{n+1}$, $v \in \mathbb{C}^{N+1} \setminus \{0^{N+1}\}$ през началото в $\mathbb{C}^{N+1}$. Алгебрично,

$$\mathbb{P}^N(\mathbb{C}) = \left(\mathbb{C}^{N+1} \setminus \{0^{N+1}\}\right)/\mathbb{C}^*$$

е множеството на орбитите на действието $\mathbb{C}^* \times (\mathbb{C}^{N+1} \setminus \{0^{N+1}\}) \to (\mathbb{C}^{N+1} \setminus \{0^{N+1}\})$, $(\lambda, (x_0, x_1, \ldots x_N)) \mapsto (\lambda x_0, \lambda x_1, \ldots, \lambda x_N)$ на $\mathbb{C}^*$ върху $\mathbb{C}^{N+1} \setminus \{0^{N+1}\}$. Орбитата на $x = (x_0, x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{C}^{N+1} \setminus \{0^{N+1}\}$ под действие на $\mathbb{C}^*$ бележим с $[x] = [x_0 : x_1 : \ldots : x_N]$ и помним, че $[x_0 : x_1 : \ldots : x_N] = [\lambda x_0 : \lambda x_1 : \ldots : \lambda x_N]$ за всяко $\lambda \in \mathbb{C}^*$. От друга страна, действието

$$\mathrm{GL}(N+1, \mathbb{C}) \times (\mathbb{C}^{N+1} \setminus \{0^{N+1}\}) \longrightarrow (\mathbb{C}^{N+1} \setminus \{0^{N+1}\}),$$

$$\left(A, x = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \dots \\ x_N \end{pmatrix}\right) \mapsto Ax$$

на общата линейна група $\mathrm{GL}(N+1, \mathbb{C})$ върху $\mathbb{C}^{N+1} \setminus \{0^{N+1}\}$ индуцира действие

$$\mathrm{GL}(N+1, \mathbb{C}) \times \mathbb{P}^N(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{P}^N(\mathbb{C}), \quad (A, [x]) \mapsto [Ax]$$

на $\mathrm{GL}(N+1, \mathbb{C})$ върху $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$, където хомогенните координати $[x]$ на точка от $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ са разположени в стълб. За всяко $[x] \in \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ съществува $0 \leq i \leq N$ с $x_i \neq 0$. Множеството

$$\begin{aligned} U_i := \{[x] \in \mathbb{P}^N(\mathbb{C}) \,|\, x_i \neq 0\} = \\ = \left\{ [x] = \left[\frac{x_0}{x_i} : \ldots : \frac{x_{i-1}}{x_i} : 1 : \frac{x_{i+1}}{x_i} : \ldots : \frac{x_N}{x_i} \right] \in \mathbb{P}^N(\mathbb{C}) \right\} \simeq \\ \simeq \left\{ \left(\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_N}{x_i} \right) \in \mathbb{C}^N \right\} = \mathbb{C}^N \end{aligned}$$

е изоморфно на $\mathbb{C}^N$ и се нарича афинна координатна карта върху $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$. Всяка точка върху $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ принадлежи на поне една афинна координатна карта. Допълнението

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^N(\mathbb{C}) \setminus U_i = \left\{ [x] \in \mathbb{P}^N(\mathbb{C}) \,|\, x_i = 0 \right\} = \\ = \left\{ [x_0 : x_1 : \ldots : x_{i-1} : 0 : x_{i+1} : \ldots : x_N] \in \mathbb{P}^N(\mathbb{C}) \right\} \simeq \\ \simeq \left\{ [x_0 : \ldots : x_{i-1} : x_{i+1} : \ldots : x_N] \in \mathbb{P}^{N-1}(\mathbb{C}) \right\} = \mathbb{P}^{N-1}(\mathbb{C}) \end{aligned}$$

на афинна координатна карта $U_i \simeq \mathbb{C}^N$ е изоморфно на проективно пространство $\mathbb{P}^{N-1}(\mathbb{C})$ с коразмерност 1.

Преди да формулираме логаритмичното равенство на Богомолов-Мияока-Яо, характеризиращо гладките тороидални компактификации $X = (\mathbb{B}/\Gamma)'$, да напомним класификацията на Енрикес-Кодаира на комплексните проективни повърхнини $X \subset \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$. Нека $\Omega^{1,0}X = (T^{1,0}X)^*$ е холоморфното ко-допирателно разслоение на X. Холоморфното линейно разслоение $\mathcal{K}_X := (\Omega^{1,0}_X) \wedge (\Omega^{1,0}X)$ се нарича канонично, а съответният му дивизор $K_X \subset X$ се нарича каноничен дивизор на X. Гладка проективна комплексна повърхнина $X \subset \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ е минимална, ако свиването на гладка рационална крива върху X води до получаване на особена повърхнина. Размерността на Кодаира $\kappa(X)$ на минимална гладка проективна повърхнина $X \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ зависи от размерностите на пространствата $H^0\left(X, \mathcal{K}_X^{\otimes m}\right)$ на глобалните холоморфни сечения на плури-каноничните разслоения

$$\mathcal{K}_X^{\otimes m} := \underbrace{\mathcal{K}_X \otimes \ldots \otimes \mathcal{K}_X}_{m} \quad \text{за достатъчно големи} \quad m \in \mathbb{N}.$$

Ако $H^0\left(X, \mathcal{K}_X^{\otimes m}\right) = 0$ за всички $m \in \mathbb{N}$, то X е повърхнина с размерност на Кодаира $\kappa(X) = -\infty$. Всяка минимална гладка повърхнина $X \subset \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ с $\kappa(X) = -\infty$ е линейчата, т.е. има разслоение $f : X \to C_g$ чрез гладки рационални прави $f^{-1}(c) \simeq \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$,

$\forall c \in C_g$ над гладка комплексна крива C_g от род $g \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$. Ако $C_0 = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ е от род 0, то линейчатата повърхнина X е бирационална на проективната равнина $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ и се нарича рационална повърхнина.

Ако $\dim_{\mathbb{C}} H^0\left(X, \mathcal{K}_X^{\otimes m}\right) \leq 1$ за $\forall m \in \mathbb{N}$ и съществува $m_0 \in \mathbb{N}$ с $\dim_{\mathbb{C}} H^0\left(X, \mathcal{K}_X^{\otimes m_0}\right) = 1$, то размерността на Кодаира е $\kappa(X) = 0$. Ако $\kappa(X) = 0$ и $\dim_{\mathbb{C}} H^0\left(X, \Omega^{1,0} X\right) = 2$, то $X = (\mathbb{C}^2, +)/(\pi_1(X), +) \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ с $\pi_1(X), +) \simeq (\mathbb{Z}^4, +)$ е проективен компактен комплексен тор. Тези повърхнини X се наричат абелеви, защото са комплексни абелеви групи $(X, +)$. Минималните гладки проективни повърхнини $X \subset \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ с $\kappa(X) = 0$ и $\dim_{\mathbb{C}} H^0\left(X, \Omega^{1,0} X\right) = 1$ са фактори $X = E_1 \times E_0 / G$ на директно произведение $E_1 \times E_0$ на елиптични криви E_1, E_0 по крайна абелева група G без фиксирани точки. Каноничните проекции $\mathrm{Pr}_1 : E_1 \times E_0 \to E_1$ и $\mathrm{Pr}_0 : E_1 \times E_0 \to E_0$ индуцират разслоения $\mathrm{pr}_1 : X = E_1 \times E_0 / G \to E_1 / G$, съответно, $\mathrm{pr}_0 : X = E_1 \times E_0 / G \to E_0 / G = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ чрез елиптични криви. Затова $X = E_1 \times E_0 / G$ се наричат би-елиптични повърхнини. В статията [2] от 1907 г. Багнера и де Франчис класифицират комплексните би-елиптичните повърхнини. Ако $\kappa(X) = 0$ и $H^0\left(X, \Omega^{1,0} X\right) = 0$, то $\dim_{\mathbb{C}} H^0\left(X, \mathcal{K}_X\right) \leq 1$. В случая $\kappa(X) = 0$, $H^0\left(X, \Omega^{1,0} X\right) = 0$, $H^0\left(X, \mathcal{K}_X\right) = 1$ повърхнината X е едносвързана, т.е. $\pi_1(X) = \{1\}$ и X се нарича K3 повърхнина. Ако $\kappa(X) = 0$, $H^0\left(X, \Omega^{1,0} X\right) = 0$ и $H^0\left(X, \mathcal{K}_X\right) = 0$, то X се нарича повърхнина на Енрикес, има K3 универсална покриваща $\widetilde{X}$ и фундаментална група $\pi_1(X) = (\mathbb{Z}_2, +)$.

Ако съществува константа $C \in \mathbb{R}^{>0}$, така че $\dim_{\mathbb{C}} H^0\left(X, \mathcal{K}_X^{\otimes m}\right) \leq Cm$ за всички естествени числа $m \in \mathbb{N}$ и съществува $m_0 \in \mathbb{N}$ с $\dim_{\mathbb{C}} H^0\left(X, \mathcal{K}_X^{\otimes m_0}\right) > 1$, то размерността на Кодаира е $\kappa(X) = 1$. Всяка минимална гладка проективна повърхнина $X \subset \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ с $\kappa(X) = 1$ се разслоява чрез елиптични криви над крива. Ако $\kappa(X) \notin \{-\infty, 0, 1\}$, то $\kappa(X) = 2$ и X се нарича повърхнина от общ тип.

За да определим класовете на Чърн на комплексно векторно разслоение $\pi : \mathcal{E} \to M$ от ранг k над комплексно многообразие M, ще разгледаме хомогенните инвариантни полиноми

$$P : M_{k \times k}(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

на квадратни матрици. По определение, това са полиноми $P(A) = P(A_{ij})$ на елементите $A_{ij} \in \mathbb{C}$ на $A \in M_{k \times k}(\mathbb{C})$, които са инвариантни относно действието на $\mathrm{GL}(k, \mathbb{C})$ върху $M_{k \times k}(\mathbb{C})$ чрез спрягане, т.е. $P \in \mathbb{C}[A_{ij} \,|\, 1 \leq i, j \leq k]^{(d)}$, $d \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$ с $P(gAg^{-1}) = P(A)$ за $\forall A \in M_{k \times k}(\mathbb{C})$, $\forall g \in \mathrm{GL}(k, \mathbb{C})$. Характеристичният полином $f_A(t) = \det(A - tE_k)$ на матрица $A \in M_{k \times k}(\mathbb{C})$ е $\mathrm{GL}(k, \mathbb{C})$-инвариантен, съгласно

$$\begin{aligned} f_{gAg^{-1}}(t) &= \det(gAg^{-1} - g(tE_k)g^{-1}) = \det(g(A - tE_k)g^{-1}) = \\ &= \det(g)\det(A - tE_k)\det(g^{-1}) = f_A(t) \quad \text{за} \quad \forall g \in \mathrm{GL}(k, \mathbb{C}). \end{aligned}$$

Следователно характеристичните корени $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ на $A \in M_{k \times k}(\mathbb{C})$ образуват $\mathrm{GL}(k, \mathbb{C})$-инвариантно множество от комплексни числа и произволен симетричен хомогенен полином $P(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ на $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ е $\mathrm{GL}(k, \mathbb{C})$-инвариантен полином на $A \in M_{k \times k}(\mathbb{C})$. В частност, елементарните симетрични полиноми

$$P^{(i)}(A) := \sum_{1 \leq j_1 < \ldots < j_i \leq k} \lambda_{j_1} \ldots \lambda_{j_i}, \quad 1 \leq i \leq k$$

на $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ са $\mathrm{GL}(k, \mathbb{C})$-инвариантни полиноми на A. Вземайки предвид

$$f_A(t) = \det(A - tE_k) = (-1)^k \prod_{i=1}^{k} (t - \lambda_i),$$

пресмятаме че

$$\det(A + tE_k) = \det(A - (-tE_k)) = f_A(-t) =$$
$$= (-1)^k \prod_{i=1}^{k} (-t - \lambda_i) = \prod_{i=1}^{k} (t + \lambda_i) = \sum_{s=0}^{k} P^{(k-s)}(A) t^s$$

с $P^{(0)}(A) := 1$. В частност, $P^{(k)}(A) = \det(A)$ е детерминантата на A, а

$$P^{(1)}(A) = \lambda_1 + \ldots + \lambda_k = A_{11} + \ldots + A_{kk} = \mathrm{tr}(A)$$

е следата на A. За произволни $2 \leq s \leq k-1$ и $I = \{i_1, \ldots, i_s\}$, $1 \leq i_1 < \ldots < i_s \leq k$ да означим с $A_{I,I}$ матрицата, получена от A при пресичане на редовете и стълбовете, индексирани с I. Тогава

$$P^{(s)}(A) = \sum_{|I|=s} \det(A_{I,I}).$$

Ще казваме, че $P^{(1)}(A), \ldots, P^{(k)}(A)$ са елементарните $\mathrm{GL}(k, \mathbb{C})$-инвариантни полиноми на $A \in M_{k \times k}(\mathbb{C})$, защото всеки $\mathrm{GL}(k, \mathbb{C})$-инвариантен хомогенен полином $P(A)$ на A е полином на $P^{(1)}(A), \ldots, P^{(k)}(A)$. По-точно, нека $(A_1, \ldots, A_m) \in (M_{k \times k}(\mathbb{C}))^m$ е наредена m-торка матрици от k-ти ред, $I = \{j_1, \ldots, j_m\}$ е индексно множество с $1 \leq j_1 < \ldots < j_m \leq k$, а $\tau \in S_m$ е пермутация. За произволно $1 \leq s \leq m$ да означим с $(A_s)_{I,I} \in M_{m \times m}(\mathbb{C})$ матрицата, получена от $A_s \in M_{k \times k}(\mathbb{C})$ при пресичане на редовете и стълбовете с номера $j_1, \ldots, j_m$. Нека $A_I^\tau \in M_{m \times m}(\mathbb{C})$ е матрицата, чийто s-ти стълб съвпада с s-тия стълб на $(A_{\tau(s)})_{I,I} \in M_{m \times m}(\mathbb{C})$ за $1 \leq s \leq m$. Проверява се, че

$$\widetilde{P}(A_1, \ldots, A_m) = \frac{1}{m!} \sum_{\tau \in S_m} \sum_{|I|=m} \det(A_I^\tau)$$

е поляризацията на хомогенния $\mathrm{GL}(k, \mathbb{C})$-инвариантен полином P. В частност, за $m = 2$ имаме

$$\widetilde{P}(A_1, A_2) = \frac{1}{2!} [P(A + B) - P(A) - P(B)].$$

Нека $\pi : \mathcal{E} \to M$ е ермитово векторно разслоение от ранг k над комплексно многообразие M и $M = \cup_{\alpha \in A} U_\alpha$ е отворено покритие на M с тривиализации

$$\varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{C}^k$$

на $\mathcal{E}$. Да означим с θ_α матрицата на метричната свързаност D върху U_α, а с Θ_α - матрицата на кривината D^2. Тогава за произволен хомогенен $\mathrm{GL}(k, \mathbb{C})$-инвариантен полином $P(A)$, $A \in M_{k \times k}(\mathbb{C})$ от степен m получаваме диференциална форма $P(\Theta_\alpha)$

от тип (m,m). Съгласно $\Theta_\alpha = g_{\alpha\beta}\Theta_\beta g_{\alpha\beta}^{-1}$ за функциите на прехода $g_{\alpha\beta}$, $\alpha,\beta \in A$ имаме $P(\Theta_\alpha) = P(\Theta_\beta)$ върху $U_\alpha \cap U_\beta$ и можем да определим глобална диференциална форма $P(\Theta)$ от тип (m,m) върху M, полагайки

$$P(\Theta)(x) := P(\Theta_\alpha)(x) \quad \text{за} \quad x \in U_\alpha.$$

Ако за произволна точка $x_o \in U_\alpha \subseteq M$ изберем ортонормиран репер $(\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$ на $\mathcal{E}$ над U_α, то матрицата $h = (h_{ij})_{i,j=1}^k$ има постоянни елементи

$$h_{ij} = h(\sigma_i, \sigma_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{за } 1 \leq i = j \leq k, \\ 0 & \text{за } 1 \leq i \neq j \leq k \end{cases}$$

и матрицата $\theta_\alpha(x) = (\partial h)h^{-1} = \mathbb{O}_{k\times k}$ на D се анулира за $\forall x \in U_\alpha$. Диференциалът на матрицата $\Theta_\alpha = d\theta_\alpha - \theta_\alpha \wedge \theta_\alpha$ на D^2 е

$$d\Theta_\alpha = -d\theta_\alpha \wedge \theta_\alpha + \theta_\alpha \wedge d\theta_\alpha$$

и се анулира в достатъчно малка околност на x_o върху M. За произволен хомогенен $\mathrm{GL}(k,\mathbb{C})$-инвариантен полином P от степен m с поляризация $\widetilde{P}$ имаме

$$dP(\Theta_\alpha) = d\widetilde{P}(\Theta_\alpha, \ldots, \Theta_\alpha) = \sum_{s=1}^{m} \widetilde{P}(\underbrace{\Theta_\alpha, \ldots, \Theta_\alpha}_{s-1}, d\Theta_\alpha, \underbrace{\Theta_\alpha, \ldots, \Theta_\alpha}_{m-s}),$$

така че $dP(\Theta_\alpha)$ се анулира в достатъчно малка околност на произволна точка от M. Следователно $P(\Theta)$ е затворена диференциална форма върху M.

За да интерпретираме $P(\Theta)$ като кохомологичен клас върху M, да напомним че сноповете $\mathcal{A}^p$ на гладките диференциални p-форми върху M образуват ко-верижен комплекс

$$0 \longrightarrow M \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{A}^0 \xrightarrow{d^0} \ldots \mathcal{A}^p \xrightarrow{d^p} \mathcal{A}^{p+1} \ldots,$$

т.е. $d^{p+1}d^p = \mathbb{O}$ за $\forall p \geq 0$. Съответните глобални гладки сечения

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{A}^0(M) \xrightarrow{d^0_M} \ldots \mathcal{A}^p(M) \xrightarrow{d^p_M} \mathcal{A}^{p+1}(M) \ldots$$

също образуват ко-верижен комплекс, чиито кохомологии

$$H^p_{\mathrm{DR}}(M) := \frac{\ker[d^p_M : \mathcal{A}^p(M) \longrightarrow \mathcal{A}^{p+1}(M)]}{\mathrm{im}[d^{p-1}_M : \mathcal{A}^{p-1}(M) \longrightarrow \mathcal{A}^p(M)]}$$

се наричат кохомологии на де Рам на M. В разглеждания случай, затворената диференциална (m,m)-форма $P(\Theta)$ върху M задава кохомологичен клас на де Рам $[P(\Theta)] \in H^{2m}_{\mathrm{DR}}(M)$.

Нека $\pi : \mathcal{E} \to M$ е ермитово векторно разслоение от ранг k над комплексно многообразие M, а $P^{(1)}, \ldots, P^{(k)}$ са елементарните $\mathrm{GL}(k, \mathbb{C})$-инвариантни полиноми на матрици от $M_{k\times k}(\mathbb{C})$. Тогава кохомологичните класове

$$\mathbf{c_i}(\mathcal{E}) := \left[P^{(i)} \left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \Theta \right) \right] \in H^{2i}_{\mathrm{DR}}(M), \quad 1 \leq i \leq k$$

се наричат класове на Чърн на $\mathcal{E}$. Класовете на Чърн

$$\mathbf{c_i}(M) := \mathbf{c_i}(T^{1,0}M), \quad 1 \leq i \leq n = \dim_{\mathbb{C}} M$$

на холоморфното допирателно разслоение $T^{1,0}M \to M$ се наричат класове на Чърн на M.

Нека $X \subset \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ е проективна комплексна повърхнина. Тогава метриката h_o на Фубини-Щуди върху $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ индуцира ермитова метрика върху X. За да напомним определението на h_o да отбележим, че произволна ермитова метрика h върху комплексно многообразие M е гладка фамилия от ермитови скаларни произведения $h : T^{1,0}M \otimes T^{1,0}M \to \mathbb{C}$ върху холоморфното допирателно разслоение $T^{1,0}M$ на M. В холоморфни локални координати $(x_1, \ldots, x_n)$ върху M, можем да представим

$$h = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} h \left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial \overline{x_j}} \right) dx_i \otimes d\overline{x_j}.$$

Тогава

$$\omega := -\mathrm{Im}(h) = \frac{\sqrt{-1}}{2}(h - \overline{h}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} h \left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial \overline{x_j}} \right) dx_i \wedge d\overline{x_j}$$

е диференциална $(1,1)$-форма върху M, която определя еднозначно h. Ако формата ω е затворена, т.е. $d\omega = 0$, то ермитовата метрика h се нарича Келерова. За произволни холоморфни координати $z = (z_0, \ldots, z_N) \in \mathbb{C}^{N+1}$, разглеждаме диференциалната $(1,1)$-форма

$$\omega_o := \frac{\sqrt{-1}}{2} \partial\overline{\partial} \log ||z||^2 = \frac{\sqrt{-1}}{2} \partial\overline{\partial} \log \left(|z_0|^2 + \ldots |z_N|^2 \right)$$

върху $\mathbb{C}^{N+1} \setminus \{0^{N+1}\}$. Ако

$$\pi : \mathbb{C}^{N+1} \setminus \{0^{N+1}\} \longrightarrow \mathbb{P}^N(\mathbb{C}) = \left(\mathbb{C}^{N+1} \setminus \{0^{n+1}\} \right) / \mathbb{C}^*$$

съпоставя на $v \in \mathbb{C}^{N+1} \setminus \{0^{N+1}\}$ правата $l(v) \in \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$, то произволни локални повдигания $z : U \to \mathbb{C}^{N+1} \setminus \{0^{N+1}\}$ на π се различават с неанулираща се холоморфна функция $f : U \to \mathbb{C}$, т.е.

$$(z'_0, \ldots, z'_N) = z' = f(z)z = (f(z)z_0, \ldots, f(z)z_N).$$

Пресмятаме

$$\log \left(||z'||^2 \right) = \log \left(\sum_{j=0}^{N} |f(z)z_j|^2 \right) =$$

$$= \log \left(|f(z)|^2 \left(\sum_{j=0}^{N} |z_j|^2 \right) \right) = \log \left(|f(z)|^2 \right) + \log \left(||z||^2 \right)$$

и забелязваме, че

$$\partial\overline{\partial}\log\left(|f(z)|^2\right) = \partial\overline{\partial}\log\left(f(z)\overline{f(z)}\right) = \partial\overline{\partial}\left(\log\left(f(z)\right) + \log\left(\overline{f(z)}\right)\right) = 0$$

поради холоморфността на $\log\left(f(z)\right)$ анти-холоморфността на $\log\left(\overline{f(z)}\right)$. Следователно

$$\partial\overline{\partial}\log\left(||z'||^2\right) = \partial\overline{\partial}\log\left(||z||^2\right),$$

така че диференциалната форма ω_o е коректно зададена върху $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$. Метриката h_o на Фубини-Щуди върху $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ е еднозначно определената ермитова метрика h_o с асоциирана $(1,1)$-форма ω_o. Съгласно

$$d\omega_o = (\partial + \overline{\partial})\left(\frac{\sqrt{-1}}{2}\partial\overline{\partial}\log\left(||z||^2\right)\right) = 0,$$

метриката h_o е Келерова. Ограничението на h_o върху комплексна повърхнина $X \subset \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ е Келерова метрика върху X. Матрицата на кривината Θ на свързаността $D : \mathcal{A}^0(T^{1,0}X) \to \mathcal{A}^1(T^{1,0}X)$, съгласувана с комплексната структура и метриката $h_o|_X$ върху X е 2×2-матрица от $(1,1)$-форми Θ_{ij}, $1 \leq i,j \leq 2$. Класовете на Чърн на X са

$$\mathbf{c_1}(X) := \operatorname{tr}\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Theta\right) = \frac{\sqrt{-1}}{2}\left(\Theta_{1,1} + \Theta_{2,2}\right) \in H^2_{\mathrm{DR}}(X)$$

и

$$\mathbf{c_2}(X) := \det\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Theta\right) = -\frac{1}{4\pi^2}\left(\Theta_{11}\Theta_{22} - \Theta_{12}\Theta_{21}\right) \in H^4_{\mathrm{DR}}(X).$$

Числата на Чърн се определят от равенствата

$$c_1^2(X) := \int_X \mathbf{c_1}(X) \wedge \mathbf{c_1}(X), \quad c_2(X) := \int_X \mathbf{c_2}(X).$$

Нека K_X е каноничният дивизор на X, т.е. дивизорът, отговарящ на каноничното линейно разслоение $\mathcal{K}_X := T^{1,0}X \wedge T^{1,0}X$ на X. Доказва се, че $c_1^2(X) = K_X^2 \in \mathbb{Z}$ съвпада с индекса на самопресичане на K_X. Числото на Чърн $c_2(X)$ съвпада с Ойлеровата характеристика $e(X) \in \mathbb{Z}$ на X. За да напомним определението на $e(X)$ да разгледаме симплициално разлагане на X. По-точно, за произволни точки $u_0, u_1, \ldots, u_k \in \mathbb{R}^k$, за които $u_1 - u_0, \ldots, u_k - u_0 \in \mathbb{R}^k$ е базис на $\mathbb{R}^k$, множеството

$$\Delta_k := \left\{ x_0u_0 + \ldots + x_ku_k \,\middle|\, x_i \in \mathbb{R}^{\geq 0}, \sum_{i=0}^{k} x_k = 1 \right\}$$

се нарича k-симплекс. Симплициално разлагане на гладко многообразие X с $\dim_{\mathbb{R}} X = 4$ е разбиване на X в крайно непресичащо се обединение на подмножества, хомеоморфни на симплекси Δ_k с размерност $0 \leq k \leq 4$. Ако $n_k \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$ е броят на k-симплексите в симплициално разлагане на X, то цялото число

$$e(X) = n_0 - n_1 + n_2 - n_3 + n_4$$

не зависи от избора на симплициално разлагане на X и се нарича Ойлерова характеристика на X.

Тензорът на Ричи на свързаност $D : \mathcal{A}^0(\mathcal{E}) \to \mathcal{A}^1(\mathcal{E})$ спрямо репер $(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$ на ермитово разслоение $\pi : \mathcal{E} \to M$ се определя като

$$\mathrm{Ric}(\sigma_i, \sigma_j) := h(D^2\sigma_i, \sigma_j) = h\left(\sum_{s=1}^{k} \Theta_{is}\sigma_s, \sigma_j\right) = \sum_{s=1}^{k} \Theta_{is} h(\sigma_s, \sigma_j) = \sum_{s=1}^{k} \Theta_{is} h_{sj}.$$

Нека h е ермитова метрика върху комплексна повърхнина $X \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, а

$$D : \mathcal{A}^0(T^{1,0}X) \longrightarrow \mathcal{A}^1(T^{1,0}X)$$

е единствената свързаност върху X, съгласувана с h и с комплексната структура върху X. Ако h е Келерова метрика, чийто тензор на Ричи $\mathrm{Ric} = ch$ е пропорционален на метриката с някаква константа $c \in \mathbb{R}$, то h се нарича метрика на Келер-Айнщайн. През 1977 г. Яо доказва съществуването на единствено решение на диференциалните уравнения на Монж-Ампер и извежда съществуването на единствена метрика на Келер-Айнщайн h с отрицателна кривина на Ричи върху произволна комплексна проективна повърхнина $X \subset \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ от общ тип. Резултатът е обявен в [49] и доказан в [50]. Ако

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{pmatrix}$$

е ортонормиран репер на $T^{1,0}X$ и

$$\sigma' = \begin{pmatrix} \sigma_1' \\ \sigma_2' \end{pmatrix} = g \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{pmatrix}$$

е друг ортонормиран репер на $T^{1,0}X$, то g принадлежи на унитарната група $U(h)$ на метриката на Келер-Айнщайн h. Съответните матрици на кривината D^2 са свързани с равенството $\Theta^{\sigma'} = g\Theta^{\sigma}g^{-1} = g\Theta^{\sigma}\overline{g}^t$. Това задава $\mathbb{C}$-линейно действие на $U(h)$ върху комплексното линейно пространство $\mathcal{P}$ на матриците на D^2 спрямо ортонормиран репер на $T^{1,0}X$. С други думи, имаме групов хомоморфизъм $\varphi : U(h) \to \mathrm{GL}(\mathcal{P})$ в групата $\mathrm{GL}(\mathcal{P})$ на обратимите $\mathbb{C}$-линейни оператори в $\mathcal{P}$. Произволен хомоморфизъм $\varphi : G \to \mathrm{GL}(V)$ на група G в групата $\mathrm{GL}(V)$ на обратимите $\mathbb{C}$-линейни оператори в линейно пространство V над $\mathbb{C}$ се нарича линейно представяне на G. Представянето φ е неприводимо, ако единствените $\varphi(G)$-инвариантни $\mathbb{C}$-линейни подпространства на V са $\{\mathcal{O}_V\}$ и V. Ако $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_s$ е директна сума на неприводими представяния $\varphi_i : G \to \mathrm{GL}(V_i)$ на G, то представянето

$$\varphi = \varphi_1 \oplus \ldots \oplus \varphi_s : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V_1) \oplus \ldots \oplus \mathrm{GL}(V_s) < \mathrm{GL}(V_1 \oplus \ldots \oplus V_s)$$

се нарича напълно приводимо. Известно е, че представянето $\varphi : U(h) \to \mathrm{GL}(\mathcal{P})$ е напълно приводимо и $\mathcal{P} = \mathcal{P}_0 \oplus \mathcal{P}_1 \oplus \mathcal{P}_2$ се разлага в директна сума на три неприводими представяния $\varphi_i : U(h) \to \mathrm{GL}(\mathcal{P}_i)$, $0 \leq i \leq 2$. По-точно, $\mathcal{P}_0 \simeq \mathbb{C}$ отговаря на скаларната кривина на D, която е равна на следата на тензора на Ричи. Представянето $\mathcal{P}_1$ се състои от безследните кривини на Ричи, а представянето $\mathcal{P}_2$ отговаря на тензора на Вейл. Нека $X \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ комплексна проективна повърхнина от общ тип и W_- е анти-самодуалната част на тензора на Вейл на единствената свързаност D върху $T^{1,0}X$, която е съгласувана с комплексната структура и метриката на Келер-Айнщайн h на X. Яо доказва в [49], че

$$3c_2(X) - c_1^2(X) = \frac{3}{8\pi}\int_X |W_-|^2.$$

Следователно $3c_2(X) - c_1^2(X) \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$ е неотрицателно цяло число и равенството $3c_2(X) = c_1^2(X)$ е изпълнено тогава и само тогава, когато $W_- = 0$. От своя страна, $W_- = 0$ точно когато $T^{1,0}X$ има постоянна холоморфна секционна кривина и $X = \mathbb{B}/\Gamma$ е гладък компактен фактор на комплексното двумерно кълбо $\mathbb{B}$ по решетка $\Gamma < U(1,2)$. (Холоморфните секционни кривини за метричната свързаност на ермитово комплексно многообразие M са секционните кривини на реалните 2-мерни подпространства на $T_x^{\mathbb{R}}M$, които са инвариантни относно оператора на комплексната структура.)

Да напомним, че $\mathbb{B} = U(1,2)/U_1 \times U_2$ е хомогенно пространство на групата на Ли $U(1,2)$. Всяко линейно представяне $\varphi : U_1 \times U_2 \to \mathbb{C}^k$ на изотропната група на кълбото $\mathbb{B}$ отговаря на хомогенно разслоение

$$\mathcal{E}_o := U(1,2) \times_{U_1 \times U_2} \mathbb{C}^k$$

от ранг k над $U(1,2)/U_1 \times U_2 = \mathbb{B}$, което се състои от $(U_1 \times U_2)$-орбитите върху директното произведение $U(1,2) \times \mathbb{C}^k$. Кълбото $\mathbb{B}$ има отворено влагане в своето дуално ермитово симетрично пространство $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ от компактен тип. Холоморфното разслоение $\mathcal{E}_o \to \mathbb{B}$ се продължава до холоморфно векторно разслоение $\check{\mathcal{E}_o} \to \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. Групата $U(1,2)$ действа върху $\mathcal{E}_o$ и за произволна решетка $\Gamma < U(1,2)$ факторът $\mathcal{E} := \mathcal{E}_o/\Gamma$ е холоморфно векторно разслоение от ранг k над $\mathbb{B}/\Gamma$ Ако тороидалната компактификация $X = (\mathbb{B}/\Gamma)'$ е гладка, то $\mathcal{E} \to \mathbb{B}/\Gamma$ се продължава до холоморфно векторно разслоение $\overline{\mathcal{E}} \to X$. Нека $D := X \setminus (\mathbb{B}/\Gamma)$ е тороидалният компактифициращ дивизор на $\mathbb{B}/\Gamma$, а

$$\overline{c_1}^2(X,D) := (K_X + D)^2 \quad \text{и} \quad \overline{c_2}(X,D) := e(X \setminus D) = e(\mathbb{B}/\Gamma)$$

са логаритмичните числа на Чърн на (X,D). Понеже $D = \sum\limits_{j=1}^{k} D_j$ е непресичащо се обединение на неприводими гладки елиптични криви D_j и Ойлеровите характеристики $e(D_j) = 0$ се анулират, имаме $\overline{c_2}(X,D) = e(X)$. В [39] Мамфорд доказва съществуването на константа $C \in \mathbb{R}^{>0}$, така че

$$\overline{c_1}^2(\overline{\mathcal{E}}, D) = C c_1^2(\check{\mathcal{E}_o}) \quad \text{и} \quad \overline{c_2}(\overline{\mathcal{E}}, D) = C c_2(\check{\mathcal{E}_o}).$$

В частност, за $\mathcal{E}_o := T^{1,0}\mathbb{B}$ имаме $\check{\mathcal{E}_o} = T^{1,0}\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, $\mathcal{E} = T^{1,0}(\mathbb{B}/\Gamma)$, $\overline{\mathcal{E}} = T^{1,0}X$ и

$$\frac{\overline{c_1}^2(X,D)}{3\overline{c_2}(X,D)} = \frac{c_1^2(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))}{3c_2(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))}.$$

Съгласно $c_1^2(\mathbb{P}^2(\mathbb{C})) = 9$ и $c_2(\mathbb{P}^2(\mathbb{C})) = 3$, оттук следва логаритмичното равенство на Богомолов-Мияока-Яо

$$\overline{c_1}^2(X, D) = 3\overline{c_2}(X, D).$$

Числата на Чърн на комплексната проективна равнина $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ се пресмятат с помощта на точната редица от векторни разслоения

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2(\mathbb{C})} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2(\mathbb{C})}(1)^3 \longrightarrow T^{1,0}\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \longrightarrow 0,$$

където $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2(\mathbb{C})}$ е структурният сноп на $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, а $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2(\mathbb{C})}(1) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ е снопът от сечения на линейното разслоение, отговарящо на хиперравнина $H \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. Нека $\omega \in H^{1,1}_{\mathrm{DR}}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ е кохомологичният клас, съответстващ на H, т.е. $\omega(H) = 1$. Тогава пълният клас на Чърн на $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ е

$$\mathbf{c}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C})) = \mathbf{c}(T^{1,0}\mathbb{P}^2(\mathbb{C})) = 1 + \mathbf{c_1}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C})) + \mathbf{c_2}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C})),$$

а пълният клас на Чърн на структурния сноп $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2(\mathbb{C})}$ е $\mathbf{c}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2(\mathbb{C})}) = 1$. В резултат, от

$$(1+\omega)^3 = \mathbf{c}\left(\mathcal{O}^3_{\mathbb{P}^2(\mathbb{C})}\right) = \mathbf{c}\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2(\mathbb{C})}\right)\mathbf{c}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C})) = 1 + \mathbf{c_1}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C})) + \mathbf{c_2}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$$

следва

$$\mathbf{c_1}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C})) = 3\omega, \quad \mathbf{c_2}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C})) = 3(\omega \wedge \omega)$$

и числата на Чърн на $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ са

$$c_1^2(\mathbb{P}^2(\mathbb{C})) = \int_{\mathbb{P}^2(\mathbb{C})} (3\omega) \wedge (3\omega) = 9\left(\int_{\mathbb{P}^2(\mathbb{C})} \omega \wedge \omega\right) = 9,$$

$$c_2(\mathbb{P}^2(\mathbb{C})) = \int_{\mathbb{P}^2(\mathbb{C})} 3(\omega \wedge \omega) = 3\left(\int_{\mathbb{P}^2(\mathbb{C})} \omega \wedge \omega\right) = 3.$$

Глава 2

Конструкция на тороидалната компактификация на дискретен фактор на комплексното двумерно кълбо

В настоящия параграф ще опишем конструкцията на тороидалната компактификация $(\mathbb{B}/\Gamma)'$ на фактор $\mathbb{B}/\Gamma$ на комплексното двумерно кълбо

$$\mathbb{B} = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \,|\, |z_1|^2 + |z_2|^2 < 1\}$$

по решетка Γ от холоморфни изометрии на $\mathbb{B}$. Освен класическата книга [1] на Аш, Мамфорд, Рапопорт и Таи, в която се построява тороидална компактификация на дискретен фактор на произволна ограничена симетрична област, използвани са обзорната статия [32] на Каспарян и Санкаран, както и предварителните сведения от [31]. Грубо казано, $(\mathbb{B}/\Gamma)'$ е непресичащо се обединение на $\mathbb{B}/\Gamma$ с краен брой елиптични криви $D_1, \dots, D_k$. Всяка елиптична крива D_i се получава в резултат на частична компактификация в Γ-орбита на Γ-рационална гранична точка на $\mathbb{B}$.

За да опишем по-подробно $(\mathbb{B}/\Gamma)'$, ще напомним някои основни понятия, свързани със структурата на група на Ли и на нейните хомогенни пространства. Основни източници за групи и алгебри на Ли са книгите [42], [43] на Сер. Преобладаваща част от свойствата на ограничените симетрични области са описани и доказани в монографията [24] на Хелгасон. Нека G е група и гладко реално диференцируемо многообразие. Ако груповата операция $G \times G \to G$, $(a, b) \mapsto ab$ и обръщането $G \to G$, $a \mapsto a^{-1}$ са диференцируеми изображения, казваме че G е група на Ли. Ако група на Ли G е подгрупа на $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ или на $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, то G се нарича матрична група на Ли. За да дадем пример за матрична група на Ли, да разгледаме ермитова матрица $\chi_{1,2} \in M_{3\times 3}(\mathbb{C})$ с една положителна и две отрицателни собствени стойности. Тогава унитарната група

$$U(1, 2) := \{A \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{C}) \,|\, \overline{A}^t \chi_{1,2} A = \chi_{1,2}\} \tag{2.1}$$

е матрична група на Ли.

Ако G е група на Ли, а K е необезателно нормална подгрупа на G, то множеството G/K на левите съседни класове на G относно K има структура на гладко многообразие над $\mathbb{R}$ и се нарича хомогенно пространство на G. Всяко хомогенно пространство G/K на група на Ли G има транзитивно действие $G \times (G/K) \to (G/K)$, $(a, bK) \mapsto abK$ на G посредством леви умножения, което се индуцира от груповата операция в G и е диференцируемо изображение. Ще опишем комплексното двумерно кълбо $\mathbb{B}$ като хомогенно пространство на унитарната група $U(1,2)$ от (2.1) и ще интерпретираме точките $z \in \mathbb{B}$ като прави $l_{\mathbb{C}}(v) \subset M_{3\times 1}(\mathbb{C})$, $v \in M_{3\times 1}(\mathbb{C}) \setminus \{\mathbb{O}_{3\times 1}\}$, върху които ограничението на ермитовата форма с матрица $\chi_{1,2}$ е положително определено, т.е. с $\overline{v}^t \chi_{1,2} v > 0$. Ще видим, че външните точки $z \in \mathbb{C}^2 \setminus \overline{\mathbb{B}} = \{z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \,|\, |z_1|^2 + |z_2|^2 > 1\}$ отговарят на отрицателни прави $l_{\mathbb{C}}(v) \subset M_{3\times 1}(\mathbb{C})$, $\overline{v}^t \chi_{1,2} v < 0$. Ще проверим, че граничните точки $z \in \partial\mathbb{B} = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \,|\, |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$ съответстват на $\chi_{1,2}$-изотропни прави $l_{\mathbb{C}}(v) \subset M_{3\times 1}(\mathbb{C})$, т.е. на прави, породени от $v \in M_{3\times 1}(\mathbb{C}) \setminus \{\mathbb{O}_{3\times 1}\}$ с $\overline{v}^t \chi_{1,2} v = 0$. Ще установим, че всяка точка $z \in \partial\mathbb{B}$ е комплексно аналитично изолирана. Това означава несъществуване на непостоянни холоморфни криви, които се съдържат изцяло в $\partial\mathbb{B}$. За всяка от изброените цели ще използваме следната лема на Мок от [36].

Лема 2.1. (Мок [36]) *За произволни естествени числа $p, q \in \mathbb{N}$ и произволна матрица $X \in M_{p\times q}(\mathbb{C})$ съществуват унитарни матрици $A \in U_p$, $B \in U_q$, така че*

$$AXB = \begin{pmatrix} z_1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & z_p & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{\textit{за}} \quad p < q, \quad \text{\textit{съответно,}}$$

$$AXB = \begin{pmatrix} z_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & z_p \\ 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{\textit{за}} \quad p > q \quad \text{\textit{или}}$$

$$AXB = \begin{pmatrix} z_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & z_p \end{pmatrix} \quad \text{\textit{за}} \quad p = q$$

има (евентуално) ненулеви елементи само върху главния диагонал.

Доказателство. Нека

$$\langle\ ,\ \rangle_p : M_{p\times 1}(\mathbb{C}) \times M_{p\times 1}(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C},$$

$$\langle v_1, v_2 \rangle_p = v_{11}\overline{v_{21}} + \dots + v_{1p}\overline{v_{2p}} \quad \text{за} \quad \forall v_j = \begin{pmatrix} v_{j1} \\ \dots \\ v_{jp} \end{pmatrix} \in M_{p\times 1}(\mathbb{C})$$

е стандартното ермитово скаларно произведение в $M_{p\times 1}(\mathbb{C})$, а

$$\langle\ ,\ \rangle_q : M_{q\times 1}(\mathbb{C}) \times M_{q\times 1}(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C},$$

$$\langle u_1, u_2 \rangle_q = u_{11}\overline{u_{21}} + \ldots + u_{1q}\overline{u_{2q}}, \quad \forall u_j = \begin{pmatrix} u_{j1} \\ \ldots \\ u_{jq} \end{pmatrix} \in M_{q\times 1}(\mathbb{C}),$$

е стандартното ермитово скаларно произведение в $M_{q\times 1}(\mathbb{C})$.

