СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“

ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

Александър Василев Александров

ЕКСТРЕМАЛНИ СВОЙСТВА НА НЯКОИ КЛАСИЧЕСКИ ОРТОГОНАЛНИ ПОЛИНОМИ В КОМПЛЕКСНАТА РАВНИНА

Д И С Е Р Т А Ц И Я

за получаване на образователна и научна степен „Доктор“

област на висше образование: „Природни науки, математика и информатика“

Професионално направление: „Математика“

Научна специалност: „Комплексен анализ“

Научни ръководители: проф. д.м.н. Борислав Боянов, проф. д.м.н. Гено Николов

София, 2016 г.

С Ъ Д Ъ Р Ж А Н И Е

В памет на акад. Борислав Боянов

1. Исторически сведения и някои известни резултати

През 1887 година в своя статия за свойствата на водните разтвори великият руски химик Дмитрий Иванович Менделеев поставил следната задача:

Да се намери максималната абсолютна стойност на кой да е от коефициентите на полинома от втора степен $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$, ако е известно, че отклонението от нулата на този полином в интервала $[a, b]$ не превишава зададено число M.

Менделеев успява сам да реши тази задача. Но тя е толкова естествена и интересна, че е било невъзможно да не предизвика интереса на математиците. Две години по-късно, през 1889 година, се появява статията [8], озаглавена "Върху един въпрос на Д. И. Менделеев", на руския математик Андрей Андреевич Марков, станал по-късно известен със своите резултати в теорията на апроксимациите и теорията на вероятностите. В тази статия Андрей Марков решава по-общата задача за намиране на точна горна граница за абсолютната стойност на коефициентите a_0, a_1 и a_n на полином $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$, ако е известно, че отклонението от нулата на този полином в интервала $[a, b]$ не надминава M. Решавайки тази задача, Андрей Марков успява да намери точната горна граница за всяка една от величините 1) $|p(c)|$ и 2) $|p'(c)|$, където $c \in \mathbb{R}$ е дадена точка, и като следствие от 2) получава своето знаменито неравенство

$$|p'(x)| \leq \frac{2n^2}{b-a} \max_{x\in[a,b]} |p(x)|, \quad x \in [a, b],$$

вярно за всеки алгебричен полином $p(x)$ от степен, ненадминаваща n, в което равенството е изпълнено само за крайните точки на интервала и за трансформираните полиноми на Чебишов $const.T_n(\frac{2x-a-b}{b-a})$. Напомняме дефиницията на Чебишовия полином от първи род: $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$, $x \in [-1, 1]$.

Три години по-късно, през 1892 година, по-малкият брат на Андрей Марков-Владимир Марков, тогава 21 годишен студент в Санкт Петербургския университет, разширява неравенството на брат си, давайки оценки за производните от по-висок ред. Своите резултати Вл. Марков публикува на руски език в книжка с обем 110 страници [9]. Под оригиналното заглавие "*О функціяхъ, наименее уклоняющихся отъ нуля в данномъ промеждутке*" стои трогващото пояснение "*студента С.-Петербурскаго университета Владимира Маркова*".

Да отбележим, че с линейна трансформация можем да ограничим разсъжденията само върху интервала $[-1,1]$. Освен това, за да формулираме по-кратко резултата на Владимир Марков, а и всички останали резултати в дисертацията, ще означим, както е традиционно, с $||.||$ равномерната норма в $[-1,1]$, с π_n – множеството от алгебричните полиноми от степен по-малка или равна на n с комплексни коефициенти, а с π_n^r – подмножеството на π_n от полиномите с реални коефициенти.

При тези означения неравенството на Владимир Марков, което съдържа като частен случай при $k=1$ и неравенството на Андрей Марков, се формулира така:

Теорема А (А. А. Марков, В. А. Марков). *Ако $f \in \pi_n$ и $\|f\| \leq 1$, то за $k = 1, \ldots, n$*

$$\|f^{(k)}\| \leq \|T_n^{(k)}\| \qquad \left(= T_n^{(k)}(1) = \frac{n^2(n^2-1^2)\ldots(n^2-(k-1)^2)}{(2k-1)!!} \right).$$

Равенство имаме тогава и само тогава когато $f = \gamma T_n$, където $\gamma \in \mathbb{C}$ и $|\gamma| = 1$.