Да разгледаме линейното изображение

$$\varphi : M_{q\times 1}(\mathbb{C}) \longrightarrow M_{p\times 1}(\mathbb{C}), \quad \varphi(u) = Xu, \quad \forall u \in M_{q\times 1}(\mathbb{C})$$

с матрица X спрямо стандартните ортонормирани базиси на $M_{q\times 1}(\mathbb{C})$ и $M_{p\times 1}(\mathbb{C})$. Тогава

$$f : S^{2q-1} = \left\{ u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \ldots \\ u_q \end{pmatrix} \in M_{q\times 1}(\mathbb{C}) \,\middle|\, |u_1|^2 + \ldots + |u_q|^2 = 1 \right\} \longrightarrow \mathbb{R}^{\geq 0},$$

$$f(u) := \langle \varphi(u), \varphi(u) \rangle_p = \langle Xu, Xu \rangle_p, \quad \forall u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \ldots \\ u_q \end{pmatrix} \in S^{2q-1}$$

е непрекъсната функция върху компактната единична сфера S^{2q-1} и достига максимума си в някакъв вектор $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \ldots \\ w_q \end{pmatrix} \in S^{2q-1}$, т.е.

$$f(w) = \max_{u \in S^{2q-1}} f(u).$$

Достатъчно е да докажем, че ако $u \in M_{q\times 1}(\mathbb{C})$ е ортогонален на $w \in M_{q\times 1}(\mathbb{C})$ относно $\langle\ ,\ \rangle_q$, то $\langle \varphi(w), \varphi(u) \rangle_p = 0$. Тогава за $m := \min(p, q)$ имаме ортонормирани системи вектори $u_1, \ldots, u_m \in M_{q\times 1}(\mathbb{C})$, съответно,

$$v_1 := \frac{1}{\sqrt{\langle \varphi(u_1), \varphi(u_1) \rangle_p}} \varphi(u_1), \ldots, v_j := \frac{1}{\sqrt{\langle \varphi(u_j), \varphi(u_j) \rangle_p}} \varphi(u_j), \ldots,$$
$$v_m := \frac{1}{\sqrt{\langle \varphi(u_m), \varphi(u_m) \rangle_p}} \varphi(u_m) \in M_{p\times 1}(\mathbb{C}),$$

така че $\varphi(u_j) = \sqrt{\langle \varphi(u_j), \varphi(u_j) \rangle_p}\, v_j$ за всички $1 \leq j \leq m$. Ако $q \geq p$, то допълваме $u_1, \ldots, u_m = u_p$ до произволен ортонормиран базис $u_1, \ldots, u_m, u_{m+1}, \ldots, u_q$ на $M_{q\times 1}(\mathbb{C})$ и представяме $\varphi : M_{q\times 1}(\mathbb{C}) \to M_{p\times 1}(\mathbb{C})$ с диагонална матрица D спрямо ортонормирания базис $u_1, \ldots, u_q$ на $M_{q\times 1}(\mathbb{C})$ и ортонормирания базис $v_1, \ldots, v_m = v_p$ на $M_{p\times 1}(\mathbb{C})$. В случая $q < p$ допълваме $v_1, \ldots, v_m = v_q \in M_{p\times 1}(\mathbb{C})$ до ортонормиран базис $v_1, \ldots, v_m, v_{m+1}, \ldots, v_p$ на $M_{p\times 1}(\mathbb{C})$ и представяме φ чрез диагонална матрица D спрямо $u_1, \ldots, u_q$ и $v_1, \ldots, v_p$. Матрицата на прехода B от стандартния ортонормиран базис на $M_{q\times 1}(\mathbb{C})$ към ортонормирания базис $u_1, \ldots, u_q$ е унитарна, както и матрицата на прехода $S \in U_p$ от стандартния ортонормиран базис на $M_{p\times 1}(\mathbb{C})$ към ортонормирания базис $v_1, \ldots, v_p$. Полагаме $A := S^{-1} = \overline{S}^t \in U_p$ и получаваме $D = S^{-1}XB = AXB$.

Нека

$$f(w) = \langle \varphi(w), \varphi(w) \rangle_p = \max_{s \in S^{2q-1}} \langle \varphi(s), \varphi(s) \rangle_p = \max_{s \in S^{2q-1}} f(s)$$

и $u \in M_{q\times 1}(\mathbb{C}) \setminus \{\mathbb{O}_{q\times 1}\}$, $\langle w, u \rangle_q = w_1\overline{u_1} + \ldots + w_q\overline{u_q} = 0$. Без ограничение на общността можем да считаме, че $u \in S^{2q-1}$ има единична дължина. Тогава за произволни $n \in \mathbb{N}$ и $\theta \in \mathbb{R}$, векторите

$$s(n,\theta) := \left(\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}\right) w + \left(\frac{e^{i\theta}}{n}\right) u$$

принадлежат на S^{2q-1}, съгласно

$$\langle s(n,\theta), s(n,\theta) \rangle_q =$$

$$= \left(\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\right)^2 \langle w, w \rangle_q + \sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\left(\frac{e^{-i\theta}}{n}\right)\langle w, u \rangle_q + \left(\frac{e^{i\theta}}{n}\right)\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\langle u, w \rangle_q + \frac{1}{n^2}\langle u, u \rangle_q =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{n^2} = 1.$$

Следователно

$$f(w) \geq f(s(n,\theta)) = \langle \varphi\left(\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}w + \frac{e^{i\theta}}{n}u\right), \varphi\left(\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}w + \frac{e^{i\theta}}{n}u\right)\rangle_p =$$

$$= \langle \sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\varphi(w) + \frac{e^{i\theta}}{n}\varphi(u), \sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\varphi(w) + \frac{e^{i\theta}}{n}\varphi(u)\rangle_p =$$

$$= \left(1-\frac{1}{n^2}\right)\langle \varphi(w), \varphi(w) \rangle_p + \frac{e^{i\theta}}{n}\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\langle \varphi(u), \varphi(w) \rangle_p +$$

$$+ \frac{e^{-i\theta}}{n}\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\langle \varphi(w), \varphi(u) \rangle_p + \frac{1}{n^2}\langle \varphi(u), \varphi(u) \rangle_p =$$

$$= \left(1-\frac{1}{n^2}\right) f(w) + \frac{1}{n^2} f(u) + \frac{e^{i\theta}}{n}\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\langle \varphi(u), \varphi(w) \rangle_p + \frac{e^{-i\theta}}{n}\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\overline{\langle \varphi(u), \varphi(w) \rangle_p} =$$

$$= \left(1-\frac{1}{n^2}\right) f(w) + \frac{1}{n^2} f(u) + 2\mathrm{Re}\left(\frac{e^{i\theta}}{n}\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\langle \varphi(u), \varphi(w) \rangle_p\right).$$

Оттук,

$$\frac{1}{n^2}(f(w) - f(u)) \geq 2\mathrm{Re}\left(\frac{e^{i\theta}}{n}\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\langle \varphi(u), \varphi(w) \rangle_p\right)$$

и след почленно умножение с n^2 имаме

$$f(w) - f(u) \geq 2\mathrm{Re}\left(e^{i\theta} n \sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\langle \varphi(u), \varphi(w) \rangle_p\right) = 2\mathrm{Re}\left(e^{i\theta}\sqrt{n^2-1}\langle \varphi(u), \varphi(w) \rangle_p\right).$$

Ако допуснем, че $\langle \varphi(u), \varphi(w) \rangle_p \in \mathbb{C}^*$ е ненулево комплексно число, то съществуват $r_o \in \mathbb{R}^{>0}$ и $\theta_o \in \mathbb{R}$ с $\langle \varphi(u), \varphi(w) \rangle_p = r_o e^{i\theta_o}$. Избираме $\theta := -\theta_o$ и получаваме

$$f(w) - f(u) \geq 2\mathrm{Re}\left(r_o \sqrt{n^2 - 1} \right) = 2r_o \sqrt{n^2 - 1}. \tag{2.2}$$

Да забележим, че $f(w) - f(u) \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ е неотрицателно реално число, което не зависи от $n \in \mathbb{N}$, а

$$\lim_{n \to \infty} 2r_o \sqrt{n^2 - 1} = +\infty.$$

Затова при граничен преход $n \to +\infty$ неравенството (2.2) дава $f(w) - f(u) \geq +\infty$, което е противоречие, доказващо $\langle \varphi(u), \varphi(w) \rangle_p = 0$. Това завършва доказателството на лемата.

□

Произволна ермитова форма $\mathcal{H} : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ има ермитова матрица χ спрямо ортонормиран базис $e_1, \ldots, e_n$ на $\mathbb{C}^n$. Характеристичните корени на χ са реални числа и независят от избора на $e_1, \ldots, e_n$. Казваме, че $\mathcal{H}$ е със сигнатура $(p, n-p)$ за някое $0 \leq p \leq n$, ако χ има p положителни и $n - p$ отрицателни характеристични корена. Ако

$$\mathcal{H}_{p,n+1-p} : M_{(n+1)\times 1}(\mathbb{C}) \times M_{(n+1)\times 1}(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

е ермитова форма със сигнатура $(p, n+1-p)$ за някое $1 \leq p \leq n$, то за всяко $x \in M_{(n+1)\times 1}(\mathbb{C})$ имаме $\overline{\mathcal{H}_{p,n+1-p}(x,x)} = \mathcal{H}_{p,n+1-p}(x,x) \in \mathbb{R}$. За произволно $\lambda \in \mathbb{C}^*$ е в сила

$$\mathcal{H}_{p,n+1-p}(\lambda x, \lambda x) = \lambda\overline{\lambda}\mathcal{H}_{p,n+1-p}(x,x) = |\lambda|^2 \mathcal{H}_{p,n+1-p}(x,x),$$

така че ермитовата форма $\mathcal{H}_{p,n+1-p}$ има един и същи знак във всички вектори от правата $l_{\mathbb{C}}(x)$ и можем да определим знака

$$\mathrm{sign}\mathcal{H}_{p,n+1-p}([x],[x]) \in \{\pm 1\} \quad \text{на} \quad [x] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C}), \quad \text{стига} \quad \mathcal{H}_{p,n+1-p}(x,x) \neq 0.$$

Ако $\mathcal{H}_{p,n+1-p}(x,x) = 0$, то $\mathcal{H}_{p,n+1-p}(\lambda x, \lambda x) = 0$ за $\forall \lambda \in \mathbb{C}^*$ и казваме, че правата $[x] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ е $\mathcal{H}_{P,n+1-p}$-изотропна.

Ако ермитовата матрица

$$\chi_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbb{O}_{1\times 2} \\ \mathbb{O}_{2\times 1} & -E_2 \end{pmatrix}$$

е диагонална, то групата $U_1 \times U_2$ има естествено влагане

$$i_1 : U_1 \times U_2 \longrightarrow U(1,2), \quad i_1(a,B) = \begin{pmatrix} a & \mathbb{O}_{1\times 2} \\ \mathbb{O}_{2\times 1} & B \end{pmatrix}$$

за всяко $a \in U_1 = \{a \in \mathbb{C} \,|\, |a| = 1\}$ и всяко $B \in U_2 = \{B \in M_{2\times 2}(\mathbb{C}) \,|\, \overline{B}^t B = E_2\}$. Аналогично, ако

$$\chi_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{то} \quad \chi_{1,2} = \begin{pmatrix} \chi_{1,1} & \mathbb{O}_{2\times 1} \\ \mathbb{O}_{1\times 2} & -1 \end{pmatrix}$$

и съществува естествено влагане

$$i_2 : U(1,1) \times U_1 \longrightarrow U(1,2), \quad i_2(P,q) = \begin{pmatrix} P & \mathbb{O}_{2\times 1} \\ \mathbb{O}_{1\times 2} & q \end{pmatrix}$$

за всички $P \in U(1,1) = \{P \in M_{2\times 2}(\mathbb{C}) \,|\, \overline{P}^t \chi_{1,1} P = \chi_{1,1}\}$ и $q \in U_1$.

Да напомним, че комплексно аналитична компонента X на реално аналитично многообразие Y е такова комплексно многообразие X, съдържащо се в Y, че за произволни точки $x_1, x_2 \in X$ съществува холоморфна крива $f : U \to X$ от околност U на $0 \in \mathbb{C}$ върху $\mathbb{C}$, чийто образ съдържа x_1 и x_2.

Следствие 2.2. *Нека $\mathcal{H} : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ е ермитова форма със сигнатура $(1,2)$ и матрица*

$$\chi_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{C})$$

спрямо ортонормиран базис на $\mathbb{C}^3$, M_+ е множеството на положителните прави $l_{\mathbb{C}}(v_+) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, $\mathcal{H}(v_+, v_+) > 0$ от $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, M_- е множеството на отрицателните прави $l_{\mathbb{C}}(v_-) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, $\mathcal{H}(v_-, v_-) < 0$, а M_0 е множеството на изотропните прави $l_{\mathbb{C}}(v_0) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, $\mathcal{H}(v_0, v_0) = 0$. Тогава:

$$\text{(i)} \quad M_+ = \mathbb{B} = \left\{ z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \in M_{2\times 1}(\mathbb{C}) \,\middle|\, 1 - \overline{z}^t z = 1 - |z_1|^2 - |z_2|^2 > 0 \right\}$$

е единичното кълбо и $U(1,2)$ действа транзитивно върху $\mathbb{B}$ със стабилизатори, изоморфни на $U_1 \times U_2$;

(ii) всеки елемент на $U(1,2)$ е от вида

$$\begin{pmatrix} a & \mathbb{O}_{1\times 2} \\ \mathbb{O}_{2\times 1} & B \end{pmatrix} C(z), \tag{2.3}$$

където

$$C(z) := \begin{pmatrix} (1 - \overline{z}^t z)^{-\frac{1}{2}} & \mathbb{O}_{1\times 2} \\ \mathbb{O}_{2\times 1} & (E_2 - z\overline{z}^t)^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\overline{z}^t \\ -z & E_2 \end{pmatrix} \in U(1,2), \tag{2.4}$$

$a \in U_1$, $B \in U_2$, $z \in \mathbb{B} = \{z \in M_{2\times 1}(\mathbb{C}) \,|\, \overline{z}^t z < 1\}$;

$$\text{(iii)} \quad M_0 = \partial\mathbb{B} = \left\{ z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \in M_{2\times 1}(\mathbb{C}) \,\middle|\, |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1 \right\},$$

е единичната сфера, $U(1,2)$ действа транзитивно върху $\partial\mathbb{B}$ и всяка точка на $\partial\mathbb{B}$ е комплексно аналитично изолирана;

(iv) $M_- = (\mathbb{C}^2 \setminus \overline{\mathbb{B}}) \coprod M_-^{\infty}$ е непресичащо се обединение на външността

$$\mathbb{C}^2 \setminus \overline{\mathbb{B}} = \{z \in M_{2\times 1}(\mathbb{C}) \,|\, 1 - \overline{z}^t z < o\}$$

на затвореното кълбо $\overline{\mathbb{B}} = \mathbb{B} \coprod \partial\mathbb{B}$ *с*

$$M_-^{\infty} := \left\{ l_{\mathbb{C}} \left(\begin{array}{c} 0 \\ y \end{array} \right) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \,|\, y \in M_{2\times 1}(\mathbb{C}) \setminus \{\mathbb{O}_{2\times 1}\} \right\} \simeq \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$$

и $U(1,2)$ *действа транзитивно върху* M_- *със стабилизатори, които са изоморфни на* $U(1,1) \times U_1$.

Доказателство. Унитарното пространство $\mathbb{C}^3$ има ортонормиран базис α, β_1, β_2, в който ермитовата матрица

$$\chi_{1,2} = \left(\begin{array}{cc} 1 & \mathbb{O}_{1\times 2} \\ \mathbb{O}_{2\times 1} & -E_2 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

е диагонална. Навсякъде в доказателството на Следствие 2.2 ще работим в координатите $x \in M_{3\times 1}(\mathbb{C})$ спрямо този ортонормиран базис. За произволна права $l_{\mathbb{C}}(x) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, породена от ненулев вектор

$$x = \left(\begin{array}{c} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{array} \right) \in M_{3\times 1}(\mathbb{C}) \setminus \{\mathbb{O}_{3\times 1}\}$$

и произволен елемент $A \in U(1,2)$ е в сила

$$\mathcal{H}_{1,2}(Ax, Ax) = \overline{(Ax)}^t \chi_{1,2}(Ax) = \overline{x}^t \overline{A}^t \chi_{1,2} A x = \overline{x}^t \chi_{1,2} x = \mathcal{H}_{1,2}(x,x).$$

Затова действието

$$U(1,2) \times \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C}), \quad (A, l_{\mathbb{C}}(x)) \mapsto l_{\mathbb{C}}(Ax), \quad \forall A \in U(1,2), \quad \forall l_{\mathbb{C}}(x) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$$

на $U(1,2)$ върху $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ се ограничава до действие

$$U(1,2) \times M_+ \longrightarrow M_+$$

върху множеството M_+ на $\mathcal{H}_{1,2}$-положителните прави от $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. Аналогично, имаме действие

$$U(1,2) \times M_0 \longrightarrow M_0$$

на $U(1,2)$ върху множеството M_0 на $\mathcal{H}_{1,2}$-изотропните прави и действие

$$U(1,2) \times M_- \longrightarrow M_-$$

върху множеството M_- на $\mathcal{H}_{1,2}$-отрицателните прави.

Права $l_{\mathbb{C}}(x) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, $x \in M_{3\times 1}(\mathbb{C}) \setminus \{\mathbb{O}_{3\times 1}\}$ е положителна спрямо $\mathcal{H}_{1,2}$ тогава и само тогава, когато

$$\mathcal{H}_{1,2}(x,x) = \overline{x}^t \chi_{1,2} x = |x_0|^2 - |x_1|^2 - |x_2|^2 > 0.$$

Ако допуснем съществуването на $l_{\mathbb{C}}(x) \in M_+$ с $x_0 = 0$, то $0 \geq -|x_1|^2 - |x_2|^2 > 0$ е противоречие. Следователно M_+ се съдържа изцяло в афинното отворено множество

$$U_0 = \{l_{\mathbb{C}}(x) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \,|\, x_0 \neq 0\} = \left\{ l_{\mathbb{C}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{x_1}{x_0} \\ \frac{x_2}{x_0} \end{pmatrix} \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \,\middle|\, \begin{pmatrix} \frac{x_1}{x_0} \\ \frac{x_2}{x_0} \end{pmatrix} \in M_{2\times 1}(\mathbb{C}) \right\} \simeq M_{2\times 1}(\mathbb{C}).$$

За

$$l_{\mathbb{C}}(x) = l_{\mathbb{C}} \begin{pmatrix} 1 \\ z \end{pmatrix} \quad \text{с} \quad z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \in M_{2\times 1}(\mathbb{C})$$

условието $l_{\mathbb{C}}(x) \in M_+$ е еквивалентно на $1 - |z_1|^2 - |z_2|^2 > 0$ и $M_+ = \mathbb{B}$ съвпада с отвореното кълбо в $\mathbb{C}^2$ с център $(0,0) \in \mathbb{C}^2$ и радиус 1.

Условието $l_{\mathbb{C}}(x) \in M_0$ е еквивалентно на $\mathcal{H}_{1,2}(x,x) = |x_0|^2 - |x_1|^2 - |x_2|^2 = 0$. Ако допуснем, че $x_0 = 0$, то $|x_1|^2 + |x_2|^2 = 0$ изисква $x_1 = x_2 = 0$ и $x = \mathbb{O}_{3\times 1}$. Това противоречи на $l_{\mathbb{C}}(x) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ и доказва, че множеството $M_0 \subset U_0$ на $\mathcal{H}_{1,2}$-изотропните прави в $\mathbb{C}^3$ се съдържа изцяло в U_0. В резултат, всяка точка от M_0 има представител $\begin{pmatrix} 1 \\ z \end{pmatrix}$ с $z \in M_{2\times 1}(\mathbb{C})$, така че $1 - |z_1|^2 - |z_2|^2 = 0$ и

$$z \in \partial\mathbb{B} = \left\{ z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \in M_{2\times 1}(\mathbb{C}) \,\middle|\, |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1 \right\}.$$

Да забележим, че допълнението

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \setminus U_0 = \left\{ l_{\mathbb{C}} \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \,\middle|\, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \neq \mathbb{O}_{2\times 1} \right\}$$

се състои от отрицателни прави, защото

$$\mathcal{H}_{1,2}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) = -|x_1|^2 - |x_2|^2 < 0$$

за $(x_1, x_2) \neq (0,0)$. Затова означаваме $M_-^{\infty} := \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \setminus U_0 \simeq \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Права

$$l_{\mathbb{C}} \begin{pmatrix} 1 \\ z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \in U_0 \cap M_-$$

е отрицателна относно $\mathcal{H}_{1,2}$ точно когато

$$\mathcal{H}_{1,2}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \right) = 1 - |z_1|^2 - |z_2|^2 < 0$$

и точката $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \in M_{2\times 1}(\mathbb{C}) \setminus \overline{\mathbb{B}}$ е извън затвореното кълбо

$$\overline{\mathbb{B}} = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \in M_{2\times 1}(\mathbb{C}) \,\middle|\, |z_1|^2 + |z_2|^2 \leq 1 \right\}.$$

За произволно $z_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{B}$, $|x_0|^2 + |y_0|^2 < 1$ да забележим, че $1 - \overline{z_0}^t z_0 = 1 - |x_0|^2 - |y_0|^2 \in \mathbb{R}^{>0}$ е положително реално число и съществува

$$\alpha := \left(1 - \overline{z_0}^t z_0\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \overline{z_o}^t z_0}} \in \mathbb{R}^{>0}.$$

За да проверим положителната определеност на ермитовата матрица $E_2 - z_0 \overline{z_0}^t$ използваме Лема 2.1 на Мок, съгласно която съществуват унитарна матрица $u_2 \in U_2$ и $u_1 \in U_1 = S^1 = \{\xi \in \mathbb{C} \,|\, |\xi| = 1\}$ с

$$u_2 z_0 u_1 = \begin{pmatrix} s_0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{за някакво} \quad s_0 \in \mathbb{C}.$$

Съгласно $\overline{(u_2 u_1)}^t (u_2 u_1) = \overline{u_1}\,\overline{u_2}^t u_2 u_1 = |u_1|^2 (\overline{u_2}^t u_2) = E_2$, матрицата $u_2 u_1 \in U_2$ е унитарна. Ако

$$u_2' := u_2 u_1 \in U_2, \quad \text{то} \quad u_2' z_0 = \begin{pmatrix} s_0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Полагаме $w_2 := (u_2')^{-1} = \overline{u_2'}^t \in U_2$, за да изразим $z_0 = w_2 \begin{pmatrix} s_0 \\ 0 \end{pmatrix}$ и да пресметнем

$$E_2 - z_0 \overline{z_0}^t = E_2 - w_2 \begin{pmatrix} s_0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{s_0} & 0 \end{pmatrix} \overline{w_2}^t =$$

$$= w_2 \left(E_2 - \begin{pmatrix} |s_0|^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \overline{w_2}^t = w_2 \begin{pmatrix} 1 - |s_0|^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \overline{w_2}^t,$$

$$1 - \overline{z_0}^t z_0 = 1 - \begin{pmatrix} \overline{s_0} & 0 \end{pmatrix} \overline{w_2}^t w_2 \begin{pmatrix} s_0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 - \begin{pmatrix} \overline{s_0} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 - |s_0|^2.$$

Следователно $s_0 \in \Delta := \{s \in \mathbb{C} \,|\, |s| < 1\}$ принадлежи на единичния диск и $1 - |s_0|^2, 1 \in \mathbb{R}^{>0}$ са положителни реални числа. Оттук,

$$(E_2 - z_0 \overline{z_0}^t)^{-1} = w_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{1 - |s_0|^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \overline{w_2}^t$$

и можем да определим

$$\beta := (E_2 - z_0 \overline{z_0}^t)^{-\frac{1}{2}} = w_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1 - |s_0|^2}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \overline{w_2}^t.$$

Непосредствено се вижда, че $\beta = \overline{\beta}^t \in U_2$. Матрицата

$$C(z_0) = \begin{pmatrix} \alpha & \mathbb{O}_{1\times 2} \\ \mathbb{O}_{2\times 1} & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\overline{z_o}^t \\ -z_0 & E_2 \end{pmatrix}$$

принадлежи на $U(1,2)$ точно когато

$$\overline{C(z_0)}^t \chi_{1,2} C(z_0) = \begin{pmatrix} 1 & -\overline{z_0}^t \\ -z_0 & E_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & 0 \\ 0 & -\overline{\beta}^t \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\overline{z_0}^t \\ -z_0 & E_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha^2 - \overline{z_0}^t \beta^2 z_0 & -\alpha^2 \overline{z_0}^t + \overline{z_0}^t \beta^2 \\ -z_0\alpha^2 + \beta^2 z_0 & z_0 \overline{z_0}^t \alpha^2 - \beta^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -E_2 \end{pmatrix}.$$

Това е еквивалентно на едновременното изпълнение на равенствата

$$\alpha^2 - \overline{z_0}^t \beta^2 z_0 = 1, \tag{2.5}$$

$$\beta^2 z_0 - z_0 \alpha^2 = \mathbb{O}_{2\times 1} \quad \text{и} \tag{2.6}$$

$$\beta^2 - \alpha^2 z_0 \overline{z_0}^t = E_2. \tag{2.7}$$

Съгласно

$$\beta^2 = w_2 \begin{pmatrix} (1-|s_0|^2)^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} w_2^{-1} \quad \text{и} \quad z_0 = w_2 \begin{pmatrix} s_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

с $w_2 \in U_2$, пресмятаме, че

$$\alpha^2 - \overline{z_0}^t \beta^2 z_0 = (1 - \overline{z_0}^t z_0)^{-1} - \begin{pmatrix} \overline{s_0} & 0 \end{pmatrix} \overline{w_2}^t w_2 \begin{pmatrix} (1-|s_0|^2)^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \overline{w_2}^t w_2 \begin{pmatrix} s_0 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= (1-|s_0|^2)^{-1} - \begin{pmatrix} \overline{s_0} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1-|s_0|^2)^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_0 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= (1-|s_0|^2)^{-1} - \begin{pmatrix} \overline{s_0}(1-|s_0|^2)^{-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_0 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= (1-|s_0|^2)^{-1} - |s_0|^2 (1-|s_0|^2)^{-1} = (1-|s_0|^2)^{-1}(1-|s_0|^2) = 1,$$

$$\beta^2 z_0 - z_0 \alpha^2 = w_2 \begin{pmatrix} (1-|s_0|^2)^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \overline{w_2}^t w_2 \begin{pmatrix} s_0 \\ 0 \end{pmatrix} - w_2 \begin{pmatrix} s_0 \\ 0 \end{pmatrix} (1-|s_0|^2)^{-1} =$$

$$= w_2 \begin{pmatrix} s_0(1-|s_0|^2)^{-1} \\ 0 \end{pmatrix} - w_2 \begin{pmatrix} s_0(1-|s_0|^2)^{-1} \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbb{O}_{2\times 1}$$

и

$$\beta^2 - \alpha^2 z_0 \overline{z_0}^t = w_2 \begin{pmatrix} (1-|s_0|^2)^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \overline{w_2}^t - (1-|s_0|^2)^{-1} w_2 \begin{pmatrix} s_0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{s_0} & 0 \end{pmatrix} \overline{w_2}^t =$$

$$= w_2 \begin{pmatrix} \left[(1-|s_0|^2)^{-1} - (1-|s_0|^2)^{-1}|s_0|^2\right] & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \overline{w_2}^t = w_2 E_2 \overline{w_2}^t = E_2.$$

Това доказва, че всяка матрица $C(z)$, $z \in \mathbb{B}$ от вида (2.4) принадлежи на $U(1,2)$. Непосредствено се вижда, че $C(z) \in U(1,2)$ трансформира точката $\begin{pmatrix} 1 \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{B}$ в началото

$$C(z)\begin{pmatrix} 1 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-\overline{z}^t z)^{-\frac{1}{2}} & \mathbb{O}_{1\times 2} \\ \mathbb{O}_{2\times 1} & (E_2 - z\overline{z}^t)^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\overline{z}^t \\ -z & E_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ z \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} (1-\overline{z}^t z)^{-\frac{1}{2}} & \mathbb{O}_{1\times 2} \\ \mathbb{O}_{2\times 1} & (E_2 - z\overline{z}^t)^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-\overline{z}^t z \\ \mathbb{O}_{2\times 1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-\overline{z}^t z)^{\frac{1}{2}} \\ \mathbb{O}_{2\times 1} \end{pmatrix} \in \mathbb{B}.$$

Затова действието на $U(1,2)$ върху $\mathbb{B}$ е транзитивно. Стабилизаторът на началото

$$\check{o} = l_{\mathbb{C}}\begin{pmatrix} 1 \\ \mathbb{O}_{2\times 1} \end{pmatrix} \in \mathbb{B}$$

в $U(1,2)$ е състои от матриците

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \in U(1,2)$$

с $A_{11} \in \mathbb{C}$, $A_{12} \in M_{1\times 2}(\mathbb{C})$, $A_{21} \in M_{2\times 1}(\mathbb{C})$, $A_{22} \in M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ и

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ \mathbb{O}_{2\times 1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \mathbb{O}_{2\times 1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} \\ \mathbb{O}_{2\times 1} \end{pmatrix}, \quad A_{11} \neq 0.$$

От $A_{21} = \mathbb{O}_{2\times 1}$ и

$$\overline{A}^t \chi_{1,2} A = \begin{pmatrix} |A_{11}|^2 & \overline{A_{11}} A_{12} \\ \overline{A_{12}}^t A_{11} & \left(\overline{A_{12}}^t A_{12} - \overline{A_{22}}^t A_{22}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -E_2 \end{pmatrix} = \chi_{1,2}$$

следва $|A_{11}| = 1$, $A_{12} = \mathbb{O}_{1\times 2}$, $\overline{A_{22}}^t A_{22} = E_2$, така че

$$\mathrm{Stab}_{U(1,2)}(\check{o}) = i_1(U_1 \times U_2)$$

е образът на $U_1 \times U_2$ под действие на естественото влагане i_1 в $U(1,2)$. Съгласно транзитивността на действието на $U(1,2)$ върху $\mathbb{B}$, всяка точка $l_{\mathbb{C}}\begin{pmatrix} 1 \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{B}$ е от вида $B\check{o}$ за подходящо $B \in U(1,2)$ и стабилизаторът

$$\mathrm{Stab}_{U(1,2)}(B\check{o}) = B\mathrm{Stab}_{U(1,2)}(\check{o})B^{-1} = Bi_1(U_1 \times U_2)B^{-1}$$

на $B\check{o} \in \mathbb{B}$ в $U(1,2)$ е изоморфен на $U_1 \times U_2$. Това доказва (i).

За произволни $a \in U_1$ и $B \in U_2$ знаем, че

$$i_1(a,B) = \begin{pmatrix} a & \mathbb{O}_{1\times 2} \\ \mathbb{O}_{2\times 1} & B \end{pmatrix} \in U(1,2).$$

Проверихме също, че $C(z) \in U(1,2)$ за всяко $z \in \mathbb{B}$ и $C(z)$ от (2.4). Следователно всяка матрица от вида (2.3) принадлежи на $U(1,2)$. Обратно, ако $A \in U(1,2)$, то $z := A^{-1}\check{o} \in \mathbb{B}$ е точка с $Az = \check{o}$. Вземайки предвид $C(z)z = \check{o}$, пресмятаме че $AC(z)^{-1}\check{o} = Az = \check{o}$ и стигаме до извода, че $AC(z)^{-1} \in \mathrm{Stab}_{U(1,2)}(\check{o}) = i_1(U_1 \times U_2)$. Следователно $A \in i_1(U_1 \times U_2)C(z)$ има вида (2.3). Това установява верността на (ii).

(iii) Произволна изотропна права в $\mathbb{C}^3$ има пораждащ от вида

$$\begin{pmatrix} 1 \\ z \end{pmatrix} \quad \text{с} \quad z \in M_{2\times 1}(\mathbb{C}), \quad |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1.$$

Съгласно Лема 2.1, съществуват унитарни матрици $B \in U_2$ и $a \in U_1$, така че $Bza = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ за някое $x \in \mathbb{C}$. Вземайки предвид колинеарността на векторите

$$\begin{pmatrix} a^{-1} & \mathbb{O}_{1\times 2} \\ \mathbb{O}_{2\times 1} & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{-1} \\ Bz \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ Bza \end{pmatrix},$$

както и

$$\begin{pmatrix} a^{-1} & \mathbb{O}_{1\times 2} \\ \mathbb{O}_{2\times 1} & B \end{pmatrix} \in U(1,2),$$

стигаме до извода, че всяка $U(1,2)$-орбита върху $\partial\mathbb{B}$ има представител от вида

$$l_{\mathbb{C}} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{с} \quad x \in \mathbb{C}, \quad |x|^2 = 1.$$

Съгласно $x \in U_1$ имаме

$$A_x := \begin{pmatrix} x^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in i_1(U_1 \times U_2) < U(1,2)$$

и

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = A_x \begin{pmatrix} x \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = xA_x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Следователно $l_{\mathbb{C}} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$ е в $U(1,2)$-орбитата на $l_{\mathbb{C}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и всяка гранична точка

$$l_{\mathbb{C}} \begin{pmatrix} 1 \\ z \end{pmatrix} \in \partial\mathbb{B} \quad \text{с} \quad z \in M_{2\times 1}(\mathbb{C}), \quad |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$$

принадлежи на $U(1,2)$-орбитата на правата

$$l_{\mathbb{C}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \partial\mathbb{B},$$

която отговаря на точката $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in U_0 \cap M_0$ от афинното координатно множество U_0.

Въз основа на транзитивността на действието на $U(1,2)$ върху $\mathbb{B}$, достатъчно е да докажем, че точката

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \partial\mathbb{B} = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \in M_{2\times 1}(\mathbb{C}) \,\middle|\, |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1 \right\}$$

е комплексно аналитично изолирана в $\partial\mathbb{B}$, за да твърдим че всяка точка на $\partial\mathbb{B}$ образува комплексно аналитична компонента. За целта да допуснем противното и да разгледаме непостоянно холоморфно изображение

$$f : W \longrightarrow \partial\mathbb{B} \cap U_0 \subset \mathbb{C}^2, \quad f(w) = \begin{pmatrix} f_1(w) \\ f_2(w) \end{pmatrix}, \quad \forall w \in W$$

на околност $W \subset \mathbb{C}$ на $0 \in \mathbb{C}$ върху $\mathbb{C}$ с $f(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. След евентуално свиване на W можем да предполагаме, че f е определено и върху границата ∂W на W. За всяка точка $\zeta \in \partial W$ съществува сходяща редица $\{w_n\}_{n=1}^{\infty} \subset W$ с граница $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = \zeta$. Холоморфното изображение $f : \overline{W} = W \cup \partial W \to \mathbb{C}$ е непрекъснато и при граничен преход $n \to \infty$ в равенствата $|f_1(w_n)|^2 + |f_2(w_n)|^2 = 1$ получаваме $|f_1(\zeta)|^2 + |f_2(\zeta)|^2 = 1$. Това доказва $f(\partial W) \subset \partial\mathbb{B}$. Да забележим, че холоморфната функция $f_1 : \overline{W} \to \mathbb{C}$ е непостоянна. В противен случай, от $|f_1(w)|^2 + |f_2(w)|^2 = 1$ за $\forall w \in \overline{W}$ с $f_1(0) = 1$ следва, че $f_1 \equiv 1 : \overline{W} \to \mathbb{C}$ и $f_2 \equiv 0 : \overline{W} \to \mathbb{C}$ са постоянни функции и

$$f : \overline{W} \longrightarrow \partial\mathbb{B} \cap U_0$$

е постоянно изображение, противно на предположението. Принципът за максимума на модула на холоморфна функция изисква

$$\sup_{\zeta \in \partial W} |f_1(\zeta)| > |f_1(0)| = 1,$$

защото $0 \in W$ е вътрешна точка. Поради компактността на ∂W съществува точка $\zeta_0 \in \partial W$, в която се достига

$$\sup_{\zeta \in \partial W} |f_1(\zeta)| = |f(\zeta_0|.$$

В резултат, $|f_1(\zeta_0)| > 1$ противоречи на $|f_1(\zeta_0)|^2 + |f_2(\zeta_0)|^2 = 1$ и доказва, че произволна локална холоморфна крива $f : W \to U_0 \cap \partial\mathbb{B}$ е постоянна.

(iv) Произволна $\mathcal{H}_{1,2}$-отрицателна права $l_{\mathbb{C}} \begin{pmatrix} 1 \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \setminus \mathbb{B}$ с $z \in M_{2\times 1}(\mathbb{C})$, $\overline{z}^t z = |z_1|^2 + |z_2|^2 > 1$ от афинното координатно множество $U_0 \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ отговаря на $\mathcal{H}_{1,2}$-положителна права

$$l_{\mathbb{C}} \begin{pmatrix} 1 \\ x(z) \end{pmatrix} \in \mathbb{B} \quad \text{с} \quad x(z) := \frac{1}{\overline{z}^t z} z = \frac{1}{|z_1|^2 + |z_2|^2} z,$$

съгласно $\overline{x(z)}^t x(z) = \frac{1}{\overline{z}^t z} < 1$. По Лема 2.1 на Мок съществува $B \in U_2$ с

$$z = B\begin{pmatrix} w \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{за някое} \quad w \in \mathbb{C} \quad \text{с} \quad |w|^2 > 1.$$

Пресмятаме

$$\overline{z}^t z = |w|^2, \quad x(z) = \frac{1}{|w|^2} B\begin{pmatrix} w \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\overline{x(z)}^t x(z) = \frac{1}{|w|^2}, \quad x(z)\overline{x(z)}^t = B\begin{pmatrix} \frac{1}{|w|^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\overline{B}^t,$$

$$E_2 - x(z)\overline{x(z)}^t = BE_2\overline{B}^t - x(z)\overline{x(z)}^t =$$

$$= B\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{|w|^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]\overline{B}^t = B\begin{pmatrix} \frac{|w|^2-1}{|w|^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\overline{B}^t$$

и забелязваме, че $C(x(z))$ от (2.4) приема вида

$$C(x(z)) =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{|w|}{\sqrt{|w|^2-1}} & \mathbb{O}_{1\times 2} \\ \mathbb{O}_{2\times 1} & B\begin{pmatrix} \frac{|w|}{\sqrt{|w|^2-1}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\overline{B}^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{|w|^2}\begin{pmatrix} \overline{w} & 0 \end{pmatrix}\overline{B}^t \\ -\frac{1}{|w|^2}B\begin{pmatrix} w \\ 0 \end{pmatrix} & E_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{|w|}{\sqrt{|w|^2-1}} & -\frac{1}{|w|\sqrt{|w|^2-1}}\begin{pmatrix} \overline{w} & 0 \end{pmatrix}\overline{B}^t \\ -\frac{1}{|w|\sqrt{|w|^2-1}}B\begin{pmatrix} w \\ 0 \end{pmatrix} & B\begin{pmatrix} \frac{|w|}{\sqrt{|w|^2-1}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\overline{B}^t \end{pmatrix}.$$

В резултат,

$$C(x(z))\begin{pmatrix} 1 \\ B\begin{pmatrix} w \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{|w|}{\sqrt{|w|^2-1}} - \frac{1}{|w|\sqrt{|w|^2-1}}\begin{pmatrix} \overline{w} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w \\ 0 \end{pmatrix} \\ * \\ * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ * \\ * \end{pmatrix} \in M_-^{\infty}$$

и всяка $U(1,2)$-орбита върху M_- пресича

$$M_-^{\infty} = \left\{ l_{\mathbb{C}}\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \,\middle|\, y \in M_{2\times 1}(\mathbb{C}) \setminus \{\mathbb{O}_{2\times 1}\} \right\} \simeq$$
$$\simeq \left\{ l_{\mathbb{C}}(y) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \,|\, y \in M_{2\times 1}(\mathbb{C}) \setminus \{\mathbb{O}_{2\times 1}\} \right\} = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}).$$

От съществуването на естествено влагане

$$U_2 \longrightarrow U(1,2), \quad B \mapsto \begin{pmatrix} 1 & \mathbb{O}_{1\times 2} \\ \mathbb{O}_{2\times 1} & B \end{pmatrix}$$

и транзитивността на действието на

$$U_2 := \{B \in M_{2\times 2}(\mathbb{C}) \,|\, \overline{B}^t B = E_2\}$$

върху $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ следва транзитивността на действието на $U(1,2)$ върху M_-. По-точно, действието

$$U_2 \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C}), \quad (B, l_{\mathbb{C}}(y)) \mapsto l_{\mathbb{C}}(By), \quad \forall l_{\mathbb{C}}(y) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$$

на U_2 върху $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ е индуцирано от действието

$$U_2 \times \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2, \quad (B, y) \mapsto By, \quad \forall y \in M_{2\times 1}(\mathbb{C})$$

върху двумерното линейно пространство $M_{2\times 1}(\mathbb{C})$ над $\mathbb{C}$. Достатъчно е да проверим, че за произволни вектори

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \in M_{2\times 1}(\mathbb{C}) \setminus \{\mathbb{O}_{2\times 1}\}$$

с една и съща дължина $||y|| = \sqrt{|y_1|^2 + |y_2|^2} = \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2} = ||z||$ съществува $B \in U_2$ с $By = z$, за да получим транзитивността на действието на U_2 върху $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. За целта разглеждаме y и z като координати на вектори v, съответно, w спрямо стандартния ортонормиран базис на $M_{2\times 1}(\mathbb{C})$, в който скаларното произведение е

$$\langle\ ,\ \rangle : M_{2\times 1}(\mathbb{C}) \times M_{2\times 1}(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C},$$

$$\langle a, b\rangle = \overline{a_1} b_1 + \overline{a_2} b_2, \quad \forall a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in M_{2\times 1}(\mathbb{C}).$$

Достатъчно е да построим унитарен оператор $\varphi : M_{2\times 1}(\mathbb{C}) \to M_{2\times 1}(\mathbb{C})$ с $\varphi(v) = w$, за да получим, че матрицата $B \in M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ на φ спрямо стандартния ортонормиран базис е унитарна и $By = z$. За целта разглеждаме единичните вектори

$$e_1 := \frac{1}{||v||} v, \quad f_1 := \frac{1}{||w||} w = \frac{1}{||v||} w \in M_{2\times 1}(\mathbb{C}),$$

колинеарни на v, съответно, w. Допълваме e_1 до ортонормиран базис e_1, e_2 на $M_{2\times 1}(\mathbb{C})$ и f_1 до ортонормиран базис f_1, f_2 на $M_{2\times 1}(\mathbb{C})$. Операторът $\varphi : M_{2\times 1}(\mathbb{C}) \to M_{2\times 1}(\mathbb{C})$ с $\varphi(e_1) = f_1$ и $\varphi(e_2) = f_2$ е унитарен и трансформира вектора $v = ||v|| e_1$ във вектора $\varphi(v) = ||v|| \varphi(e_1) = ||v|| f_1 = w$. Това доказва транзитивността на действието на $U(1,2)$ върху M_-^{∞} и M_-.