Работата на Владимир Марков [9] съдържа забележителни резултати, в частност в нея се дава пълен отговор на въпроса на Менделеев за полиноми от степен n. Някои от наблюденията направени в нея могат да се използват, и всъщност са намерили приложения при решаването на други екстремални задачи. За два такива важни резултата ще стане дума и в настоящата дисертация (вж. параграф 6 на Глава 1). Владимир Марков умира от туберкулоза преди да навърши 26 години и със сигурност ранната му смърт е била голяма загуба за математиката.

Повече подробности за неравенството на Владимир Марков могат да бъдат намерени в прекрасно написаната обзорна статия на Борислав Боянов [3]. За тези, които се интересуват от историята на това забележително неравенство, препоръчваме обзорната статия [27] на Алексей Шадрин, в която са изложени и 12 различни доказателства на неравенството на братята Маркови (както Шадрин пише в [27], предложените доказателства биха могли да задоволят всеки вкус: сред тях има кратки, дълги, с реални аргументи или с аргументи от

комплексния анализ, непълни, грешни...).

През 1941 година двама американски математици, Ричард Джеймс Дафин и Алберт Чарлз Шефер, в статията [5] намират изключително красиво обобщение на Теорема А:

Теорема B (Р. Дафин, А. Шефер). *Ако* $f \in \pi_n$ *и*

$$\left|f\left(\cos\frac{\nu\pi}{n}\right)\right| \le 1 \quad \text{за} \quad \nu = 0, \dots, n,$$

то

$$\|f^{(k)}\| \le \|T_n^{(k)}\| \quad \text{за} \quad k = 1, \dots, n.$$

Равенство имаме тогава и само тогава когато $f = \gamma T_n$, *където* $\gamma \in \mathbb{C}$ *и* $|\gamma| = 1$.

Тук и по-нататък в дисертацията, $\eta_\nu = \cos\frac{\nu\pi}{n}$, $\nu = 0, 1, \dots, n$, са точките на локален екстремум на $T_n(x)$ в интервала $[-1, 1]$, а $\xi_\nu = \cos\frac{(2\nu-1)\pi}{2n}$, $\nu = 1, \dots, n$, са нулите на $T_n(x)$.

За полиноми с реални коефициенти Дафин и Шефер доказват в [5] дори нещо повече:

Теорема C (Р. Дафин, А. Шефер). *Ако* $f \in \pi_n^r$ *и*

$$\left|f\left(\cos\frac{\nu\pi}{n}\right)\right| \le 1 \quad \text{за} \quad \nu = 0, \dots, n,$$

то за $k = 1, \dots, n$

$$|f^{(k)}(x+iy)| \le |T_n^{(k)}(1+iy)| \quad \text{при} \quad (x, y) \in [-1, 1] \times \mathbb{R}.$$

Равенство имаме тогава и само тогава когато $f = \pm T_n$.

При доказателството на Теорема C Дафин и Шефер използват по блестящ начин средства от арсенала на класическия комплексен анализ (теоремата на Гаус-Люка и теоремата на Руше) и свойства на интерполационните полиноми на Лагранж. Скелетът на тяхното доказателство е изграден от следните твърдения:

Твърдение 1 (Р. Дафин, А. Шефер). *Ако* $f \in \pi_n$ *удовлетворява неравенствата*

$$|f(\eta_\nu)| \le |T_n(\eta_\nu)|, \quad \nu = 0, \dots, n,$$

то

$$|f'(\xi_\nu)| \le |T_n'(\xi_\nu)| \quad \text{за} \quad \nu = 1, \dots, n.$$

Равенство имаме тогава и само тогава когато $f = \gamma T_n$, *където* $\gamma \in \mathbb{C}$ *и* $|\gamma| = 1$.

Твърдение 2 (Р. Дафин, А. Шефер). *Полиномът на Чебишов $T_n(x)$ удовлетворява неравенството*

$$|T_n(x+iy)| \leq |T_n(1+iy)| \quad \text{за всеки} \quad (x,y) \in [-1,1] \times \mathbb{R}.$$

Теорема D (Р. Дафин, А. Шефер). *Нека са дадени $a < b$, алгебричен полином $g(z) = c(z-x_1)\cdots(z-x_n)$, където c, $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}, c \neq 0$, $x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b$, и нека*

$$|g(x+iy)| \leq |g(b+iy)|, \quad (x,y) \in [a,b] \times \mathbb{R}\,.$$

Ако $f \in \pi_n^r$ удовлетворява неравенството $|f'(x)| \leq |g'(x)|$ в нулите на g, тогава за $k = 1, \ldots, n$ е изпълнено

$$|f^{(k)}(x+iy)| \leq |g^{(k)}(b+iy)|, \qquad (x,y) \in [a,b] \times \mathbb{R}\,.$$

Твърдение 2 е друг шедьовър на Дафин и Шефер и за доказателството му те използват съществено и много умело геометрията на нулите на полиномите на Чебишов. За съжаление (или пък за щастие – нека да има какво да откриват и другите математици!) техните аргументи са неприложими за други класове полиноми. От друга страна, Теорема D е достатъчно обща, за да намери приложение за получаване на неравенства от типа на Теореми B и C с екстремални полиноми, различни от полиномите на Чебишов от първи род T_n, стига за тях да се установят необходимите предпоставки за прилагането на Теорема D.

Така по естествен начин възниква въпросът: Как да докажем неравенството от Твърдение 2 и за други класове полиноми ? В своите работи за неравенства от типа на Дафин и Шефер, Г. Николов нарича неравенството от Твърдение 2 *End-Point Domination Property* (съкратено EPDP), и ние също ще използваме това название. От казаното по-горе следва, че доказването на EPDP за някой клас от полиноми е решаваща стъпка по пътя към доказването на неравенство от типа на Дафин и Шефер за този клас от полиноми.

Използвайки горната терминология, въпросът е: Как да установим геометричното свойство EPDP за други класове от полиноми, различни от класа от полиномите на Чебишов?

Идея за установяването на EPDP дава американският математик Мерил Патрик в работата си [25] от 1971 г. (по това време Патрик е бил докторант на Дафин). Откритието на Патрик е, че за получаване на EPDP може да се използва една известна формула на Йенсен.

През 1913 година големият датски математик Йохан Йенсен, известен със своето класическо неравенство за изпъкналите функции, публикува статията [7]. В нея той извежда една формула, до която достига, опитвайки се да докаже хипотезата на Риман. По-точно, Йенсен доказва, че за функциите f от класа на Лагер-Пойа, които приемат реални стойности върху реалната права, е в сила *формулата на Йенсен*

$$|f(x+iy)|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} L_k(f;x)y^{2k}, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

където

$$L_0(f;x) = f^2(x),$$

$$L_k(f;x) = \sum_{j=0}^{2k} (-1)^{k-j} \frac{f^{(j)}(x)}{j!} \frac{f^{(2k-j)}(x)}{(2k-j)!}, \qquad k \in \mathbb{N}\,.$$

При това са изпълнени и неравенствата

$$L_k(f;x) \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}, \qquad k \in \mathbb{N},$$

които по-нататък ще наричаме *неравенства на Йенсен.*

Да припомним, че класът на Лагер-Пойа се състои от целите функции, които са равномерни граници върху компактните подмножества на $\mathbb{C}$ на редици от алгебрични полиноми, имащи само реални нули. В частност, формулата на Йенсен е вярна и ако f е алгебричен полином от степен n с реален старши коефициент, и всичките му нули са реални. В този случай сумирането се извършва до $k = n$.

Да отбележим, че, както лесно следва от самото определение на $L_k(f;x)$, ако $f(x)$ е четна или нечетна функция, то всичките коефициенти $L_k(f;x)$ във формулата на Йенсен са четни функции.