За произволна отрицателна права $l_{\mathbb{C}}(x) \in M_-$, $x \in M_{2\times 1}(\mathbb{C}) \setminus \{\mathbb{O}_{2\times 1}\}$ съществуват матрица $A \in U(1,2)$ и ненулево комплексно число $\lambda \in \mathbb{C}^*$, така че

$$x = A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix}, \quad l_{\mathbb{C}}(x) = l_{\mathbb{C}} \left(A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix} \right)$$

и

$$\mathrm{Stab}_{U(1,2)} l_{\mathbb{C}}(x) = A \left[\mathrm{Stab}_{U(1,2)} l_{\mathbb{C}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix} \right] A^{-1} = A \left[\mathrm{Stab}_{U(1,2)} l_{\mathbb{C}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] A^{-1}.$$

Затова е достатъчно да проверим, че

$$\mathrm{Stab}_{U(1,2)} l_{\mathbb{C}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \simeq U(1,1) \times U_1,$$

за да завършим доказателството на следствието. Матрица $A = (a_{ij})_{i,j=1}^3 \in U(1,2)$ изпълнява равенството

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} \quad \text{за някое} \quad \lambda \in \mathbb{C}^*$$

тогава и само тогава, когато $a_{13} = a_{23} = 0$ и $a_{33} \in \mathbb{C}^*$. В резултат, $\overline{A}^t \chi_{1,2} A = \chi_{1,2}$ приема вида

$$\begin{pmatrix} (|a_{11}|^2 - |a_{21}|^2 - |a_{31}|^2) & (\overline{a_{11}} a_{12} - \overline{a_{21}} a_{22} - \overline{a_{31}} a_{32}) & -\overline{a_{31}} a_{33} \\ (\overline{a_{12}} a_{11} - \overline{a_{22}} a_{21} - \overline{a_{32}} a_{31}) & (|a_{12}|^2 - |a_{22}|^2 - |a_{32}|^2) & -\overline{a_{32}} a_{33} \\ -\overline{a_{33}} a_{31} & -\overline{a_{33}} a_{32} & -|a_{33}|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

и се оказва еквивалентно на

$$a_{31} = a_{32} = 0, \quad |a_{33}| = 1, \quad |a_{11}|^2 - |a_{21}|^2 = 1, \quad \overline{a_{11}} a_{12} - \overline{a_{21}} a_{22} = 0, \quad |a_{12}|^2 - |a_{22}|^2 = -1.$$

Следователно $A \in \mathrm{Stab}_{U(1,2)} l_{\mathbb{C}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ точно когато

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \quad \text{за} \quad B := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{C})$$

$$\text{с} \quad \overline{B}^t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad a_{33} \in U_1.$$

По този начин доказахме, че

$$\mathrm{Stab}_{U(1,2)} l_{\mathbb{C}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \simeq U(1,1) \times U_1.$$

□

За да изучим стабилизаторите на изотропните прави $z \in \partial\mathbb{B}$ и да построим тороидалната компактификация на дискретен фактор на $\mathbb{B}$ да напомним, че група G е разрешима, ако съществува крайна редица

$$G = G_0 > G_1 > \ldots > G_i > G_{i+1} > \ldots > G_{n-1} > G_n = \{e\}$$

от подгрупи G_j на G, така че G_{i+1} е нормална подгрупа на G_i с абелева фактор-група G_i/G_{i+1} за всички $0 \leq i \leq n-1$. Навсякъде в нашите разглеждания, под подгрупа H на група на Ли G ще разбираме подгрупа на Ли, т.е. H е гладко подмногообразие на G, което е затворено относно груповата операция в G и относно обръщането на елементи на G. Ако H не е група на Ли, ще е казано изрично. Разрешимият радикал R на група на Ли G е максималната свързана разрешима нормална подгрупа R на G. Неабелева свързана група на Ли S е проста, ако няма нетривиални свързани нормални подгрупи, различни от S и от $\{e\}$. Група на Ли S е полу-проста, ако има локално представяне $S = S_1 \times \ldots \times S_k$ като крайно директно произведение на свои прости нормални подгрупи S_i. Група $G = G_1 \rtimes G_2$ е полу-директно произведение на своя нормална подгрупа G_1 и подгрупа G_2, ако всеки елемент $g \in G$ има единствено представяне $g = g_1 g_2$ като произведение на $g_1 \in G_1$ и $g_2 \in G_2$. Груповият закон в полу-директно произведение се определя от груповите операции в G_1, G_2 и спрягането на елементите на G_1 с елементите на G_2, т.е.

$$(g_1 g_2)(h_1 h_2) = [g_1(g_2 h_1 g_2^{-1})](g_2 h_2) \quad \text{за} \quad \forall g_1, h_1 \in G_1, \quad \forall g_2, h_2 \in G_2$$

с $g_1(g_2 h_1 g_2^{-1}) \in G_1$, $g_2 h_2 \in G_2$. Нека G е група на Ли с разрешим радикал R. Всяка максимална полу-проста подгрупа на Ли S на G, която позволява представяне $G = R \rtimes S$ като полу-доректно произведение на R и S се нарича подгрупа на Леви на G.

Матрична група на Ли $G < \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ е унипотентна, ако за $\forall g \in G$ и за единичната матрица $E_n \in G$ разликата $E_n - g \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ е нилпотентна матрица, т.е. съществува $m = m(g) \in \mathbb{N}$ с $(E_n - g)^{m(g)} = \mathbb{O}_{n \times n}$. Максималната свързана унипотентна нормална подгрупа N на матрична група на Ли G се нарича унипотентен радикал на G. Група на Ли L е редуктивна, ако фактор-групата $L/Z(L)$ на L по нейния център

$$Z(L) := \{z \in L \,|\, zl = lz, \, \forall l \in L\}$$

е полу-проста. Ако G е матрична група на Ли с унипотентен радикал N, то всяка максимална редуктивна подгрупа L на G задава представяне $G = N \rtimes L$ на G като полу-директно произведение на унипотентния радикал N и L. Разрешимият радикал R на матрична група на Ли G е полу-директно произведение $R = N \rtimes Z(L)$ на унипотентния радикал N на G и центъра $Z(L)$ на максимална редуктивна подгрупа $L \leq G$.

Нека G е група на Ли. Максималните свързани разрешими подгрупи B на G се наричат подгрупи на Борел. Собствена подгрупа $P < G$ е параболична, ако съдържа подгрупа на Борел. От горното определение е ясно, че минималните параболични подгрупи на G са точно подгрупите на Борел.

Алгебра на Ли над $\mathbb{R}$ или над $\mathbb{C}$ е $\mathbb{R}$-линейно, съответно, $\mathbb{C}$-линейно пространство с бинарна операция

$$\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}, \quad (a, b) \mapsto [a, b],$$

изпълняваща равенствата

$$[b,a] = -[a,b] \quad \text{за} \quad \forall a,b \in \mathfrak{g} \quad \text{и}$$

$$[a,[b,c]] + [b,[c,a]] + [c,[a,b]] = 0 \quad \text{за} \quad \forall a,b,c \in \mathfrak{g}.$$

Квадратните матрици $M_{n\times n}(F)$ с елементи от полето $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ образуват алгебра на Ли относно операцията

$$[A,B] := AB - BA \quad \text{за} \quad \forall A,B \in M_{n\times n}(F),$$

която се бележи с $M^-_{n\times n}(F)$. Допирателното пространство $\mathfrak{g} = T_e^{\mathbb{R}}G$ на група на Ли G в нейния неутрален елемент $e \in G$ е алгебра на Ли, която се бележи с $\mathrm{Lie}(G)$. Ако $G < \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ е матрична група на Ли, то алгебрата на Ли $\mathrm{Lie}(G)$ на G е подалгебра на $M^-_{n\times n}(\mathbb{C})$. Експонентата на матрица

$$\exp : \mathrm{Lie}(G) \longrightarrow G, \quad \exp(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$$

изобразява алгебрата на Ли на матричната група на Ли G в G. Експоненциалното изображение $\exp : \mathrm{Lie}(G) \to G$ е локален дифеоморфизъм на околност на $\mathbb{O}_{n\times n} \in \mathrm{Lie}(G)$ върху $\mathrm{Lie}(G)$ върху околност на единичната матрица $E_n \in G$ върху G.

Ако α, β_1, β_2 е базис на $\mathbb{C}^3$, в който $\mathcal{H}_{1,2} : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ има матрица

$$\chi_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbb{O}_{1\times 2} \\ \mathbb{O}_{2\times 1} & -E_2 \end{pmatrix},$$

то

$$e := \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha + \beta_1) \quad \text{и} \quad \check{e} := \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha - \beta_1)$$

са $\mathcal{H}_{1,2}$-изотропни вектори. Да забележим, че

$$l_{\mathbb{C}}(e) = l_{\mathbb{C}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \partial\mathbb{B} \quad \text{и} \quad l_{\mathbb{C}}(\check{e}) = l_{\mathbb{C}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \partial\mathbb{B}$$

отговарят на граничните точки $(1,0) \in \partial\mathbb{B}$, съответно, $(-1,0) \in \partial\mathbb{B}$. Съгласно $\mathcal{H}_{1,2}(e,\check{e}) = 1$ ще казваме, че изотропният вектор e е спрегнат с изотропния вектор $\check{e}$, както и изотропната права $l_{\mathbb{C}}(e)$ е спрегната с изотропната права $l_{\mathbb{C}}(\check{e})$. Векторът $f := \beta_2$ е $\mathcal{H}_{1,2}$-ортогонален на $e, \check{e}$ и $\mathcal{H}_{1,2}(f,f) = -1$. Матрицата на $\mathcal{H}_{1,2}$ спрямо базиса $e, f, \check{e}$ е

$$\chi^o_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Твърдение 2.3. *Нека $\mathcal{H}_{1,2} : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ е ермитова форма със сигнатура $(1,2)$, $e, f, \check{e}$ е такъв базис на $\mathbb{C}^3$, в който $\mathcal{H}_{1,2}$ има матрица*

$$\chi^o_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$U^o(1,2) = \{A \in \mathrm{GL}(3,\mathbb{C}) \,|\, \overline{A}^t \chi^o_{1,2} A = \chi^o_{1,2}\}$$

и

$$T(3,\mathbb{C}) = \left\{ T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ 0 & t_{22} & t_{23} \\ 0 & 0 & t_{33} \end{pmatrix} \,\middle|\, t_{ij} \in \mathbb{C}, \quad \det(T) \neq 0 \right\}$$

е подгрупата на горно-триъгълните матрици от $\mathrm{GL}(3,\mathbb{C})$. *Тогава:*

(i) Всяка подгрупа G на $T(3,\mathbb{C})$ е разрешима.

(ii) Стабилизаторът

$$\begin{gathered} P(l_{\mathbb{C}}(e)) = \mathrm{Stab}_{U^o(1,2)}(l_{\mathbb{C}}(e)) = U^o(1,2) \cap T(3,\mathbb{C}) = \\ = \left\{ \begin{pmatrix} \xi & \xi e^{is}\overline{\mu} & \lambda \\ 0 & e^{is} & \mu \\ 0 & 0 & \overline{\xi}^{-1} \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda, \mu \in \mathbb{C}, \, \xi \in \mathbb{C}^*, \, s \in \mathbb{R}, \, |\mu|^2 = 2\mathrm{Re}\left(\frac{\lambda}{\xi}\right) \right\} \end{gathered} \tag{2.8}$$

на $l_{\mathbb{C}}(e) \in \partial\mathbb{B}$ в $U^o(1,2)$ е максимална собствена подгрупа на $U^o(1,2)$.

В частност, $P(l_{\mathbb{C}}(e))$ е минимална и максимална параболична подгрупа на $U^o(1,2)$.

(iii) Стабилизаторът на произволна изотропна права $l_{\mathbb{C}}(v) = l_{\mathbb{C}}(Ae)$, $A \in U^o(1,2)$ е минимална и максимална параболична подгрупа

$$P(l_{\mathbb{C}}(v)) = A\left[\mathrm{Stab}_{U^o(1,2)}(l_{\mathbb{C}}(e))\right]A^{-1} = A\left[P(l_{\mathbb{C}}(e))\right]A^{-1}$$

на $U^o(1,2)$ с алгебра на Ли $\mathrm{Lie}P(l_{\mathbb{C}}(v)) = A\left[\mathrm{Lie}P(l_{\mathbb{C}}(e))\right]A^{-1}$.

(iv) Всяка максимална параболична подгрупа $P < U^o(1,2)$ е от вида $P = P(l_{\mathbb{C}}(v)) = \mathrm{Stab}_{U^o(1,2)}(l_{\mathbb{C}}(v))$ за някаква изотропна права $l_{\mathbb{C}}(v) \in \partial\mathbb{B}$.

Доказателство. (i) Първо ще проверим разрешимостта на $T(3,\mathbb{C})$. За целта да забележим, че изображението

$$\varphi_o : (T(3,\mathbb{C}), .) \longrightarrow (D^*(3,\mathbb{C}), .),$$

$$\varphi_o \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ 0 & t_{22} & t_{23} \\ 0 & 0 & t_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & 0 & 0 \\ 0 & t_{22} & 0 \\ 0 & 0 & t_{33} \end{pmatrix}$$

върху обратимите относно умножението диагонални матрици от $\mathrm{GL}(3,\mathbb{C})$ е хомоморфизъм на групи, съгласно

$$\varphi_o\left(\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ 0 & t_{22} & t_{23} \\ 0 & 0 & t_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ 0 & s_{22} & s_{23} \\ 0 & 0 & s_{33} \end{pmatrix}\right) = \varphi_0\begin{pmatrix} t_{11}s_{11} & * & * \\ 0 & t_{22}s_{22} & * \\ 0 & 0 & t_{33}s_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} t_{11}s_{11} & 0 & 0 \\ 0 & t_{22}s_{22} & 0 \\ 0 & 0 & t_{33}s_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & 0 & 0 \\ 0 & t_{22} & 0 \\ 0 & 0 & t_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s_{11} & 0 & 0 \\ 0 & s_{22} & 0 \\ 0 & 0 & s_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \varphi_o\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ 0 & t_{22} & t_{23} \\ 0 & 0 & t_{33} \end{pmatrix}\varphi_o\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ 0 & s_{22} & s_{23} \\ 0 & 0 & s_{33} \end{pmatrix}.$$

Ядрото

$$\mathfrak{U}(3,\mathbb{C}) := \ker\varphi_o = \left\{ u = \begin{pmatrix} 1 & t_{12} & t_{13} \\ 0 & 1 & t_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \,\Big|\, t_{ij}\in\mathbb{C}\right\}$$

на φ_o е съставено от унипотентни матрици, съгласно $(u-E_3)^3 = \mathbb{O}_{3\times 3}$ за $\forall u \in \mathfrak{U}(3,\mathbb{C})$. По този начин получаваме нормална подгрупа $\mathfrak{U}(3,\mathbb{C})$ на $T(3,\mathbb{C})$ с абелев фактор $T(3,\mathbb{C})/\mathfrak{U}(3,\mathbb{C}) \simeq (D^*(3,\mathbb{C}),.)$. Изображението

$$\varphi_{12} : (\mathfrak{U}(3,\mathbb{C}),.) \longrightarrow (\mathbb{C}^2,+),$$

$$\varphi_{12}\begin{pmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (u_{12},u_{23}), \quad \forall \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{U}(3,\mathbb{C})$$

е хомоморфизъм на групи, съгласно

$$\varphi_{12}\left(\begin{pmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & v_{12} & v_{13} \\ 0 & 1 & v_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \varphi_{12}\begin{pmatrix} 1 & u_{12}+v_{12} & * \\ 0 & 1 & u_{23}+v_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= (u_{12}+v_{12}, u_{23}+v_{23}) = (u_{12},u_{23}) + (v_{12},v_{23}) = \varphi_{12}\begin{pmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \varphi_{12}\begin{pmatrix} 1 & v_{12} & v_{13} \\ 0 & 1 & v_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Хомоморфизмът φ_{12} е върху абелевата група $(\mathbb{C}^2,+)$ и има абелево ядро

$$\mathfrak{U}'(3,\mathbb{C}) := \ker(\varphi_{12}) = \left\{ u' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & u_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \,\Big|\, u_{13}\in\mathbb{C}\right\},$$

защото

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & u_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & v_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & u_{13}+v_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & v_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & u_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

По този начин получихме редица

$$T(3,\mathbb{C}) > \mathfrak{U}(3,\mathbb{C}) > \mathfrak{U}'(3,\mathbb{C}) > \{E_3\}$$

от подгрупи на $T(3,\mathbb{C})$, така че $\mathfrak{U}(3,\mathbb{C}) \triangleleft T(3,\mathbb{C})$ е нормална подгрупа с абелева фактор-група $T(3,\mathbb{C})/\mathfrak{U}(3,\mathbb{C}) \simeq (D^*(3,\mathbb{C}),.)$, $\mathfrak{U}'(3,\mathbb{C}) \triangleleft \mathfrak{U}(3,\mathbb{C})$ е нормална подгрупа с абелева фактор-група $\mathfrak{U}(3,\mathbb{C})/\mathfrak{U}'(3,\mathbb{C}) \simeq (\mathbb{C}^2,+)$ и $\{E_3\} \triangleleft \mathfrak{U}'(3,\mathbb{C})$ е нормална подгрупа с абелева фактор-група $\mathfrak{U}'(3,\mathbb{C})/\{E_3\} = \mathfrak{U}'(3,\mathbb{C})$. По определение, оттук следва разрешимостта на групата $T(3,\mathbb{C})$ на горно триъгълните матрици. От Теорема на Ли следва, че всяка разрешима подгрупа на $\mathrm{GL}(3,\mathbb{C})$ е спрегната на подгрупа на $T(3,\mathbb{C})$.

Разрешимостта на $T(3,\mathbb{C})$ е достатъчна за разрешимостта на произволна подгрупа $G < T(3,\mathbb{C})$. По-точно,

$$G \geq [G \cap \mathfrak{U}(3,\mathbb{C})] \geq [G \cap \mathfrak{U}'(3,\mathbb{C})] \geq \{E_3\}$$

е редица от подгрупи, така че $G \cap \mathfrak{U}(3,\mathbb{C}) \triangleleft G$ е нормална подгрупа с фактор-група

$$G/G \cap \mathfrak{U}(3,\mathbb{C}) \simeq G\mathfrak{U}(3,\mathbb{C})/\mathfrak{U}(3,\mathbb{C}),$$

която е изоморфна на подгрупата $G\mathfrak{U}(3,\mathbb{C})/\mathfrak{U}(3,\mathbb{C})$ на абелевата група

$$T(3,\mathbb{C})/\mathfrak{U}(3,\mathbb{C}) \simeq (D^*(3,\mathbb{C}),.).$$

Аналогично, $[G \cap \mathfrak{U}'(3,\mathbb{C})] \triangleleft [G \cap \mathfrak{U}(3,\mathbb{C})]$ е нормална подгрупа, чиято фактор-група

$$\begin{aligned}[G \cap \mathfrak{U}(3,\mathbb{C})]/[G \cap \mathfrak{U}'(3,\mathbb{C})] = [G \cap \mathfrak{U}(3,\mathbb{C})]/[(G \cap \mathfrak{U}(3,\mathbb{C})) \cap \mathfrak{U}'(3,\mathbb{C})] \simeq \\ \simeq [G \cap \mathfrak{U}(3,\mathbb{C})]\mathfrak{U}'(3,\mathbb{C})/\mathfrak{U}'(3,\mathbb{C})\end{aligned}$$

е изоморфна на подгрупа на абелевата група $\mathfrak{U}(3,\mathbb{C})/\mathfrak{U}'(3,\mathbb{C}) \simeq (\mathbb{C}^2,+)$. Подгрупата $G \cap \mathfrak{U}'(3,\mathbb{C})$ на абелевата група $\mathfrak{U}'(3,\mathbb{C})$ е абелева. Това доказва разрешимостта на произволна подгрупа $G < T(3,\mathbb{C})$.

(ii) Стабилизаторът $P(l_{\mathbb{C}}(e)) := \mathrm{Stab}_{U^o(1,2)}(l_{\mathbb{C}}(e))$ на първата координатна права се състои от матриците

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in U^o(1,2).$$

Дефиниционното равенство $\overline{A}^t \chi^o_{12} A = \chi^o_{1,2}$ за такива матрици се свежда към

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{32}\overline{a_{11}} & a_{33}\overline{a_{11}} \\ a_{11}\overline{a_{32}} & (a_{12}\overline{a_{32}} - |a_{22}|^2 + a_{32}\overline{a_{12}}) & (a_{13}\overline{a_{32}} - a_{23}\overline{a_{22}} + a_{33}\overline{a_{12}}) \\ a_{11}\overline{a_{33}} & (a_{12}\overline{a_{33}} - a_{22}\overline{a_{23}} + a_{32}\overline{a_{13}}) & (a_{13}\overline{a_{33}} - |a_{23}|^2 + a_{33}\overline{a_{13}}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Сравнявайки елементите от първия ред получаваме $a_{32} = 0$ и $a_{33} = \frac{1}{\overline{a_{11}}}$. Равенството на елементите от втори ред и втори стълб дава $|a_{22}|^2 = 1$ и позволява представянето на a_{22} във вида $a_{22} = e^{is}$ за някакво $s \in \mathbb{R}$. Елементите от втори ред и трети стълб, както и от трети ред и втори стълб са комплексно спрегнати помежду си и тяхното анулиране води до равенството

$$a_{12} = \frac{a_{22}\overline{a_{23}}}{\overline{a_{33}}} = a_{11}e^{is}\overline{a_{23}}.$$

Накрая, ануклирането на елемента от трети ред и трети стълб дава

$$|a_{23}|^2 = a_{13}\overline{a_{33}} + \overline{a_{13}}a_{33} = \frac{a_{13}}{a_{11}} + \frac{\overline{a_{13}}}{\overline{a_{11}}} = 2\mathrm{Re}\left(\frac{a_{13}}{a_{11}}\right)$$

и завършва описанието на $P(l_{\mathbb{C}}(e))$ от (2.8).

Подгрупите S на $U^o(1,2)$ са във взаимно еднозначно съответствие с подалгебрите на Ли $\mathrm{Lie}(S)$ на алгебрата на Ли $\mathrm{Lie}(U^o(1,2))$ на $U^o(1,2)$. Затова е достатъчно да проверим, че единствената подалгебра на Ли $\mathfrak{L} \subseteq \mathrm{Lie}(U^o(1,2))$, съдържаща строго $\mathrm{Lie}P(l_{\mathbb{C}}(e))$ е $\mathrm{Lie}U^o(1,2)$, за да получим, че $P(l_{\mathbb{C}}(e))$ е максимална собствена подгрупа на $U^o(1,2)$. За целта трябва да опишем алгебрата на Ли $\mathrm{Lie}U^o(1,2)$. Тя се състои от онези матрици $Y \in M_{3\times 3}(\mathbb{C})$, за които

$$X := \exp(tY) \in U^o(1,2) = \{A \in \mathrm{GL}(3,\mathbb{C}) \,|\, \overline{A}^t \chi^o_{1,2} A = \chi^o_{1,2}\}$$

за всички $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ и за достатъчно малко реално положително число $\varepsilon \in \mathbb{R}^{>0}$. Съгласно $X = E_3 + tY + O(t^2)$, от условието

$$\chi^o_{1,2} = \overline{X}^t \chi^o_{1,2} X = \overline{[E_3 + tY + O(t^2)]}^t \chi^o_{1,2}[E_3 + tY + O(t^2)] =$$
$$= [E_3 + t\overline{Y}^t + O(t^2)]\chi^o_{1,2}[E_3 + tY + O(t^2)] = \chi^o_{1,2} + t[\overline{Y}^t\chi^o_{1,2} + \chi^o_{1,2}Y] + O(t^2)$$

следва

$$\overline{Y}^t\chi^o_{1,2} + \chi^o_{1,2}Y = \mathbb{O}_{3\times 3}$$

за всяко $Y \in \mathrm{Lie}U^o(1,2)$. Обратно, ако $\overline{Y}^t\chi^o_{1,2} + \chi^o_{1,2}Y = \mathbb{O}_{3\times 3}$, то обратимостта на матрицата $\chi^o_{1,2}$ ни дава възможност да изразим

$$\overline{Y}^t = -\chi^o_{1,2}Y(\chi^o_{1,2})^{-1} = \chi^o_{1,2}(-Y)(\chi^o_{1,2})^{-1}.$$

Тогава за $\forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ е изпълнено

$$\overline{\exp(tY)}^t := \sum_{s=0}^{\infty} \frac{t^s}{s!}(\overline{Y}^t)^s = \exp(t\overline{Y}^t) = \exp(\chi^o_{1,2}(-Y)(\chi^o_{1,2})^{-1}) =$$
$$= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{t^s}{s!}[\chi^o_{1,2}(-Y)(\chi^o_{1,2})^{-1}]^s = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{t^s}{s!}\chi^o_{1,2}(-Y)^s(\chi^o_{1,2})^{-1} =$$
$$= \chi^o_{1,2}\left[\sum_{s=0}^{\infty} \frac{t^s}{s!}(-Y)^s\right](\chi^o_{1,2})^{-1} = \chi^o_{1,2}\exp(-tY)(\chi^o_{1,2})^{-1},$$

откъдето

$$\overline{\exp(tY)}^t \chi^o_{1,2}\exp(tY) = \chi^o_{1,2}$$

и $\exp(tY) \in U^o(1,2)$. Това доказва, че

$$\mathrm{Lie}U^o(1,2) = \{Y \in M_{3\times 3}(\mathbb{C}) \,|\, \overline{Y}^t \chi^o_{1,2} + \chi^o_{1,2} Y = \mathbb{O}_{3\times 3}\}.$$

По-точно,

$$\overline{Y}^t \chi^o_{1,2} + \chi^o_{1,2} Y = \begin{pmatrix} \overline{y_{11}} & \overline{y_{21}} & \overline{y_{31}} \\ \overline{y_{12}} & \overline{y_{22}} & \overline{y_{32}} \\ \overline{y_{13}} & \overline{y_{23}} & \overline{y_{33}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \overline{y_{31}} & -\overline{y_{21}} & \overline{y_{11}} \\ \overline{y_{32}} & -\overline{y_{22}} & \overline{y_{12}} \\ \overline{y_{33}} & -\overline{y_{23}} & \overline{y_{13}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_{31} & y_{32} & y_{33} \\ -y_{21} & -y_{22} & -y_{23} \\ y_{11} & y_{12} & y_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

тогава и само тогава, когато

$$\overline{y_{31}} = -y_{31}, \quad \overline{y_{22}} = -y_{22}, \quad \overline{y_{13}} = -y_{13},$$

$$y_{12} = \overline{y_{23}}, \quad y_{32} = \overline{y_{21}}, \quad y_{33} = -\overline{y_{11}}.$$

С други думи, чрез матриците относно базиса $e, f, \check{e}$ на $\mathbb{C}^3$ имаме

$$\mathrm{Lie}U^o(1,2) = \left\{ Y = \begin{pmatrix} y_{11} & \overline{y_{23}} & ir_{13} \\ y_{21} & ir_{22} & y_{23} \\ ir_{31} & \overline{y_{21}} & -\overline{y_{11}} \end{pmatrix} \,\Big|\, y_{11}, y_{21}, y_{23} \in \mathbb{C},\, r_{13}, r_{22}, r_{31} \in \mathbb{R} \right\}. \quad (2.9)$$

Подалгебрата на Ли $\mathrm{Lie}(P_0)$ се състои от $Y \in \mathrm{Lie}U^o(1,2)$ с $Y(e) \in l_{\mathbb{C}}(e)$, т.е. от $Y = (y_{ij})^3_{i,j=1} \in \mathrm{Lie}U^o(1,2)$ с $y_{21} = 0$ и $r_{31} = 0$. Забелязваме, че

$$\mathrm{Lie}(P_0) = \left\{ Y = \begin{pmatrix} y_{11} & \overline{y_{23}} & ir_{13} \\ 0 & ir_{22} & y_{23} \\ 0 & 0 & -\overline{y_{11}} \end{pmatrix} \,\Big|\, y_{11}, y_{23} \in \mathbb{C},\, r_{13}, r_{22} \in \mathbb{R} \right\}. \quad (2.10)$$

Ако $\mathfrak{L} \leq \mathrm{Lie}U^o(1,2)$ е подалгебра на Ли, съдържаща строго $\mathrm{Lie}P(l_{\mathbb{C}}(e))$, то съществува ненулева матрица

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \nu & 0 & 0 \\ ir & \overline{\nu} & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{L}$$

за някакви $r \in \mathbb{R}$ и $\nu \in \mathbb{C}$. Ако $r \neq 0$, то използваме, че

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Lie}P(l_{\mathbb{C}}(e)),$$

откъдето

$$[p_1, x] = p_1 x - x p_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 0 & 0 \\ -2ir & -\overline{\nu} & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{L}$$

и

$$y := [p_1, x] + x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -ir & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{L},$$

защото $\mathfrak{L}$ е линейно пространство над $\mathbb{R}$. В резултат,

$$z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{L}.$$

Вземайки предвид

$$p_2 := \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Lie}P(l_{\mathbb{C}}(e))),$$

стигаме до извода, че

$$[p_2, z] = p_2 z - z p_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{L}.$$

Сега от

$$p_3 = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} \in \mathrm{Lie}P(l_{\mathbb{C}}(e))$$

следва, че

$$[p_3, [p_2, z]] = p_3[p_2, z] - [p_2, z]p_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{L}.$$

В резултат, $\mathbb{R}z + \mathbb{R}[p_2, z] + \mathbb{R}[p_3, [p_2, z]] \subseteq \mathfrak{L}$, откъдето $\mathfrak{L} = \mathrm{Lie}U^o(1, 2)$, стига $\mathfrak{L}$ да съдържа матрицца

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \nu & 0 & 0 \\ ir & \overline{\nu} & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{L} \quad \text{с} \quad r \neq 0.$$

Ако съществува

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \nu & 0 & 0 \\ 0 & \overline{\nu} & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{L} \quad \text{с} \quad \nu \in \mathbb{C}^*,$$

то

$$[p_3, x] = p_3 x - x p_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -i\nu & 0 & 0 \\ 0 & i\overline{\nu} & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{L},$$

откъдето

$$\mathbb{R}x + \mathbb{R}[p_3, x] = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix} \subset \mathfrak{L}.$$

За произволни $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ имаме

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ r_1 & 0 & 0 \\ 0 & r_1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ ir_2 & 0 & 0 \\ 0 & -ir_2 & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2ir_1r_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{L},$$

откъдето

$$\mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \subset \mathfrak{L} \quad \text{и} \quad \mathfrak{L} = \mathrm{Lie} U^o(1,2).$$

Това доказва, че $\mathrm{Lie}P(l_{\mathbb{C}}(e))$ е максимална собствена подалгебра на Ли на $\mathrm{Lie}U^o(1,2)$ и $P(l_{\mathbb{C}}(e))$ е максимална собствена подгрупа на $U^o(1,2)$. В качеството си на подгрупа на $T(3,\mathbb{C})$, групата $P(l_{\mathbb{C}}(e))$ е разрешима съгласно (i). В частност, $P(l_{\mathbb{C}}(e))$ е максимална свързана разрешима подгрупа на $U^o(1,2)$, т.е. подгрупа на Борел на $U^o(1,2)$ или минимална параболична подгрупа на $U^o(1,2)$. Максималната собствена подгрупа $P(l_{\mathbb{C}}(e))$ на $U^o(1,2)$, съдържаща подгрупата на Борел $p(l_{\mathbb{C}}(e))$ е и максимална параболична подгрупа на $U^o(1,2)$.

(iii) Съгласно Следствие 2.2 (iii), групата $U^o(1,2)$ действа транзитивно върху множеството $\partial\mathbb{B}$ на изотропните прави $l_{\mathbb{C}}(v)$ и за всяка такава права $l_{\mathbb{C}}(v) \in \partial\mathbb{B}$ съществува $A \in U^o(1,2)$ с $l_{\mathbb{C}}(v) = l_{\mathbb{C}}(Ae)$. Следователно стабилизаторът на $l_{\mathbb{C}}(v)$ в $U^o(1,2)$ е

$$P(l_{\mathbb{C}}(v)) = P(l_{\mathbb{C}}(Ae)) = AP(l_{\mathbb{C}}(e))A^{-1}.$$

Допирателните пространства към $P(l_{\mathbb{C}}(v))$ и $P(l_{\mathbb{C}}(e))$ в E_3 са свързани с равенството $T^{\mathbb{R}}_{E_3}P(l_{\mathbb{C}}(v)) = AT^{\mathbb{R}}_{E_3}P(l_{\mathbb{C}}(e))A^{-1}$, т.е. $\mathrm{Lie}P(l_{\mathbb{C}}(v)) = A\mathrm{Lie}P(l_{\mathbb{C}}(e))A^{-1}$.

(iv) Всички максимални параболични подгрупи P на $U^o(1,2)$ са спрегнати помежду си чрез елементи на $U^o(1,2)$. С други думи, всяка максимална параболична подгрупа $P < U^o(1,2)$ е от вида

$$P = AP(l_{\mathbb{C}}(e))A^{-1} = P(l_{\mathbb{C}}(Ae))$$

и съвпада със стабилизатора на $\mathcal{H}_{1,2}$-изотропната права $l_{\mathbb{C}}(Ae) \in \partial\mathbb{B}$.

□

Нека $P = P(l_{\mathbb{C}}(v)) = \mathrm{Stab}_{U^o(1,2)}(l_{\mathbb{C}}(v))$ е максимална параболична подгрупа на $U^o(1,2)$, т.е. стабилизатор на изотропна права $l_{\mathbb{C}}(v) \subset \mathbb{C}^3$. Съгласно Твърдение 2.3, ако $P_0 := P(l_{\mathbb{C}}(e))$ е стандартната минимална и максимална параболична подгрупа на $U^o(1,2)$, то съществува $A \in U^o(1,2)$ с $l_{\mathbb{C}}(v) = Al_{\mathbb{C}}(e) = l_{\mathbb{C}}(Ae)$ и $P = P(l_{\mathbb{C}}(v)) = AP_0A^{-1}$. Унипотентните радикали на P и P_0 са спрегнати, т.е. $N_P = AN_{P_0}A^{-1}$, както и произволни техни редуктивни допълнения $L_P = AL_{P_0}A^{-1}$. Достатъчно е да изучим разлагането на Лангландс $P_0 = N_{P_0} \rtimes L_{P_0}$ на стандартната максимална параболична подгрупа $P_0 = P(l_{\mathbb{C}}(e))$, за да получим разлагането на Лангландс на произволна максимална параболична подгрупа $P = \mathrm{Stab}_{U^o(1,2)}(l_{\mathbb{C}}(Ae))$, $A \in U^o(1,2)$ на $U^o(1,2)$.

Съгласно Твърдение 2.3 (i), стандартната максимална параболична подгрупа $P_0 = \mathrm{Stab}_{U^o(1,2)}(l_{\mathbb{C}}(e))$ е разрешима, в качеството си на подгрупа на групата $T(3,\mathbb{C})$ на горно-триъгълните матрици от $\mathrm{GL}(3,\mathbb{C})$. Унипотентният радикал на P_0 е

$$N_{P_0} = \left\{ \nu(\lambda,\mu) := \begin{pmatrix} 1 & \overline{\mu} & \lambda \\ 0 & 1 & \mu \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \,\Big|\, \lambda,\mu \in \mathbb{C},\, |\mu|^2 = 2\mathrm{Re}(\lambda) \right\}, \tag{2.11}$$

защото за произволна матрица

$$A = \begin{pmatrix} \xi & \xi e^{is}\overline{\mu} & \lambda \\ 0 & e^{is} & \mu \\ 0 & 0 & \overline{\xi}^{-1} \end{pmatrix} \in P_0$$

условието

$$(A - E_3)^m = \begin{pmatrix} (\xi-1)^m & * & * \\ 0 & (e^{is}-1)^m & * \\ 0 & 0 & (\overline{\xi}^{-1}-1)^m \end{pmatrix} = \mathbb{O}_{3\times 3}$$

за някое $m \in \mathbb{N}$ изисква $\xi = 1$ и $e^{is} = 1$. Комутантът $[N_{P_0}, N_{P_0}]$ на N_{P_0} е подгрупата, породена от груповите комутатори

$$[\nu(\lambda_1,\mu_1),\nu(\lambda_2,\mu_2)] := \nu(\lambda_1,\mu_1)\nu(\lambda_2,\mu_2)\nu(\lambda_1,\mu_1)^{-1}\nu(\lambda_2,\nu_2)^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \overline{\mu_1} & \lambda_1 \\ 0 & 1 & \mu_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \overline{\mu_2} & \lambda_2 \\ 0 & 1 & \mu_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\overline{\mu_1} & |\mu_1|^2 - \lambda_1 \\ 0 & 1 & -\mu_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\overline{\mu_2} & |\mu_2|^2 - \lambda_2 \\ 0 & 1 & -\mu_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \overline{\mu_1}\mu_2 - \mu_1\overline{\mu_2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2i\mathrm{Im}(\overline{\mu_1}\mu_2) \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следователно

$$[N_{P_0}, N_{P_0}] = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & ir \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \,\Big|\, r \in \mathbb{R} \right\}.$$

По определение, центърът $Z(N_{P_0})$ на N_{P_0} се състои от онези матрици $\nu(\lambda_1,\mu_1) \in N_{P_0}$, които имат тривиални групови комутатори $[\nu(\lambda_1,\mu_1),\nu(\lambda_2,\mu_2)] = E_3$ с всички $\nu(\lambda_2,\mu_2) \in N_{P_0}$. Това е в сила за $\lambda_1,\mu_1 \in \mathbb{C}$ с $|\mu_1|^2 = 2\mathrm{Re}(\lambda_1)$ и $\mathrm{Im}(\overline{\mu_1}\mu_2) = 0$ за всички $\mu_2 \in \mathbb{C}$. В частност, за $\mu_2 := \sqrt{-1}\mu_1$ получаваме $\mathrm{Im}(\overline{\mu_1}\mu_2) = \mathrm{Im}(\overline{\mu_1}\sqrt{-1}\mu_1) = |\mu_1|^2 = 0$ и стигаме до извода, че $\nu(\lambda_1,\mu_1) \in Z(N_{P_0})$ тогава и само тогава, когато $\mu_1 = 0$ и $\lambda_1 \in \sqrt{-1}\mathbb{R}$. С това доказахме, че комутантът $[N_{P_0}, N_{P_0}] = Z(N_{P_0})$ на N_{P_0} съвпада с центъра на N_{P_0}. Оттук, $[[N_{P_0}, N_{P_0}], N_{P_0}] = [Z(N_{P_0}), N_{P_0}] = \{E_3\}$ и унипотентният радикал N_{P_0} на P_0 е двустепенно унипотентна група. Алгебрата на Ли на N_{P_0} се състои от строго горно-триъгълните матрици от $\mathrm{Lie}(P_0)$. Съгласно (2.10),

$$\mathrm{Lie}(N_{P_0}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \overline{\mu} & ir \\ 0 & 0 & \mu \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \,\Big|\, \mu \in \mathbb{C},\, r \in \mathbb{R} \right\}$$

и експоненциалното изображение $\exp : \mathrm{Lie}(N_{P_0}) \to N_{P_0}$ е

$$\exp \begin{pmatrix} 0 & \overline{\mu} & ir \\ 0 & 0 & \mu \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_3 + \begin{pmatrix} 0 & \overline{\mu} & ir \\ 0 & 0 & \mu \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2!} \begin{pmatrix} 0 & \overline{\mu} & ir \\ 0 & 0 & \mu \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \overline{\mu} & ir \\ 0 & 0 & \mu \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & \overline{\mu} & ir + \frac{|\mu|^2}{2} \\ 0 & 1 & \mu \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

защото

$$\begin{pmatrix} 0 & \overline{\mu} & ir \\ 0 & 0 & \mu \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^3 = \mathbb{O}_{3\times 3}.$$

Обратното изображение е

$$\exp^{-1} : N_{P_0} \longrightarrow \mathrm{Lie}(N_{P_0}),$$

$$\exp^{-1} \begin{pmatrix} 1 & \overline{\mu} & \lambda \\ 0 & 1 & \mu \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \overline{\mu} & \lambda - \frac{|\mu|^2}{2} \\ 0 & 0 & \mu \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{за всички} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{C}, \ \mathrm{Re}\left(\lambda - \frac{|\mu|^2}{2}\right) = 0.$$

Центърът

$$Z(N_{P_0}) = [N_{P_0}, N_{P_0}] = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & ir \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Bigm| r \in \mathbb{R} \right\} \tag{2.12}$$

е абелева група, изоморфна на $(\mathrm{Lie}(Z(N_{P_0})), +)$, съгласно

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & ir_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & ir_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & i(r_1 + r_2) \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{за} \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}.$$

Експоненциалното изображение

$$\exp : \mathrm{Lie} Z(N_{P_0}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & ir \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Bigm| r \in \mathbb{R} \right\} \longrightarrow Z(N_{P_0})$$

на $Z(N_{P_0})$ е

$$\exp \begin{pmatrix} 0 & 0 & ir \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_3 + \begin{pmatrix} 0 & 0 & ir \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ir \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \forall r \in \mathbb{R},$$

съгласно

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & ir \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \mathbb{O}_{3\times 3}.$$

Елементите на фактор-групата

$$V_{P_0} = N_{P_0}/Z(N_{P_0}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \overline{\mu} & \lambda \\ 0 & 1 & \mu \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Z(N_{P_0}) \,\middle|\, \lambda, \mu \in \mathbb{C},\, |\mu|^2 = 2\mathrm{Re}(\lambda) \right\}$$

имат представител

$$\begin{pmatrix} 1 & \overline{\mu} & \lambda \\ 0 & 1 & \mu \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Z(N_{P_0}) = \begin{pmatrix} 1 & \overline{\mu} & \frac{|\mu|^2}{2} \\ 0 & 1 & \mu \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Z(N_{P_0}) = \begin{pmatrix} 1 & \overline{\mu} & \mathrm{Re}(\lambda) \\ 0 & 1 & \mu \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Z(N_{P_0}),$$

защото

$$\begin{pmatrix} 1 & \overline{\mu} & \lambda \\ 0 & 1 & \mu \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{|\mu|^2}{2} - \lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \overline{\mu} & \frac{|\mu|^2}{2} \\ 0 & 1 & \mu \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

с

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{|\mu|^2}{2} - \lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \mathrm{Re}(\lambda) - \lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i\mathrm{Im}(\lambda) \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in Z(N_{P_0}).$$

Вземайки предвид (2.12) и $\mathrm{Re}(\overline{\mu_1}\mu_2) = \frac{\overline{\mu_1}\mu_2 + \mu_1\overline{\mu_2}}{2} = \mathrm{Re}(\overline{\mu_2}\mu_1)$ пресмятаме че

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & \overline{\mu_1} & \frac{|\mu_1|^2}{2} \\ 0 & 1 & \mu_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Z(N_{P_0}) \right] \left[\begin{pmatrix} 1 & \overline{\mu_2} & \frac{|\mu_2|^2}{2} \\ 0 & 1 & \mu_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Z(N_{P_0}) \right] =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \overline{\mu_1} + \overline{\mu_2} & \frac{|\mu_1|^2}{2} + \overline{\mu_1}\mu_2 + \frac{|\mu_2|^2}{2} \\ 0 & 1 & \mu_1 + \mu_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Z(N_{P_0}) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \overline{\mu_1} + \overline{\mu_2} & \frac{|\mu_1|^2}{2} + \frac{|\mu_2|^2}{2} + \mathrm{Re}(\overline{\mu_1}\mu_2) \\ 0 & 1 & \mu_1 + \mu_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Z(N_{P_0}) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \overline{\mu_1} + \overline{\mu_2} & \frac{|\mu_1|^2}{2} + \frac{|\mu_2|^2}{2} + \mathrm{Re}(\overline{\mu_2}\mu_1) \\ 0 & 1 & \mu_1 + \mu_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Z(N_{P_0}) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \overline{\mu_2} + \overline{\mu_1} & \frac{|\mu_2|^2}{2} + \overline{\mu_2}\mu_1 + \frac{|\mu_1|^2}{2} \\ 0 & 1 & \mu_1 + \mu_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Z(N_{P_0}) =$$

$$= \left[\begin{pmatrix} 1 & \overline{\mu_2} & \frac{|\mu_2|^2}{2} \\ 0 & 1 & \mu_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Z(N_{P_0}) \right] \left[\begin{pmatrix} 1 & \overline{\mu_1} & \frac{|\mu_1|^2}{2} \\ 0 & 1 & \mu_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Z(N_{P_0}) \right]$$

и стигаме до извода, че V_{P_0} е абелева група. Алгебрата на Ли на V_{P_0} е

$$\mathrm{Lie}V_{P_0} = \mathrm{Lie}N_{P_0}/\mathrm{Lie}Z(N_{P_0}) = \left\{ \left(\begin{array}{ccc} 0 & \overline{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & \mu \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) + \mathrm{Lie}Z(N_{P_0}) \,\Big|\, \mu \in \mathbb{C} \right\}$$

и експоненциалното изображение на V_{P_0} е

$$\exp : \mathrm{Lie}V_{P_0} \longrightarrow V_{P_0},$$

$$\exp\left(\left(\begin{array}{ccc} 0 & \overline{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & \mu \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) + \mathrm{Lie}Z(N_{P_0}) \right) = \left[E_3 + \left(\begin{array}{ccc} 0 & \overline{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & \mu \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) + \frac{1}{2!} \left(\begin{array}{ccc} 0 & \overline{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & \mu \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)^2 \right] Z(N_{P_0}) =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc} 1 & \overline{\mu} & \frac{|\mu|^2}{2} \\ 0 & 1 & \mu \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) Z(N_{P_0}).$$

От направените пресмятания е ясно, че групата V_{P_0} е изоморфна на $(\mathrm{Lie}V_{P_0}, +)$. Отсега нататък, нека

$$u(ir) := \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & ir \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \in \mathrm{Lie}Z(N_{P_0}) \quad \text{за} \quad \forall r \in \mathbb{R} \quad \text{и}$$

$$v(\mu) := \left(\begin{array}{ccc} 0 & \overline{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & \mu \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \in \mathrm{Lie}N_{P_0} \quad \text{за} \quad \forall \mu \in \mathbb{C},$$

така че

$$\mathrm{Lie}N_{P_0} = \{ u(ir) + v(\mu) \,|\, r \in \mathbb{R},\, \mu \in \mathbb{C} \}.$$

Можем да представим

$$N_{P_0} = Z(N_{P_0}) \times V_{P_0}$$

като директно произведение, защото

$$\left[\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & ir_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccc} 1 & \overline{\mu_1} & \frac{|\mu_1|^2}{2} \\ 0 & 1 & \mu_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) Z(N_{P_0}) \right] \left[\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & ir_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccc} 1 & \overline{\mu_2} & \frac{|\mu_2|^2}{2} \\ 0 & 1 & \mu_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) Z(N_{P_0}) \right] =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & ir_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \left[\left(\begin{array}{ccc} 1 & \overline{\mu_1} & \frac{|\mu_1|^2}{2} \\ 0 & 1 & \mu_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & ir_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccc} 1 & \overline{\mu_1} & \frac{|\mu_1|^2}{2} \\ 0 & 1 & \mu_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right)^{-1} \right]$$

$$\left[\left(\begin{array}{ccc} 1 & \overline{\mu_1} & \frac{|\mu_1|^2}{2} \\ 0 & 1 & \mu_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccc} 1 & \overline{\mu_2} & \frac{|\mu_2|^2}{2} \\ 0 & 1 & \mu_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \right] Z(N_{P_0}) =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & i(r_1 + r_2) \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \left[\left(\begin{array}{ccc} 1 & \overline{\mu_1} + \overline{\mu_2} & \frac{|\mu_1|^2}{2} + \frac{|\mu_2|^2}{2} + \mathrm{Re}(\overline{\mu_1}\mu_2) \\ 0 & 1 & \mu_1 + \mu_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) Z(N_{P_0}) \right].$$

Съгласно (2.8), редуктивното допълнение на N_{P_0} до $P_0 = N_{P_0} \rtimes L_{P_0}$ е групата

$$L_{P_0} = \left\{ \begin{pmatrix} \xi & 0 & 0 \\ 0 & e^{is} & 0 \\ 0 & 0 & \overline{\xi}^{-1} \end{pmatrix} \Big| \xi \in \mathbb{C}^*, \, s \in \mathbb{R} \right\} \tag{2.13}$$

на диагоналните матрици от P_0. В частност, L_{P_0} е абелева група. Ако

$$G_{1,l}(P_0) := \left\{ g(\xi) := \begin{pmatrix} \xi & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \overline{\xi}^{-1} \end{pmatrix} \Big| \xi \in \mathbb{C}^* \right\} \simeq (\mathbb{C}^*, .)$$

и

$$G_{1,h}(P_0) := \left\{ h(e^{is}) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{is} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Big| s \in \mathbb{R} \right\} \simeq (S^1, .),$$

то

$$L_{P_0} = G_{1,l}(P_0) \times G_{1,h}(P_0)$$

и

$$P_0 = N_{P_0} \rtimes L_{P_0} = [Z(N_{P_0}) \times V_{P_0}] \rtimes [G_{1,l}(P_0) \times G_{1,h}(P_0)]$$

се нарича прецизирано разлагане на Лангландс на стандартната максимална параболична група P_0. Произволна максимална параболична подгрупа $P = \mathrm{Stab}_{U^o(1,2)}(l_{\mathbb{C}}(Ae))$ на $U^o(1,2)$ има прецизирано разлагане на Лангландс

$$P = N_P \rtimes L_P = [Z(N_P) \times V_P] \rtimes [G_{1,l}(P) \times G_{1,h}(P)],$$

където $N_P = AN_{P_0}A^{-1}$ е унипотентният радикал на P, $L_P = AL_{P_0}A^{-1}$ е редуктивно допълнение на N_P до P, $Z(N_P) = AZ(N_{P_0})A^{-1}$ е центърът на N_P, $V_P = N_P/Z(N_P) = AN_{P_0}A^{-1}/AZ(N_{P_0})A^{-1}$, $L_P = G_{1,l}(P) \times G_{1,h}(P)$, $G_{1,l}(P) = AG_{1,l}(P_0)A^{-1} \simeq (\mathbb{C}^*, .)$, $G_{1,h}(P) = AG_{1,h}(P_0)A^{-1} \simeq (S^1, .)$.