Ето сега и факта, който е забелязал Патрик (хубавите идеи са прости!): ако f е алгебричен полином от степен n с реален старши коефициент, чиито нули са реални, тогава от неравенствата

$$L_k(f;x) \leq L_k(f;1), \quad x \in [-1,1], \quad k = 0,\ldots,n$$

и формулата на Йенсен веднага следва неравенството

$$|f(x+iy)| \leq |f(1+iy)|, \quad (x,y) \in [-1,1] \times \mathbb{R},$$

т.е. свойството което ние нарекохме EPDP.

С други думи, формулата на Йенсен ни дава един подход за получаване на EPDP.

В същата статия [25], Патрик опитва да приложи идеята си за установяване на EPDP за полиномите на Якоби. Мотивацията на Патрик е ясна: Чебишовият полином T_n се съдържа в класа на Якобиевите полиноми, и е естествено да се очаква свойството EPDP да е валидно не само за T_n, а за подходящ по-широк подклас на полиномите на Якоби. Базирайки се на някои свои частични резултати в [25], Патрик формулира пак там следната хипотеза:

Хипотеза на М. Патрик. *Нека $P = P_n^{(\alpha,\beta)}$ е n-тия полином на Якоби, където $\alpha \geq \beta > -1$. Тогава за $k = 1, 2, \ldots, n$,*

$$\max_{x\in[0,1]} L_k(P;x) = L_k(P;1)\,. \tag{0.1}$$

В случая $\beta \geq \alpha > -1$, използвайки известното равенство (то е доказано в Глава 3 на дисертацията – виж Лема 3.3) $P_n^{(\alpha,\beta)}(-x) = (-1)^n P_n^{(\beta,\alpha)}(x)$, получаваме $L_k(P_n^{(\alpha,\beta)};x) = L_k(P_n^{(\beta,\alpha)};-x)$, и стигаме до следната

Алтернативна версия на хипотезата на Патрик. *Нека $P = P_n^{(\alpha,\beta)}$ е n-тия полином на Якоби, където $\beta \geq \alpha > -1$. Тогава за $k = 1, 2, \ldots, n$,*

$$\max_{x\in[-1,0]} L_k(P;x) = L_k(P;-1).$$

Самият Патрик доказва в [25] хипотезата си за $1 \leq k \leq 3$.

Първият съществен пробив в доказателството на хипотезата на Патрик е постигнат през 2005 година от Г. Николов. В статията си [18] той доказва, че хипотезата на Патрик е вярна за ултрасферичните полиноми, т.е. за $P = P_n^{(\lambda)}$, или в случая $\alpha = \beta = \lambda - 1/2$. Понеже при $\alpha = \beta$ функциите $L_k(P;x)$ са четни, от този резултат следва, че при $P = P_n^{(\lambda)}$

$$\max_{x\in[-1,1]} L_k(P;x) = L_k(P;1)\,, \quad 1 \leq k \leq n\,.$$

Както добре е известно (това е доказано в Глава 3 на дисертацията – виж Лема 3.4) същото е вярно и за $L_0(P;x) = P^2(x)$, ако $\lambda \geq 0$.

Всичко това е позволило в [18] да бъде доказан следният аналог на Твърдение 2 (EPDP за ултрасферичните полиноми):

Теорема Е (Г. Николов). *За всяко $\lambda \geq 0$ и $n \in \mathbb{N}$, ултрасферичният полином $P = P_n^{(\lambda)}$ удовлетворява неравенството*

$$|P(x+iy)| \leq |P(1+iy)| \quad \text{при} \quad x \in [-1,1],\ y \in \mathbb{R}.$$

При това, ако $\lambda > 0$ или ако $\lambda = 0$ и $y \neq 0$, равенство се достига само за $x = \pm 1$.

Отбелязваме, че като частен случай (при $\lambda = 0$) Теорема E включва Твърдение 2 от работата на Дафин и Шефер.

Като следствие от Теорема E в [18] е получено неравенство от типа на Дафин и Шефер за ултрасферичните полиноми:

Теорема F (Г. Николов). *Нека $P = P_n^{(\lambda)}$ ($\lambda \in [0, \frac{1}{2}]$, $n \in \mathbb{N}$) и $\{t_\nu\}_{\nu=0}^n$ са нулите на $(1-x^2)P'(x)$. Ако $f \in \pi_n^r$ удовлетворява неравенствата*

$$|f(t_\nu)| \le |P(t_\nu)| \qquad \text{при} \quad \nu = 0, 1, \ldots, n\,,$$

то за $k = 1, \ldots, n$ имаме

$$|f^{(k)}(x + i\,y)| \le |P^{(k)}(1 + i\,y)| \qquad \text{при} \;\; x \in [-1, 1], \quad y \in \mathbb{R}\,.$$

Равенство се достига само ако $f = \pm P$.

В частния случай $\lambda = 0$ Теорема F възпроизвежда Теорема C на Дафин и Шефер.

В същата статия [18], базирайки се на някои компютърни експерименти, Г. Николов изказва предположение, че за ултрасферичните полиноми е вярно по-силно твърдение от хипотезата на Патрик, а именно:

Усилена хипотеза на Патрик за ултрасферичните полиноми ([18]). *За $k = 1, \ldots, n-1$, функцията $L_k(P_n^{(\lambda)}; x)$ е строго монотонно намаляваща в $(-\infty, 0]$ и строго монотонно растяща в $[0, \infty)$.*

Ще завършим тази кратка историческа екскурзия, очертавайки българския принос върху неравенствата от тип на Дафин и Шефер за краен интервал от реалната права. Нека започнем с коментар на Теорема B на Дафин и Шефер.

Теорема B може да се интерпретира като *теорема за сравнение*: за всеки полином $f \in \pi_n$, неравенството $|f| \le |T_n|$ в нулите на $(1-x^2)T_n'(x)$ влече неравенствата $\|f^{(k)}\| \le \|T_n^{(k)}\|$, $k = 1, \ldots, n$.

Това наблюдение дава основание на Г. Николов да даде следната дефиниция [11]:

Определение. Нека Q е полином от степен n, който има n различни реални нули в $(-1, 1)$. Нека $\Delta = \{1 \ge t_0 > t_1 > t_2 > \cdots > t_{n-1} > t_n \ge -1\}$ е система от точки в $[-1, 1]$.

Казваме, че двойката (Q, Δ) допуска неравенство от тип на Дафин и Шефер, ако от $f \in \pi_n$ и $|f(t_\nu)| \le |Q(t_\nu)|$, $\nu = 0, 1, \ldots, n$ следва, че $||f^{(k)}|| \le ||Q^{(k)}||$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

В случай, че двойката (Q, Δ) допуска неравенство от тип на Дафин и Шефер, полиномът Q ще наричаме *мажоранта*, а точките от Δ - *точки на сравняване*. Нека отбележим, че в горната дефиниция точките на сравняване не

са непременно точките на локален екстремум на мажорантата Q в интервала $[-1,1]$, както това е в Теорема B.

В серия от работи [4, 11, 12, 13, 14, 19, 20] са получени неравенства от тип на Дафин и Шефер, в които мажорантите са ултрасферични или свързани с ултрасферичните полиноми, а множествата от точките на сравняване са съставени от нулите на други ултрасферични полиноми и краищата на интервала. Към тази група резултати спадат и различните обобщения на неравенството на И. Шур, което представлява аналог на неравенството на А. Марков за полиноми, които се анулират в краищата на интервала $[-1,1]$. В [10] Л. Милев и Г. Николов доказват усилен вариант на това неравенство при ограничения в дискретно множество от точки, а Г. Николов [19] разпространява този резултат върху производните от по-висок ред. Без да навлизаме в подробности, ще си позволим да цитираме само едно красиво обобщение на неравенството на Дафин и Шефер, получено от Николов [14, 20]:

Теорема G (Г. Николов). *Нека $\{t_\nu\}_{\nu=0}^n$ са произволни точки, такива че $1 \geq t_0 > \xi_1 > t_1 > \xi_2 > t_2 > ... > t_{n-1} > \xi_n > t_n \geq -1$, където $\xi_\nu = \cos\frac{(2\nu-1)\pi}{2n}$, $\nu = 1,\dots,n$, са нулите на $T_n(x)$.*

Ако $f \in \pi_n$ удовлетворява неравенствата

$$|f(t_\nu)| \leq |T_n(t_\nu)| \quad \text{за} \quad \nu = 0,\dots n,$$

тогава

$$\|f^{(k)}\| \leq \|T_n^{(k)}\| \quad \text{за} \quad k = 1,\dots,n.$$

Равенство имаме тогава и само тогава когато $f = \gamma T_n$, където $\gamma \in \mathbb{C}$ и $|\gamma| = 1$.