Груповите закони в $Z(N_{P_0})$ и V_{P_0} се записват удобно на езика на съответните алгебри на Ли. По-точно,

$$\exp u(ir_1) \exp(ir_2) = [E_3 + u(ir_1)][E_3 + u(ir_2)] = E_3 + u(i(r_1 + r_2))$$

за $\forall u(ir_1), u(ir_2) \in \mathrm{Lie}Z(N_{P_0})$,

$$\begin{aligned} \exp v(\mu_1) \exp v(\mu_2) &= \exp(v(\mu_1) + \mathrm{Lie}Z(N_{P_0})) \exp(v(\mu_2) + \mathrm{Lie}Z(N_{P_0})) = \\ &= \left[\left(E_3 + v(\mu_1) + \frac{1}{2} v(\mu_1)^2 \right) Z(N_{P_0}) \right] \left[\left(E_3 + v(\mu_2) + \frac{1}{2} v(\mu_2)^2 \right) Z(N_{P_0}) \right] = \\ &= \left[E_3 + v(\mu_1 + \mu_2) + \frac{1}{2} v(\mu_1 + \mu_2)^2 \right] Z(N_{P_0}) \end{aligned}$$

за $\forall v(\mu_1)+\mathrm{Lie}Z(N_{P_0}), v(\mu_2)+\mathrm{Lie}Z(N_{P_0}) \in \mathrm{Lie}V_{P_0}$. Груповият закон в N_{P_0} на езика на $\mathrm{Lie}N_{P_0}$ е

$$\begin{aligned}
&\exp(u(ir_1)+v(\mu_1))\exp(u(ir_2)+v(\mu_2)) = \\
&= [(E_3+u(ir_1)+v(\mu_1)+\frac{1}{2}v(\mu_1)^2)][(E_3+u(ir_2)+v(\mu_2)+\frac{1}{2}v(\mu_2)^2)] = \\
&= E_3+u(i(r_1+r_2))+v(\mu_1+\mu_2)+\frac{1}{2}v(\mu_1+\mu_2)^2+u(i\mathrm{Im}(\overline{\mu_1}\mu_2) = \\
&= \exp(u(i(r_1+r_2+\mathrm{Im}(\overline{\mu_1}\mu_2)))+v(\mu_1+\mu_2)).
\end{aligned}$$

Следователно груповият закон в $P_0 = N_{P_0} \rtimes L_{P_0}$ е

$$\begin{aligned}
&(\exp(u(ir_1)+v(\mu_1)), g(\xi_1), h(e^{is_1}))(\exp(u(ir_2)+v(\mu_2)), g(\xi_2), h(e^{is_2})) = \\
&= \exp(u(ir_1)+v(\mu_1)) \left[\begin{pmatrix} \xi_1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{is_1} & 0 \\ 0 & 0 & \overline{\xi_1}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \overline{\mu_2} & ir_2+\frac{|\mu_2|^2}{2} \\ 0 & 1 & \mu_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-is_1} & 0 \\ 0 & 0 & \overline{\xi_1} \end{pmatrix} \right] \\
&\left[\begin{pmatrix} \xi_1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{is_1} & 0 \\ 0 & 0 & \overline{\xi_1}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_2 & 0 & 0 \\ 0 & e^{is_2} & 0 \\ 0 & 0 & \overline{\xi_2}^{-1} \end{pmatrix} \right] = \\
&= \left(\begin{pmatrix} 1 & \overline{\mu_1} & ir_1+\frac{|\mu_1|^2}{2} \\ 0 & 1 & \mu_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \xi_1 e^{-is_1}\overline{\mu_2} & |\xi_1|^2\left(ir_2+\frac{|\mu_2|^2}{2}\right) \\ 0 & 1 & \overline{\xi_1}e^{is_1}\mu_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \right. \\
&\left. g(\xi_1\xi_2), h(e^{i(s_1+s_2)}) \right) = \\
&= \left(\begin{pmatrix} 1 & (\overline{\mu_1}+\xi_1 e^{-is_1}\overline{\mu_2}) & |\xi_1|^2\left(ir_2+\frac{|\mu_2|^2}{2}\right)+\overline{\mu_1}\mu_2\overline{\xi_1}e^{is_1}+ir_1+\frac{|\mu_1|^2}{2} \\ 0 & 1 & \overline{\xi_1}e^{is_1}\mu_2+\mu_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \right. \\
&\left. g(\xi_1\xi_2), h(e^{i(s_1+s_2)}) \right) = \\
&= (\exp(u(i(r_1+|\xi_1|^2 r_2+\mathrm{Im}(\overline{\xi_1}e^{is_1}\overline{\mu_1}\mu_2)))+v(\mu_1+\overline{\xi_1}e^{is_1}\mu_2)), g(\xi_1\xi_2), h(e^{i(s_1+s_2)})).
\end{aligned}$$

Твърдение 2.4. *Стандартната максимална параболична подгрупа $P_0 = P(l_{\mathbb{C}}(e))$ на $U^o(1,2)$ действа транзитивно върху $\mathbb{B}$ и нейното прецизирано разлагане на Лангландс*

$$P_0 = [Z(N_{P_0}) \times V_{P_0}] \rtimes [G_{1,l}(P_0) \times G_{1,h}(P_0)]$$

индуцира хоросферично разлагане

$$\mathbb{B} = Z(N_{P_0}) \times V_{P_0} \times C_{P_0}$$

на $\mathbb{B}$, отговарящо на P_0, в което

$$C_{P_0} = G_{1,l}(P_0) / \left[G_{1,l}(P_0) \cap \mathrm{Stab}_{U^o(1,2)}(\check{o})\right] \simeq (\mathbb{R}^{>0}, .)$$

е едномерен, отворен, хомогенен конус, несъдържащ реална права. Допирателното пространство към C_{P_0} *в началото е*

$$T_o^{\mathbb{R}} C_{P_0} = \left\{ \left(\begin{array}{ccc} \xi_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\xi_0 \end{array} \right) \Big| \, \xi_0 \in \mathbb{R} \right\}$$

и експоненциалното изображение

$$\exp : T_o^{\mathbb{R}} C_{P_0} \longrightarrow C_{P_0},$$

$$\exp \left(\begin{array}{ccc} \xi_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\xi_0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc} e^{\xi_0} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\xi_0} \end{array} \right), \quad \forall \xi_0 \in \mathbb{R}$$

е глобален дифеоморфизъм.

Доказателство. За да установим транзитивността на действието на

$$P_0 = \left\{ \left(\begin{array}{ccc} \xi & \xi e^{is} \overline{\mu} & \lambda \\ 0 & e^{is} & \mu \\ 0 & 0 & \overline{\xi}^{-1} \end{array} \right) \Big| \, \lambda, \mu \in \mathbb{C}, \, \xi \in \mathbb{C}^*, \, s \in \mathbb{R}, \, |\mu|^2 = 2\mathrm{Re} \left(\frac{\lambda}{\xi} \right) \right\}$$

върху $\mathbb{B} = U^o(1,2)/(U_1 \times U_2)^o$ е достатъчно да проверим, че групата

$$U^o(1,2) = P_0 (U_1 \times U_2)^o$$

се поражда от P_0 и $(U_1 \times U_2)^o := \mathrm{Stab}_{U^o(1,2)}(\check{o})$. На езика на съответните алгебри на Ли трябва да докажем, че $\mathrm{Lie} U^o(1,2) = \mathrm{Lie} P_0 + \mathrm{Lie}(U_1 \times U_2)^o$ за матриците спрямо базиса $e, f, \check{e}$ на $\mathbb{C}^3$. В доказателството на Твърдение 2.3 установихме, че

$$\mathrm{Lie} U^o(1,2) = \left\{ Y = \left(\begin{array}{ccc} y_{11} & \overline{y_{23}} & ir_{13} \\ y_{21} & ir_{22} & y_{23} \\ ir_{31} & \overline{y_{21}} & -\overline{y_{11}} \end{array} \right) \Big| \, y_{11}, y_{21}, y_{23} \in \mathbb{C}, \, r_{13}, r_{22}, r_{31} \in \mathbb{R} \right\}$$

и

$$\mathrm{Lie} P_0 = \left\{ \left(\begin{array}{ccc} y_{11} & \overline{y_{23}} & ir_{13} \\ 0 & ir_{22} & y_{23} \\ 0 & 0 & -\overline{y_{11}} \end{array} \right) \Big| \, y_{11}, y_{23} \in \mathbb{C}, \, r_{13}, r_{22} \in \mathbb{R} \right\}.$$

Можем да разложим $\mathrm{Lie} P_0 = \mathrm{Lie} N_{P_0} \oplus \mathrm{Lie} L_{P_0}$ за

$$\mathrm{Lie} N_{P_0} = \left\{ \left(\begin{array}{ccc} 0 & \overline{y_{23}} & ir_{13} \\ 0 & 0 & y_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Big| \, y_{23} \in \mathbb{C}, \, r_{13} \in \mathbb{R} \right\}$$

и

$$\mathrm{Lie} L_{P_0} = \left\{ \left(\begin{array}{ccc} y_{11} & 0 & 0 \\ 0 & ir_{22} & 0 \\ 0 & 0 & -\overline{y_{11}} \end{array} \right) \Big| \, y_{11} \in \mathbb{C}, \, r_{22} \in \mathbb{R} \right\}.$$

Спрямо базиса α, β_1, β_2 на $\mathbb{C}^3$, алгебрата на Ли $\mathrm{LieStab}_{U(1,2)}(\check{o}) = \mathrm{Lie}(U_1 \times U_2)$ се представя с матриците от вида

$$Y' = \begin{pmatrix} y'_1 & 0 & 0 \\ 0 & y'_{22} & y'_{23} \\ 0 & y'_{32} & y'_{33} \end{pmatrix} \in \mathrm{Lie}U(1,2),$$

Условието $Y' \in \mathrm{Lie}(U_1 \times U_2)$ за матрица $Y' \in M_{3\times 3}(\mathbb{C})$ спрямо α, β_1, β_2 е равносилно на

$$\overline{Y'}^t \chi_{12} + \chi_{1,2} Y' =$$

$$= \begin{pmatrix} \overline{y'_1} & 0 & 0 \\ 0 & \overline{y'_{22}} & \overline{y'_{32}} \\ 0 & \overline{y'_{23}} & \overline{y'_{33}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y'_1 & 0 & 0 \\ 0 & y'_{22} & y'_{23} \\ 0 & y'_{32} & y'_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \overline{y'_1} & 0 & 0 \\ 0 & -\overline{y'_{22}} & -\overline{y'_{32}} \\ 0 & -\overline{y'_{23}} & -\overline{y'_{33}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y'_1 & 0 & 0 \\ 0 & -y'_{22} & -y'_{23} \\ 0 & -y'_{32} & -y'_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и е в сила точно когато

$$\overline{y'_1} = -y'_1, \quad \overline{y'_{22}} = -y'_{22}, \quad \overline{y'_{33}} = -y'_{33}, \quad y'_{32} = -\overline{y'_{23}}.$$

Следователно $\mathrm{LieStab}_{U(1,2)}(\check{o}) = \mathrm{Lie}(U_1 \times U_2)$ се представя чрез матриците

$$Y' = \begin{pmatrix} ir_1 & 0 & 0 \\ 0 & ir_2 & y' \\ 0 & -\overline{y'} & ir_3 \end{pmatrix} \quad \text{с} \quad r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{R},\ y' \in \mathbb{C}$$

спрямо базиса α, β_1, β_2 на $\mathbb{C}^3$. Матриците Y на $\mathrm{LieStab}_{U^o(1,2)}(\check{o})$ спрямо базиса $e, f, \check{e}$ на $\mathbb{C}^3$ са $Y = T^{-1} Y' T$, където

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \tag{2.14}$$

е матрицата на прехода от базиса α, β_1, β_2 към базиса

$$e := \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha + \beta_1), \quad f := \beta_2, \quad \check{e} := \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha - \beta_1)$$

на $\mathbb{C}^3$. Пресмятаме

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}(e + \check{e}), \quad \beta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e - \check{e}), \quad \beta_2 = f$$

и получаваме, че матрицата на прехода T^{-1} от $e, f, \check{e}$ към α, β_1, β_2 е

$$T^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следователно

$$Y = T^{-1}Y'T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ir_1 & 0 & 0 \\ 0 & ir_2 & y' \\ 0 & -\overline{y'} & ir_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i(r_1+r_2) & \sqrt{2}\,y' & i(r_1-r_2) \\ -\sqrt{2}\,\overline{y'} & 2ir_3 & \sqrt{2}\,\overline{y'} \\ i(r_1-r_2) & -\sqrt{2}\,y' & i(r_1+r_2) \end{pmatrix}.$$

По този начин доказахме, че матриците на $\mathrm{Lie}(U_1 \times U_2)^o$ спрямо базиса $e, f, \check{e}$ са

$$\mathrm{Lie}(U_1 \times U_2)^o = \left\{ Y = \begin{pmatrix} ir_1 & \overline{y} & ir_3 \\ -y & ir_2 & y \\ ir_3 & -\overline{y} & ir_1 \end{pmatrix} \middle| \, r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{R}, \, y \in \mathbb{C} \right\}.$$

За да твърдим, че $\mathrm{Lie}U^o(1,2) = \mathrm{Lie}P_0 + \mathrm{Lie}(U_1 \times U_2)^o$, трябва да установим, че за произволен елемент

$$Y = \begin{pmatrix} y_{11} & \overline{y_{23}} & ir_{13} \\ y_{21} & ir_{22} & y_{23} \\ ir_{31} & \overline{y_{21}} & -\overline{y_{11}} \end{pmatrix} \in \mathrm{Lie}U^o(1,2)$$

съществуват

$$Y' = \begin{pmatrix} y'_{11} & \overline{y'_{23}} & ir'_{13} \\ 0 & ir'_{22} & y'_{23} \\ 0 & 0 & -\overline{y'_{11}} \end{pmatrix} \in \mathrm{Lie}P_0 \quad \text{и} \quad Y'' = \begin{pmatrix} ir''_1 & \overline{y''} & ir''_3 \\ -y'' & ir''_2 & y'' \\ ir''_3 & -\overline{y''} & ir''_1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Lie}(U_1 \times U_2)^o$$

с $Y = Y' + Y''$. С други думи, за произволни $y_{11}, y_{21}, y_{23} \in \mathbb{C}$ и $r_{13}, r_{22}, r_{31} \in \mathbb{R}$ съществуват $y'_{11}, y'_{23}, y'' \in \mathbb{C}$ и $r'_{13}, r'_{22}, r''_1, r''_2, r''_3 \in \mathbb{R}$ с

$$y_{11} = y'_{11} + ir''_1, \quad y_{21} = -y'', \quad y_{23} = y'_{23} + y'',$$

$$r_{13} = r'_{13} + r''_3, \quad r_{22} = r'_{22} + r''_2, \quad r_{31} = r''_3.$$

Избираме

$$y'' := -y_{21}, \quad y'_{23} := y_{23} + y_{21}, \quad y'_{11} := y_{11},$$

$$r''_1 := 0, \quad r''_3 := r_{31}, \quad r''_2 := 0, \quad r'_{13} := r_{13} - r_{31}, \quad r'_{22} := r_{22}$$

и установяваме, че $\mathrm{Lie}U^o(1,2) = \mathrm{Lie}P_0 + \mathrm{Lie}(U_1 \times U_2)^o$, откъдето $U^o(1,2) = P_0(U_1 \times U_2)^o$. Това доказва транзитивността на действието на P_0 върху $\mathbb{B}$.

Да забележим, че $\mathrm{Lie}(N_{P_0}) \cap \mathrm{Lie}(U_1 \times U_2)^o = \{\mathbb{O}_{3\times 3}\}$, защото равенството

$$\begin{pmatrix} 0 & \overline{y_{23}} & ir_{13} \\ 0 & 0 & y_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ir_1 & \overline{y} & ir_3 \\ -y & ir_2 & y \\ ir_3 & -\overline{y} & ir_1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Lie}(N_{P_0}) \cap \mathrm{Lie}(U_1 \times U_2)^o$$

за някои $y_{23}, y \in \mathbb{C}$ и $r_{13}, r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{R}$ изисква $r_1 = r_2 = r_3 = 0$ и $y = 0$ чрез сравняване на елементите върху главния диагонал и под него. Това доказва, че $N_{P_0} \cap (U_1 \times U_2)^o = \{E_3\}$. Твърдим, че сечението

$$L_{P_0} \cap (U_1 \times U_2)^o = \left\{ \begin{pmatrix} e^{ir} & 0 & 0 \\ 0 & e^{is} & 0 \\ 0 & 0 & e^{ir} \end{pmatrix} \Big| r, s \in \mathbb{R} \right\} \simeq U_1 \times U_1 = S^1 \times S^1 \qquad (2.15)$$

е изоморфно на $U_1 \times U_1$. За да докажем това е достатъчно да проверим, че

$$\mathrm{Lie}(L_{P_0}) \cap \mathrm{Lie}(U_1 \times U_2)^o = \left\{ \begin{pmatrix} ir_1 & 0 & 0 \\ 0 & ir_2 & 0 \\ 0 & 0 & ir_1 \end{pmatrix} \Big| r_1, r_2 \in \mathbb{R} \right\}. \qquad (2.16)$$

Наистина, ако

$$\begin{pmatrix} y_{11} & 0 & 0 \\ 0 & ir_{22} & 0 \\ 0 & 0 & -\overline{y_{11}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ir_1 & \overline{y} & ir_3 \\ -y & ir_2 & y \\ ir_3 & -\overline{y} & ir_1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Lie}(L_{P_0}) \cap \mathrm{Lie}(U_1 \times U_2)^o$$

за някакви $y_{11}, y \in \mathbb{C}$ и $r_{22}, r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{R}$, то $y = 0$ и $r_3 = 0$ чрез сравняване на елементите извън главния диагонал. Освен това, $y_{11} = ir_1 \in i\mathbb{R}$ е чисто имагинерно число, съгласно равенството на елементите в първи ред и първи стълб. Това доказва (2.16) и (2.15). Вземайки предвид разлагането $N_{P_0} = Z(N_{P_0}) \times V_{P_0} = Z(N_{P_0}) \times (N_{P_0}/Z(N_{P_0}))$ като гладко многообразие и полагайки $C_{P_0} := L_{P_0}/[L_{P_0} \cap (U_1 \times U_2)^o]$. получаваме хоросферичното разлагане

$$\begin{aligned} \mathbb{B} = [P_0(U_1 \times U_2)^o]/(U_1 \times U_2)^o = P_0/[P_0 \cap (U_1 \times U_2)^o] = \\ = N_{P_0} \times [L_{P_0}/L_{P_0} \cap (U_1 \times U_2)^o] = Z(N_{P_0}) \times V_{P_0} \times C_{P_0} \end{aligned}$$

на $\mathbb{B}$, отговарящо на стандартната параболична подгрупа P_0 на $U^o(1,2)$.

Нека $\mathfrak{g}$ е алгебра на Ли над $\mathbb{R}$ с размерност $n = \dim_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$. Всеки избор на базис на $\mathfrak{g}$ задава изоморфизъм на $\mathbb{R}$-алгебри

$$\psi : \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}) \longrightarrow M_{n\times n}(\mathbb{R})$$

на пръстена $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$ на $\mathbb{R}$-линейните оператори в $\mathfrak{g}$ върху пръстена $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ на матриците от n-ти ред. Присъединеното представяне на $\mathfrak{g}$ е $\mathbb{R}$-линейното изображение

$$\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}), \quad \mathrm{ad}(x)(y) = [x, y] = xy - yx, \quad \forall x, y \in \mathfrak{g}.$$

Билинейната форма

$$\Phi : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \Phi(x, y) := \mathrm{Tr}(\psi\mathrm{ad}(x), \psi\mathrm{ad}(y)), \quad x, y \in \mathfrak{g},$$

зададена чрез следата Tr на произведението на матриците на $\mathrm{ad}(x), \mathrm{ad}(y) \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$ се нарича форма на Килинг на $\mathfrak{g}$. Допирателното пространство $T_o^{\mathbb{R}} C_{P_0}$ на C_P в началото е ортогоналното допълнение

$$T_o^{\mathbb{R}} C_{P_0} = \left\{ \begin{pmatrix} \xi_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\xi_0 \end{pmatrix} \Big| \xi_0 \in \mathbb{R} \right\}$$

на $\mathrm{Lie}(L_{P_0}) \cap \mathrm{Lie}(U_1 \times U_2)^o$ в $\mathrm{Lie}(L_{P_0})$ относно формата на Килинг на $\mathrm{Lie}U^o(1,2)$. Експоненциалното изображение

$$\exp : T_o^{\mathbb{R}} C_{P_0} \longrightarrow C_{P_0},$$

$$\exp \begin{pmatrix} \xi_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\xi_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\xi_0} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\xi_0} \end{pmatrix}$$

съвпада с експонентата на матрица и е глобален дифеоморфизъм, защото логаритмичното изображение $\log : (\mathbb{R}^{>0}, .) \to (\mathbb{R}, +)$ на положителните реални числа е коректно зададено.

□

Следствие 2.5. *Нека* $z = g(1,0) \in \partial\mathbb{B}$ *е гранична точка, чийто максимален параболичен стабилизатор* $P = \mathrm{Stab}_{U(1,2)}(z) = gP_0g^{-1}$ *има прецизирано разлагане на Ланглandс*

$$P \simeq [\mathrm{Lie}(N_P) \rtimes \mathrm{Lie}(V_P)] \rtimes [G_{1,l}(P) \times G_{1,h}(P)]$$

с $\mathrm{Lie}Z(N_P) = g\mathrm{Lie}(N_{P_0})g^{-1} \simeq \mathbb{R}$, $\mathrm{Lie}(V_P) = g\mathrm{Lie}(V_{P_0})g^{-1} \simeq \mathbb{C}$, $G_{1,l}(P) = gG_{1,l}(P_0)g^{-1} \simeq \mathbb{C}^*$ *и* $G_{1,h}(P) = gG_{1,h}(P_0)g^{-1} \simeq S^1$, *отговарящо на хоросферичното разлагане*

$$\mathbb{B} = \mathrm{Lie}Z(N_P) \times \mathrm{Lie}(V_P) \times C_P$$

с $C_P = gC_{P_0}g^{-1} \simeq \mathbb{R}^{>0}$. *Тогава съществува* $\mathbb{R}$*-линеен изоморфизъм*

$$\kappa_P' : T_o^{\mathbb{R}} C_P = g\left[T_o^{\mathbb{R}} C_{P_0}\right] g^{-1} \longrightarrow \sqrt{1}\mathrm{Lie}Z(N_P) = g\left[\sqrt{-1}\mathrm{Lie}Z(N_{P_0})\right] g^{-1},$$

$$\kappa_P' \left(g \begin{pmatrix} \xi_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\xi_0 \end{pmatrix} g^{-1} \right) = g \begin{pmatrix} 0 & 0 & \xi_0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} g^{-1}, \quad \forall \xi_0 \in \mathbb{R},$$

чиято композиция с влагането

$$\nu_P : C_P = gC_{P_0}g^{-1} \longrightarrow T_o^{\mathbb{R}} C_P = g[T_o^{\mathbb{R}} C_{P_0}]g^{-1},$$

$$\nu_P \left(g \begin{pmatrix} \xi & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \xi^{-1} \end{pmatrix} g^{-1} \right) = g \begin{pmatrix} \xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\xi \end{pmatrix} g^{-1}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^{>0},$$

индуцирано от $\mathbb{R}^{>0} \hookrightarrow \mathbb{R}$ *дава влагане*

$$\kappa_P = \kappa_P' \nu_P : C_P = gC_{P_0}g^{-1} \longrightarrow \sqrt{-1}\mathrm{Lie}Z(N_P) = g\left[\sqrt{-1}\mathrm{Lie}Z(N_{P_0})\right] g^{-1},$$

$$\kappa_P \left(g \begin{pmatrix} \xi & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \xi^{-1} \end{pmatrix} g^{-1} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \xi \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^{>0}.$$

Множеството

$$\mathfrak{S}(P) := \mathrm{Lie}Z(N_P) + \kappa_P(C_P) = \left\{ \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & \sqrt{-1}\eta + \xi \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Big| \xi, \eta \in \mathbb{R}, \, \xi > 0 \right\} \simeq$$
$$\simeq \{\lambda \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}(\lambda) > 0\}$$

е комплексно подмногообразие на $\mathbb{B}$, *изоморфно на дясната полуравнина на комплексната права* $\mathrm{Lie}Z(N_P) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \simeq \mathbb{C}$ *и* $\mathbb{B}$ *е дифеоморфно на* $\mathfrak{S}(P) \times \mathrm{Lie}(V_P)$.

Съществува ермитова форма

$$h_P : \mathrm{Lie}(V_P) \times \mathrm{Lie}(V_P) \longrightarrow \mathrm{Lie}Z(N_P) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mathbb{C},$$

$$h_P(v_1, v_2) = \overline{v_1} v_2, \quad \forall v_1, v_2 \in \mathrm{Lie}(V_P) \simeq \mathbb{C}$$

и холоморфно разслоение

$$\pi_P : \mathbb{B} \longrightarrow \mathrm{Lie}(V_P),$$

чиито слоеве

$$\pi_P^{-1}(v) = \mathfrak{S}(P) + h_P(v, v) = \mathfrak{S}(P) + |v|^2$$

са изоморфни на $\mathfrak{S}(P)$. *Представянето*

$$\mathbb{B} = \coprod_{v \in \mathrm{Lie}(V_P)} \pi_P^{-1}(v) = \coprod_{v \in \mathrm{Lie}(V_P) \simeq \mathbb{C}} \left(\mathfrak{S}(P) + |v|^2\right)$$

се нарича реализация на $\mathbb{B}$ *като област на Зигел, отговаряща на* P.

Нетривиалните твърдения от следствието са холоморфността на влагането $\mathfrak{S}(P) \hookrightarrow \mathbb{B}$ и описанието на слоевете на $\pi_P : \mathbb{B} \to \mathrm{Lie}(V_P)$, които ще приемем наготово.

Нека Γ е решетка на $U(1,2)$, т.е. дискретна подгрупа на $U(1,2)$, чийто фактор $\mathbb{B}/\Gamma$ има краен инвариантен обем. Максимална параболична подгрупа P на $U(1,2)$ е Γ-рационална, ако сечението $\Gamma \cap P$ е решетка в P. Това се свежда до крайност на инвариантния обем на $P/(\Gamma \cap P)$. Ако P е Γ-рационална максимална параболична подгрупа на $U(1,2)$, то сечението $\Gamma \cap N_P$ на Γ с унипотентния радикал N_P на P е решетка в N_P и сечението $\Gamma \cap Z(N_P)$ на Γ с центъра $Z(N_P)$ на N_P е решетка в $Z(N_P)$. Абелевата група на Ли $Z(N_P)$ има биективно експоненциално изображение

$$\exp : \mathrm{Lie}Z(N_P) = g\mathrm{Lie}Z(N_{P_0})g^{-1} \longrightarrow gZ(N_{P_0})g^{-1} = Z(N_P),$$

$$\exp\left(g \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & ir \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) g^{-1} \right) = g \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & ir \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) g^{-1}, \quad \forall r \in \mathbb{R}$$

с обратно

$$\exp^{-1} : Z(N_P) \longrightarrow \mathrm{Lie}Z(N_P),$$

$$\exp^{-1}(A) = A - E_3 \quad \text{за} \quad \forall A \in Z(N_P).$$

Решетката $\Gamma \cap Z(N_P)$ на $Z(N_P)$ се изобразява изоморфно върху решетката $\Upsilon_P :=$ $\exp^{-1}(\Gamma \cap Z(N_P))$ на $(\mathrm{Lie} Z(N_P), +) \simeq (\sqrt{-1}\mathbb{R}, +)$. Следователно $(\Upsilon_P, +) \simeq (\sqrt{-1}\mathbb{Z}, +)$. Действието

$$\Upsilon_P \times \mathfrak{S}(P) \longrightarrow \mathfrak{S}(P),$$

$$\left(g \begin{pmatrix} 0 & 0 & ir \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} g^{-1}, g \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} g^{-1} \right) \mapsto g \begin{pmatrix} 0 & 0 & ir+\lambda \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} g^{-1}$$

$$\text{за} \quad \forall g \begin{pmatrix} 0 & 0 & ir \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} g^{-1} \in \Upsilon_P, \quad \forall g \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} g^{-1} \in \mathfrak{S}(P)$$

с $r \in \mathbb{R}$ и $\lambda \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$ индуцира действие

$$\Upsilon_P \times \pi_P^{-1}(v) \longrightarrow \pi_P^{-1}(v)$$

върху слоевете $\pi_P^{-1}(v) = \mathfrak{S}(P) + |v|^2$ на $\pi_P : \mathbb{B} \to \mathrm{Lie}(V_P) \simeq \mathbb{C}$. Факторът

$$\mathbb{B}/\Upsilon_P = \coprod_{v \in \mathrm{Lie}(V_P) \simeq \mathbb{C}} \left[\left(\mathfrak{S}(P) + |v|^2 \right) / \Upsilon_P \right]$$

наследява холоморфното разслоение на $\mathbb{B}$ над $\mathrm{Lie}(V_P) \simeq \mathbb{C}$. Ако отъждествим комплексификацията $(\mathrm{Lie} Z(N_P) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}, +)$ с $(\mathbb{C}, +)$ и $(\Upsilon_P, +)$ с $(\sqrt{-1}\mathbb{Z}, +)$, то покритието на Галоа

$$\zeta_P : \mathrm{Lie} Z(N_P) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \longrightarrow \mathrm{Lie} Z(N_P) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}/\Upsilon_P$$

се задава чрез формулата

$$\zeta_P(z) = e^{-2\pi z} \quad \text{за} \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

В частност,

$$\left(\mathfrak{S}(P) + |v|^2 \right) / \Upsilon_P = \zeta_P(\mathfrak{S}(P) + |v|^2) = \left\{ e^{-2\pi(\lambda + |v|^2)} \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{C},\, \mathrm{Re}(\lambda) > 0 \right\}.$$

За произволно комплексно число $z \in \mathbb{C}$ е изпълнено

$$|e^z| = \left| e^{\mathrm{Re}(z) + i\mathrm{Im}(z)} \right| = e^{\mathrm{Re}(z)}.$$

Вземайки предвид, че $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$ е еквивалентно на $\mathrm{Re}(-2\pi(\lambda + |v|^2)) < -2\pi|v|^2$ за комплексно число $\lambda \in \mathbb{C}$, получаваме че ненулевото комплексно число $e^{-2\pi(\lambda+|v|^2)}$ принадлежи на фактора $\left(\mathfrak{S}(P) + |v|^2 \right) / \Upsilon_P$ тогава и само тогава, когато

$$\left| e^{-2\pi(\lambda+|v|^2)} \right| = e^{\mathrm{Re}(-2\pi(\lambda+|v|^2))} < e^{-2\pi|v|^2}.$$

Следователно

$$\left(\mathfrak{S}(P) + |v|^2 \right) / \Upsilon_P = \left\{ z \in \mathbb{C} \,|\, 0 < |z| < e^{-2\pi|v|^2} \right\} = \Delta^* \left(0, e^{-2\pi|v|^2} \right)$$

е пунктиран диск с радиус $e^{-2\pi|v|^2}$.

За да опишем частичната компактификация $(\mathbb{B}/\Upsilon_P)'$ на $\mathbb{B}/\Upsilon_P$ да напомним, че комплексен алгебричен тор е абелева афинна алгебрична група. Например,

$$\zeta_P(\mathrm{Lie}Z(N_P)\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C})=\mathbb{C}^*$$

е 1-мерен комплексен алгебричен тор. Всеки комплексен алгебричен тор $\mathbb{T}$ е изоморфен на $(\mathbb{C}^*)^k$ за някакво естествено число $k\in\mathbb{N}$. Афинно торично многообразие $\mathbb{TV}$, отговарящо на алгебричен тор $\mathbb{T}$ е афинно многообразие $\mathbb{TV}$, което съдържа $\mathbb{T}$ като навсякъде гъсто подмножество и което има действие $\mathbb{T}\times\mathbb{TV}\to\mathbb{TV}$ на $\mathbb{T}$, продължаващо груповата операция $\mathbb{T}\times\mathbb{T}\to\mathbb{T}$ в $\mathbb{T}$. Затворен полиедрален конус в $\mathbb{R}^k$, несъдържащ реална права е множество от вида

$$\tau=\mathbb{R}^{\geq 0}u_1+\ldots+\mathbb{R}^{\geq 0}u_d:=\{r_1u_1+\ldots+r_su_s\,|\,r_i\in\mathbb{R},\,r_i\geq 0\}$$

за някакви $u_1,\ldots,u_s\in\mathbb{R}^k\setminus\{0^k\}$. Полиедрално разлагане на подмножество $M\subseteq\mathbb{R}^k$ е фамилия Σ от затворени полиедрални конуси, несъдържащи реална права, така че стените на произволен конус $\tau\in\Sigma$ принадлежат на Σ и сечението $\tau_1\cap\tau_2\in\Sigma$ на произволни $\tau_1,\tau_2\in\Sigma$ остава в Σ. Ако

$$\zeta_{\mathbb{T}}:\mathbb{R}^k\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}=\mathbb{C}^k\longrightarrow\mathbb{C}^k/(\sqrt{-1}\mathbb{Z})^k=(\mathbb{C}^*)^k\simeq\mathbb{T},$$

$$\zeta_{\mathbb{T}}(r_1,\ldots r_k)=(e^{2\pi r_1},\ldots,e^{2\pi r_k}),\quad\forall(r_1,\ldots,r_k)\in\mathbb{R}^k$$

е покритието на Галоа на тора $\mathbb{T}\simeq(\mathbb{C}^*)^k$ с група на Галоа $((\sqrt{-1}\mathbb{Z})^k,+)$, то полиедралното разлагане Σ на подмножество на $M\subseteq\mathbb{R}^k$ е $(\sqrt{-1}\mathbb{Z})^k$-рационално, ако върховете на всички конуси от Σ принадлежат на $(\sqrt{-1}\mathbb{Z})^k$. Всяко $(\sqrt{-1}\mathbb{Z})^k$-рационално полиедрално разлагане Σ на M отговаря на афинно торично многообразие $\mathbb{TV}(\Sigma)$. По-точно, за произволен полиедрален конус $\tau\in\Sigma$ разглеждаме линейната обвивка $l_{\mathbb{C}}(\tau)\subset\mathbb{C}^k$ и комплексния тор

$$\mathbb{T}(\tau):=l_{\mathbb{C}}(\tau)/[l_{\mathbb{C}}(\tau)\cap(\sqrt{-1}\mathbb{Z})^k].$$

Като множество,

$$\mathbb{TV}(\Sigma):=\coprod_{\tau\in\Sigma}(\mathbb{T}/\mathbb{T}(\tau))$$

е непресичащото се обединенние на фактор-групите $\mathbb{T}/\mathbb{T}(\tau)$ за $\forall\tau\in\Sigma$. В случая на частична компактификация на $\mathbb{B}/\Upsilon_P$ разглеждаме Υ_P-рационално полиедрално разлагане $\Sigma(P)$ на

$$\kappa_P(C_P)\subset\sqrt{-1}\mathrm{Lie}Z(N_P)=\left\{\left(\begin{array}{ccc}0&0&r\\0&0&0\\0&0&0\end{array}\right)\Bigg|\,r\in\mathbb{R}\right\}\simeq\mathbb{R},$$

върху което действа

$$\Gamma\cap G_{1,l}(P)=\left\{\left(\begin{array}{ccc}\xi&0&0\\0&1&0\\0&0&\overline{\xi}^{-1}\end{array}\right)\in\Gamma\,\Bigg|\,\xi\in\mathbb{C}^*\right\}$$

с краен брой орбити. Всяко такова разлагане ще наричаме Г-допустимо. Твърдим, че всяко полиедрално разлагане $\Sigma(P)$ на $\mathbb{R}$ се състои от конусите $\tau_1 := [0, \infty)$ и $\tau_2 := \{0\}$ или от конусите $\tau_1 := (-\infty, 0]$ и $\tau_2 := \{0\}$. Ясно е, че $\mathbb{R}^{\geq 0}.0 = \{0\}$. Ако $u \in \mathbb{R}^{>0}$ е строго положително, то

$$\mathbb{R}^{\geq 0}.u = \{su \,|\, s \in \mathbb{R}^{>0}\} \cup \{0.u\} \subseteq \mathbb{R}^{>0} \cup \{0\} = [0, \infty).$$

За $[0, \infty) \subseteq \mathbb{R}^{\geq 0}.u$ да забележим, че $0 = 0.u \in \mathbb{R}^{\geq 0}.u$ и за произволно $s \in (0, \infty) = \mathbb{R}^{>0}$ имаме $s = \left(\frac{s}{u}\right) u \in \mathbb{R}^{>0}.u \subset \mathbb{R}^{\geq 0}.u$, съгласно $\frac{s}{u} > 0$. Аналогично, ако $u \in \mathbb{R}^{<0}$ е строго отрицателно, то $\mathbb{R}^{\geq 0}u = (-\infty, 0]$, защото

$$\mathbb{R}^{\geq 0}.u = \{su \,|\, s \in \mathbb{R}^{>0}\} \cup \{0.u = 0\} \subseteq \mathbb{R}^{<0} \cup \{0\} = (-\infty, 0]$$

и за всяко $s \in (-\infty, 0)$ е изпълнено $s = \left(\frac{s}{u}\right) u \in \mathbb{R}^{>0}u \subset \mathbb{R}^{\geq 0}.u$ поради $\frac{s}{u} \in \mathbb{R}^{>0}$. Горните разглеждания показват, че ненулевите полиедрални конуси $\tau \neq \{0\}$ се пораждат от ненулевите си върхове. Ако $\tau = \mathbb{R}^{\geq 0}u_1 + \ldots + \mathbb{R}^{\geq 0}u_s$ за някакви $u_1, \ldots, u_s \in \mathbb{R}^*$, то или $u_1, \ldots, u_s \in \mathbb{R}^{>0}$, или $u_1, \ldots, u_s \in \mathbb{R}^{<0}$. В противен случай съществуват $u_i \in \mathbb{R}^{>0}$ и $u_j \in \mathbb{R}^{<0}$ за някакви $1 \leq i \neq j \leq s$ и

$$\tau \supseteq \mathbb{R}^{\geq 0}.u_i + \mathbb{R}^{\geq 0}.u_j = [0, \infty) + (-\infty, 0] = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$$

съдържа реална права. Ако $u_1, \ldots, u_s \in \mathbb{R}^{>0}$, то

$$\tau = \mathbb{R}^{\geq 0}u_1 + \ldots + \mathbb{R}^{\geq 0}u_s = [0, \infty) + \ldots + [0, \infty) = [0, \infty).$$

За $u_1, \ldots, u_s \in \mathbb{R}^{<0}$ имаме

$$\tau = \mathbb{R}^{\geq 0}u_1 + \ldots + \mathbb{R}^{\geq 0}u_s = (-\infty, 0] + \ldots + (-\infty, 0] = (-\infty, 0].$$

Независимо от това дали $\tau_1 = [0, \infty)$ или $\tau_1 = (-\infty, 0]$, торът

$$\mathbb{T}(\tau_1) = l_{\mathbb{C}}(\tau_1)/[l_{\mathbb{C}}(\tau_1) \cap \sqrt{-1}\mathbb{Z}] = \mathrm{Lie}Z(N_P)/[\mathrm{Lie}Z(N_P) \cap \Upsilon_P] = \mathbb{T}(P)$$

има нулев фактор

$$\mathbb{T}(P)/\mathbb{T}(\tau_1) = \{0\}.$$

В случая $\tau_2 = \{0\}$ пресмятаме, че

$$\mathbb{T}(\tau_2) = l_{\mathbb{C}}(0)/[l_{\mathbb{C}}(0) \cap \sqrt{-1}\mathbb{Z}] = \{0\},$$

откъдето

$$\mathbb{T}(P)/\mathbb{T}(\tau_2) = \mathbb{T}(P).$$

Да забележим, че $\{[0, \infty), \{0\}\}$ и $\{(-\infty, 0], \{0\}\}$ са полиедрални разлагания. По-точно, единствените стени на $[0, \infty), (-\infty, 0]$ са $\{0\}$ и този конус принадлежи на двете фамилии. Сеченията $[0, \infty) \cap \{0\} = \{0\}$, съответно, $(-\infty, 0] \cap \{0\}$ остават в тези фамилии. По този начин установихме, че произволно Г-допустимо полиедрално разлагане

$\Sigma(P)=\{\tau_1,\tau_2\}$ на $\kappa_P(C_P)\subset\sqrt{-1}\mathrm{Lie}Z(N_P)$ отговаря на афинното торично многообразие

$$\mathbb{TV}(\Sigma(P))=[\mathbb{T}(P)/\mathbb{T}(\tau_1)]\coprod[\mathbb{T}(P)/\mathbb{T}(\tau_2)]=\{0\}\coprod\mathbb{T}(P)\simeq\{0\}\coprod\mathbb{C}^*=\mathbb{C}.$$

За произволно $v\in\mathrm{Lie}(V_P)\simeq\mathbb{C}$ разглеждаме затворената обвивка

$$\mathrm{Cl}\left(\left(\mathfrak{S}(P)+|v|^2\right)/\Upsilon_P\right)=\mathrm{Cl}\left(\Delta^*\left(0,e^{-2\pi|v|^2}\right)\right)=$$
$$=\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z|\leq e^{-2\pi|v|^2}\}=\Delta\left(0,e^{-2\pi|v|^2}\right)\coprod\partial\Delta\left(0,e^{-2\pi|v|^2}\right)$$

на $\left(\mathfrak{S}(P)+|v|^2\right)/\Upsilon_P\simeq\Delta^*\left(0,e^{-2\pi|v|^2}\right)$ в афинното торично многообразие $\mathbb{TV}(\Sigma(P))\simeq\mathbb{C}$, която е изоморфна на затворения диск $\Delta\left(0,e^{-2\pi|v|^2}\right)\coprod\partial\Delta\left(0,e^{-2\pi|v|^2}\right)$ с радиус $e^{-2\pi|v|^2}$ и център $0\in\mathbb{C}$. Всяка околност на точка

$$z\in\partial\Delta\left(0,e^{-2\pi|v|^2}\right)=\left\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z|=e^{-2\pi|v|^2}\right\}$$

съдържа външни точки за $\mathrm{Cl}\left(\Delta\left(0,e^{-2\pi|v|^2}\right)\right)$. Следователно z не е от вътрешността на $\mathrm{Cl}\left(\Delta\left(0,e^{-2\pi|v|^2}\right)\right)$. Точката $0\in\mathrm{Cl}\left(\Delta\left(0,e^{-2\pi|v|^2}\right)\right)$ има отворена околност $0\in U\subset\mathrm{Cl}\left(\Delta\left(0,e^{-2\pi|v|^2}\right)\right)$, така че 0 е вътрешна точка на $\mathrm{Cl}\left(\Delta\left(0,e^{-2\pi|v|^2}\right)\right)$. По този начин установихме, че вътрешността на затворената обвивка на $\left(\mathfrak{S}(P)+|v|^2\right)/\Upsilon_P$ в $\mathbb{TV}(\Sigma(P))\simeq\mathbb{C}$ е отвореният диск

$$\mathrm{IntCl}\left(\left(\mathfrak{S}(P)+|v|^2\right)/\Upsilon_P\right)\simeq\Delta\left(0,e^{-2\pi|v|^2}\right).$$

По определение, частичната компактификация на $\mathbb{B}/\Gamma$ в Γ-рационалната максимална параболична подгрупа P на $U(1,2)$ е

$$(\mathbb{B}/\Upsilon_P)':=\coprod_{v\in\mathrm{Lie}(V_P)}\mathrm{IntCl}\left(\left(\mathfrak{S}(P)+|v|^2\right)/\Upsilon_P\right)\simeq\coprod_{v\in\mathrm{Lie}(V_P)\simeq\mathbb{C}}\Delta\left(0,e^{-2\pi|v|^2}\right).$$

Въпреки, че се нарича "частична компактификация", комплексно аналитичната повърхнина $(\mathbb{B}/\Upsilon_P)'$ не е компактна. Тази повърхнина е фамилия от отворени дискове с променлив радиус $e^{-2\pi|v|^2}$, параметриизрана с комплексна права $\mathbb{C}\ni v$. Ако параметрите $v\in\mathrm{Lie}(V_P)=\mathbb{C}$ са с модул $|v|\to\infty$, то радиусите $\lim\limits_{|v|\to\infty}e^{-2\pi|v|^2}=0$ на съответноте дискове клонят към 0.