Теорема B се получава като частен случай от горния резултат, а именно, при $t_\nu = \eta_\nu$, $\nu = 0,\dots,n$. Напомняме, че $\eta_\nu = \cos\frac{\nu\pi}{n}$, $\nu = 0,\dots,n$, са точките на локален екстремум на T_n.

Даденото по-горе определение за неравенства от тип на Дафин и Шефер може да се разшири, като се разглеждат и оценки за други норми на производните на полиноми, удовлетворяващи ограничения върху дискретно множество от точки. Неравенства от тип на Дафин и Шефер в някои L_2 норми с тегла са получени от Николов в [17] и Николов и Хънтер в [6]. Статията [20] е обзор върху неравенствата от тип на Дафин и Шефер.

Посочените по-горе резултати са аналози на Теорема B, при тях се оценяват норми на производните на полиноми, удовлетворяващи ограничения върху дискретно множество от точки. Тези резултати са тясно свързани с неравенствата от тип на Марков за класовете от полиноми, ограничени по абсолютна стойност в $[-1,1]$ от (криволинейна) мажоранта $\varphi(x) > 0$, и с хипотезата за екстремалност в тези неравенства на полиномите-змии, асоциирани с мажорантата φ, т.е. полиномите от фиксирана степен n, които осцилират максимално между $\pm\varphi$ в $[-1,1]$. Така например, асоциираният с $\varphi(x) \equiv 1$ полином-змия от

степен n е Чебишевият полином T_n, и той е екстремалният полином както в неравенството на Марков, така и в усиления му вариант на Дафин и Шефер, при множество от точки на сравняване $\Delta = \{\eta_\nu\}_{\nu=0}^n$, т.е. точките на алтернанс на T_n между ± 1. Получените напоследък резултати от Николов [14] и от Николов и Шадрин [23, 24] потвърждават тази хипотеза за широк клас от мажоранти, покриват почти всички известни неравенства от тип на Марков с мажоранти, и ги усилват в неравенства от тип на Дафин и Шефер.

2. Съдържание на дисертацията

Дисертацията се състои от увод и четири глави. Първата глава въвежда читателя в проблематиката, а във втората, третата и четвъртата глава се съдържат основните резултати в дисертацията. Ще представим по-детайлно съдържанието на всяка от главите.

Глава 1. Предварителни сведения

Главата започва с въвеждане на няколко стандартни означения, които се използват в цялата дисертация. После са формулирани теоремата на братята Маркови и двете теореми на Дафин и Шефер (теореми A, B и C от параграф 1), които я обобщават. Изложено е пълно доказателство на Теореми B и C. За целта са формулирани и доказани Твърдения 1 и 2 и Теорема D от параграф 1.

Изложението в Глава 1 продължава с кратък коментар на подхода на Дафин и Шефер. Очертана е една от посоките, в които може да се обобщи неравенството на Дафин и Шефер, а по-точно, формулирана е следната

Задача 1. Нека Q е полином от степен n, който има n различни нули в $(-1,1)$. Ако $f \in \pi_n^r$ и $|f| \le |Q|$ в нулите на $(1-x^2)Q'(x)$ (т.е. в екстремалните точки на Q в $[-1,1]$), да се докаже, че за $k = 1, \dots, n$ е изпълнено

$$|f^{(k)}(x+iy)| \le |Q^{(k)}(1+iy)|, \quad (x,y) \in [-1,1] \times \mathbb{R}.$$

За да можем да приложим подхода на Дафин и Шефер, т.е. следвайки идейно доказателството на Теорема C да решим тази задача, е необходимо да направим две основни стъпки:

1. Да докажем, че екстремалният полином Q притежава свойството

$$|Q(x+iy)| \le |Q(1+iy)| \quad \text{при} \quad (x,y) \in [-1,1] \times \mathbb{R}.$$

   Както вече бе казано по-рано, това свойство ще наричаме *End-Point Domination Property*, и ще го бележим съкратено с EPDP.

2. Да докажем, че от $f \in \pi_n^r$ и $|f| \le |Q|$ в нулите на $(1-x^2)Q'(x)$ следва $|f'| \le |Q'|$ в нулите на $Q(x)$.

Както бе споменато по-горе, в случая $Q = T_n$ Дафин и Шефер реализират Стъпка 1, използвайки съществено някои геометрични свойства на нулите на T_n. В случая $Q \neq T_n$ тяхната техника не работи, и трябва да се използва друг подход. За реализацията на Стъпка 1 в случая когато Q е класически ортогонален полином (например полином на Гегенбауер) ще използваме формулата на Йенсен за развитието в ред от тип на Маклорен на квадрата на модула на функция от класа на Лагер - Пойа. Необходимите за това факти са изложени в параграф 4 на Глава 1.

В параграф 5 е описан накратко методът на Сонин-Пойа за изследване на поведението на редицата от локалните екстремуми на функции, които са решения на хомогенно обикновено диференциално уравнение от втори ред. Този метод се използва в следващите глави от дисертацията, а в Глава 4 ние предлагаме едно негово обобщение.

За да направим Стъпка 2, ще използваме два красиви резултата от работата на В. А. Марков. Първият от тях се отнася до унаследяването на свойството преплитане на нулите на два алгебрични полиноми, имащи само реални нули, от нулите на техните производни. Вторият резултат описва произтичащите от това унаследяване поточкови оценки за големината на производните на алгебрични полиноми от π_n, върху които са наложени ограничения върху множество от $n+1$ точки от реалната права. Тези два резултата наричаме накратко леми на Марков. Те са изложени с доказателства в параграф 6 на Глава 1.

Глава 2. Неравенство от типа на Дафин и Шефер за полиномите на Ермит

Глава 2 се основава на статията [1]. Нека, както е традиционно, означим с H_n n-тия полином на Ермит, и нека a_{n+1} е най-голямата нула на H_{n+1}. Основният резултат в Глава 2 е:

Теорема 2.1 (Г. Николов, А. Александров [1]). *Ако $f \in \pi_n^r$ и $|f| \leq |H_n|$ в нулите на H_{n+1}, тогава при $k = 1, \ldots, n$ имаме*

$$|f^{(k)}(x+iy)| \leq |H_n^{(k)}(a_{n+1}+iy)| \quad \text{за всяка точка} \quad (x,y) \in [-a_{n+1}, a_{n+1}] \times \mathbb{R}.$$

Равенството се достига само ако $f = \pm H_n$.

Теорема 2.1 е аналог на Теорема C на Дафин и Шефер. В този аналог ролята на полинома на Чебишов T_n се изпълнява от полинома на Ермит H_n, точките за сравняване са вече не екстремалните точки на T_n в $[-1,1]$, а нулите на H_{n+1}, и, накрая, интервалът $[-1,1]$ е заменен с $[-a_{n+1}, a_{n+1}]$.

За да докажем Теорема 2.1, формулираме и доказваме аналози на Твърдение 1 и Твърдение 2 от Глава 1, след което прилагаме Теорема D от същата глава. Тези аналози са:

Твърдение 1′. *Ако $f \in \pi_n$ и $|f| \leq |H_n|$ в нулите на H_{n+1}, то $|f'| \leq |H_n'|$ в нулите на H_n. Равенството $|f'| = |H_n'|$ се достига в някоя нула на H_n тогава и само тогава когато $f = \gamma H_n$, където $\gamma \in \mathbb{C}$ и $|\gamma| = 1$.*

Твърдение 2′. *Полиномът на Ермит $H_n(x)$ удовлетворява неравенството*

$$|H_n(x+iy)| \leq |H_n(a_{n+1}+iy)| \quad \text{за всяка точка} \quad (x,y) \in [-a_{n+1}, a_{n+1}] \times \mathbb{R}.$$