Да означим с $\mathrm{MPar}(\Gamma)$ множеството на Γ-рационалните максимални параболични подгрупи P на $U(1,2)$. Максималните параболични подгрупи $P=\mathrm{Stab}_{U(1,2)}(z)$ са точно стабилизаторите на граничните точки $z\in\partial\mathbb{B}$. Ще казваме, че $z\in\partial\mathbb{B}$ е Γ-рационална гранична точка, ако стабилизаторът и $P:=\mathrm{Stab}_{U(1,2)}(z)\in\mathrm{MPar}(\Gamma)$ в $U(1,2)$ е Γ-рационална параболична подгрупа на $U(1,2)$. Решетката Γ действа върху множеството $\partial_\Gamma\mathbb{B}$ на Γ-рационалните гранични точки с краен брой орбити, наречени

Γ-параболични точки. Присъединяването на Γ-орбитите $\partial_\Gamma \mathbb{B}/\Gamma$ на $\partial_\Gamma \mathbb{B}$ към $\mathbb{B}/\Gamma$ води до компактна проективна повърхнина

$$\widehat{\mathbb{B}/\Gamma} := (\mathbb{B}/\Gamma) \coprod (\partial_\Gamma \mathbb{B}/\Gamma) ,$$

известна като компактификация на Бейли-Борел на $\mathbb{B}/\Gamma$. Крайното множество $\partial_\Gamma \mathbb{B}/\Gamma$ се състои от особени точки на $\widehat{\mathbb{B}/\Gamma}$, които се наричат параболични. Грубо казано, тороидалната компактификация $(\mathbb{B}/\Gamma)'$ се получава от $\widehat{\mathbb{B}/\Gamma}$ чрез замяна на Γ-параболичните точки с подходящи гладки неприводили елиптични криви. За да определим $(\mathbb{B}/\Gamma)'$ да разгледаме непресичащото се обединение

$$\coprod_{P \in \mathrm{MPar}(\Gamma)} (\mathbb{B}/\Upsilon_P)'$$

на частичните компактификации, отговарящи на Γ-рационалните максимални параболични подгрупи P на $U(1,2)$. Действието на Γ върху $\partial_\Gamma \mathbb{B}$ индуцира действие на Γ върху $\mathrm{MPar}(\Gamma) = \{P = \mathrm{Stab}_{U(1,2)}(z) \,|\, z \in \partial_\Gamma \mathbb{B}\}$ чрез спрягане. За да опишем подробно това спрягане, избираме съгласувани хоросферични разлагания $\mathbb{B} \simeq \mathrm{Lie} Z(N_P) \times \mathrm{Lie} V_P \times C_P$, съответно,

$$\mathbb{B} \simeq \mathrm{Lie} Z(N_{\gamma P \gamma^{-1}}) \times \mathrm{Lie} V_{\gamma P \gamma^{-1}} \times C_{\gamma P \gamma^{-1}}$$

за произволно $\gamma \in \Gamma$. Съгласуваността се състои в избора на начало $\gamma(\check{o}) \in C_{\gamma P \gamma^{-1}}$ на хомогенния конус $C_{\gamma P \gamma^{-1}}$, ако $\check{o} \in C_p$ е началото на C_P. Тогава

$$C_{\gamma P \gamma^{-1}} = L_{\gamma P \gamma^{-1}} / [L_{\gamma P \gamma^{-1}} \cap \mathrm{Stab}_{U(1,2)} \gamma(\check{o})]$$

и означавайки с $K_P := L_P \cap \mathrm{Stab}_{U(1,2)}(\check{o})$ стабилизатора на $\check{o} \in C_P$ получаваме, че $C_{\gamma P \gamma^{-01}} = \gamma L_P \gamma^{-1} / K_{\gamma P \gamma^{-1}}$ за стабилизатора

$$K_{\gamma P \gamma^{-1}} := L_{\gamma P \gamma^{-1}} \cap \mathrm{Stab}_{U(1,2)} \gamma(\check{o}) = \gamma [L_P \cap \mathrm{Stab}_{U(1,2)}(\check{o})] \gamma^{-1} = \gamma K_P \gamma^{-1}$$

на $\gamma(\check{o}) \in C_{\gamma P \gamma^{-1}} = \gamma L_P \gamma^{-1} / \gamma K_P \gamma^{-1}$ в $\gamma L_P \gamma^{-1} = L_{\gamma P \gamma^{-1}}$. Да напомним, че

$$\mathbb{B}/\Upsilon_P = \coprod_{v \in \mathrm{Lie}(V_P) \simeq \mathbb{C}} \left(\mathfrak{S}(P) + |v|^2 \right) =$$

$$= \left\{ (u + \kappa_P(l K_P) + |v|^2, v) \,|\, u \in \mathrm{Lie} Z(N_P),\, l \in L_P,\, v \in \mathrm{Lie}(V_P) \right\} ,$$

съответно,

$$\mathbb{B}/\Upsilon_{\gamma P \gamma^{-1}} = \coprod_{v' \in \mathrm{Lie}(V_{\gamma P \gamma^{-1}})} \mathfrak{S}(\gamma P \gamma^{-1}) + |v'|^2 =$$

$$= \left\{ (u' + \kappa_{\gamma P \gamma^{-1}}(l' K_{\gamma P \gamma^{-1}}) + |v'|^2, v') \,|\, u' \in \mathrm{Lie} Z(N_{\gamma P \gamma^{-1}}),\, l' \in L_{\gamma P \gamma^{-1}},\, v' \in \mathrm{Lie}(V_{\gamma P \gamma^{-1}}) \right\} .$$

Съгласно $\mathrm{Lie} Z(N_{\gamma P \gamma^{-1}}) = \gamma \mathrm{Lie} Z(N_P) \gamma^{-1}$, $\mathrm{Lie}(V_{\gamma P \gamma^{-1}}) = \gamma \mathrm{Lie}(V_P) \gamma^{-1}$ и $L_{\gamma P \gamma^{-1}} = \gamma L_P \gamma^{-1}$, можем да представим

$$\begin{aligned} \mathbb{B}/\Upsilon_{\gamma P \gamma^{-1}} &= \\ = \left\{ (\gamma u \gamma^{-1} + \kappa_{\gamma P \gamma^{-1}}(\gamma l \gamma^{-1} (\gamma K_P \gamma^{-1})) + |\gamma v \gamma^{-1}|^2, \gamma v \gamma^{-1}),\ | \right. \\ \left. |\, u \in \mathrm{Lie} Z(N_P),\, l \in L_P,\, v \in \mathrm{Lie} V_P \right\} . \end{aligned}$$

Оттук,

$$\begin{aligned}\psi_\gamma(u+\kappa_P(lK_P)+|v|^2,v)=\\=(\gamma u\gamma^{-1}+\kappa_{\gamma P\gamma^{-1}}(\gamma l\gamma^{-1}(\gamma K_P\gamma^{-1}))+|\gamma v\gamma^{-1}|^2,\gamma v\gamma^{-1})=\\=(\gamma u\gamma^{-1}+\kappa_{\gamma P\gamma^{-1}}(\gamma l\gamma^{-1}K_{\gamma P\gamma^{-1}})+|\gamma v\gamma^{-1}|^2,\gamma v\gamma^{-1})\end{aligned}$$

за произволни $u\in \mathrm{Lie}Z(N_P)$, $l\in L_P$ и $v\in \mathrm{Lie}(V_P)$. Да напомним, че

$$\mathbb{B}/\Upsilon_P=\coprod_{v\in \mathrm{Lie}(V_P)}\left[\mathfrak{S}(P)+|v|^2/\Upsilon_P\right]=\coprod_{v\in\mathbb{C}}\Delta^*\left(0,e^{-2\pi|v|^2}\right)$$

е фамилия от пунктирани дискове, параметризирани от комплексната права $\mathrm{Lie}(V_P)\simeq\mathbb{C}$ и $(\mathbb{B}/\Upsilon_P)'$ се получава от $\mathbb{B}/\Upsilon_P$ чрез присъединяване на началото на всеки диск. Затова можем да представим

$$(\mathbb{B}/\Upsilon_P)'=(\mathbb{B}/\Upsilon_P)\coprod \mathrm{Lie}(V_P)$$

и да продължим спрягането

$$\psi_\gamma:\mathbb{B}/\Upsilon_P\longrightarrow \mathbb{B}/\Upsilon_{\gamma P\gamma^{-1}}$$

чрез $\gamma\in\Gamma$ до холоморфно изображение

$$\psi_\gamma:(\mathbb{B}/\Upsilon_P)'\longrightarrow(\mathbb{B}/\Upsilon_{\gamma P\gamma^{-1}})'.$$

По този начин получаваме действие

$$\psi:\Gamma\times\left(\coprod_{P\in\mathrm{MPar}(\Gamma)}(\mathbb{B}/\Upsilon_P)'\right)\longrightarrow\left(\coprod_{P\in\mathrm{MPar}(\Gamma)}(\mathbb{B}/\Upsilon_P)'\right)$$

на Γ върху $\coprod\limits_{P\in\mathrm{MPar}(\Gamma)}(\mathbb{B}/\Upsilon_P)'$ и определяме тороидалната компактификация като фактора

$$(\mathbb{B}/\Gamma)':=\left[\coprod_{P\in\mathrm{MPar}(\Gamma)}(\mathbb{B}/\Upsilon_P)'\right]/\Gamma$$

по това действие. За да опишем образа на $(\mathbb{B}/\Upsilon_P)'$ в $(\mathbb{B}/\Gamma)'$ да забележим, че $\gamma P\gamma^{-1}=P$ тогава и само тогава, когато $\gamma\in\Gamma\cap P$, защото максималните параболични подгрупи P на $U(1,2)$ съвпадат със своите нормализатори в $U(1,2)$. Следователно $\mathbb{B}/\Upsilon_P$ се изобразява върху

$$(\mathbb{B}/\Upsilon_P)/[(\Gamma\cap P)/\Upsilon_P]=\mathbb{B}/(\Gamma\cap P)\subset(\mathbb{B}/\Gamma)',$$

а изключителният дивизор

$$(\mathbb{B}/\Upsilon_P)'\setminus(\mathbb{B}/\Upsilon_P)\simeq\mathrm{Lie}(V_P)\simeq\mathbb{C}$$

се трансформира върху елиптичната крива $\mathrm{Lie}(V_P)/(\Gamma \cap \mathrm{Lie}(V_P))$. Ако

$$\mathrm{MPar}(\Gamma) = \coprod_{j=1}^{k} \mathrm{Orb}_\Gamma(P_j) = \coprod_{j=1}^{k} \{\gamma P_j \gamma^{-1} \mid \gamma \in \Gamma\},$$

то за произволни $\gamma \in \Gamma$ и $1 \leq j \leq k$ елиптичните криви $\mathrm{Lie}(V_{P_j})/[\Gamma \cap \mathrm{Lie}(V_{P_j})]$ и $\mathrm{Lie}(V_{\gamma P_j \gamma^{-1}})/[\Gamma \cap \mathrm{Lie}(V_{\gamma P_j \gamma^{-1}})]$ се слепват в $(\mathbb{B}/\Gamma)'$ и $(\mathbb{B}/\Gamma)' \setminus (\mathbb{B}/\Gamma)$ се състои от k елиптични криви.

Нека

$$X = (\mathbb{B}/\Gamma)' = (\mathbb{B}/\Gamma) \coprod \left(\coprod_{j=1}^{k} D_j \right)$$

е гладка тороидална компактификация на фактор $\mathbb{B}/\Gamma$ на $\mathbb{B} = U(1,2)/U_1 \times U_2$ по решетка $\Gamma < U(1,2)$, чийто тороидален компактифициращ дивизор

$$D = \sum_{j=1}^{k} D_j$$

се състои от k неприводими, непресичащи се гладки елиптични криви D_j. Произволен минимален модел Y на X се получава чрез свиване $\beta : X \to Y$ на неприводимите гладки рационални криви $L_i \subset X$ с индекс на самопресичане $L_i^2 = -1$. Кривите L_i имат трансверсални пресичания с компонентите D_j на тороидалния компактифициращ дивизор. Ди Чербо и Стоувър доказват в [19], че всяко L_i пресича D в поне четири точки, т.е. $L_i.D \geq 4$. Равенство $L_i.D = 4$ се достига тогава и само тогава, когато пунктираната рационална крива $L_i \setminus D$ е напълно геодезично вложена в $\mathbb{B}/\Gamma$. За да обясним по-подробно, да разгледаме ермитовата метрика h_0 върху $\mathbb{B}$, отговаряща на диференциалната $(1,1)$-форма

$$\omega_0 := -4\sqrt{-1}\partial\overline{\partial} \log(1 - |z_1|^2 - |z_2|^2).$$

Съгласно $d\omega_0$, метриката h_0 е Келерова. Може да се провери, че h_0 е $U(1,2)$-инвариантна и индуцира Келерова метрика върху произволен гладък фактор $\mathbb{B}/\Gamma$ по решетка $\Gamma < U(1,2)$. Нека $J : T^{\mathbb{R}}(\mathbb{B}/\Gamma) \to T^{\mathbb{R}}(\mathbb{B}/\Gamma)$ е комплексната структура върху $\mathbb{B}/\Gamma$,

$$D_0 : \mathcal{A}^0_{L_i \setminus D}(T^{1,0}(L_i \setminus D)) \longrightarrow \mathcal{A}^1_{L_i \setminus D}(T^{1,0}(L_i \setminus D))$$

е ермитовата свързаност на h_0 а Θ_0 е матрицата на кривината на D_0. За произволен единичен вектор $X \in T_p^{\mathbb{R}}(\mathbb{B}/\Gamma)$ в точка $p \in \mathbb{B}/\Gamma$, комплексното число

$$K_0(X, JX) := h_0(\Theta_0(X, JX)X, JX) \in \mathbb{C}$$

се нарича холоморфна секционна кривина на D_0 по протежение на J-инвариантното двумерно подпространство $l_{\mathbb{R}}(X, JX) \subset T_p^{\mathbb{R}}(\mathbb{B}/\Gamma)$. Може да се провери, че D_0 има постоянна холоморфна секционна кривина (-1) върху всяка J-инвариантна равнина, съдържаща се в $T_p^{\mathbb{R}}(\mathbb{B}/\Gamma)$ за някое $p \in \mathbb{B}/\Gamma$.

Нека $z_1, \dots, z_n$ са локални холоморфни координати върху околност на точка p от комплексно многообразие M с Келерова метрика h. Ако $D : \mathcal{A}^0_M(T^{1,0}M) \to \mathcal{A}^1_M(T^{1,0}M)$ е ермитовата свързаност на h, а Θ е матрицата на кривината на D, то формата на Ричи на D се определя като

$$S(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} h\left(\Theta\left(\frac{\partial}{\partial z_i}, X\right) Y, \frac{\partial}{\partial z_i}\right) \quad \text{за} \quad \forall X, Y \in T^{\mathbb{R}}_p M.$$

С помощта на Келеровата метрика h_0 върху $\mathbb{B}/\Gamma$ построяваме ортогоналното допълнение

$$N(L_i \setminus D, \mathbb{B}/\Gamma) := \left[T^{1,0}(L_i \setminus D)\right]^{\perp} \subset T^{1,0}(\mathbb{B}/\Gamma)$$

на холоморфното допирателно разслоение $T^{1,0}(L_i \setminus D)$ на пунктираната рационална крива $L_i \setminus D$ до холоморфното допирателно разслоение $T^{1,0}(\mathbb{B}/\Gamma)$ на $\mathbb{B}/\Gamma$. Казваме, че $N(L_i \setminus D, \mathbb{B}/\Gamma)$ е нормалното разслоение на $L_i \setminus D$ в $\mathbb{B}/\Gamma$. Ермитовата свързаност

$$D_0 : \mathcal{A}^0_{\mathbb{B}/\Gamma}(T^{1,0}(\mathbb{B}/\Gamma)) \longrightarrow \mathcal{A}^1_{\mathbb{B}/\Gamma}(T^{1,0}(\mathbb{B}/\Gamma))$$

на h_0 индуцира изображение

$$D_0 : \mathcal{A}^0_{L_i \setminus D}(T^{1,0}(L_i \setminus D)) \longrightarrow \mathcal{A}^1_{L_i \setminus D}(T^{1,0}(\mathbb{B}/\Gamma)).$$

Разлагаме $D_0 = D_{01} + \alpha_0$ в сума на ермитовата свързаност

$$D_{01} : \mathcal{A}^0_{L_i \setminus D}(T^{1,0}(L_i \setminus D)) \longrightarrow \mathcal{A}^1_{L_i \setminus D}(T^{1,0}(L_i \setminus D))$$

на $h_0|_{(L_i \setminus D)}$ и изображение

$$\alpha_0 : \mathcal{A}^0_{L_i \setminus D}(T^{1,0}(L_i \setminus D)) \longrightarrow \mathcal{A}^{1,0}_{L_i \setminus D}(N(L_i \setminus D, \mathbb{B}/\Gamma)),$$

което можем да разглеждаме като диференциална 2-форма

$$\alpha_0 : T^{1,0}(L_i \setminus D) \otimes T^{1,0}(L_i \setminus D) \longrightarrow N(L_i \setminus D, \mathbb{B}/\Gamma)$$

със стойности в нормалното разслоение $N(L_i \setminus D, \mathbb{B}/\Gamma)$ на $L_i \setminus D$ в $\mathbb{B}/\Gamma$. Казваме, че α_0 е втората основна форма на $L_i \setminus D$ в $\mathbb{B}/\Gamma$. Влагането $L_i \setminus D \hookrightarrow \mathbb{B}/\Gamma$ е напълно геодезично тогава и само тогава, когато втората основна форма $\alpha_0 \equiv 0$ се анулира тъждествено, Нека $V, JV \in T^{\mathbb{R}}_p(L_i \setminus D)$ е ортонормиран базис на $T^{\mathbb{R}}_p(L_i \setminus D)$ за някое $p \in L_i \setminus D$. Понеже $\mathbb{B}/\Gamma$ има постоянна холоморфна секционна кривина (-1), формата на Ричи S_{01} на D_{01} изпълнява равенството

$$S_{01}(X,X) = -\omega_0(X,X) - 2h_0(\alpha_0(V,X), \alpha_0(V,X)) \tag{2.17}$$

за $\forall X \in T^{\mathbb{R}}_p(L_i \setminus D)$, $\forall p \in L_i \setminus D$, съгласно Твърдение IX.9.5 от монографията [33] на Кобаяши и Номизу. Вземайки предвид $h_0(\alpha_0(V,X), \alpha_0(V,X)) \geq 0$ получаваме, че

$$S_{01}(X,X) \leq -\omega_0(X,X) \quad \text{за} \quad \forall X \in T^{\mathbb{R}}_p(L_i \setminus D), \quad \forall p \in L_i \setminus D.$$

При това, $S_{01}(X,X) = -\omega_0(X,X)$ за всички допирателни вектори X към $L_i \setminus D$ тогава и само тогава, когато пунктираната крива $L_i \setminus D$ е напълно геодезично вложена в $\mathbb{B}/\Gamma$. По Теоремата на Гаус-Боне, интегралът

$$\frac{1}{2\pi}\int_{L_i\setminus D} S_{01} = e(L_i \setminus D) = e(L_i) - L_i.D = 2 - L_i.D$$

е равен на Ойлеровата характеристика на $L_i \setminus D$. Мамфорд доказва в [39], че линейното разслоение $\mathfrak{L} \to X$, отговарящо на дивизора $K_X + D$ има клас на Чърн $c_1(\mathfrak{L}) = \frac{3}{4\pi}\omega_0$. Следователно

$$L_i.D - 2 = -\frac{1}{2\pi}\int_{L_i\setminus D} S_{01} \geq \frac{1}{2\pi}\int_{L_i\setminus D}\omega_0 = \frac{2}{3}\int_{L_i} c_1(\mathfrak{L}) = \frac{2}{3}(K_X + D).L_i.$$

Комбинирайки с формулата за присъединение

$$-2 = -e(L_i) = (K_X + L_i).L_i = K_X.L_i + (-1),$$

получаваме

$$3(L_i.D - 2) \geq 2(K_X.L_i + L_i.D) = 2(-1 + L_i.D),$$

откъдето $L_i.D \geq 4$ с равенство $L_i.D = 4$ тогава и само тогава, когато пунктираната рационална крива $L_i \setminus D$ е напълно геодезично вложена в $\mathbb{B}/\Gamma$.

Глава 3

Наситени и примитивни тороидални компактификации

Навсякъде в тази глава, $X = (\mathbb{B}/\Gamma)'$ е гладка тороидална компактификация на фактор на комплексното двумерно кълбо $\mathbb{B} = U(1,2)/U_1 \times U_2$ по решетка $\Gamma < U(1,2)$, $D := X \setminus (\mathbb{B}/\Gamma)$ е тороидалният компактифициращ дивизор на X, а $\rho : X \to Y$ е крайна композиция на свивания на рационални (-1)-криви към минимална повърхнина Y, а $E(\rho)$ е изключителният дивизор на ρ. Настоящата, трета глава на дисертационния труд установява взаимно-еднозначно съответствие между крайните неразклонени покрития на наредените тройки $(X, D, E(\rho))$ и крайните неразклонени покрития на наредените тройки $(\rho(X), \rho(D), \rho(E(\rho)))$. Наредената тройка $(X, D, E(\rho))$ е наситена тогава и само тогава, когато всички неразклонени покрития $f : (X', D', E'(\rho')) \to (X, D, E(\rho))$ са изоморфизми. Наредена тройка $(X, D, E(\rho))$ примитивна тогава и само тогава, когато всички неразклонени покрития $f : (X, D, E(\rho)) \to (f(X), f(D), f(E(\rho)))$ са изоморфизми.

Нека $\rho = \beta : X = (\mathbb{B}/\Gamma)' \to Y$ е раздуване на краен брой точки от Y. Това е в сила точно когато изключителният дивизор $E(\rho)$ на ρ се състои от непресичащи се рационални (-1)-криви. В такъв случай се доказва съществуването на изоморфизъм $\Phi : \mathrm{Aut}(Y, \beta(D)) \to \mathrm{Aut}(X, D)$ на относителните групи от автоморфизми и се проверява, че $\mathrm{Aut}(X, D)$ е крайна група. В случая на абелева повърхнина Y се установява, че всяко крайно неразклонено покритие $f : (X, D, E(\beta)) \to (f(X), f(D), f(E(\beta)))$ се пропуска през покритие на Галоа, индуцирано от подгрупа на $\mathrm{Aut}(X, D)$ без фиксирани точки върху X. Дискутира се примитивността и наситеността на гладките тороидални компактификации X с размерност на Кодаира $\kappa(X) \leq 0$.

3.1 Неразклонено издърпване на гладка тороидална компактификация

Лема 3.1. *Нека M е комплексно многообразие и N е комплексно аналитично подпространство на M или отворено подмножество на M.*

(i) Ако $f : M \to f(M)$ е неразклонено покритие от степен d, то $f : N \to f(N)$ е неразклонено покритие от степен d точно когато $f : M \setminus N \to f(M) \setminus f(N)$ е неразклонено покритие от степен d.

(ii) Да предположим, че $f : M \to f(M)$ е холоморфно изображение върху комплексно многообразие, $f(N) \cap f(M \setminus N) = \emptyset$ и $f : N \to f(N)$, $f : M \setminus N \to f(M \setminus N)$ са неразклонени покрития от степен d. Тогава $f : M \to f(M)$ е неразклонено покритие от степен d.

Доказателство. (i) Нека $X := N$ или $X := M \setminus N$. Тогава $f : X \to f(X)$ е неразклонено покритие от степен $\deg(f|_X) = \deg(f|_M) = d$ точно когато $f^{-1}(f(X)) = X$. В такъв случай, сечението $f^{-1}(f(M \setminus X)) \cap X = \emptyset$ е празно, откъдето $f^{-1}(f(M \setminus X)) = M \setminus X$, обединението

$$f(M) = f(X) \coprod f(M \setminus X)$$

е непресичащо се и $f : M \setminus X \to f(M \setminus X) = f(M) \setminus f(X)$ е неразклонено покритие от степен d.

(ii) По предположение, $f(M) = f(N) \coprod f(M \setminus N)$ е непресичащо се обединение, така че $f^{-1}(f(M \setminus N)) = M \setminus N$, $f^{-1}(f(N)) = N$ и

$$f : M \longrightarrow f(M)$$

е неразклонено покритие от степен d. □

Лема 3.2. *Нека $f : X \to X'$ е неразклонено покритие от степен d на гладки проективни повърхнини.*

(i) Нека $D = \coprod_{j=1}^{k} D_j$ е дивизор върху X с непресичащи се гладки неприводими компоненти D_j, върху който f се ограничава до неразклонено покритие $f : D \to f(D)$ от степен d. Тогава $f(D) = \cup_{j=1}^{k} f(D_j)$ има гладки неприводими компоненти $f(D_j)$, f се ограничава до неразклонени покрития $f : D_j \to f(D_j)$ за всички $j \in \{1, \ldots, k\}$ и $f(D_i) \cap f(D_j) = \emptyset$ за $f(D_i) \not\equiv f(D_j)$.

В частност, D_j са гладки елиптични криви тогава и само тогава, когато $f(D_j)$ са гладки елиптични криви.

(ii) Ако C' е гладка неприводима рационална крива върху X', тогава нейният пълен праобраз $f^{-1}(C') = \coprod_{i=1}^{d} C_i$ се състои от d непресичащи се гладки рационални криви C_i и f се ограничава до изоморфизми $f : C_i \to C'$ за всяко $i \in \{1, \ldots, d\}$.

Доказателство. (i) Неразклоненото покритие $f : D \to f(D)$ е локален бихоломорфизъм. Следователно $f(D)$ е гладък дивизор на X' и всички неприводими компоненти $f(D_j)$ на $f(D)$ са гладки криви. Тогава условието $f(D_i) \cap f(D_j) \neq \emptyset$ изисква

$f(D_i) \equiv f(D_j)$. За всяко $1 \leq i \leq k$ нека $J(i)$ е множеството от всички $1 \leq j \leq k$, за които $f(D_j) \equiv f(D_i)$. Тогава съществува подмножество $I \subseteq \{1, \ldots, k\}$, за което имаме разбиване

$$\coprod_{i \in I} J(i) = \{1, \ldots, k\} \quad \text{и} \quad f(D) = \coprod_{i \in I} f(D_i).$$

От определението за $J(i)$ имаме включването $\coprod_{j \in J(i)} D_j \subseteq f^{-1}(f(D_i))$. Тъй като f се ограничава до неразклонено покритие$f : D \to f(D)$ от степен d, всяко $p \in f^{-1}(f(D_i))$ се съдържа в някое D_s за $s \in \{1, \ldots, k\}$. Тогава $f(p) \in f(D_i)$ изисква $s \in J(i)$, откъдето

$$f^{-1}(f(D_i)) \subseteq \coprod_{j \in J(i)} D_j \quad \text{и} \quad f^{-1}(f(D_i)) = \coprod_{j \in J(i)} D_j.$$

Така, за всяко $i \in I$ морфизмът f се ограничава до неразклонено покритие

$$f : \coprod_{j \in J(i)} D_j \longrightarrow f(D_i)$$

от степен d. По определение, за всяко $f(p) \in f(D_i)$ с $p \in \coprod_{j \in J(i)} D_j$ съществува тривиализираща отворена околност U в $f(D_i)$, чието издърпване

$$f^{-1}(U) = \coprod_{q \in f^{-1}(p)} V_q$$

е непресичащо се обединение на околности V_q на точките $q \in f^{-1}(p)$ върху $\coprod_{j \in J(i)} D_j$ с бихоломорфни ограничения $f : V_q \to U$. За достатъчно малка околност U на $f(p)$, $p \in D_j$ можем да предположим, че $V_q \subset D_j$ за $q \in D_j$. Затова f се ограничава до неразклонени покрития $f : D_j \to f(D_j) = f(D_i)$ чрез неприводимите компоненти на дивизора D. В частност, поради липсата на разклонения, D_j са гладки елиптични криви тогава и само тогава, когато $f(D_j)$ са гладки елиптични криви.

(ii) Пълният праобраз $f^{-1}(C') = \sum\limits_{i=1}^{k} C_i$ е обединение на неприводими криви C_i за някакво $k \in \mathbb{N}$. Означаваме с $d_i := \deg\,[f|_{C_i} : C_i \to C']$ степента на $f|_{C_i}$, а с

$$\mathrm{Br}(f|_{C_i}) := \{q \in C' \mid \left|f^{-1}(q) \cap C_i\right| < d_i\}$$

множеството на разклонение на $f|_{C_i}$ за $i \in \{1, \ldots, k\}$. Всяко такова множество $\mathrm{Br}(f|_{C_i})$ е крайно, както и множеството от пресечните точки $\cup_{1 \leq i < j \leq k} C_i \cap C_j$ на различни неприводими компоненти, така че

$$\Sigma := \left[\cup_{i=1}^{k} \mathrm{Br}(f|_{C_i})\right] \cup [\cup_{1 \leq i < j \leq k} f(C_i \cap C_j)]$$

е крайно подмножество на C'. За произволна точка $q \in C' \setminus \Sigma$ имаме $f^{-1}(q) = \coprod\limits_{i=1}^{k} f^{-1}(q) \cap C_i$ и следователно

$$d = \left|f^{-1}(q)\right| = \sum_{i=1}^{k} \left|f^{-1}(q) \cap C_i\right| = \sum_{i=1}^{k} d_i.$$

Да допуснем, че Σ е непразно множество. Ако $q_j \in \mathrm{Br}(f|_{C_j})$, то

$$f^{-1}(q_j) = \cup_{i=1}^{k} f^{-1}(q_j) \cap C_i,$$

където $\left| f^{-1}(q_j) \cap C_j \right| < d_j$, така че

$$d = \left| f^{-1}(q_j) \right| \leq \sum_{i=1}^{k} \left| f^{-1}(q_j) \cap C_i \right| < \sum_{i=1}^{k} d_i = d.$$

Това противоречи на липсата на разклонения на $f : X \to X'$ и доказва, че $\mathrm{Br}(f|_{C_j}) = \emptyset$ за всички $1 \leq j \leq k$. Аналогична е и ситуацията, когато $p \in f(C_i \cap C_j)$. Тогава

$$d = \left| f^{-1}(p) \right| < \sum_{i=1}^{k} \left| f^{-1}(p) \cap C_i \right| = \sum_{i=1}^{k} d_i = d.$$

Противоречието показва, че кривите C_i от $f^{-1}(C')$ са гладки и не се пресичат. Неразклонените покрития $f|_{C_i} : C_i \to C'$ на гладката рационална крива C' са от степен $d_i = 1$, тъй като фундаменталната група $\pi_1(C')$ е тривиална. Оттук, $d = \sum\limits_{i=1}^{k} d_i = k$ и $f^{-1}(C') = \coprod\limits_{i=1}^{d} C_i$ се състои от d непресичащи се гладки неприводими рационални криви и ограниченията $f|_{C_i} : C_i \to C'$ са бихоломорфни за всички $i \in \{1, \ldots, d\}$.

$\square$

Гладка неприводима рационална крива L_i върху гладка повърхнина Y с индекс на самопресичане $L_i^2 = -1$ се нарича (-1)-крива. По теоремата на Кастелнуово, свиването на гладка рационална (-1)-крива върху гладка повърхнина е бирационален морфизъм с гладък образ. Навсякъде, гладка проективна повърхнина Y е минимална, ако не съдържа (-1)-криви. Това се различава малко от по-съвременния подход на програмата за минималните модели, съгласно който гладка проективна повърхнина Y е минимална, ако каноничният и дивизор K_Y е числено ефективен, т.е. ако $K_Y.C \geq 0$ за всички ефективни криви $C \subset Y$. Числената ефективност на каноничния дивизор K_Y изключва съществуването на (-1)-криви върху Y. Ако Y има размерност на Кодаира $\kappa(Y) = -\infty$, то K_Y няма как да бъде числено ефективен, независимо от съществуването на (-1)-криви върху Y. Това е причината за използването на по-старото, излязло от употреба определение за минималност на гладка проективна повърхнина Y, което изисква липсата на (-1)-криви. По теорема на Кастелнуово (Theorem V.5.7 [23]), за всяка гладка неприводима проективна повърхнина X съществува бирационален морфизъм $\rho : X \to Y$ върху минимална гладка проективна повърхнина Y, който е композиция от свивания на (-1)-криви. Ако X има размерност на Кодаира $\kappa(X) \geq 0$, тогава минималният модел Y на X е единствен с точност до изоморфизъм. Това не е вярно, когато X е бирационално на рационална или линейчата повърхнина.

Лема 3.3. *(i) Нека* $\mathrm{Bl} : X_1 \to Y_1$ *е свиване на* (-1)*-крива* $L_1 \subset X_1$ *и* $\varphi : Y_2 \to Y_1$ *е неразклонено покритие от степен* d*. Тогава разслоеното произведение на* X_1 *и* Y_2 *над* Y_1 *се определя от комутативната диаграма*

$$\begin{tikzcd} X_2 := X_1 \times_{Y_1} Y_2 \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "f"'] & Y_2 \arrow[d, "\varphi"] \\ X_1 \arrow[r, "\mathrm{Bl}"] & Y_1 \end{tikzcd} , \tag{3.1}$$

в която $f : X_2 \to X_1$ *е неразклонено покритие от степен* d*, а* $\beta : X_2 \to Y_2$ *е свиването на обединението* $f^{-1}(L_1) = \coprod_{j=1}^{d} L_{1,j}$ *на непресичащите се* (-1)*-криви* $L_{1,j}$*.*

(ii) Нека $\rho_1 := \mathrm{Bl}_1 \dots \mathrm{Bl}_{r-1}\mathrm{Bl}_r : T_r := X_1 \longrightarrow Y_1 =: T_0$ *е композиция от свивания* $\mathrm{Bl}_i : T_i \to T_{i-1}$ *на* (-1)*-криви* $L_i \subset T_i$ *и* $\varphi : Y_2 \to Y_1$ *е неразклонено покритие от степен* d*. Тогава комутативните диаграми на разслоено произведение*

$$\begin{tikzcd} S_i := T_i \times_{T_{i-1}} S_{i-1} \arrow[r, "\beta_i"] \arrow[d, "\varphi_i"] & S_{i-1} \arrow[d, "\varphi_{i-1}"] \\ T_i \arrow[r, "\mathrm{Bl}_i"] & T_{i-1} \end{tikzcd} \tag{3.2}$$

се комбинират в комутативна диаграма

$$\begin{tikzcd} S_r \arrow[d, "f"] & \dots S_i := T_i \times_{T_{i-1}} S_{i-1} \arrow[r, "\beta_i"] \arrow[d, "\varphi_i"] & S_{i-1} \arrow[d, "\varphi_{i-1}"] & \dots S_0 := Y_2 \arrow[d, "\varphi=\varphi_0"] \\ T_r := X_1 & \dots T_i \arrow[r, "\mathrm{Bl}_i"] & T_{i-1} & \dots T_0 := Y_1 \end{tikzcd} \tag{3.3}$$

и индуцират комутативна диаграма на разслоено произведение

$$\begin{tikzcd} X_2 = X_1 \times_{Y_1} Y_2 \arrow[r, "\rho_2"] \arrow[d, "f"'] & Y_2 \arrow[d, "\varphi"] \\ X_1 \arrow[r, "\rho_1"] & Y_1 \end{tikzcd} \tag{3.4}$$

с неразклонено покритие $f : X_2 \to X_1$ *от степен* d *и композиция* $\rho_2 = \beta_1 \dots \beta_{r-1}\beta_r : X_2 \to Y_2$ *от свивания на* $\varphi_i^{-1}(L_i) = \coprod_{j=1}^{d} L_{i,j}$ *за всички* $i \in \{1, \dots, r\}$*.*

Доказателство. (i) По определението за свиване $\mathrm{Bl} : X_1 \to Y_1$ на (-1)-крива L_1 до точка $\mathrm{Bl}(L_1) = q_1 \in Y_1$ имаме, че $X_1 \setminus L_1 = Y_1 \setminus \{q_1\}$. Тогава

$$X_2 := X_1 \times_{Y_1} Y_2 = [(X_1 \setminus L_1) \times_{Y_1} Y_2] \coprod [L_1 \times_{Y_1} Y_2]$$

се разлага в обединение на непресичащи се подмножества

$$(X_1 \setminus L_1) \times_{Y_1} Y_2 = \{(x_1, y_2) \mid x_1 = \mathrm{Bl}(x_1) = \varphi(y_2)\} \simeq Y_2 \setminus \varphi^{-1}(q_1) \quad \text{and}$$

$$L_1 \times_{Y_1} Y_2 = \{(x_1, y_2) \mid q_1 = \mathrm{Bl}(x_1) = \varphi(y_2)\} = L_1 \times \varphi^{-1}(q_1).$$

Нека $\varphi^{-1}(q_1) = \{p_{1,j} \mid 1 \leq j \leq d\}$. Тогава X_2 е раздуването на Y_2 в $\{p_{1,j} \mid 1 \leq j \leq d\}$. Тъй като $\mathrm{Bl}f = \varphi\beta$, изключителният дивизор на β е

$$\beta^{-1}(\{p_{1,j} \mid 1 \leq j \leq d\}) = \beta^{-1}\varphi^{-1}(q_1) = (\varphi\beta)^{-1}(q_1) = (\mathrm{Bl}f)^{-1}(q_1) =$$
$$= f^{-1}\mathrm{Bl}^{-1}(q_1) = f^{-1}(L_1) = \coprod_{j=1}^{d} L_{1,j}.$$

От следствие 17.7.3 (i) на [22] на Гротендик, $f : X_2 \to X_1$ е неразклонено покритие, тъй като $\varphi : Y_2 \to Y_1$ е неразклонено покритие.

(ii) Чрез растяща индукция по броя на свиванията r, прилагаме (i) към диаграмите (3.2) на разслоено проиаведение и доказваме (ii).

□

Лема 3.4. *(i) В означенията на Лема 3.3 (i) и комутативната диаграма (3.1) на разслоено произведение, нека $D^{(2)}$ е (възможно приводим) дивизор върху X_2, който не съдържа неприводима компонента на изключителния дивизор на β, а $D^{(1)}$ е (възможно приводим) дивизор върху X_1, който не съдържа изключителния дивизор L_1 на* Bl. *В такъв случай, ограничението $f : D^{(2)} \to D^{(1)}$ е неразклонено покритие от степен $d = \deg[f : X_2 \to X_1]$ тогава и само тогава, когато $\varphi : \beta(D^{(2)}) \to \mathrm{Bl}(D^{(1)})$ е неразклонено покритие от степен d.*

(ii) В означенията на Лема 3.3 (ii) и комутативната диаграма (3.4) на разслоено произведение, нека $D^{(2)}$ е (възможно приводим) дивизор върху X_2, който не съдържа неприводима компонента на изключителния дивизор на ρ_2, а $D^{(1)}$ е (възможно приводим) дивизор на X_1, който не съдържа неприводима компонента на изключителния дивизор на ρ_1. В такъв случай, ограничението $f : D^{(2)} \to D^{(1)}$ е неразклонено покритие от степен d тогава и само тогава, когато ограничението $\varphi : \rho_2(D^{(2)}) \to \rho_1(D^{(1)})$ е неразклонено покритие от степен d.

Доказателство. (i) Ако $f : D^{(2)} \to D^{(1)}$ е неразклонено покритие от степен d, то $f^{-1}(D^{(1)} \cap L_1) = f^{-1}(D^{(1)}) \cap f^{-1}(L_1) = D^{(2)} \cap f^{-1}(L_1)$ и $f : D^{(2)} \cap f^{-1}(L_1) \to D^{(1)} \cap L_1$ е неразклонено покритие от степен d. Означаваме $f^{-1}(L_1) = \coprod_{j=1}^{d} L_{1,j}$, $\beta(L_{1,j}) = p_{1,j}$ и $\mathrm{Bl}(L_1) = q_1$. Тогава по Лема 3.1 (i), ограничението

$$\varphi \equiv f : \beta(D^{(2)}) \setminus \{p_{1,j} \mid 1 \leq j \leq d\} \equiv D^{(2)} \setminus f^{-1}(L_1) \longrightarrow D^{(1)} \setminus L_1 \equiv \mathrm{Bl}(D^{(1)}) \setminus \{q_1\}$$

е неразклонено покритие от степен d. В резултат, ограничението

$$\varphi : \{p_{1,j} \mid 1 \leq j \leq d\} \to \{q_1\}$$

е неразклонено покритие от степен d и по Лема 3.1 (ii) морфизмът

$$\varphi : \beta(D^{(2)}) = \beta(D^{(2)}) \setminus \{p_{1,j} \,|\, 1 \leq j \leq d\} \coprod \{p_{1,j} \,|\, 1 \leq j \leq d\} \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \left[\mathrm{Bl}(D^{(1)}) \setminus \{q_1\}\right] \coprod \{q_1\} = \mathrm{Bl}(D^{(1)})$$

е неразклонено покритие от степен d.

Обратно, да допуснем, че $\varphi : \beta(D^{(2)}) \to \mathrm{Bl}(D^{(1)})$ е неразклонено покритие от степен d. Да изберем достатъчно малка околност V на $q_1 = \mathrm{Bl}(L_1)$ в Y_1, такава че $\varphi^{-1}(V) = \coprod_{j=1}^{d} U_j$ е обединение на непресичащи се околности U_j на $p_{1,j}$, $1 \leq j \leq d$ върху Y_2 с бихоломорфни ограничения $\varphi : U_j \to V$ на φ. Вземайки предвид, че $\mathrm{Bl}_1 : X_1 \to Y_1$ е раздуването на Y_1 в точката q_1 и че Bl се ограничава до изоморфизъм $\mathrm{Bl(X_1 \backslash Bl^{-1}(V)) \to Y_1 \backslash V}$, разлагаме

$$\mathrm{Bl}(D^{(1)}) = \left[\mathrm{Bl}(D^{(1)}) \setminus V\right] \coprod \left[\mathrm{Bl}(D^{(1)}) \cap V\right] \quad \text{и}$$

$$D^{(1)} = \left[\mathrm{Bl}(D^{(1)}) \setminus V\right] \coprod \mathrm{Bl}^{-1}(\mathrm{Bl}(D^{(1)}) \cap V).$$

Аналогично, $\beta : X_2 \to Y_2$ е раздуването на Y_2 в $\varphi^{-1}(q_1) = \{p_{1,j} \,|\, 1 \leq j \leq d\}$, така че имаме разлагания

$$\beta(D^{(2)}) = \left[\beta(D^{(2)}) \setminus \varphi^{-1}(V)\right] \coprod \left[\beta(D^{(2)}) \cap \varphi^{-1}(V)\right] \quad \text{и}$$

$$D^{(2)} = \left[\beta(D^{(2)}) \setminus \varphi^{-1}(V)\right] \coprod \beta^{-1}(\beta(D^{(2)}) \cap \varphi^{-1}(V)).$$

Тъй като $\varphi^{-1}(\mathrm{Bl}(D^{(1)}) \cap V) = \varphi^{-1}(\mathrm{Bl}(D^{(1)})) \cap \varphi^{-1}(V) = \beta(D^{(2)}) \cap \varphi^{-1}(V)$, ограничението $\varphi : \beta(D^{(2)}) \cap \varphi^{-1}(V) \to \mathrm{Bl}(D^{(1)}) \cap V$ е неразклонено покритие от степен d. Сега от Лема 3.1 (i) следва, че

$$f \equiv \varphi : \beta(D^{(2)}) \setminus \varphi^{-1}(V) \longrightarrow \mathrm{Bl}(D^{(1)}) \setminus V$$

е неразклонено покритие от степен d. Съгласно Лема 3.1 (ii), за да твърдим, че $f : D^{(2)} \to D^{(1)}$ е неразклонено покритие от степен d, достатъчно е да докажем, че ограничението

$$f : \beta^{-1}(\beta(D^{(2)}) \cap \varphi^{-1}(V)) \longrightarrow \mathrm{Bl}^{-1}(\mathrm{Bl}(D^{(1)}) \cap V)$$

е неразклонено покритие от степен d. За тази цел, да отбележим, че

$$\varphi^{-1}(\mathrm{Bl}(D^{(1)}) \cap V) = \beta(D^{(2)}) \cap \varphi^{-1}(V) = \beta(D^{(2)}) \cap \left(\coprod_{j=1}^{d} U_j\right) = \coprod_{j=1}^{d} \left[\beta(D^{(2)}) \cap U_j\right],$$

така че

$$\varphi : \coprod_{j=1}^{d} \left[\beta(D^{(2)}) \cap U_j\right] \longrightarrow \mathrm{Bl}(D^{(1)}) \cap V$$

е неразклонено покритие от степен d. В резултат, бихоломорфнизмите $\varphi : U_j \to V$ се ограничават до бихоломорфизми $\varphi : \beta(D^{(2)}) \cap U_j \to \mathrm{Bl}(D^{(1)}) \cap V$. Съгласно $\varphi(p_{1,j}) = q_1$ получаваме бихоломорфизми

$$\varphi : (\beta(D^{(2)}) \cap U_j) \setminus \{p_{1,j}\} \longrightarrow (\mathrm{Bl}(D^{(1)}) \cap V) \setminus \{q_1\}.$$

По определението за раздуването на точка, тези изображения индуцират бихоломорфизмите

$$f : \left[(\beta(D^{(2)}) \cap U_j) \setminus \{p_{1,j}\}\right] \coprod L_{1,j} \longrightarrow \left[(\mathrm{Bl}(D^{(1)}) \cap V) \setminus \{q_1\}\right] \coprod L_1$$

за всяко $j \in \{1, \ldots, d\}$. Вземайки предвид

$$\coprod_{j=1}^{d} \left\{ \left[(\beta(D^{(2)}) \cap U_j) \setminus \{p_{1,j}\}\right] \coprod L_{1,j} \right\} = \beta^{-1}(\beta(D^{(2)}) \cap \varphi^{-1}(V)),$$

получаваме, че φ индуцира неразклонено покритие

$$f : \beta^{-1}(\beta(D^{(2)}) \cap \varphi^{-1}(V)) \longrightarrow \mathrm{Bl}^{-1}(\mathrm{Bl}(D^{(1)}) \cap V)$$

от степен d.

(ii) Ако в комутативната диаграма (3.3) морфизмът $f : D^{(2)} \to D^{(1)}$ е неразклонено покритие от степен d, то с намаляваща индукция по r и използвайки (i), извеждаме, че $\varphi_i : \beta_{i+1} \ldots \beta_r(D^{(2)}) \to \mathrm{Bl}_{i+1} \ldots \mathrm{Bl}_r(D^{(1)})$ е неразклонено покритие от степен d. Оттук, $\varphi : \rho_2(D^{(2)}) \to \rho_1(D^{(1)})$ е неразклонено покритие от степен d. Обратно, да предположим, че $\varphi : \rho_2(D^{(2)}) \to \rho_1(D^{(1)})$ е неразклонено покритие от степен d. Тогава с растяща индукция по $1 \leq i \leq r$ и с помощта на (i) стигаме до извода, че

$$\varphi_i : \beta_{i+1} \ldots \beta_r(D^{(2)}) \to \mathrm{Bl}_{i+1} \ldots \mathrm{Bl}_r(D^{(1)})$$

е неразклонено покритие от степен d. В резултат, $f : D^{(2)} \to D^{(1)}$ е неразклонено покритие от степен d.

$\square$

Елементите на пръстена $\mathcal{O}_{\sqrt{-3}} = \mathbb{Z} + \frac{1+\sqrt{-3}}{2}\mathbb{Z}$ на целите алгебрични числа на имагинерното квадратично числово поле $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ се наричат цели числа на Айзенщайн. Да разгледаме елиптичната крива $E_{\sqrt{-3}} := (\mathbb{C}, +)/(\mathcal{O}_{\sqrt{-3}}, +)$ с фундаментална група $\pi_1(E_{\sqrt{-3}}) = \mathcal{O}_{\sqrt{-3}}$ и абелевата повърхнина $A_{\sqrt{-3}} := E_{\sqrt{-3}} \times E_{\sqrt{-3}}$. В [25] Hirzebruch доказва, че раздуването на $A_{\sqrt{-3}}$ в началото е гладка торкоидална компактификация $X_{\mathrm{Hirz}} = (\mathbb{B}/\Gamma_{\mathrm{Hirz}})'$. Лема 3.1 от статията [16] на Ди Чербо и Стоувър установява, че за произволно неразклонено покритие на Галоа $\zeta_G : A \to A_{\sqrt{-3}} = A/G$ с крайна група на Галоа G съществува фактор на кълбото $\mathbb{B}/\Gamma_G$ с G-покритие на Галоа $\zeta'_G : \mathbb{B}/\Gamma_G \to \mathbb{B}/\Gamma_{\mathrm{Hir}} = (\mathbb{B}/\Gamma_G)/G$. Следващото Следствие 3.5 е обобщение на този резултат.

Следствие 3.5. *Нека $X_1 = (\mathbb{B}/\Gamma_1)$ е гладка тороидална компактификация на фактор на кълбото по решетка Γ_1, $\rho_1 : X_1 \to Y_1$ е композиция от свивания на (-1)-криви към минимална повърнина Y_1, $\varphi : Y_2 \to Y_1$ е неразклонено покритие от степен d и (3.4) е определящата диаграма на разслоеното произведение $X_2 = X_1 \times_{Y_1} Y_2$. Тогава:*

(i) съществува подгрупа Γ_2 на Γ_1 с индекс $[\Gamma_1 : \Gamma_2] = d$, такава че $X_2 = (\mathbb{B}/\Gamma_2)'$ е тороидалната компактификация на $\mathbb{B}/\Gamma_2$;

(ii) изображението $f : X_2 \to X_1$ се ограничава до неразклонени покрития

$$f : \mathbb{B}/\Gamma_2 \to \mathbb{B}/\Gamma_1 \quad \text{и} \quad f : D^{(2)} := X_2 \setminus (\mathbb{B}/\Gamma_2) \to X_1 \setminus (\mathbb{B}/\Gamma_1) =: D^{(1)}$$

от степен d;

(iii) композицията $\rho_2 : X_2 \to Y_2$ от свивания на (-1)-криви трансформира X_2 в минимална повърхнина Y_2;

(iv) φ се ограничава до неразклонено покритие $\varphi : \rho_2(D^{(2)}) \to \rho_1(D^{(1)})$ от степен d.

Доказателство. Съгласно Лема 3.3 (ii), комутативната диаграма (3.4) на разслоено произведение се състои от неразклонено покритие $f : X_2 \to X_1$ от степен d и композиция $\rho_2 : X_2 \to Y_2$ от свивания на рационални (-1)-криви. Повърхността Y_2 е минимална. В противен случай, произволна (-1)-крива L_i' върху Y_2 се изобразява изоморфно върху (-1)-крива $\varphi(L_i') \subset Y_1$, съгласно Лема 3.2 (ii). Това противоречи на минималността на повърхнината Y_1.

Неразклоненото покритие $f : X_2 \to X_1 = (\mathbb{B}/\Gamma_1)'$ от степен d се ограничава до неразклонено покритие $f : f^{-1}(\mathbb{B}/\Gamma_1) \to \mathbb{B}/\Gamma_1$ от степен d. Гладкостта на $\mathbb{B}/\Gamma_1$ изключва съществуването на изолирани точки на разклонение на покритието на Галоа $\zeta_1 : \mathbb{B} \to \mathbb{B}/\Gamma_1$ с група Γ_1. Но ζ_1 може да се разклонява по протежение на дивизори и $\mathbb{B}$ не винаги е универсалната покриваща на комплексното многообразие $\mathbb{B}/\Gamma_1$. Въпреки това, $\mathbb{B}$ е о орбиталната универсална покриваща (orbifold universal cover) на $\mathbb{B}/\Gamma_1$ и орбиталното универсалното покритие $\zeta_1 : \mathbb{B} \to \mathbb{B}/\Gamma_1$ се пропуска през (евентуално разклонено) покритие $\zeta_2 : \mathbb{B} \to f^{-1}(\mathbb{B}/\Gamma_1)$ и покритието $f : f^{-1}(\mathbb{B}/\Gamma_1) \to \mathbb{B}/\Gamma_1$, т.е. $\zeta_1 = f\zeta_2$. Орбиталната фундаментална група $\pi_1^{\text{orb}}(\mathbb{B}) = \{1\}$ е нормална подгрупа на орбиталната фундаментална група $\Gamma_2 := \pi_1^{\text{orb}}(f^{-1}(\mathbb{B}/\Gamma))$, така че ζ_2 е покритие на Галоа и неговата група Γ_2 е подгрупа на $\Gamma_1 = \pi_1^{\text{orb}}(\mathbb{B}/\Gamma_1)$ с индекс $[\Gamma_1 : \Gamma_2] = d$. В частност, $f^{-1}(\mathbb{B}/\Gamma_1) = \mathbb{B}/\Gamma_2$. Съгласно Лема 3.1 (i), морфизмът f се ограничава до неразклонено покритие

$$f : D^{(2)} := X_2 \setminus (\mathbb{B}/\Gamma_2) \to X_1 \setminus (\mathbb{B}/\Gamma_1) =: D^{(1)}$$

от степен d на тороидалния компактифициащ дивизор $D^{(1)} = \coprod_{j=1}^{k} D_j^{(1)}$ на $\mathbb{B}/\Gamma_1$. За всяко $j \in \{1, \dots, k\}$ ограничението $f : f^{-1}\left(D_j^{(1)}\right) \to D_j^{(1)}$ е неразклонено покритие от степен d, а оттам и локален бихоломорфизъм. Следователно пълният праобраз $f^{-1}\left(D_j^{(1)}\right) = \cup_{i=1}^{r_j} D_{j,i}^{(2)}$ е гладък и има непресичащи се гладки неприводими компоненти $D^{(2)}_{j,i}$. В резултат, дивизорът

$$D^{(2)} := f^{-1}(D^{(1)}) = \coprod_{j=1}^{k} f^{-1}(D^{(1)}_j) = \coprod_{j=1}^{k} \coprod_{i=1}^{r_j} D^{(2)}_{j,i}$$

е гладък и има непресичащи се гладки неприводими компоненти $D^{(2)}_{j,i}$. По предположение, $D^{(1)}_j$ са гладки елиптични криви, така че всички $D^{(2)}_{j,i}$ гладки елиптични криви по Лема 3.2 (i). Затова $X_2 = (\mathbb{B}/\Gamma_2)'$ е тороидалната компактификация на $\mathbb{B}/\Gamma_2$ с тороидален компактифициращ дивизор $D^{(2)} = f^{-1}(D^{(1)})$. Съгласно Лема 3.4 (ii), $\varphi : Y_2 \to Y_1$ се ограничава до неразклонено покритие $\varphi : \rho_2(D^{(2)}) \to \rho_1(D^{(1)})$ от същата степен d.

$\square$

Лема 3.6. *(i) Нека $f : X_2 \to X_1$ е неразклонено покритие от степен d на гладки проективни повърхнини и $\mathrm{Bl} : X_1 \to Y_1$ е свиване на (-1)-крива $L_1 \subset X_1$. Тогава разлагането на Щайн $\varphi\beta$ на $\mathrm{Bl}f$ е композиция на свиването $\beta : X_2 \to Y_2$ на $f^{-1}(L_1) = \coprod_{j=1}^{d} L_{1,j}$ и неразклонено покритие $\varphi : Y_2 \to Y_1$ от степен d,така че $X_2 = X_1 \times_{Y_1} Y_2$ е разслоеното произведение на X_1 и Y_2 над Y_1.*

(ii) Нека $\rho_1 = \mathrm{Bl}_1 \dots \mathrm{Bl}_r : T_r := X_1 \to Y_1 =: T_0$ е композиция от свивания на (-1)-криви $L_i \subset T_i$ и $f : X_2 \to X_1$ е неразклонено покритие от степен d. Тогава разлагането на Щайн $\varphi\rho_2$ на $\rho_1 f : X_2 \to Y_1$ затваря комутативната диаграма на разслоено произведение (3.4) с композицията $\rho_2 = \beta_1 \dots \beta_r : S_r := X_2 \to Y_2 := S_0$ на свиванията $\beta_i : S_i \to S_{i-1}$ на $f^{-1}(L_i) = \coprod_{j=1}^{d} L_{i,j}$ за всички $i \in \{1, \dots, r\}$ и неразклонено покритие $\varphi : Y_2 \to Y_1$ от степен d.

Доказателство. (i) Нека $\mathrm{Bl}f = \varphi\beta : X_2 \to Y_1$ е разлагането на Щайн на $\mathrm{Bl}f$ и $q_1 := \mathrm{Bl}(L_1)$. Тогава от Лема 3.4 следва, че

$$(\mathrm{Bl}f)^{-1}(q_1) = f^{-1}\mathrm{Bl}^{-1}(q_1) = f^{-1}(L_1) = \coprod_{j=1}^{d} L_{1,j}$$

е обединение на непресичащи се рационални (-1)-криви $L_{1,j}$. За произволна точка $q \in Y_1 \setminus \{q_1\}$ пълният праобраз $(\mathrm{Bl}f)^{-1}(q) = f^{-1}\mathrm{Bl}^{-1}(q) = f^{-1}(q)$ е множество от d точки. Следователно сюрективният морфизъм $\beta : X_2 \to Y_2$ със свързани слоеве е точно свиването на $L_{1,j}$ за всички $j \in \{1, \dots, d\}$. От Лема 3.1 (i) получаваме, че ограничението $f : X_2 \setminus f^{-1}(L_1) \to X_1 \setminus L_1$ е неразклонено покритие от степен d, защото морфизмът $f : f^{-1}(L_1) \to L_1$ е неразклонено покритие от същата степен. По този начин възниква комутативна диаграма

$$\begin{tikzcd} X_2 \setminus f^{-1}(L_1) \arrow[r, "\beta=\mathrm{Id}"] \arrow[d, "f"'] & Y_2 \setminus \beta f^{-1}(L_1) \arrow[d, "\varphi"'] \\ X_1 \setminus L_1 \arrow[r, "\mathrm{Bl}=\mathrm{Id}"] & Y_1 \setminus \{q_1\} \end{tikzcd}$$

и $\varphi : Y_2 \setminus \beta f^{-1}(L_1) \to Y_1 \setminus \{q_1\}$ е също неразклонено покритие от степен d. Ако $p_{1,j} := \beta(L_{1,j})$, то

$$\beta^{-1}\varphi^{-1}(q_1) = (\varphi\beta)^{-1}(q_1) = (\mathrm{Bl}f)^{-1}(q_1) = \coprod_{j=1}^{d} L_{1,j}$$

показва, че $\varphi^{-1}(q_1) = \{p_{1,j} \,|\, 1 \leq j \leq d\}$ се състои от d точки и $\varphi : Y_2 \to Y_1$ е неразклонено покритие от степен d. От Лема 3.3 (i) следва, че разслоеното произведение $X_2' := X_1 \times_{Y_1} Y_2$ е раздуването на Y_2 в $\varphi^{-1}(q_1) = \{p_{1,j} \,|\, 1 \leq j \leq d\}$, така че $X_2' = X_2$.

Според Следствие 17.7.3 (i) от [22] на Гротендик, $X_2' = X_2$ е достатъчно, за да получим, че $\varphi : Y_2 \to Y_1$ е неразклонено покритие от степен d. В горното доказателство установихме обратното. По-точно, проверихме, че $\varphi : Y_2 \to Y_1$ е неразклонено покритие от степен d, за да го използваме за съвпадението на X_2 с разслоеното произведение $X_2' := X_1 \times_{Y_1} Y_2$.

(ii) е директно следствие на факта, че композицията на морфизми със свързани слоеве е също морфизъм със свързани слоеве.

□

Следствие 3.7. *Нека $f : X_2 \to X_1 = (\mathbb{B}/\Gamma_1)'$ е неразклонено покритие от степен d на гладка тороидална компактификация $X_1 = (\mathbb{B}/\Gamma_1)'$, $\rho_1 : X_1 \to Y_1$ е композиция на свивания на (-1)-криви до получаване на минимална повърхнина Y_1, а $D^{(1)} := X_1 \setminus (\mathbb{B}/\Gamma_1)$ е тороидалният компактифициращ дивизор на $\mathbb{B}/\Gamma_1$. Тогава:*

(i) съществуват композиция $\rho_2 : X_2 \to Y_2$ на свивания на (-1)-криви към минимална повърхнина Y_2 и неразклонено покритие $\varphi : Y_2 \to Y_1$ от степен d, така че $X_2 = X_1 \times_{Y_1} Y_2$ е разслоеното произведение на X_1 и Y_2 над Y_1;

(ii) съществува подгрупа $\Gamma_2 < \Gamma_1$ с индекс $[\Gamma_1 : \Gamma_2] = d$, така че $X_2 = (\mathbb{B}/\Gamma_2)'$ е тороидалната компактификация на $\mathbb{B}/\Gamma_2$ и f се ограничава до неразклонени покрития $f : \mathbb{B}/\Gamma_2 \to \mathbb{B}/\Gamma_1$, $f : D^{(2)} := X_2 \setminus (\mathbb{B}/\Gamma_2) \to X_1 \setminus (\mathbb{B}/\Gamma_1) =: D^{(1)}$ от степен d;

(iii) φ се ограничава до неразклонено покритие $\varphi : \rho_2\left(D^{(2)}\right) \to \rho_1\left(D^{(1)}\right)$ от степен d.

Доказателство. (i) е директно следствие от Лема 3.6 (ii) и факта, че всяко неразклонено покритие Y_2 на минимална повърхнина Y_1 е също минимална повърхнина.

(ii) Неразклоненото покритие $f : X_2 \to X_1 = (\mathbb{B}/\Gamma_1)'$ от степен d се ограничава до неразклонено покритие $f : f^{-1}(\mathbb{B}/\Gamma_1) \to \mathbb{B}/\Gamma_1$ от степен d. Както в доказателството на Следствие 3.5, съществува подгрупа $\Gamma_2 < \Gamma_1$ с индекс $[\Gamma_1 : \Gamma_2] = d$, така че $X_2 = (\mathbb{B}/\Gamma_2)'$ е тороидалната компактификация на $\mathbb{B}/\Gamma_2$ и f се ограничава до неразклонени покрития $f : \mathbb{B}/\Gamma_2 \to \mathbb{B}/\Gamma_1$, $f : D^{(2)} := X_2 \setminus (\mathbb{B}/\Gamma_2) \to X_1 \setminus (\mathbb{B}/\Gamma_1) =: D^{(1)}$ от степен d.

(iii) е непосредствено следствие от Лема 3.4 (ii).

$\square$

3.2 Неразклонено избутване на гладка тороидална компактификация

Нека X_2 е гладка проективна повърхнина, $\beta : X_2 \to Y_2$ е свиване на (-1)-криви с изключителен дивизор $E(\beta) = \coprod_{s=1}^{d} L_{1,s}$ и $f : X_2 \to X_1$ е неразклонено покритие от степен d, което се ограничава до неразклонено покритие $f : E(\beta) \to f(E(\beta))$ от степен d. Съгласно Лема 3.2 (ii), $L_1 := f(E(\beta))$ е (-1)-крива върху X_1. Тогава от Лема 3.6 (i) следва, че съществува комутативната диаграма на разслоено произведение (3.1) със свиването $\mathrm{Bl} : X_1 \to Y_1$ на L_1 и неразклонено покритие $\varphi : Y_2 \to Y_1$ от степен d, което трансформира множеството $\beta(E(\beta)) = \{p_{1,j} := \beta(L_{1,j}) \,|\, 1 \leq j \leq d\}$ в точка $q_1 \in Y_1$. Казваме, че φ е индуцирано от f.

Да предположим, че $\rho_2 = \beta_1 \dots \beta_r : S_r := X_2 \to Y_2 =: S_0$ е композиция от свивания на (-1)-криви

$$\beta_i : S_i := \beta_{i+1} \dots \beta_r(S_r) \longrightarrow S_{i-1} := \beta_i \dots \beta_r(S_r) \tag{3.5}$$

с изключителни дивизори $E(\beta_i) = \coprod_{s=1}^{d} L_{i,s}$ за всички $1 \leq i \leq r$. С намаляваща индукция по r да допуснем, че съществува комутативна диаграма на разслоено произведение

$$\begin{array}{ccccccc}
S_r & \xrightarrow{\beta_r} & S_{r-1} & \qquad & \dots S_{i+1} & \xrightarrow{\beta_{i+1}} & S_i \\
\downarrow{\scriptstyle f=\varphi_r} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_{r-1}} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_{i+1}} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_i} \\
f(S_r) & \xrightarrow{\mathrm{Bl}_r} & \varphi_{r-1}(S_{r-1}) & & \dots \varphi_{i+1}(S_{i+1}) & \xrightarrow{\mathrm{Bl}_{i+1}} & \varphi_i(S_i)
\end{array}$$

която се състои от комутативни квадрати на разслоени произведения $\mathrm{Bl}_j \varphi_j = \varphi_{j-1}\beta_j$, така че φ_j се ограничава до неразклонено покритие $\varphi_j : E(\beta_j) \to L_j := \varphi_j(E(\beta_j))$ от степен d и φ_{j-1} изпраща трансформира множеството

$$\beta_j(E(\beta_j)) = \{p_{j,s} := \beta_j(L_{j,s}) \,|\, 1 \leq s \leq d\}$$

в точка $q_j \in \varphi_{j-1}(S_{j-1})$ за всяко $j \in \{r \dots, i+1\}$. Ако $\varphi_i : S_i \to \varphi_i(S_i)$ се ограничава до неразклонено покритие $\varphi_i : E(\beta_i) \to L_i := \varphi_i(E(\beta_i))$ от степен d, то съществува неразклонено покритие $\varphi_{i-1} : S_{i-1} \to \varphi_{i-1}(S_{i-1})$ от степен d, което свива $\beta_i(E_{\beta_i}) = \{p_{i,s} = \beta_i(L_{i,s}) \,|\, 1 \leq s \leq d\}$ в точка $q_i \in S_{i-1}$ и затваря комутативната диаграма на разслоено произведение $\varphi_{i-1}\beta_i = \mathrm{Bl}_i \varphi_i$. По този начин, ако неразклонено покритие $f : X_2 \to X_1$ от степен d индуцира неразклонени покрития $E(\beta_i) = \coprod_{s=1}^{d} L_{i,s} \to L_i$ от степен d за всяко $1 \leq i \leq r$, то съществува неразклонено покритие

$$\varphi := \varphi_0 : Y_2 = S_0 \longrightarrow \varphi_0(S_0) =: Y_1$$

от степен d, което индуцира неразклонени покрития

$$\beta_i(E(\beta_i)) = \{p_{i,s} := \beta_i(L_{i,s}) \,|\, 1 \leq s \leq d\} \longrightarrow \{q_i\} \subset \varphi_{i-1}(S_{i-1})$$

от степен d за всяко $j \in \{1, \dots, r\}$.

Обратно, да предположим, че Y_2 е гладка проективна повърхнина, $\beta : X_2 \to Y_2$ е свиване на (-1)-криви с изключителен дивизор $E(\beta) = \coprod_{s=1}^{d} L_{1,s}$ и $\varphi : Y_2 \to Y_1$ е неразклонено покритие от степен d, което свива $\beta(E(\beta)) = \{p_{1,s} = \beta(L_{1,s}) \,|\, 1 \leq s \leq d\}$ в точка $q_1 \in Y_1$. Съгласно Лема 3.3 (i), съществува комутативна диаграма на разслоено произведение (3.1), където $\mathrm{Bl} : X_1 \to Y_1$ е раздуването на Y_1 в $q_1 \in Y_1$ и $f : X_2 \to X_1$ е неразклонено покритие от степен d, което се ограничава до неразклонено покритие

$$f : E(\beta) = \coprod_{s=1}^{d} L_{1,s} \longrightarrow L_1 := \mathrm{Bl}^{-1}(q_1)$$

от степен d. Нека $\rho_2 = \beta_1 \dots \beta_r : S_r := X_2 \to Y_2 =: S_0$ е композиция от свивания на (-1)-криви с изключителни дивизори $E(\beta_i) = \coprod_{s=1}^{d} L_{i,s}$, както в (3.5). С растяща индукция по r да предположим, че

$$\begin{array}{ccccccc} S_i & \xrightarrow{\beta_i} & S_{i-1} & & \dots S_1 & \xrightarrow{\beta_1} & S_0 = Y_2 \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi_i} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_{i-1}} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_1} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi = \varphi_0} \\ \varphi_i(S_i) & \xrightarrow{\mathrm{Bl}_i} & \varphi_{i-1}(S_{i-1}) & & \dots \varphi_1(S_1) & \xrightarrow{\mathrm{Bl}_1} & \varphi(Y_2) \end{array}$$

е комутативна диаграма на разслоено произведение с комутатиени квадрати на разслоено произведение $\varphi_{j-1}\beta_j = \mathrm{Bl}_j \varphi_j$, за които φ_{j-1} се ограничават до неразклонени покрития

$$\varphi_{j-1} : \beta_j(E(\beta_j)) = \{p_{j,s} := \beta_j(L_{j,s}) \,|\, 1 \leq s \leq d\} \longrightarrow \{q_j\} \subset \varphi_{j-1}(S_{j-1})$$

от степен d и φ_j се ограничават до неразклонени покрития

$$\varphi_j : E(\beta_j) = \coprod_{s=1}^{d} L_{j,s} \longrightarrow \varphi_j(E(\beta_j)) =: L_j$$

от степен d за всяко $j \in \{1, \dots, i\}$. Ако φ_i се ограничава до неразклонено покритие

$$\varphi_i : \beta_{i+1}(E(\beta_{i+1})) = \{p_{i+1,s} = \beta_{i+1}(L_{i+1,s}) \,|\, 1 \leq s \leq d\} \longrightarrow \{q_{i+1}\} \subset \varphi_i(S_i)$$

от степен d, то съществува неразклонено покритие

$$\varphi_{i+1} : S_{i+1} \longrightarrow \varphi_{i+1}(S_{i+1})$$

от степен d, което се ограничава до неразклонено покритие

$$\varphi_{i+1} : E(\beta_{i+1}) = \coprod_{s=1}^{d} L_{i+1,s} \longrightarrow L_{i+1} := \varphi_{i+1}(E(\beta_{i+1}))$$

от степен d и затваря комутативната диаграма на разслоено произведение $\varphi_i\beta_{i+1} = \mathrm{Bl}_{i+1}\varphi_{i+1}$ със свиването $\mathrm{Bl}_{i+1} : \varphi_{i+1}(S_{i+1}) \to \varphi_i(S_i)$ на L_{i+1}. По този начин, ако $\varphi : Y_2 \to Y_1$ е неразклонено покритие d, което индуцира неразклонени покрития

$$\beta_i(E(\beta_i)) = \{p_{i,s} := \beta_i(L_{i,s}) \,|\, 1 \leq s \leq d\} \longrightarrow \{q_i\} \subset \varphi_{i-1}(S_{i-1})$$

от степен d за всяко $1 \leq i \leq r$, то $f := \varphi_r : X_2 \to f(X_2)$ е неразклонено покритие от степен d, което индуцира неразклонени покрития $E(\beta_i) = \coprod_{s=1}^{d} L_{i,s} \to L_i$ от степен d за всяко $1 \leq i \leq r$. Горните разглеждания доказват следната лема, с която определяме понятието съвместимост на неразклонени покрития с раздувания.

Лема-Определение 3.8. *Нека X_2, Y_2 са гладки проективни повърхнини и*

$$\rho_2 = \beta_1 \dots \beta_r : S_r := X_2 \longrightarrow Y_2 =: S_0$$

е композиция от свивания на (-1)-криви с изключителни дивизори $E(\beta_i) = \coprod_{s=1}^{k_i} L_{i,s}$ за $k_i \in \mathbb{N}$ и за всяко $1 \leq i \leq r$, както в (3.5). Тогава следните твърдения са еквивалентни:

(i) съществува неразклонено покритие $f : X_2 \to f(X_2)$ от степен d, което се ограничава до неразклонени покрития

$$f : E(\beta_i) = \coprod_{s=1}^{k_i} L_{i,s} \longrightarrow L_i$$

от степен d на неприводими криви $L_i \subset f(X_2)$ за всички$1 \leq i \leq r$;

(ii) съществува неразклонено покритие $\varphi : Y_2 \to \varphi(Y_2)$ от степен d, което се ограничава до нераазклонени покрития

$$\varphi : \beta_i(E(\beta_i)) = \{p_{i,s} := \beta_i(L_{i,s}) \,|\, 1 \leq s \leq k_i\} \longrightarrow \{q_i\}$$

от степен d на точките $q_i \in \varphi_{i-1}(S_{i-1})$ за всички $1 \leq i \leq r$.

Ако са изпълнени тези еквивалентни условия, то съществува комутативната диаграма на разслоено произведение (3.4) за композицията

$$\rho_1 = \mathrm{Bl}_1 \dots \mathrm{Bl}_r : X_1 := \varphi(X_2) \to \varphi(Y_2) =: Y_1$$

на свивания Bl_i на L_i за всички $1 \leq i \leq r$. В такъв случай казваме, че $f : X_2 \to f(X_2)$ и $\varphi : Y_2 \to \varphi(Y_2)$ са съвместими с ρ_2.

Да отбележим, че ако крайно неразклоненото покритие $f : X_2 \to f(X_2)$ (съответно, $\varphi : Y_2 \to f(Y_2)$) от степен d е съвместимо с композицията от свивания $\rho_2 = \beta_1 \dots \beta_r$ с изключителни дивизори $E(\beta_i) = \coprod_{s=1}^{k_i} L_{i,s}$, то $k_i = d$ за всяко $1 \leq i \leq r$. С други думи, ако неразклонено покритие $f : X_2 \to X_1$ от степен d е съгласувано с ρ_2, то f трансформира d рационални (-1)-криви върху X_2 в една рационална (-1)-крива върху X_1.

Следствие 3.9. *Нека $X_2 = (\mathbb{B}/\Gamma_2)'$ е гладка тороидална компактификация и $\rho_2 : X_2 \to Y_2$ е композиция от свивания на (-1)-криви към минимална повърхнина Y_2. Ако $f : X_2 = (\mathbb{B}/\Gamma_2)' \to f(X_2) =: X_1$ е неразклонено покритие от степен d, което е съвместимо с ρ_2 и се ограничава до неразклонено покритие $f : \mathbb{B}/\Gamma_2 \to f(\mathbb{B}/\Gamma_2)$ от степен d, то*

(i) съществува комутативна диаграма на разслоено произведение $\rho_1 f = \varphi\rho_2$, както в (3.4), така че $\varphi : Y_2 \to \varphi(Y_2) =: Y_1$ е неразклонено покритие от степен d, а $\rho_1 : X_1 \to Y_1$ е композиция от свивания на (-1)-криви към минимална повархнина Y_1;

(ii) съществува решетка Γ_1 на $U(1,2)$, която съдържа Γ_2 като подгрупа с индекс $[\Gamma_1 : \Gamma_2] = d$ и такава, че $X_1 = (\mathbb{B}/\Gamma_1)'$ е тороидалната компактификация на $\mathbb{B}/\Gamma_1$;

(iii) φ се ограничава до неразклонено покритие $\varphi : \rho_2(D^{(2)}) \to \rho_1(D^{(1)})$ от степен d, където $D^{(j)} := X_j \setminus (\mathbb{B}/\Gamma_j)$ са тороидалните компактифициращи дивизори на $\mathbb{B}/\Gamma_j$ за $1 \leq j \leq 2$.

Доказателство. (i) е непосредствено следствие от Лема 3.8.

За да докажем (ii) да забележим, че композицията $f\zeta_2 : \mathbb{B} \to f(\mathbb{B}/\Gamma_2)$ на орбиталното универсално покритие $\zeta_2 : \mathbb{B} \to \mathbb{B}/\Gamma_2$ с неразклоненото покритие

$$f : \mathbb{B}/\Gamma_2 \longrightarrow f(\mathbb{B}/\Gamma_2)$$

е покритие на Галоа, защото тривиалната група $\pi_1^{\mathrm{orb}}(\mathbb{B}) = \{1\}$ е нормална подгрупа на $\Gamma_1 := \pi_1^{\mathrm{orb}}(f(\mathbb{B}/\Gamma_2))$. Още повече, орбиталната фундаментална група $\pi_1^{\mathrm{orb}}(\mathbb{B}/\Gamma_2) = \Gamma_2$ е подгрупа на Γ_1 с индекс $[\Gamma_1 : \Gamma_2] = d$ и $f(\mathbb{B}/\Gamma_2) = \mathbb{B}/\Gamma_1$. Съгласно Лема 3.1 (i), $f : X_2 \to X_1$ се ограничава до неразклонено покритие

$$f : D^{(2)} = X_2 \setminus (\mathbb{B}/\Gamma_2) \longrightarrow D^{(1)} := X_1 \setminus (\mathbb{B}/\Gamma_1)$$

от степен d. Тороидалният компактифициращ дивизор $D^{(2)}$ на $\mathbb{B}/\Gamma_2$ се състои от непресичащи се, гладки елиптични неприводими криви. Прилагайки Лема 3.2 (i) получаваме, че $D^{(1)}$ се състои също от непресичащи се, гладки елиптични неприводими криви и $X_1 = (\mathbb{B}/\Gamma_1)'$ е тороидалната компактификация на $\mathbb{B}/\Gamma_1$. Съгласно Lemma 3.4 (ii) това е достатъчно, за да получим, че $\varphi : Y_2 \to Y_1$ се ограничава до неразклонено покритие $\varphi : \rho_2(D^{(2)}) \to \rho_1(D^{(1)})$ от степен d.

□

Следствие 3.10. *Нека $X_2 = (\mathbb{B}/\Gamma_2)'$ е гладка тороидална компактификация с тороидален компактифициращ дивизор $D^{(2)} := X_2 \setminus (\mathbb{B}/\Gamma_2)$ и $\rho_2 : X_2 \to Y_2$ е композиция от свивания на (-1)-криви към минимална повърхнина Y_2. Ако $\varphi : Y_2 \to \varphi(Y_2)$ е неразклонено покритие от степен d, което е съгласувано с ρ_2 и се ограничава до неразклонено покритие $\varphi : \rho_2(D^{(2)}) \to \varphi\rho_2(D^{(2)})$ от степен d то:*

(i) съществува комутативна диаграма на разслоено произведение $\rho_1 f = \varphi\rho_2$, където $f : X_2 \to f(X_2) =: X_1$ е неразклонено покритие от степен d, а $\rho_1 : X_1 \to Y_1$ е композиция от свивания на (-1)-криви към минимална повърхнина Y_1;

(ii) съществува решетка Γ_1 на групата $U(1,2)$, съдържаща Γ_2 като подгрупа с индекс $[\Gamma_1 : \Gamma_2] = d$ и такава, че $X_1 = (\mathbb{B}/\Gamma_1)'$ е тороидалната компактификация на $\mathbb{B}/\Gamma_1$;

(iii) f се ограничава до неразклонено покритие $f : \mathbb{B}/\Gamma_2 \to \mathbb{B}/\Gamma_1$ от степен d.

Доказателство. От Лема 3.8 директно получаваме (i). Съгласно Лема 3.4 (ii),f се ограничава до неразклонено покритие $f : D^{(2)} \to f(D^{(2)})$ от степен d. Тогава от Лема 3.1 (i) следва, че $f : X_2 \setminus D^{(2)} = \mathbb{B}/\Gamma_2 \to X_1 \setminus f(D^{(2)})$ е неразклонено покритие от степен d. Доказателството на Следствие 3.9 (ii) установява, че това е достатъчно за съществуването на решетка Γ_1 на $U(1,2)$, която съдържа Γ_2 като подгрупа с индекс $[\Gamma_1 : \Gamma_2] = d$ и за която $X_1 \setminus f(D^{(2)}) = \mathbb{B}/\Gamma_1$. Оттук следва (iii). По предположение, $D^{(2)}$ се състои от непресичащи се, гладки неприводими елиптични криви. Следователно и $f(D^{(2)})$ се състои от непресичащи се, гладки неприводими елиптични криви и $X_1 = (\mathbb{B}/\Gamma_1) \coprod f(D^{(2)})$ е тороидалната компактификация на$\mathbb{B}/\Gamma_1$.

□

Да допуснем, че гладка тороидална компактификация $X = (\mathbb{B}/\Gamma)'$ с тороидален компактифициращ дивизор $D := X \setminus (\mathbb{B}/\Gamma)$ допуска свиване $\beta : X \to Y$ на $n \in \mathbb{N}$ гладки неприводими рационални (-1)-криви, което ни довежда до минимална повърхнина Y и съществува неразклонено покритие $\varphi : Y \to \varphi(Y)$ от степен d, което се ограничава до неразклонени покрития $\varphi : \beta(D) \to \varphi\beta(D)$ и $\varphi : \beta(E(\beta)) \to \varphi\beta(E(\beta))$ от степен d върху образите на тороидалния компактифициращ дивизор и изключителния дивизор на свиването. Тогава ойлеровата характеристика на гладката повърхнина $\varphi(Y)$ е

$$e(\varphi(Y)) = \frac{e(Y)}{d} \in \mathbb{Z}$$

и мощността на $\varphi\beta(E(\beta))$ е

$$|\varphi\beta(E(\beta))| = \frac{|\beta(E(\beta))|}{d} = \frac{n}{d} \in \mathbb{N}.$$

Затова $d \in \mathbb{N}$ дели $e(Y)$ и $n = |\beta(E(\beta))| \in \mathbb{N}$, а оттам и най-големия общ делител $\mathrm{GCD}(|\beta(E(\beta))|, e(Y))$.

Да отбележим също, че съвместимостта на неразклонено покритие $\varphi : Y \to \varphi(Y)$ със свиване $\beta : X \to Y$ на непресичащи се гладки рационални (-1)-криви е еквивалентно на $\varphi^{-1}(\varphi\beta(E(\beta)) = \beta(E(\beta))$ и може да се проследи върху Y. Когато, обаче, $\rho = \beta_1 \dots \beta_r : X \to Y$ е композиция на поне две свивания на (-1)-криви, т.е. ако $r \geq 2$, съгласуваността на неразклоненото покритие $\varphi : Y \to \varphi(Y)$ от степен d с композицията ρ не може да се провери само върху минималната повърхнина Y. По-точно, ако $S_0 := Y$, $T_0 := \varphi(Y)$, тогава в означенията на комутативната диаграма (3.3), неразклоненото покритие $\varphi_1 : S_1 \to T_1$ от степен d може да се ограничава до неразклонено покритие $\varphi_1 : \beta_2(E(\beta_2)) \to \varphi_1\beta_2(E(\beta_2))$ от степен d, но не винаги $\varphi_0 := \varphi$ се ограничава до неразклонено покритие $\varphi : \beta_1\beta_2(E(\beta_2)) \to \varphi\beta_1\beta_2(E(\beta_2))$ от степен d. Например, ако някоя неприводима компонента $L_{1,j}$ на $E(\beta_1)$ пресича $\beta_2(E(\beta_2))$ в поне две точки, то $|\beta_1\beta_2(E(\beta_2))| < d$ и $\varphi : \beta_1\beta_2(E(\beta_2)) \to \varphi\beta_1\beta_2(E(\beta_2))$ е от степен по-малка от d.

3.3 Наситени и примитивни гладки тороидални компактификации с неположителна размерност на Кодаира

Определение 3.11. *Нека $X = (\mathbb{B}/\Gamma)'$ и $X_0 = (\mathbb{B}/\Gamma_0)'$ са гладки тороидални компактификации на фактори на комплексното двумерно кълбо $\mathbb{B}$ по решетки Γ, Γ_0 на $U(1,2)$. Ще казваме, че X доминира X_0 и ще пишем $X \succeq X_0$ или $X_0 \preceq X$, ако Γ_0 е неторзионна решетка, Γ е подгрупа на Γ_0 от краен индекс $d := [\Gamma_0 : \Gamma] < \infty$ и неразклоненото покритие $f : \mathbb{B}/\Gamma \to \mathbb{B}/\Gamma_0$ се продължава до неразклонено покритие*

$$f : X = (\mathbb{B}/\Gamma)' \longrightarrow (\mathbb{B}/\Gamma_0)' = X_0$$

от степен d, което е съвместимо с поне една крайна редица

$$\rho : X = (\mathbb{B}/\Gamma)' \longrightarrow Y$$

от свивания на (-1)-криви към гладка минимална повърхнина Y.

Определение 3.12. *Гладка тороидална компактификация $X_1 = (\mathbb{B}/\Gamma_1)'$ се нарича наситена, ако не съществува неразклонено покритие*

$$f : X_2 = (\mathbb{B}/\Gamma_2)' \longrightarrow (\mathbb{B}/\Gamma_1)' = X_1$$

от степен $d > 1$, което се ограничава до неразклонено покритие $f : \mathbb{B}/\Gamma_2 \to \mathbb{B}/\Gamma_1$ от степен d.

Следствие 3.13. *Гладка тороидална компактификация $X_1 = (\mathbb{B}/\Gamma_1)'$ е наситена тогава и само тогава, когато един, а от там и всеки неин минимален модел Y_1 е едносвързан.*

Определение 3.14. *Гладка тороидална компактификация $X = (\mathbb{B}/\Gamma)'$ се нарича примитивна, ако не съществува неразклонено покритие $f : X \to f(X)$ от степен $d > 1$, което се ограничава до неразклонено покритие $f : \mathbb{B}/\Gamma \to f(\mathbb{B}/\Gamma)$ от степен d и е съгласувано с композиция $\rho : X \to Y$ от свивания на (-1)-криви към минимална повърхнина Y.*

Комбинирайки Следствие 3.9 и следствие 3.10, получаваме следното

Следствие 3.15. *Нека $X = (\mathbb{B}/\Gamma)'$ е гладка тороидална компактификация с тороидален компактифициращ дивизор $D := X \setminus (\mathbb{B}/\Gamma)$. В такъв случай, X е примитивна тогава и само тогава, когато не съществува неин минимален модел Y, който се получава чрез поредица $\rho : X \to Y$ от свивания на (-1)-криви и допуска неразклонено покритие $\varphi : Y \to \varphi(Y)$ от степен $d > 1$, което е съвместимо с ρ и се ограничава до неразклонено покритие $\varphi : \rho(D) \to \varphi\rho(D)$ от степен d.*

Ясно е, че гладка тороидална компактификация $X = (\mathbb{B}/\Gamma)'$ е наситена, тогава и само тогава, когато е максимална относно частичната наредба $\succeq$. Аналогично, X е примитивна точно когато е минимална относно $\succeq$.

Твърдение 3.16. *Произволен минимален модел Y на гладка тороидална компактификация $X = (\mathbb{B}/\Gamma)'$ с размерност на Кодаира $\kappa(X) = -\infty$ е рационална или линейчата повърхнина $r : Y \to B$ с елиптична база B.*

Ако $X = (\mathbb{B}/\Gamma)' \in \mathcal{S}$ е рационална повърхнина, то X е едновременно наситена и примитивна гладка тороидална компактификация.

Не съществува наситена гладка $X = (\mathbb{B}/\Gamma)'$, чийто минимален модел е линейчата повърхнина $r : Y \to B$ с елиптична база B.

Доказателство. Нека $\rho : X = (\mathbb{B}/\Gamma)' \to Y$ е композиция от свивания на (-1)-криви към минимална повърхнина Y с размерност на Кодаира $\kappa(Y) = -\infty$. Тогава $Y = \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ е комплексната проективна равнина или $r : Y \to B$ е линейчата повърхнина с база B от род $g \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$. Тороидалният компактифициращ дивизор

$$D := X \setminus (\mathbb{B}/\Gamma) = \coprod_{j=1}^{k} D_j$$

се състои от непресичащи се, гладки неприводими елиптични криви D_j. Ако $g \geq 2$, тогава образите на морфизмите $\pi\rho : D_j \to B$ могат да са само точки $p_j := \pi\rho(D_j) \in B$, защото елиптична крива не може да покрива крива от по-голям род. В резултат, $\rho(D_j) \subseteq r^{-1}(p_j)$ за $1 \leq j \leq k$. Изключителният дивизор L of $\rho : X \to Y$ има краен образ $\rho(L) = \{q_1, \ldots, q_s\}$ и $\rho(L) \subseteq \coprod_{i=1}^{s} r^{-1}(\pi(q_i))$. Следователно

$$Y' := Y \setminus \left[\coprod_{i=1}^{s} r^{-1}(r(q_i)) \right] \subseteq Y \setminus \rho(L) \equiv X \setminus L$$

и ρ действа тъждествено върху върху Y'. Освен това,

$$Y'' := Y' \setminus \left[\coprod_{j=1}^{k} r^{-1}(p_j) \right] = Y \setminus \left[\left(\coprod_{i=1}^{s} r^{-1}(r(q_i)) \right) \coprod \left(\coprod_{j=1}^{k} r^{-1}(p_j) \right) \right] \subseteq \mathbb{B}/\Gamma.$$

В резултат, Y'' съдържа поне един слой $r^{-1}(b) \simeq \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, $b \in B$ на разслоението $r : Y \to B$, което противоречи на Кобаяши-хиперболичността на $\mathbb{B}/\Gamma$. Това е достатъчно за да получим, че минималният модел Y на гладка тороидална компактификация $X = (\mathbb{B}/\Gamma)'$ с размерност на Кодаира $\kappa(X) = -\infty$ е бирационален на проективната равнина $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ или на минимална линейчата повърхнина $r : Y \to B$ с елиптична база B.

Произволна компактификация $X = (\mathbb{B}/\Gamma)'$ с рационален минимален модел Y има фундаментална група $\pi_1(X) = \pi_1(Y) = \pi_1(\mathbb{P}^2(\mathbb{C})) = \{e\}$. Затова не съществува крайно неразклонено покритие $Y_1 \to Y$ от степен $d > 1$, а от там и друга тороидална компактификаицця X_1, която да бъде покритие на X. Това доказва, че гладките тороидални компактификации X, бирационални на проективната равнина са наситени. Да допуснем, че $f : X = (\mathbb{B}/\Gamma)' \to X_0 = (\mathbb{B}/\Gamma_0)'$ е неразклонено покритие от степен $d > 1$, което е съвместимо с композиция от свивания на (-1)-криви $\rho : X \to Y$

към минимална рационална повърхнина Y и се ограничава до неразклонено покритие $f : \mathbb{B}/\Gamma \to \mathbb{B}/\Gamma_0$ от степен d. Размерността на Кодаира е инвариантна относно крайни неразклонени покрития, така че $\kappa(X_0) = \kappa(X) = -\infty$. Повърхнината X_0 не е едносвързана, а оттам и не е рационална. Следователно съществува композиция $\rho_0 : X_0 \to Y_0$ от свивания на (-1)-криви върху линейчата минимална повърхнина $r_0 : Y_0 \to B_0$ с елиптична база B_0. Сюрективният морфизъм $\rho_0 f : X = (\mathbb{B}/\Gamma)' \to Y_0$ индуцира влагане $(\rho_0 f)^* : H^{0,1}(Y_0) \to H^{0,1}(X)$. От една страна, линейчатата повърхнина Y_0 има иерегулярност $h^{0,1}(Y_0) := \dim_{\mathbb{C}} H^{0,1}(Y_0) = 1$, равна на рода на своята база. От друга страна, рационалната повърхнина X има анулираща се иерегулярност $h^{0,1}(X) := \dim_{\mathbb{C}} H^{0,1}(X) = 0$. Това противоречи на съществуването на крайно неразклонено покритие $f : X \to X_0$ от степен $d > 1$ и доказва, че всяка гладка тороидална компактификация $X = (\mathbb{B}/\Gamma)'$ с рационален минимален модел е примитивна.

Нека сега $X = (\mathbb{B}/\Gamma)'$ е гладка тороидална компактификация с минимален модел Y, който е линейчата повърхнина $r : Y \to B$ с елиптична база B. Тогава Y е бирационално на $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times B$. Фундаменталната група е бирационален инвариант, така че $\pi_1(X) \simeq \pi_1(Y) \simeq \pi_1(B) \simeq (\mathbb{Z}^2, +)$. В частност, Y не е едносвързана. Съгласно Следствие 3.13, X не може да бъде наситена.

$\square$

Твърдим, че за произволна гладка тороидална компактификация $X = (\mathbb{B}/\Gamma)' \in \mathcal{S}$ съществува примитивна $X_0 = (\mathbb{B}/\Gamma_0)' \in \mathcal{S}$ с $X \succeq X_0$. В Твърдение 3.16 установихме, че минималният модел Y на X не може да е линейчата повърхнина с база C_g от род $g \geq 2$. Следователно Ойлеровата характеристика $e(Y) \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$ на Y е неотрицателно цяло число, съгласно класификацията на Енрикес-Кодаира на минималните гладки проективни повърхнини. Тороидалната компактификация X се получава от Y чрез раздувания на $s \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$ точки, така че Ойлеровата характеристика $e(X) = e(Y) + s \geq e(Y) \geq 0$ на X е неотрицателно цяло число. Ако $X \succeq X_0$ и съществува неразклонено покритие $X \to X_0$ от степен $d \in \mathbb{N}$, то $e(X_0) = \frac{e(X)}{d} \leq e(X)$. Всяка нерастяща редица от неотрицателни цели числа се стабилизира след краен брой стъпки. Затова произволна гладка тороидална компактификация $X = (\mathbb{B}/\Gamma)' \in \Sigma$ доминира поне една примитивна гладка тороидална компактификация $X_0 \in \mathcal{S}$.

От гореспоменатите разглеждани следва, че за всяка гладка тороидална компактификация $X \in \mathcal{S}$ съществуват краен брой $X_1, \ldots, X_m \in \mathcal{S}$ с $X_i \preceq X$ за всяко $1 \leq i \leq m$. Затова частичната наредба $\succeq$ върху множеството $\mathcal{S}$ е артинова, т.е. произволно подмножество $\mathcal{S}_o \subseteq \mathcal{S}$ има (поне един) минимален елемент $X_o = (\mathbb{B}/\Gamma_o)' \in \mathcal{S}_o$. Минималните елементи $X_o \in \mathcal{S}_o$ не са непременно примитивни, защото X_o може да не е минимална в $\mathcal{S}$.

Необходимо и достатъчно условие, при което $X = (\mathbb{B}/\Gamma)' \in \mathcal{S}$ се доминира от наситена $X_0 = (\mathbb{B}/\Gamma)' \in \mathcal{S}$ е крайността на фундаменталната група $\pi_1(X)$ на X. За да обясним това да напомним, че фундаменталната група на гладка повърхнина е бирационален инвариант. Комбинирайки Определение 3.11 със Следствие 3.5 получаваме, че $(\mathbb{B}/\Gamma_0)' = X_0 \succeq X = (\mathbb{B}/\Gamma)'$ е в сила тогава и само тогава, когато съществува крайно неразклонено покритие $\varphi : Y_0 \to Y$ на минимален модел Y на X чрез минимален модел Y_0 на X_0. По Следствие 3.13, $X_0 = (\mathbb{B}/\Gamma_0)' \in \mathcal{S}$ е наситена точно когато $\pi_1(Y_0) = \{e\}$.

Оттук, за $X = (\mathbb{B}/\Gamma)' \in \mathcal{S}$ съществува наситена $X_0 = (\mathbb{B}/\Gamma_0)' \in \mathcal{S}$ с $X_0 \succeq X$ тогава и само тогава, когато универсалното покритие $u_Y : \widetilde{Y} \to Y$ на Y е крайно. Това е еквивалентно на крайността на фундаменталната група $\pi_1(Y) = \pi_1(X)$.

По класификацията на Енрикес-Кодаира, съществуват четири типа минимални гладки проективни повърхнини Y с размерност на Кодаира $\kappa(Y) = 0$. Това са абелевите и би-елиптичните с универсално покритие $\mathbb{C}^2$, както и $K3$ повърхнините и повърхнините на Енрикес с $K3$ универсално покритие. Ако $\varphi : Y_2 \to Y_1$ е крайно неразклонено покритие на гладки проективни повърхнини, то размерностите на Кодаира $\kappa(Y_1) = \kappa(Y_2)$ и универсалните покриващи $\widetilde{Y_1} = \widetilde{Y_2}$ съвпадат. Нека Y_2 е гладка проективна повърхнина с действие на инволюция $g_o : Y_2 \to Y_2$ без фиксирани точки, а $\beta : X_2 \to Y_2$ е раздуването на Y_2 във двете точки от някоя $\langle g_o \rangle$-орбита $\{p_{1,1}, p_{1,2} = g_o(p_{1,1})\} \subset Y_2$. По определението за раздуване, g_o индуцира инволюция $g_1 : X_2 \to X_2$ на X_2 без фиксирани точки, относно която изключителният дивизор $E(\beta) = L_{1,1} \coprod L_{1,2}$, $L_{1,i} := \beta^{-1}(p_{1,i})$ на β е инвариантен и съществува комутативна диаграма на разслоено произведение (3.4) с $\langle g_o \rangle$-покритие на Галоа $\varphi : Y_2 \to Y_1$, $\langle g_1 \rangle$-покритие на Галоа $f : X_2 \to X_1$ и раздуване $\mathrm{Bl} : X_1 \to Y_1$ на Y_1 в $\{q_1\} = \varphi(\{p_{1,1}, p_{1,2}\})$. Да допуснем, че $\rho_2 = \beta_1 \dots \beta_r : S_r := X_2 \to Y_2 =: S_0$ е композиция от свивания на (-1)-криви с изключителни дивизори $E(\beta_i) = L_{i,1} \coprod L_{i,2}$, а $g_o : S_0 \to S_0$ е инволюция без фиксирани точки. С растяща индукция по броя на свиванията r, ако $g_{r-1} : S_{r-1} \to S_{r-1}$ е инволюция без фиксирани точки, запазваща $\beta_r(E(\beta_r)) = \{p_{i,r}, p_{i,r}\}$, то съществува инволюция $g_r : S_r \to S_r$ без фиксирани точки, запазваща $E(\beta_r) = L_{r,1} \coprod L_{r,2}$. По този начин, ако инволюция $g_0 : S_0 \to S_0$ без фиксирани точки индуцира изоморфизми $L_{i,1} \to L_{i,2}$ за всяко $1 \leq i \leq r$, то съществува инволюция $g_r : S_r \to S_r$ без фиксирани точки и комутативна диаграма на разслоено произведение (3.4) с $\langle g_o \rangle$-покритие на Галоа $\varphi : Y_2 \to Y_1$, $\langle g_r \rangle$-покритие на Галоа $f : X_2 \to X_1$ и композиция $\rho_1 = \mathrm{Bl}_1 \dots \mathrm{Bl}_r : X_1 \to Y_1$ от свивания на $E(\beta_i)/\langle g_i \rangle = L_i \simeq \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Ако $g_o : S_0 \to S_0$ индуцира изоморфнизми $L_{i,1} \to L_{i,2}$ на неприводимите компоненти $E(\beta_i) = L_{i,1} \coprod L_{i,2}$ за всяко $i \in \{1, \dots, r\}$, казваме че g_o е съвместима с $\rho_2 = \beta_1 \dots \beta_r$.

Твърдение 3.17. *Нека $X = (\mathbb{B}/\Gamma)'$ е гладка тороидална компактификация, $D := X \setminus (\mathbb{B}/\Gamma)$ е нейният тороидален компактифициращ дивизор и $\rho = \beta_1 \dots \beta_r : X \to Y$ композиция от свивания на (-1)-криви към $K3$ повърхнина Y. Тогава:*

(i) X е наситена компактификация;

(ii) X е непримитивна тогава и само тогава, когато съществува инволюция $g_o : Y \to Y$ без фиксирани точки, която е съвместима с ρ и запазва $\rho(D)$;

(iii) Ако X е непримитивна, то съществува комутативна диаграма на разслоено произведение

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\rho} & Y \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} \\ X_0 & \xrightarrow{\rho_0} & Y_0 \end{array}$$

с примитивна гладка тороидална компактификация $X_0 = (\mathbb{B}/\Gamma_0)'$, композиция от *свивания* $\rho_0 : X_0 \to Y_0$ *на* (-1)*-криви към минимална повърхнина на Енрикес* Y_0 *и неразклонени покрития* $f : X \to X_0$, $\varphi : Y \to Y_0$ *от степен* 2.

Доказателство. (i) се получава от $\pi_1(Y) = \{1\}$ и Следствие 3.13.

(ii) и (iii) следват от Следствие 3.15 и от факта, че минимална проективна повърхнина Y_0 има неразклонено покритие $\varphi : Y \to Y_0$ чрез $K3$ повърхнина Y тогава и само тогава, когато Y_0 е фактор на Y по действието на инволюция $g_o : Y \to Y$ без фиксирани точки. Такива $Y_0 = Y/\langle g_o \rangle$ се наричат минимални повърхнини на Енрикес. Те нямат неразклонени покрития $\varphi_0 : Y_0 \to \varphi_0(Y_0)$ от степен > 1.

□

Твърдение 3.18. *Нека* $X = (\mathbb{B}/\Gamma)'$ *е гладка тороидална компактификация и* $\rho : \beta_1 \dots \beta_r : X \to Y$ *е композиция от свивания на* (-1)*-криви към минимална повърхнина на Енрикес* Y. *Тогава:*

(i) X *е примитивна гладка тороидална компактификация;*

(ii) X *не е наситена;*

(iii) съществува неразклонено покритие $f : X_1 = (\mathbb{B}/\Gamma_1)' \to (\mathbb{B}/\Gamma)' = X$ *от степен* 2 *чрез наситена гладка тороидална компактификация* $X_1 = (\mathbb{B}/\Gamma_1)'$ *с* $K3$ *минимален модел* Y_1.

Доказателство. (i) се дължи на липсата на неразклонени покрития $\varphi : Y \to \varphi(Y)$ от степен $d > 1$.

(ii) следва от това, че фундаменталната група на Y е $\pi_1(Y) = (\mathbb{Z}_2, +) \neq \{1\}$.

(iii) е непосредствено следствие от факта, че повърхнините на Енрикес са фактори на $K3$ повърхнини по група от ред 2 без фиксирани точки.

□

Нека $X = (\mathbb{B}/\Gamma)'$ е гладка тороидална компактификация с абелев или би-елиптичен минимален модел Y. Според теорема 1.3 от [19] на Ди Чербо и Стоувър , X може да се получи от Y чрез едно раздуване $\beta : X \to Y$ на $n \in \mathbb{N}$ точки $p_1, \dots, p_n \in Y$.

Твърдение 3.19. *Нека* $X = (\mathbb{B}/\Gamma)'$ *е гладка тороидална компактификация със свиване* $\beta : X \to Y$ *на* (-1)*-криви към минимална повърхнина* Y, $E(\beta) = \coprod_{i=1}^{n} L_i$ *е изключителният дивизор на* β *и* $D := X \setminus (\mathbb{B}/\Gamma)$ *е тороидалният компактифициращ дивизор на* $\mathbb{B}/\Gamma$. *Тогава:*

(i) β *изобразява* $E(\beta)$ *върху множеството* $\beta(E(\beta)) = \beta(D)^{\mathrm{sing}}$ *на особените точки на дивизора* $\beta(D) \subset Y$;

(ii) X *е непримитивна тогава и само тогава, когато съществува неразклонено покритие* $\varphi : Y \to \varphi(Y)$ *от степен* $d > 1$, *което се ограничава до неразклонено покритие* $\varphi : \beta(D) \to \varphi\beta(D)$ *от степен* d;

(iii) съществува изоморфизъм

$$\Phi : \mathrm{Aut}(Y, \beta(D)) \longrightarrow \mathrm{Aut}(X, D)$$

на относителната група от автоморфизми $\mathrm{Aut}(Y, \beta(D)) = \mathrm{Aut}(Y, \beta(D), \beta(D)^{\mathrm{sing}})$ *върху относителната група от автоморфизми* $\mathrm{Aut}(X, D) = \mathrm{Aut}(X, D, E(\beta))$;

(iv) $g_o \in \mathrm{Aut}(Y, \beta(D))$ действа без фиксирани точки тогава и само тогава, когато $g = \Phi(g_o) \in \mathrm{Aut}(X, D)$ действа без фиксирани точки.

Доказателство. (i) Нека неприводимите компоненти на $D = \coprod_{j=1}^{k} D_j$ са D_j. Тогава особените точки на $\beta(D)$ образуват множеството

$$\beta(D)^{\mathrm{sing}} = \left[\cup_{j=1}^{k} \beta(D_j)^{\mathrm{sing}}\right] \cup \left[\cup_{1 \leq i < j \leq k} \beta(D_i) \cap \beta(D_j)\right].$$

Тъй като D_j са непресичащи се, гладки неприводими елиптични криви, $\beta(D)^{\mathrm{sing}} \subseteq \beta(E(\beta))$. Обратно, всяка (-1)-крива L_i върху $X = (\mathbb{B}/\Gamma)'$ пресича $D = \coprod_{j=1}^{k} D_j$ в поне три точки, заради Кобаяши-хиперболичността на $\mathbb{B}/\Gamma$. Всъщност, $|L_i \cap D| \geq 4$ според Теорема 1.1 (2) от [19] на Ди Чербо и Стоувър . Следователно, кратността на точката $\beta(L_i) = p_i$ относно кривата $\beta(D)$ е ≥ 4 и $p_i \in \beta(D)^{\mathrm{sing}}$. С това показахме двете включвания, от които следва първото твърдение $\beta(E(\beta)) = \beta(D)^{\mathrm{sing}}$.

(ii) От Следствие 3.15 и първата част на това твърдение, $X = (\mathbb{B}/\Gamma)'$ е непримитивна тогава и само тогава, когато съществува неразклонено покритие $\varphi : Y \to \varphi(Y)$ от степен $d > 1$, което се ограничава до неразклонени покрития $\varphi : \beta(D) \to \varphi\beta(D)$ and $\varphi : \beta(D)^{\mathrm{sing}} \to \varphi\beta(D)^{\mathrm{sing}}$ от степен d. Остава да забележим, че произволно неразклонено покритие $\varphi : \beta(D) \to \varphi\beta(D)$ от степен d е локален бихоломорфизъм, така че запазва кратноститиие на точките относно $\beta(D)$ и се ограничава до неразклонено покритие $\varphi : \beta(D)^{\mathrm{sing}} \to \beta(D)^{\mathrm{sing}}$ от степен d, защото $\beta(D)^{\mathrm{sing}}$ се състои от точките на $\beta(D)$ с кратност ≥ 2.

(iii) Ако холоморфен автоморфизъм $g_o : Y \to Y$ се ограничава до холоморфен автоморфизъм $g_o : \beta(D) \to \beta(D)$, то g_o запазва кратностите на точките относно $\beta(D)$ и $\beta(D)^{\mathrm{sing}}$ е $\langle g_o \rangle$-инвариантно. Оттук $\mathrm{Aut}(Y, \beta(D)) \leq \mathrm{Aut}(Y, \beta(D), \beta(D)^{\mathrm{sing}})$ и

$$\mathrm{Aut}(Y, \beta(D)) = \mathrm{Aut}(Y, \beta(D), \beta(D)^{\mathrm{sing}}),$$

тъй като обратното включване е по определение.

За да докажем съществуването на изоморфизъм на групи

$$\Phi : \mathrm{Aut}(Y, \beta(D), \beta(D)^{\mathrm{sing}}) \longrightarrow \mathrm{Aut}(X, D, E(\beta)),$$

да изберем $g_o \in \mathrm{Aut}(Y, \beta(D), \beta(D)^{\mathrm{sing}})$. Тогава $\Phi(g_o)|_{X \setminus E(\beta)} := g_o|_{Y \setminus \beta(D)^{\mathrm{sing}}}$ действа върху $X \setminus E(\beta) = Y \setminus \beta(E(\beta)) = Y \setminus \beta(D)^{\mathrm{sing}}$. По определението за раздуване на точка, биекцията $g_o : \beta(D)^{\mathrm{sing}} \to \beta(D)^{\mathrm{sing}}$ с $g_o(\beta(L_{1,i})) = \beta(L_{1,j})$ индуцира изоморфизми $\Phi(g_o) : L_{1,i} \to L_{1,j}$ и задава елемент $\Phi(g_o) \in \mathrm{Aut}(X, E(\beta))$.

Съгласно

$$\Phi(g_o)(D \setminus E(\beta)) = g_o(\beta(D) \setminus \beta(D)^{\mathrm{sing}}) = \beta(D) \setminus \beta(D)^{\mathrm{sing}} = D \setminus E(\beta)$$

стигаме до извода, че $\Phi(g_o)$ трансформира Зариски затворената обвивка D на $D \setminus E(\beta)$ върху себе си и $\Phi(g_o) \in \mathrm{Aut}(D)$.

Съответствието Φ е хомоморфизъм на групи, защото g_o и $\Phi(g_o)$ съвпадат върху Зариски отворени подмножества на Y, съответно, X. За да докажем биективността Φ, да забележим, че $Y \setminus \beta(D)^{\text{sing}} = X \setminus E(\beta)$. За произволно $g \in \text{Aut}(X, D, E(\beta))$ определяме $\Phi^{-1}(g)|_{Y\setminus\beta(D)^{\text{sing}}} := g|_{X\setminus E(\beta)}$. Изоморфизмът $g : E(\beta) \to E(\beta)$ на изключителния дивизор $E(\beta)$ на β индуцира пермутация $\Phi^{-1}(g) : \beta(D)^{\text{sing}} \to \beta(D)^{\text{sing}}$ на крайното множество $\beta(D)^{\text{sing}}$ и задава автоморфизъм $\Phi^{-1}(g) \in \text{Aut}(Y, \beta(D)^{\text{sing}})$. Вземайки предвид

$$\Phi^{-1}(g)(\beta(D) \setminus \beta(D)^{\text{sing}}) = g(D \setminus E(\beta)) = D \setminus E(\beta) = \beta(D) \setminus \beta(D)^{\text{sing}},$$

стигаме до извода, че $\Phi^{-1}(g) \in \text{Aut}(\beta(D))$ е автоморфизъм на Зариски затворената обвивка $\beta(D)$ на $\beta(D) \setminus \beta(D)^{\text{sing}} = \beta(D)^{\text{smooth}}$. Да забележим, че произволен автоморфизъм $g \in \text{Aut}(X, D)$ действа върху множеството на гладките неприводими рационални криви върху X. Още повече, g запазва индекса на самопресичане на такава крива и $\langle g \rangle$ действа въхру множеството $E(\beta) = \coprod_{i=1}^{n} L_i$ на (-1)-кривите върху X. Така, $g \in \text{Aut}(X, D, E(\beta))$ и $\text{Aut}(X, D) \leq \text{Aut}(X, D, E(\beta))$, откъдето

$$\text{Aut}(X, D, E(\beta)) = \text{Aut}(X, D).$$

(iv) Ако $g \in \text{Aut}(X, D)$ действа върху X без фиксирани точки, то действието на $g_o := \Phi^{-1}(g) \in \text{Aut}(Y, \beta(D))$ се ограничава до действие $g_o|_{Y\setminus\beta(E(\beta))} = g|_{X\setminus E(\beta)}$ без фиксирани точки. От предположението $g_o(p_i) = p_i = \text{Bl}(L_i)$ за някое $1 \leq i \leq n$ следва, че g се ограничава до изоморфизъм $g : L_i \to L_i$. Всеки бихоломофизъм $g \in \text{Aut}(L_i) = \text{Aut}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})) = PGL(2, \mathbb{C})$ на проективната права $L_i = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ е дробно-линейна трансформация и има две фиксирани точки, броени с техните кратности. Това противоречи на липсата на фиксирани точки на g върху X и изисква съответният автоморфизъм $g_o = \Phi^{-1}(g) \in \text{Aut}(Y, \beta(D))$ да няма фиксирани точки върху Y.

Обратно, ако $g_o \in \text{Aut}(Y, \beta(D))$ няма фиксирани точки върху Y и $g := \Phi(g_o)$, то ограничението $g|_{X\setminus E(\beta)} = g_o|_{Y\setminus\beta(\beta)}$ няма фиксирани точки. Ако $g(x) = x$ за някое $x \in E(\beta) = \coprod_{i=1}^{n} L_i$, то $x \in L_i$ за някое $1 \leq i \leq n$ и $g(L_i) = L_i$. В резултат, g_o фиксира $p_i = \beta(L_i) \in Y$, което е протиеоречие. По този начин, произволен автоморфизъм $g_o \in \text{Aut}(Y, \beta(D))$ без фиксирани точки отговаря на $g = \Phi(g_o) \in \text{Aut}(X, D)$ без фиксирани точки.

□

Твърдение 3.20. *Нека* $X = (\mathbb{B}/\Gamma)'$ *е гладка тороидална компактификация с тороидален компактифициращ дивизор* $D := X \setminus (\mathbb{B}/\Gamma)$ *и свиване* $\beta : X \to Y$ *на* $n \in \mathbb{N}$ *гладки неприводими рационални криви* (-1)*-криви. Тогава* $\text{Aut}(X, D)$ *е крайна група.*

Доказателство. От Твърдение 3.19 (iii), $\text{Aut}(X, D) = \text{Aut}(X, D, E(\beta))$. Всяко $g \in \text{Aut}(X, D)$ действа върху $D = \coprod_{j=1}^{k} D_j$ и индуцира пермутация на гладките елиптични неприводими компоненти $D_1, \ldots, D_k$ на D. Така получаваме представяне

$$\Sigma_1 : \text{Aut}(X, D) \longrightarrow \text{Sym}(D_1, \ldots, D_k) = \text{Sym}(k),$$

чийто образ е крайна група, в качеството си на подгрупа на $\mathrm{Sym}(k)$. Достатъчно е да докажем, че ядрото $\ker(\Sigma_1)$ е крайна група, за да получим, че $\mathrm{Aut}(X, D)$ е крайна група. Аналогично, $\mathrm{Aut}(X, D) = \mathrm{Aut}(X, D, E(\beta))$ действа върху изключителния дивизор $E(\beta) = \coprod_{i=1}^{n} L_i$ на $\beta : X \to Y$ възниква представяне

$$\Sigma_2 : \mathrm{Aut}(X, D) \longrightarrow \mathrm{Sym}(L_1, \dots, L_n) = \mathrm{Sym}(n).$$

Тъй като $\Sigma_2(\ker(\Sigma_1)) \leq \Sigma_2(\mathrm{Aut}(X, D)) \leq \mathrm{Sym}(n)$ е крайна група, достатъчно е да докажем, че сечението

$$G := \ker(\Sigma_2) \cap \ker(\Sigma_1)$$

е крайна група. За произволни $i \in \{1, \dots, n\}$, $j \in \{1, \dots, k\}$ и $g \in G$, крайното множество $L_i \cap D_j$ е инвариантно, съгласно $g(L_i \cap D_j) \subseteq g(L_i) \cap g(D_j) = L_i \cap D_j$. Следователно съществуват представяния

$$\Sigma_{i,j} : G \longrightarrow \mathrm{Sym}(L_i \cap D_j)$$

в симетричните групи на крайните множества $L_i \cap D_j$. Образите $\Sigma_{i,j}(G)$ са крайни групи, а ядрата $K_{i,j} := \ker(\Sigma_{i,j})$ фиксират всяка точка $p \in L_i \cap D_j$ и действат върху D_j. Известно е, че автоморфизмите $\mathrm{Aut}_p(D_j)$ на елиптична крива D_j, които фиксират точка $p \in D_j$, образуват циклична група от ред 2, 4 или 6. Следователно $K_{i,j} \leq \mathrm{Aut}_p(D)$, G, $\ker(\Sigma_1)$ и $\mathrm{Aut}(X, D)$ са крайни групи.

$\square$

Определение 3.21. *Гладка тороидална компактификация $X = (\mathbb{B}/\Gamma)'$ със свиване $\beta : X \to Y$ на $n \in \mathbb{N}$ гладки неприводими рационални (-1)-криви към минимална повърхнина Y е Галоа-непримитивна, ако съществува $g \in \mathrm{Aut}(X, D) \setminus \{\mathrm{Id}_X\}$ без фиксирани точки.*

Всяка Галоа-непримитивна $X = (\mathbb{B}/\Gamma)'$ е непримитивна, защото крайното покритие $\zeta : X \to \zeta(X) = X/\langle g \rangle$ на Галоа с група $\langle g \rangle$ е неразклонено и се ограничава до неразклонени покрития

$$\zeta : \mathbb{B}/\Gamma \to \zeta(\mathbb{B}/\Gamma) \quad \text{и} \quad \zeta : E(\beta) = \coprod_{i=1}^{n} L_i \to \zeta(E(\beta))$$

от същата степен.

Да отбележим, че от наличието на неразклонено покритие $\varphi : Y \to \varphi(Y)$ следва съвпадението $\widetilde{Y} = \widetilde{\varphi(Y)}$ на съответните универсални покрития. Фундаменталната група $\pi_1(\varphi(Y))$ на $\varphi(Y)$ действа върху $\widetilde{Y}$ чрез бихоломорфни автоморфизми без фиксирани точки и съдържа фундаменталната група $\pi_1(Y)$ на Y като подгрупа с индекс $[\pi_1(\varphi(Y)) : \pi_1(Y)] = d$.

Твърдение 3.22. *Нека $X = (\mathbb{B}/\Gamma)'$ е гладка тороидална компактификация с тороидален компактифициращ дивизор $D := X \setminus (\mathbb{B}/\Gamma)$, $\beta : X \to Y$ е свиване на $n \in \mathbb{N}$ гладки неприводими рационални (-1)-повърхнини към минимална повърхнина Y и $N(\pi_1(Y))$*

е нормализаторът на фундаменталната група $\pi_1(Y)$ *на* Y *в групата* $\mathrm{Aut}(\widetilde{Y})$ *от бихоломорфизми на универсалното покритие* $\widetilde{Y}$ *на* Y*. В такъв случай,* X *е Галоа-непримитивна тогава и само тогава, когато съществува естествен делител* $d > 1$ *на* $\mathrm{GCD}(\left|\beta(D)^{\mathrm{sing}}\right|, e(Y)) \in \mathbb{N}$ *и неразклонено покритие* $\varphi : Y \to \varphi(Y)$ *от степен* d*, за което* $\pi_1(\varphi(Y)) \cap N(\pi_1(Y)) \gneqq \pi_1(Y)$ *и* $\varphi : \beta(D) \to \varphi\beta(D)$ *е неразклонено покритие от степен* d*.*

Доказателство. Ако $X = (\mathbb{B}/\Gamma)'$ е Галоа-непримитивна, то съществува $g \in \mathrm{Aut}(X, D) \setminus \{\mathrm{Id}_X\}$ без фиксирани точки. Твърдение 3.19(iv) показва, че g индуцира бихоломорфизъм $g_o = \Phi^{-1}(g) \in \mathrm{Aut}(Y, \beta(D)) \setminus \{\mathrm{Id}_Y\}$ на Y без фиксирани точки. Елементът g_o на крайната група $\mathrm{Aut}(Y, \beta(D))$ е от краен ред $d \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, който е равен на степента неразклонените $\langle g_o \rangle$-покрития на Галоа $\zeta : Y \to Y/\langle g_o \rangle$ и $\zeta : \beta(D) \to \zeta\beta(D)$. Автоморфизмът g_o на Y се повдига до автоморфизъм $\sigma \in \mathrm{Aut}(\widetilde{Y})$ на универсалната покриваща $\widetilde{Y}$ на Y, който нормализира $\pi_1(Y)$ и принадлежи на

$$\begin{aligned}\pi_1(\zeta(Y)) = \pi_1(Y/\langle g_o \rangle) &= \pi_1\left((\widetilde{Y}/\pi_1(Y))/\langle \sigma\pi_1(Y) \rangle\right) \\ &= \pi_1\left(\widetilde{Y}/\langle \sigma, \pi_1(Y) \rangle\right) = \langle \sigma, \pi_1(Y) \rangle.\end{aligned}$$

Обратно, да предположим че $\varphi : Y \to \varphi(Y)$ е неразклонено покритие от степе $d > 1$, което се ограничава до неразклонено покритие $\varphi : \beta(D) \to \varphi\beta(D)$ от степен d и съществува $\sigma \in [\pi_1(\varphi(Y)) \cap N(\pi_1(Y))] \setminus \pi_1(Y)$. Тогава $g_o := \sigma\pi_1(Y) \in \mathrm{Aut}(Y) = N(\pi_1(Y))/\pi_1(Y)$ е нетъждествен бихоломорфизъм $g_o : Y \to Y$. Понеже $\langle \sigma, \pi_1(Y) \rangle$ е подгрупа на $\pi_1(\varphi(Y))$, неразклоненото покритие $\varphi : Y \to \varphi(Y)$ се пропусква през $\langle g_o \rangle$-покритието на Галоа $\zeta : Y \to Y/\langle g_o \rangle$ и някакво покритие $\varphi_o : Y/\langle g_o \rangle \to \varphi(Y)$, затварящо комутативната диаграма

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\zeta"] \arrow[dr, "\varphi"'] & Y/\langle g_o \rangle \arrow[d, "\varphi_o"] \\ & \varphi(Y) \end{tikzcd} \quad . \tag{3.6}$$

Крайните покрития $\zeta : Y \to Y/\langle g_o \rangle$ и $\varphi_o : Y/\langle g_o \rangle \to \varphi(Y)$ са неразклонени, защото композицията им $\varphi = \varphi_o\zeta : Y \to \varphi(Y)$ е неразклонена Затова g_o няма фиксирани точки върху Y. Ако $\beta(D) \subset Y$ не е $\langle g_o \rangle$-инвариантно, то съществува орбита $\mathrm{Orb}_{\langle g_o \rangle}(y_o) \subset Y$ на точка $y_o \in \beta(D)$, която пресича както $\beta(D)$, така и $Y \setminus \beta(D)$. Следователно $\zeta : \beta(D) \to \zeta\beta(D)$ има слой $\zeta^{-1}(\zeta(y_o))$ с мощност $\left|\zeta^{-1}(\zeta(y_o))\right| < \deg(\zeta) = |\langle g_o \rangle| = \mathrm{ord}(g_o)$ и $\zeta : \beta(D) \to \zeta\beta(D)$ е разклонено. В резултат, композицията $\varphi = \varphi_o\zeta : \beta(D) \to \varphi\beta(D)$ е разклонена. Противоречието показва $\langle g_o \rangle$-инвариантността на $\beta(D)$. Съгласно Твърдение 3.19 (iv), автоморфизмът $g_o \in \mathrm{Aut}(Y, \beta(D)) \setminus \{\mathrm{Id}_Y\}$ без фиксирани точки съответства на автоморфизъм $g = \Phi(g_o) \in \mathrm{Aut}(X, D) \setminus \{\mathrm{Id}_X\}$ без фиксирани точки и X е Галоа-непримитивна.

□

Определение 3.23. *Неразклонено покритие $\varphi : Y \to \varphi(Y)$ чрез гладка проективна повърхнина Y има пропускване на Галоа, ако съществуват $g_o \in \mathrm{Aut}(Y) \setminus \{\mathrm{Id}_Y\}$ и покритие $\varphi_o : Y/\langle g_o \rangle \to \varphi(Y)$, така че $\varphi = \varphi_o \zeta$ се пропусква през $\langle g_o \rangle$-покритието на Галоа $\zeta : Y \to Y/\langle g_o \rangle$ и покритие φ_o по протежение на комутативната диаграма (3.6).*

Сега Твърдение 3.22 може да се преформулира по следния начин:

Следствие 3.24. *Нека $X = (\mathbb{B}/\Gamma)'$ непримитивна гладка тороидална компактификация с тороидален компактифициращ дивизор $D := X \setminus (\mathbb{B}/\Gamma)$, $\beta : X \to Y$ е свиване на $n \in \mathbb{N}$ непресичащи се, гладки неприводими рационални (-1)-криви към минимална повърхнина Y и $\varphi : Y \to \varphi(Y)$ е неразклонено покритие от степен d, което се ограничава до неразклонено покритие $\varphi : \beta(D) \to \varphi\beta(D)$ от степен d. В такъв случай, X е Галоа-непримитивно, тогава и само тогава, когато φ допуска пропускване на Галоа.*

Следствие 3.25. *(i) Нека $X = (\mathbb{B}/\Gamma)'$ е гладка тороидална компактификация с абелев минимален модел Y. Тогава X не е наситена и X е непримитивна тогава и само тогава, когато е Галоа-непримитивна.*

(ii) Ако $X = (\mathbb{B}/\Gamma)'$ е гладка тороидална компактификация с би-елиптичен минимален модел Y то X не е наситена.

Доказателство. (i) Всяка абелева повърхнина има Y нетривиална фундаментална група

$$\pi_1(Y) \simeq (\mathbb{Z}^4, +).$$

Съгласно Следствие 3.13, това е достатъчно за да заключим, че гладка тороидална компактификация $X = (\mathbb{B}/\Gamma)'$ с абелев минимален модел Y не е наситена.

По Теорема 1.3 от [19] на Ди Чербо и Стоувър, ако гладка тороидална компактификация $X = (\mathbb{B}/\Gamma)'$ има абелев минимален модел Y, то съществува свиване $\beta : X \to Y$ на $n \in \mathbb{N}$ непресичащи се, гладки рационални (-1)-криви върху X към Y. Такава X е непримитивна тогава и само тогава, когато съществува неразклонено покритие $\varphi : Y \to \varphi(Y)$ от степен $d > 1$, което се ограничава до неразклонено покритие $\varphi : \beta(D) \to \varphi\beta(D)$ от степен d. Понеже Y и $\varphi(Y)$ имат една и съща универсална покриваща $\widetilde{\varphi(Y)} = \widetilde{Y} = \mathbb{C}^2$ и една и съща размерност на Кодаира $\kappa(\varphi(Y)) = \kappa(Y) = 0$, минималната гладка неприводима проективна повърхнина $\varphi(Y)$ е абелева или биелиптична.

Да допуснем, че образът $\varphi(Y)$ на φ е абелева повърхнина. Тогава нейната фундаментална група $\pi_1(\varphi(Y)) \simeq (\mathbb{Z}^4, +)$ е абелева и $\pi_1(Y) \simeq (\mathbb{Z}^4, +)$ е нормална подгрупа на $\pi_1(\varphi(Y))$. В резултат, $\varphi : Y \to \varphi(Y)$ е $\pi_1(\varphi(Y))/\pi_1(Y)$-покритие на Галоа и Y е Галоа-непримитивна.

Да предположим, че образът $\varphi(Y)$ е би-елиптична повърхнина. Съгласно класификацията [2] на Багнера и де Франчис на комплексните би-елиптични повърхнини, съществуват абелева повърхнина A и циклична подгрупа $\langle g \rangle \leq \mathrm{Aut}(A)$ от ред $d \in \{2, 3, 4, 6\}$ с нетранслационен пораждащ $g \in \mathrm{Aut}(A)$, така че $\varphi(Y) = A/\langle g \rangle$. Нека $\mathrm{AffLin}(\mathbb{C}) := \mathcal{T}(\mathbb{C}^2) \rtimes \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ е групата от афинно линейните трансформации на

$\mathbb{C}^2 = \widetilde{Y} = \widetilde{\varphi(Y)} = \widetilde{A}$ и

$$\mathcal{L} : \mathrm{AffLin}(\mathbb{C}^2) \longrightarrow \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$$

е груповият хомоморфизъм, съпоставящ на произволен елемент $\sigma \in \mathrm{AffLin}(\mathbb{C}^2)$ неговата линейна част $\mathcal{L}(\sigma) \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$. Тогава фундаменталната група на A е максималната транслационна подгрупа

$$\pi_1(A) = \pi_1(\varphi(Y)) \cap \ker(\mathcal{L})$$

на $\pi_1(\varphi(Y))$. Транслационната подгрупа $\pi_1(Y) \leq \pi_1(\varphi(Y)) \cap \ker(\mathcal{L})$ на $\pi_1(\varphi(Y))$ се съдържа в $\pi_1(A)$ и неразклоненото покритие $\varphi : Y \to \varphi(Y)$ се пропуска през неразклонени покрития $\varphi_1 : Y \to A$ и $\varphi_2 : A \to \varphi(Y)$, затварящи комутативната диаграма

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[dr, "\varphi"'] & A \arrow[d, "\varphi_2"] \\ & \varphi(Y) \end{tikzcd} .$$

От това, че $\varphi_1 : Y \to A$ е $\pi_1(A)/\pi_1(Y)$-покритие на Галоа следва, че $\varphi = \varphi_2\varphi_1$ е пропускване на Галоа на φ за $\pi_1(Y) \lneqq \pi_1(A)$. В случая на $\pi_1(Y) = \pi_1(A)$, съществува изоморфизъм $Y \simeq \mathbb{C}^2/\pi_1(Y) \simeq \mathbb{C}^2/\pi_1(A) = A$ и $\varphi : Y \simeq A \to \varphi(Y) = A/\langle g \rangle$ е $\langle g \rangle$-покритие на Галоа. В частност, X е Галоа непримитивна. По този начин, гладка тороидална компактификация $X = (\mathbb{B}/\Gamma)'$ с абелев минимален модел Y е непримитивна тогава и само тогава, когато е Галоа-непримитивна.

(ii) Фундаменталната група $\pi_1(Y)$ на би-елиптична повърхнина Y участва в къса точна редица

$$1 \longrightarrow \pi_1(Y) \cap \ker(\mathcal{L}) \longrightarrow \pi_1(Y) \longrightarrow \langle g \rangle \longrightarrow 1$$

с нетранслационна циклична подгрупа $\langle g \rangle$ на $\mathrm{Aut}\left(\mathbb{C}^2/\pi_1(Y) \cap \ker(\mathcal{L})\right) = \mathrm{Aut}(A)$ от ред 2, 3, 4 или 6. В частност, Y не е едносвързана и гладка тороидална компактификация $X = (\mathbb{B}/\Gamma)'$ с би-елиптичен минимален модел Y не е наситена.

$\square$

Глава 4

Долни граници върху броя на параболичните точки на тороидална компактификация с линейчат минимален модел

Нека $X = (\mathbb{B}/\Gamma)'$ е гладка тороидална компактификация на фактор $\mathbb{B}/\Gamma$ на комплексното двумерно кълбо $\mathbb{B}$ по решетка $\Gamma < U(1,2)$, а $\beta : X \to Y$ е свиване на (-1)-криви към минимална линейчата повърхнина $r : Y \to B$ с елиптична база B. Настоящата глава изразява логаритмичното равенство на Богомолов-Мияока-Яо за (X, D) чрез индексите на пресичане $L_i.D_j$ на неприводимите компоненти L_i на изключителния дивизор на β и гладките елиптични неприводими компоненти D_j на тороидалния компактифициращ дивизор $D := X \setminus (\mathbb{B}/\Gamma)$. Това ни позволява да изведем съществуването на ненапълно геодезично вложена пунктирана сфера $L_i \setminus D \subset \mathbb{B}/\Gamma$. Това е учудващо в сравнение с Теорема 1.3 от статията [19] на Ди Чербо и Стоувър, която установява, че за гладка тороидална компактификация $X = (\mathbb{B}/\Gamma)'$ с абелев или биелиптичен минимален модел Y, всички пунктирани сфери $L_i \setminus D \subset \mathbb{B}/\Gamma$ са напълно геодезично вложени. В настоящата глава са намерени долни граници върху броя k на параболичните точки на $\mathbb{B}/\Gamma$, в зависимост от степените на крайните неразклонени покрития $r|_{\beta(D_j)} : \beta(D_j) \to B$. За сравнително малки k са изведени долни граници $\mu_k \geq 2$ върху броя на ненапълно геодезичните $L_i \setminus D \subset \mathbb{B}/\Gamma$.

Съгласно Твърдение 3.16, ако $\beta : X = (\mathbb{B}/\Gamma)' \to Y$ е редица от свивания на (-1)-криви върху гладка тороидална компактификация $X = (\mathbb{B}/\Gamma)'$ с размерност на Кодаира $\kappa(X) = -\infty$ към минимална повърхнина Y, то $r : Y \to B$ е линайчата повърхнина с база B от род $g(B) = 0$ или $g(B) = 1$. Следващата лема описва образа $\beta(D) = \sum\limits_{j=1}^{k} \beta(D_j)$ на тороидалния компактифициращ дивизор $D := X \setminus (\mathbb{B}/\Gamma) = \sum\limits_{j=1}^{k} D_j$ под действие на β, в случая на линейчат минимален модел $r : Y \to B$ с елиптична база B.

Лема 4.1. *Нека $\beta : X = (\mathbb{B}/\Gamma)' \to Y$ е поредица от свивания на (-1)-криви върху гладка тороидална компактификация към минимална линейчата повърхнина $\pi : Y \to B$ с елиптична база B, а $D := X \setminus (\mathbb{B}/\Gamma) = \sum\limits_{j=1}^{k} D_j$ е тороидалният компактифициращ дивизор на $\mathbb{B}/\Gamma$. Тогава $C_j := \beta(D_j)$ са гладки елиптични криви и $r : Y \to B$ се ограничава до крайни неразклонени покрития $r|_{C_j} : C_j \to B$ за всички $1 \leq j \leq k$.*

Доказателство. Неприводимите компоненти на всеки слой на $r\beta : X = (\mathbb{B}/\Gamma)' \to B$ са рационални криви и не съдържат елиптична компонента D_j на $D := X \setminus (\mathbb{B}/\Gamma) = \sum\limits_{j=1}^{k} D_j$. Следователно $r\beta|_{D_j} : D_j \to B$ са сюрективни, а оттам и покрития от някаква степен $d_j \in \mathbb{N}$. Ако допуснем, че $r\beta|_{D_j} : D_j \to B$ има точки на разклонение $b_1, \ldots, b_m \in B$, то $|(r\beta)^{-1}(b_i)| < d_j$ за всяко $i \in \{1, \ldots, m\}$. В резултат, формулата на Риман-Хурвиц

$$0 = 2 - 2g(D_j) = e(B \setminus \{b_1, \ldots, b_m\})d_j + \sum_{i=1}^{m} \left|(f\beta)^{-1}(b_i)\right| = -md_j + \sum_{i=1}^{m} \left|(f\beta)^{-1}(b_i)\right| < 0$$

води до противоречие. Следователно $r\beta|_{D_j} : D_j \to B$ са крайни неразклонени покрития от степен $d_j \in \mathbb{N}$. По Твърдение 17.3.3 (v) от [22] на Гротендик, ограниченията $\beta|_{D_j} : D_j \to \beta(D_j)$ са неразклонени покрития. Тези покрития са от степен едно, а оттам и изоморфизми. Затова $r|_{\beta(D_j)} : \beta(D_j) \to B$ са крайни неразклонени покрития от степен $d_j \in \mathbb{N}$.

$\square$

Да забележим, че ако $L_i.D_j \geq 2$, то кривата $C_j := \beta(D_j)$ е особена. Затова от Лема 4.1 следва, че индексите на пресичане $L_i.D_j \in \{0, 1\}$.

Да напомним, че групата $\mathrm{Num}(Y)$ от класовете от числова еквивалентност на дивизорите върху линейчата повърхнина $r : Y \to B$ се поражда от слой F на r и сечение B_o на r с минимален индекс на самопресичане $B_o^2 = \delta$. Известно е, че каноничният дивизор K_Y на Y е числово еквивалентен на $K_Y \sim -2B_o + \delta F$ и $B_o.F = 1$, $F^2 = 0$. По теорема 1 на Нагата от [40], ндексът на самопресичане $B_o^2 = \delta \leq g(B) = 1$ на B_o не надминава рода $g(B) = 1$ на базата B. Ще означаваме с $\Delta_1 \sim \Delta_2$ числената еквивалентност на дивизорите Δ_1, Δ_2 върху повърхнина Y_δ.

Лема 4.2. *Нека $r : Y \to B$ е линейчата повърхнина с елиптична база B, B_o е сечение на r с минимален индекс на самопресичане $B_o^2 = \delta$, а $C_i \subset Y$, $1 \leq i \leq 2$ са гладки елиптични криви, върху които r се ограничава до неразклонено покритие от степен $d_i := \deg[r|_{C_i} : C_i \to B] \in \mathbb{N}$.*

(i) Ако $B_o^2 = \delta \in \{0, 1\}$, то $C_1 \sim B_o + a_1 F$ е сечение на r с $a_1 \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$ или

$$C_1 \sim -\frac{d_1}{2} K_Y \sim d_1 B_o - \frac{d_1 \delta}{2} F$$

е числово пропорционален на K_Y.

(ii) Ако $B_o^2 = \delta < 0$, то $C_1 \sim B_o + a_1 F$ е сечение на r с $a_1 \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$.

(iii) $d_1 d_2 (C_1^2 + C_2^2) = 2C_1.C_2$.

Доказателство. Формулата за присъединение за $C_1 \sim b_1 B_o + a_1 F$ с $b_1, a_1 \in \mathbb{Z}$ дава

$$0 = 2g(C_1) - 2 = (K_{Y_\delta} + C_1)C_1 =$$

$$= (b_1 - 2)b_1\delta + (b_1 - 2)a_1 + (a_1 + \delta)b_1 = (2a_1 + \delta b_1)(b_1 - 1).$$

Ако $b_1 = 1$, то $C_1 \sim B_o + a_1 F$ е сечение на r с $C_1^2 = \delta + 2a_1 \geq \delta = B_o^2$, откъдето $a_1 \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$. В случая $b_1 \neq 1$ следва $a_1 = -\frac{b_1\delta}{2}$ и получаваме

$$C_1 \sim b_1 B_o - \frac{b_1\delta}{2}F \sim -\frac{b_1}{2}(-2B_o + \delta F) = -\frac{b_1}{2}K_{Y_\delta}.$$

При това, $d_1 := \deg\,[f|_{C_1} : C_1 \to B] = C_1.F = b_1$ и това доказва (i).

Да допуснем, че $\delta < 0$ и $C_1 \sim -\frac{d_1}{2}K_{Y_\delta}$ за някое $d_1 > 1$. Тогава $C_1 \neq B_o$ и

$$0 \leq C_1.B_o = d_1\delta - \frac{d_1\delta}{2} = \frac{d_1\delta}{2} < 0,$$

което е противоречие, доказващо (ii).

Нека $C_i \sim B_o + a_i F$ за $1 \leq i \leq 2$. Тогава $d_i = C_i.F = 1$ и

$$d_1 d_2(C_1^2 + C_2^2) = C_1^2 + C_2^2 = (\delta + 2a_1) + (\delta + 2a_2) = 2(\delta + a_1 + a_2) = 2C_1.C_2.$$

За $C_1 \sim -\frac{d_1}{2}K_{Y_\delta}$ и $C_2 \sim B_o + a_2 F$ имаме $C_1^2 = 0$ и $d_2 = C_2.F = 1$, откъдето

$$d_1 d_2(C_1^2 + C_2^2) = d_1 C_2^2 = d_1(\delta + 2a_2) = d_1(2B_o - \delta F).(B_o + a_2 F) = (2C_1).C_2 = 2C_1.C_2.$$

Накрая, ако $C_i \sim -\frac{d_i}{2}K_{Y_\delta}$ за $1 \leq i \leq 2$, то $C_1^2 = C_2^2 = C_1.C_2 = 0$ и

$$d_1 d_2(C_1^2 + C_2^2) = 0 = 2C_1.C_2.$$

□

Теорема 1. *Нека $\beta : X = (\mathbb{B}/\Gamma)' \to Y$ е свиване на (-1)-криви L_i, $1 \leq i \leq s$ върху гладка тороидална компактификация $X = (\mathbb{B}/\Gamma)'$ към минимална линейчата повърхнина $r : Y \to B$ с елиптична база B и $D := X \setminus (\mathbb{B}/\Gamma) = \sum_{j=1}^{k} D_j$ е тороидалният компактифициращ дивизор на $\mathbb{B}/\Gamma$. Тогава каноничният дивизор на X е*

$$K_X = \beta^{-1}(K_Y) + \sum_{i=1}^{s} L_i = \beta^*(K_Y) + \sum_{i=1}^{s} L_i, \tag{4.1}$$

а логаритмичното равенство на Богомолов-Мияока-Яо гласи, че

$$\sum_{i=1}^{s}(L_i.D - 4) = \sum_{j=1}^{k} C_j^2. \tag{4.2}$$

Доказателство. С индукция по $s \in \mathbb{N}$, Твърдение V.3.3 от книгата на Хартсхорн [23] дава, че

$$K_X = \beta^{-1}(K_{Y_\delta}) + \sum_{i=1}^{s} L_i.$$

Нека $p_i := \beta(L_i)$. За произволен дивизор $G \subset Y$ и точка $p_i \in G$ полагаме $\delta(p_i \in G) := 1$. Ако $p_i \notin G$, то $\delta(p_i \in G) := 0$. С индукция по s, Твърдение V.3.6 от [23] дава

$$\beta^{-1}(K_Y) = \beta^*(K_Y) + \sum_{i=1}^{s} \delta(p_i \in K_Y) L_i.$$

Съгласно Теорема III.1.3.1 от книгата [44] на Шафаревич, носителят на K_Y може да се отдели от крайното множество $\{p_i \,|\, 1 \leq i \leq s\}$. Следователно $\delta(p_i \in K_Y) = 0$, $\forall 1 \leq i \leq s$ и $\beta^{-1}(K_Y) = \beta^*(K_Y)$ дава (4.1).

Логаритмичното равенство на Богомолов-Мияока-Яо е

$$\overline{c_1}^2(X, D) = 3\overline{c_2}(X, D)$$

за логаритмичните числа на Чърн $\overline{c_1}^2(X, D) := (K_X + D)^2 = K_X^2 + 2K_X.D + D^2$, $\overline{c_2}(X, D) := e(X \setminus D) = c_2(X) = c_2(Y_\delta) + s = s$, понеже D_j са непресичащи се гладки елиптични криви. Формулата за присъединение за D_j гласи, че

$$0 = 2g(D_j) - 2 = (K_X + D_j).D_j = K_X.D_j + D_j^2.$$

Благодарение на $D_{j_1}.D_{j_2} = 0$, $\forall 1 \leq j_1 < j_2 \leq k$ имаме

$$D^2 = \sum_{j=1}^{k} D_j^2 = \sum_{j=1}^{k} (-K_X.D_j) = -K_X.\left(\sum_{j=1}^{k} D_j\right) = -K_X.D,$$

откъдето

$$\overline{c_1}^2(X, D) = K_X^2 + K_X.D.$$

С индукция по s, Твърдение V.3.2 (a) от [23] дава $\beta^{-1}(K_Y)^2 = K_Y^2 = 0$. Аналогично, с индукция по s, от Твърдение V.3.2 (b), [23] следва, че $\beta^{-1}(K_Y).L_i = 0$, $\forall 1 \leq i \leq s$. Комбинирайки с $L_{i_1}.L_{i_2} = 0$, $\forall 1 \leq i_1 < i_2 \leq s$ и $L_i^2 = -1$, $\forall 1 \leq i \leq s$, извеждаме, че

$$K_X^2 = \left[\beta^{-1}(K_Y) + \sum_{i=1}^{s} L_i\right]^2 = \beta^{-1}(K_Y)^2 + 2\sum_{i=1}^{s} \beta^{-1}(K_Y).L_i + \left(\sum_{i=1}^{s} L_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{s} L_i^2 = -s.$$

По този начин, $\overline{c_1}^2(X, D) = 3\overline{c_2}(X, D)$ се свежда към $K_X.D = 4s$. С индукция по s, приложена към Твърдение V.3.6 [23] получаваме

$$\beta^{-1}(C_j) = \beta^*(C_j) + \sum_{i=1}^{s} \delta(p_i \in C_j) L_i, \quad \forall 1 \leq j \leq k.$$

Още повече, $\beta^{-1}(K_Y).\beta^{-1}(C_j) = K_Y.C_j$ по Твърдение V.3.2 (a) от [23]. Вземайки предвид $D_j = \beta^*(C_j)$, стигаме до извода, че

$$\beta^{-1}(K_Y).D_j = \beta^{-1}(K_Y).\left[\beta^{-1}(C_j) - \sum_{i=1}^{s}\delta(p_i \in C_j)L_i\right] = K_Y.C_j,$$

използвайки $\beta^{-1}(K_Y).L_i = 0$ за $\forall 1 \leq i \leq s$. Комбинирайки с формулата за присъединение

$$0 = 2g(C_j) - 2 = (K_Y + C_j).C_j$$

за C_j, извеждаме, че $\beta^{-1}(K_Y).D_j = -C_j^2$. По този начин, $\overline{c_1}^2(X,D) = 3\overline{c_2}(X,D)$ се свежда към

$$4s = K_X.D = \left[\beta^{-1}(K_Y) + \sum_{i=1}^{s} L_i\right].\left[\sum_{j=1}^{k} D_j\right] = -\sum_{j=1}^{k} C_j^2 + \sum_{i=1}^{s} L_i.D,$$

което е еквивалентно на (4.2).

□

Следствие 4.3. *Нека $\beta : X = (\mathbb{B}/\Gamma)' \to Y$ е свиване на (-1)-криви L_i, $1 \leq i \leq s$ върху гладка тороидална компактификация $X = (\mathbb{B}/\Gamma)'$ към минимална линейчата повърхнина $r : Y \to B$ с елиптична база B, $D := X \setminus (\mathbb{B}/\Gamma) = \sum_{j=1}^{k} D_j$ е тороидалният компактифициращ дивизор на $\mathbb{B}/\Gamma$ и $B_o \subset Y$ е сечение на $r : Y \to B$ с минимален индекс на пресичане $B_o^2 = \delta$.*

(i) Ако $\delta < 0$ или $\delta \in \{0,1\}$ и всички $C_j := \beta(D_j)$ са сечения на r, то

$$(k-1)\left[\sum_{i=1}^{s}(L_i.D - 4)\right] = \sum_{i=1}^{s} L_i.D(L_i.D - 1). \tag{4.3}$$

(ii) Ако $\delta \in \{0,1\}$ и съществува $C_j := \beta(D_j)$ с $d_j := \deg[r_{C_j} : C_j \to B] > 1$, то съществуват поне три сечения C_m на f и

$$(k-2)\left[\sum_{i=1}^{s}(L_i.D - 4)\right] \geq \sum_{i=1}^{s}(L_i.D - 1)(L_i.D - 2). \tag{4.4}$$

(iii) Поне една пунктирана сфера $L_i \setminus D \subset \mathbb{B}/\Gamma$ не е напълно геодезично вложена в $\mathbb{B}/\Gamma$.

Доказателство. Съществува цяло число $0 \leq k_o \leq k$, така че $C_j \sim B_o + a_j F$ за $1 \leq j \leq k_o$ са сечения на r и $C_j \sim -\frac{d_j}{2}K_Y$ с $k_o + 1 \leq j \leq k$ имат $d_j > 1$. За произволни $1 \leq j_1 < j_2 \leq k_o$, Lemma 4.2 (iii) гласи, че $C_{j_1}^2 + C_{j_2}^2 = 2C_{j_1}C_{j_2}$, откъдето

$$(k_o - 1)\left(\sum_{j=1}^{k_o} C_j^2\right) = \sum_{1 \leq j_1 < j_2 \leq k_o}(C_{j_1}^2 + C_{j_2}^2) = 2\sum_{1 \leq j_1 < j_2 \leq k_o} C_{j_1}.C_{j_2}. \tag{4.5}$$

По Лема 4.1, всички C_j са гладки, откъдето $L_i.D_j \in \{0,1\}$. При това, $L_i.D_j = 1$ тогава и само тогава, когато $\beta(L_i) = p_i \in C_j$, така че

$$l_i := L_i.D = \sum_{j=1}^{k} L_i.D_j = \sum_{j=1}^{k} \delta(p_i \in C_j)$$

е броят на C_j, съдържащи p_i, а

$$l_i' := L_i.\left(\sum_{j=1}^{k_o} D_j\right) = \sum_{j=1}^{k_o} \delta(p_i \in C_j)$$

е броят на сеченията C_j на r, съдържащи p_i. Съгласно $C_{j_1} \cap C_{j_2} \subseteq C^{\mathrm{sing}} = \beta(L)$, произволна точка $p_i \in \beta(L)$ е броена $\frac{l_i'(l_i'-1)}{2}$ пъти в сумата

$$\Sigma := \sum_{1 \le j_1 < j_2 \le k_o} C_{j_1}.C_{j_2}$$

и

$$\Sigma = \sum_{i=1}^{s} \frac{l_i'(l_i'-1)}{2}.$$

Комбинирайки с (4.2) и (4.5), стигаме до извода, че

$$(k_o - 1)\left[\sum_{i=1}^{s} (l_i - 4)\right] = \sum_{i=1}^{s} l_i'(l_i' - 1), \tag{4.6}$$

съгласно $C_j^2 = 0$ за всички $k_o + 1 \le j \le k$. Ако $k_o = k$, то $l_i' = l_i$ и е в сила (4.3). Случаят $k_o < k$ е възможен само за $\delta \in \{0,1\}$ по Лема 4.2 (ii). За произволно $1 \le i \le s$ да забележим, че p_i принадлежи на най-много една елиптична крива C_j с $k_o + 1 \le j \le k$, защото

$$C_{j_1}.C_{j_2} = \left(-\frac{d_{j_1}}{2} K_{Y_\delta}\right).\left(-\frac{d_{j_2}}{2} K_{Y_\delta}\right) = 0$$

за всички $k_o + 1 \le j_1 < j_2 \le k$. Следователно $l_i - l_i' \in \{0,1\}$ и $l_i' \ge l_i - 1$ за всички $1 \le i \le s$. Комбинирайки с $k_o - 1 \le (k-1) - 1 = k - 2$, извеждаме (4.4) от (4.6). Съгласно Твърдение 2.4 от статията [19] на Ди Чербо и Стоувър, $l_i \ge 4$ и $l_i = 4$ тогава и само тогава, когато $L_i \setminus D \subset \mathbb{B}/\Gamma$ е напълно геодезично вложена. В частност, $k_o \ge l_i' \ge l_i - 1 \ge 3$. Предположението $l_i = 4$ за всички $1 \le i \le s$ редуцира (4.3) към $0 = 12s \in \mathbb{N}$ и (4.4) към $0 \ge 6s \in \mathbb{N}$. Противоречието доказва съществуването на поне една ненапълно геодезична пунктирана сфера $L_i \setminus D \subset \mathbb{B}/\Gamma$.

$\square$

Следствие 4.4. *Нека $\beta : X = (\mathbb{B}/\Gamma)' \to Y$ е свиване на (-1)-криви L_i, $1 \le i \le s$ върху гладка тороидална компактификация $X = (\mathbb{B}/\Gamma)'$ към минимална линейчата повърхнина $r : Y \to B$ с елиптична база B, $D := X \setminus (\mathbb{B}/\Gamma) = \sum_{j=1}^{k} D_j$ е тороидалният* *компактифициращ дивизор на* $\mathbb{B}/\Gamma$ *и* $B_o \subset Y$ *е сечение на* $r : Y \to B$ *с минимален индекс на пресичане* $B_o^2 = \delta$. *Да предположим, че* $\delta < 0$ *или* $\delta \in \{0,1\}$ *и всички* $C_j := \beta(D_j) \subset Y_\delta$, $1 \leq j \leq k$ *са сечения на* r. *Тогава:*

(i) $\mathbb{B}/\Gamma$ *има* $k \geq 15$ *параболични точки и Ойлеровата характеристика на* $\mathbb{B}/\Gamma$ *е* $e(\mathbb{B}/\Gamma) = s \geq 14$;

(ii) ако $\mathbb{B}/\Gamma$ *има* $15 \leq k \leq 62$ *параболични точки, то* $\mathbb{B}/\Gamma$ *има поне* $\mu_k \geq 2$ *ненапълно геодезични пунктирани сфери* $L_i \setminus D \subset \mathbb{B}/\Gamma$ *за стойностите на* μ_k, *дадени в Таблица 4.2.*

Доказателство. Да положим

$$\varphi(x) := x(x-1) - (k-1)(x-4) = x^2 - kx + 4(k-1)$$

и да забележим, че (4.3) приема вида $\sum_{i=1}^{s} \varphi(l_i) = 0$ за $l_i := L_i.D$.

(i) Графиката на $\varphi(x)$ е парабола с връх $\frac{k}{2}$. Ако $\frac{k}{2} \leq 4$, то $\varphi(l_i) \geq \varphi(4) = 12$ за $1 \leq i \leq s$ и

$$0 = \sum_{i=1}^{s} \varphi(l_i) \geq \varphi(4)s = 12s \in \mathbb{N}$$

е противоречие. Затова $4 < \frac{k}{2}$ и

$$\varphi(l_i) \geq \varphi\left(\frac{k}{2}\right) = \frac{-(k^2 - 16k + 16)}{4}$$

за всички $1 \leq i \leq s$. В резултат,

$$0 = \sum_{i=1}^{s} \varphi(l_i) \geq \varphi\left(\frac{k}{2}\right) s = \frac{-(k^2 - 16k + 16)s}{4},$$

откъдето $k^2 - 16k + 16 \geq 0$, $(k-8)^2 \geq 48 > 6^2$ и $k \geq 15$. Ако $\mathrm{Pic}(X)$ е групата на Пикар на $X = (\mathbb{B}/\Gamma)'$, то $k < \mathrm{rkPic}(X)$ по Теорема 3.18 от [15]. В нашия случай,

$$\mathrm{rkPic}(X) = s + \mathrm{rkPic}(Y) = s + 2,$$

така че $k \leq s + 1$. В частност, Ойлеровата характеристика на $\mathbb{B}/\Gamma$ е

$$e(\mathbb{B}/\Gamma) = e(X) = e(Y) + s = s \geq k - 1 \geq 14$$

поради $e(D_j) = 0$ и $e(Y) = 0$.

(ii) Предполагаме, че най-много t пунктирани сфери $L_i \setminus D \subset \mathbb{B}/\Gamma$ не са напълно геодезични и извеждаме долна граница $\kappa_t \geq 15$ върху k. Съществуват поне $s - t$ напълно геодезични $L_i \setminus D \subset \mathbb{B}/\Gamma$, $t + 1 \leq i \leq s$, за които $l_i := L_i.D = 4$. Използвайки (4.3) и $s \geq k - 1$, оценяваме

$$0 = \sum_{i=1}^{t} \varphi(l_i) + \varphi(4)(s-t) \geq \varphi\left(\frac{k}{2}\right) t + 12(k-1-t)$$

Таблица 4.1: Долни граници κ_t върху броя на параболичните точки на $\mathbb{B}/\Gamma$, ако всички C_j са сечения на $r : Y_\delta \to B$ и най-много t пунктирани сфери $L_i \setminus D \subset \mathbb{B}/\Gamma$ не са напълно геодезично вложени

t	κ_t	t	κ_t	t	κ_t	t	κ_t	t	κ_t	t	κ_t
1	63	3	30	5	23	7	20	9	18	$12-13$	16
2	38	4	25	6	21	8	19	$10-11$	17	≥ 14	15

и извеждаме, че

$$(k^2 - 16k + 16) - 48\left(\frac{k}{t} - \frac{1}{t} - 1\right) = \left[k - 8\left(1 + \frac{3}{t}\right)\right]^2 - \frac{16}{t^2}(21t + 36) \geq 0. \qquad (4.7)$$

Ако $15 \geq 8\left(1 + \frac{3}{t}\right)$, то $k \geq 15 \geq 8\left(1 + \frac{3}{t}\right)$ и (4.7) дава

$$k \geq \kappa'_t := \lfloor 8\left(1 + \frac{3}{t}\right) + \frac{4}{t}\sqrt{21t + 36}\rfloor \in \mathbb{N}.$$

Забелязваме, че $\kappa'_t \leq 15$ и $\kappa_t = 15$ тогава и само тогава, когато $t \geq 14$. Определението на κ'_t ни дава възможност да пресметнем стойностите на $\kappa_t = \kappa'_t$ за $4 \leq t \leq 13$ от Таблица 4.1.

За $1 \leq t \leq 3$, от предположението $k < 8\left(1 + \frac{3}{t}\right)$ върху (4.7) следва, че

$$8\left(1 + \frac{3}{t}\right) - k \geq \frac{4}{t}\sqrt{21t + 36},$$

откъдето

$$15 \leq k \leq 8 + \frac{24}{t} - \frac{4}{t}\sqrt{21t + 36} \quad \text{и} \quad 4\sqrt{57} \leq 4\sqrt{21t + 36} \leq 24 - 7t \leq 17,$$

което е противоречие. Следователно, $k \geq 8\left(1 + \frac{3}{t}\right)$ и

$$k \geq \kappa_t := \lfloor 8\left(1 + \frac{3}{t}\right) + \frac{4}{t}\sqrt{21t + 36}\rfloor \geq 15, \quad \text{за} \quad 1 \leq t \leq 3.$$

Таблица 4.2 е изведена от Таблица 4.1 чрез допускане на противното.

□

Следствие 4.5. *Нека $\beta : X = (\mathbb{B}/\Gamma)' \to Y$ е свиване на (-1)-криви L_i, $1 \leq i \leq s$ върху гладка тороидална компактификация $X = (\mathbb{B}/\Gamma)'$ към минимална линейчата повърхнина $r : Y \to B$ с елиптична база B, $D := X \setminus (\mathbb{B}/\Gamma) = \sum_{j=1}^{k} D_j$ е тороидалният компактифициращ дивизор на $\mathbb{B}/\Gamma$ и $B_o \subset Y$ е сечение на $r : Y \to B$ с минимален индекс на пресичане $B_o^2 = \delta$. Да предположим, че $\delta \in \{0, 1\}$ и съществува C_j с $d_j := \deg\left[f|_{C_j} : C_j \to B\right] \geq 2$. Тогава:*

Таблица 4.2: Долни граници μ_k върху броя на ненапълно геодезичните $L_i \setminus D \subset \mathbb{B}/\Gamma$, ако всички C_j са сечения на $r : Y_\delta \to B$ и $\mathbb{B}/\Gamma$ има k параболични точки

k	μ_k	k	μ_k	k	μ_k	k	μ_k	k	μ_k	k	μ_k
15	14	17	10	19	8	$21-22$	6	$25-29$	4	$38-62$	2
16	12	18	9	20	7	$23-24$	5	$30-37$	3		

(i) $\mathbb{B}/\Gamma$ *има* $k \geq 12$ *параболични точки и Ойлеровата характеристика на* $\mathbb{B}/\Gamma$ *е* $e(\mathbb{B}/\Gamma) = s \geq 11$;

(ii) ако $\mathbb{B}/\Gamma$ *има* $12 \leq k \leq 44$ *параболични точки, то съществуват поне* $\mu_k \geq 2$ *ненапълно геодезични пунктирани сфери* $L_i \setminus D \subset \mathbb{B}/\Gamma$ *за стойностите на* μ_k*, дадени в Таблица 4.4.*

Доказателство. Да положим

$$\psi(x) := (x-1)(x-2) - (k-2)(x-4) = x^2 - (k+1)x + 4k - 6$$

и да изразим (4.4) във вида $0 \geq \sum_{i=1}^{s} \psi(l_i)$ за $l_i := L_i.D \geq 4$.

(i) Графиката на $\psi(x)$ е парабола с връх $\frac{k+1}{2}$. Ако $\frac{k+1}{2} \leq 4$, то $\psi(l_i) \geq \psi(4) = 6$ за всички $1 \leq i \leq s$ и

$$0 \geq \sum_{i=1}^{s} \psi(l_i) \geq \psi(4)s = 6s \in \mathbb{N}$$

е противоречие. По този начин, $\frac{k+1}{2} > 4$,

$$\psi(l_i) \geq \psi\left(\frac{k+1}{2}\right) = \frac{-(k^2 - 14k + 25)}{4}$$

и

$$0 \geq \sum_{i=1}^{s} \psi(l_i) \geq \psi\left(\frac{k+1}{2}\right) s = \frac{-(k^2 - 14k + 25)s}{4},$$

откъдето $k^2 - 14k + 25 \geq 0$, $(k-7)^2 > 24 > 4^2$, $k \geq 12$, $e(\mathbb{B}/\Gamma) = e(X) = s \geq k - 1 \geq 11$.

(ii) Предполагаме, че най-много t пунктирани сфери $L_i \setminus D \subset \mathbb{B}/\Gamma$ не са напълно геодезични и извеждаме долна граница $\kappa_t \geq 12$ върху k. Съществуват поне $s - t$ напълно геодезични $L_i \setminus D \subset \mathbb{B}/\Gamma$, $t + 1 \leq i \leq s$ с $l_i = 4$ и от (4.4) следва, че

$$0 \geq \sum_{i=1}^{t} \psi(l_i) + \psi(4)(s-t) \geq \psi\left(\frac{k+1}{2}\right) t + 6(k-1-t),$$

съгласно $s \geq k - 1$. В резултат,

$$(k^2 - 14k + 25) - 24\left(\frac{k-t-1}{t}\right) = \left[k - \left(7 + \frac{12}{t}\right)\right]^2 - \frac{144}{t^2}(t+1) \geq 0. \tag{4.8}$$

Таблица 4.3: Долни граници κ_t върху броя на параболичните точки на $\mathbb{B}/\Gamma$, ако съществува $C_j \subset Y_\delta$ с $d_j = C_j.F > 1$, $0 \leq \delta \leq 1$ и най-много t от пунктираните сфери $L_i \setminus D \subset \mathbb{B}/\Gamma$ не са напълно геодезични

t	κ_t	t	κ_t	t	κ_t	t	κ_t	t	κ_t
1	45	3	19	5	16	7	14	≥ 11	12
2	24	4	17	6	15	$8-10$	13		

Таблица 4.4: Долни граници μ_k върху броя на ненапълно геодезичните $L_i \setminus D \subset \mathbb{B}/\Gamma$, ако съществува $C_j \subset Y_\delta$ с $d_j = C_j.F > 1$, $0 \leq \delta \leq 1$ и $\mathbb{B}/\Gamma$ има k параболични точки

k	μ_k	k	μ_k	k	μ_k	k	μ_k
12	11	14	7	16	5	$19-23$	3
13	8	15	6	$17-18$	4	$24-44$	2

Ако $12 \geq 7 + \frac{12}{t}$, то $k \geq 12 \geq 7 + \frac{12}{t}$ и

$$k \geq \kappa'_t := \lfloor 7 + \frac{12}{t} + \frac{12}{t}\sqrt{t+1} \rfloor.$$

Да забележим, че $\kappa'_t \leq 12$ и $\kappa_t = 12$ точно когато $t \geq 11$. За $3 \leq t \leq 10$ стойностите на $\kappa_t = \kappa'_t$ са дадени в Таблица 4.3.

За $1 \leq t \leq 2$ от предположението $7 + \frac{12}{t} > k$ следва

$$12 \leq k \leq 7 + \frac{12}{t} - \frac{12}{t}\sqrt{t+1},$$

откъдето

$$\frac{7}{12} \geq 1 - \frac{5t}{12} \geq \sqrt{t+1} \geq \sqrt{2},$$

което е противоречие. Следователно $k \geq 7 + \frac{12}{t}$ и

$$k \geq \kappa_t := \lfloor 7 + \frac{12}{t} + \frac{12}{t}\sqrt{t+1} \rfloor \quad \text{за} \quad 1 \leq t \leq 2.$$

Чрез Таблица 4.3 е попълнена Таблица 4.4 за долните граници $\mu_k \geq 2$ върху броя на ненапълно геодезичните $L_i \setminus D \subset \mathbb{B}/\Gamma$ върху $\mathbb{B}/\Gamma$ с $12 \leq k \leq 44$ параболични точки.

$\square$

Библиография

[1] A. Ash A., Mumford D., Rapoport M., and Tai Y.-S.: *Smooth Compactifications of Locally Symmetric Varieties*, Cambridge University Press, Cambridge, 2010.

[2] Bagnera, G., de Franchis, M.: Sur les surfaces hyperelliptiques. *C. R. Acad. Sci.*, **145**, 1907, 747–749.

[3] Baily W., Borel A.: Compactification of arithmetic quotients of bounded symmetric domains, *Ann. Math.*, **84** 1966, 442–528.

[4] Baldi G., Ullmo E.: Special subvarieties of non-arithmetic ball quotients and Hodge theory, ArXiv:2005.03524v2[mathAG] 27 Sept 2021.

[5] Bogomolov F.: Holomorphic tensors and vector bundles on projective manifolds, *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Math.*, **42(6)**, 1978, 1227–1287.

[6] Beshkov P., Kasparian A, Sankaran G.: Saturated and primitive smooth compactifications of ball quotients, *Ann. Sofia Univ., Fac. Math. and Inf.*, **106**, 2019, 53–77.

[7] Beshkov P., Kasparian A.: Lower bounds on the number of cusps of a toroidal compactification with a ruled minimal model, *C. R. Acad. Bulg. Sci.*, **74(8)**, 2021, 1120–1127.

[8] Cartwright D. I., Steger T.: Enumeration of the 50 fake projective planes, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **348**, 2010, 11–13.

[9] Deligne P., Mostow G.D.: Monodromy of hypergeometric functions and non-lattice integral monodromy, *Publ. Math. Inst. Hautes Étud. Sci.*, **63**, 1986, 5–89.

[10] Deligne P., Mostow G.D.: Commensurabilities among lattices in $\mathrm{PU}(1, n)$, vol. **132**, *Annals of Math. Studues*, 1993, Princeton Univ. Press.

[11] Deraux M.: Non-arithmetic lattices and the Klein quadric, *J. reine Angew. Math.*, **754**, 2019, 253–279.

[12] Deraux M.: Non-arithmetic lattices from a configuration of elliptic curves in an Abelian surface, *Comm. Math. Helv.*, **93 (3)**, 2016, 533–554.

[13] Deraux M., Parker J.R., Paupert J.: New non-arithmetic complex hyperbolic lattices, *Invent. Math.*, **203(3)**, 2016, 681–771.

[14] Deraux M., Parker J.R., Paupert J., New nonarithmetic complex hyperbolic lattices II, *Mich. Math. J.*, **70(1)**, 2021, 13–205.

[15] Di Cerbo G., Di Cerbo L.F.: Effective results for complex hyperbolic manifolds, *J. London Math. Soc.*, **91(1)**, 89–104.

[16] Di Cerbo L.F., Stover M.: Multiple realizations of varieties as ball quotient compactifications, *Michigan Math. J.*, **65(2)**, 2016, 441-447.

[17] Di Cerbo L.F., Stover M.: Bielliptic ball quotient compactifications and lattices in $PU(2,1)$ with finitely generated commutator subgroup, *Ann. Inst. Fourier*, **67(1)**, 2017, 315–328.

[18] Di Cerbo L.F., Stover, M.: Classification and arithmeticity of toroidal compactifications with $\overline{c_1}^2 = 3\overline{c_2} = 3$, *Geom. Topol.* , **22(4)**, 2018, 2465–1510.

[19] Di Cerbo L.F., Stover M.: Punctured spheres in complex hyperbolic spaces and bi-elliptic ball quotient compactifications, *Trans. Amer. Math. Society*, **372**, 2019, 4627–4646.

[20] Dolgachev I.V., Kondo S.: Moduli of K3 surfaces and complex ball quotients, In *Arithmetic and geometry around hypergeometric functions - CIMPA Summer School*, Galatasaray Univesity, Istanbul 2005, Holzapfel R.P., Uludağ A.M., Yoshida M. (Eds.), Progress in Mathematics **260**, 2007, 43-100.

[21] Griffiths Ph., Harris J.: *Principles of Algebraic Geometry*, Wiley and Sons, 1978.

[22] Grothendieck A.: *Éléments de géométrie algébrique: IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas*, Quatrième partie. Publications mathématiques de l'I.H.E.S., tome 32, 1967, pp. 5–361.

[23] Hartshorne R.: *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics **52**, Springer, 1977.

[24] Helgason S.: *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces*, London, Academic Press, 1978.

[25] Hirzebruch F.: Chern numbers of algebraic surfaces: an example, *Math. Ann.*, **266**, 1984, 351–356.

[26] Holzapfel R.P: *The Ball and Some Hilbert Problems*, Birkhäuser, Basel-Boston-Berlin, 1995.

[27] Holzapfel R.P (with appendices by A. Pineiro and N. Vladov): Picard-Einstein metrics and class field connected with Apolonius cycle, HU Preprint **98-15**, 1998.

[28] Holzapfel R.P: Jacobi Theta embedding of a hyperbolic 4-space with cusps, In: *Geometry, Integrability and Quantization III*, Mladenov I. and Naber G. (Eds.), Coral Press Sofia, 2002, 11–63.

[29] Holzapfel R.P: Complex hyperbolic surfaces of abelian type, *Serdica Math. J.*, **30**, 2004, 207–238.

[30] Kasparian A., Kotzev B.: Weal form of Holzapfel's Conjecture, *Geometry and Symmetry in Physics*, **19**, 2010, 29–42.

[31] Kasparian A., Sankaran G.: Fundamental groups of toroidal compactifications, *Asian J. Math.*, **22**, 2018, 941–953.

[32] Kasparian A., Sankaran G.: Toroidal compactification: the generalized ball case, In: *Moduli Spaces and Locally Symmetric Spaces*, Ji L. and Yau S. T. (Eds.), Surveys of Modern Mathematics **16**, International Press, 2021, 107–133.

[33] Kobayashi S., Nomizu K.: *Foundations of Differential Geometry*, vol. II, Interscience Publishers, 1969.

[34] Margulis G.: Arithmeticity of the irreducible lattices in semisimple groups of rank greater than 1, *Invent. Math.*, **76**, 1984, 93–120.

[35] Miyaoka Y.: On the Chern numbers of surfaces of general type, *Inv. Math.*, **42(1)**, 1977, 225–237.

[36] Mok N.: *Metric Rigidity Theorems on Hermitian Locally Symmetric Spaces*, Series in Pure Mathematics, vol. 6, World Scientific, 1989.

[37] Momot A.: On modular ball quotient surfaces of Kodaira dimension one, *Int. Sch. Research Notices*, 2011, DOI 10.5402/2011/214853.

[38] Mostow D.: On a remarkable class of polyhedra in complex hyperbolic space, *Pacific J. Math.*, **86**, 1980, 171–276.

[39] Mumford D.: Hirzebruch's Proportionality Theorem in the non-compact case, *Invent. Math.*, **42**, 1977, 239–272.

[40] Nagata M.: On self-intersection number of a section on a ruled surface, *Nagoya Math. J.*, **37(3)**, 1970, 191-196.

[41] Prasad G., Yeing K.: Fake projective planes, *Invent. Math.*, **168**, 2007, 321–370.

[42] Serre J.P: *Lie Algebras and Lie Groups*, Lectures given at Harvard University, New-York-Amsterdam, Benjamin, 1965.

[43] Serre J.P: *Algebres de Lie Semi-Simples Complexes*, New York-Amsterdam, Benjamin, 1966.

[44] Shafarevich I.R.: *Foundations of Algebraic Geometry*, vol. 1, Moscow, Science, 1988.

[45] Stover M.: Volumes of Picard modular surfaces, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **139**, 2011, 3045–3056.

[46] Stover M.: Cusp and b_1 growth for ball quotients and maps onto $\mathbb{Z}$ with finitely generated kernel, *Indiana Univ. Math. J.*, **70(1)**, 2021, 213–233.

[47] Uludağ M.: Covering relations between ball quotient orbifolds, *Math. Ann.* , **328(2)**, 2004, 503–523.

[48] Van de Ven A.: On the Chern numbers of certain complex and almost complex manifolds, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **55(6)**, 1966, 1624–1627.

[49] Yau S.T.: Calabi's Conjecture and some new results in algebraic geometry *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **74(5)**, 1977, 1798–1799.

[50] Yau S.T.: On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge Ampère equation I, *Commun. Pure and Appl. Math.*, **31(3)**, 1978, 339–411.