Твърдение 1′ доказваме с помощта на втората лема на Владимир Марков. Доказателството на Твърдение 2′ използва формулата на Йенсен. Основна роля в доказателството на Твърдение 2′ играе следната теорема:

Теорема 2.2 (Г. Николов, А. Александров [1]). *За $k = 1, \ldots, n-1$, функцията $L_k(H_n; x)$ е строго монотонно намаляваща в $(-\infty, 0]$ и строго монотонно растяща в $[0, +\infty)$.*

Нека отбележим, че твърдението на Теорема 2.2 е дори по-силно от необходимото ни за установяване на Твърдение 2′. Доказателството на Теорема 2.2 се извършва с индукция по отношение на k и е технически най-сложната част в Глава 2. Индуктивната стъпка от k към $k+1$ се осъществява с помощта на следното

Тъждество 1.

$$2n(k+1)L_{k+1}'(H_n; x) = 2(k+1)xL_{k+1}(H_n'; x) + L_k'(H_n'; x).$$

На свой ред, за доказването на Тъждество 1 се използват други 3 тъждества (Тъждества 2, 3 и 4). Доказателствата им са алгебрични по своя характер и използват използват специфични свойства на полиномите на Ермит, като например диференциалното уравнение, което удовлетворява H_n.

Глава 3. Хипотеза на Патрик и неин усилен вариант за полиномите на Гегенбауер.

Глава 3 се основава на статията [22], и в нея се доказва усилената хипотеза на М. Патрик, изказана от Г. Николов в [18] и формулирана в параграф 1 на тази глава.

За пълнота на изложението, в началото на Глава 3 се излагат с доказателства всички свойства на полиномите на Якоби, които ще ни трябват в Глава 4, и като частен случай от тях са изведени нужните за Глава 3 свойства на полиномите на Гегенбауер.

Нека, както е традиционно, означим с $P_n^{(\lambda)}$ n-тия полином на Гегенбауер.

Основният резултат в Глава 3 е следната:

Теорема 3.1 (Г. Николов, А. Александров [22]). *Усилената хипотеза на Патрик за ултрасферичните полиноми е вярна. С други думи, ако* $y = P_n^{(\lambda)}$, *където* $\lambda > -1/2$ *и* $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$, *то* $L_k(y;x)$ *е строго монотонно намаляваща в* $(-\infty, 0]$ *и строго монотонно растяща в* $[0,\infty)$ *за* $k = 1, \ldots, n-1$.

Теорема 3.1 се доказва с индукция по k. Индуктивната стъпка от k към $k+1$ се осъществява с помощта на тъждеството, дадено от следната:

Лема 3.7. *Нека* $y = P_n^{(\lambda)}$ *и* $A = 2\lambda + 1\,,\ B = n(n+2\lambda)\,.$ *Тогава*

$$B(k+1)L'_{k+1}(y;x) = 2xL_k(y'';x) + \frac{A}{2}L'_k(y';x) + A(k+1)xL_{k+1}(y';x)\,.$$

Доказателството на Лема 3.7 е технически най-сложната част в Глава 3, то минава през две други технически леми - Лема 3.5 и Лема 3.6.

Нека отбележим, че от Теорема 3.1 и известния факт

$$\max_{x\in[-1,1]} |P_n^{(\lambda)}(x)| = P_n^{(\lambda)}(1) = |P_n^{(\lambda)}(-1)| \text{ при } \lambda \geq 0,$$

чието доказателство е дадено в началото на Главата (Лема 3.4), получаваме алтернативно доказателство на важната Теорема Е, доказана от Николов в [18].

Глава 4. Доказателство на хипотезата на Патрик и на усилената хипотеза на Патрик за полиномите на Якоби.

Тази глава се основава на статията [2]. Основните резултати в нея се дават от следните две теореми:

Теорема 4.1 (Г. Николов, Х. Дитерт, В. Пилвейн, А. Александров). *Хипотезата на Патрик е вярна. С други думи, ако* $P = P_n^{(\alpha,\beta)}$ *е* n*-тия полином на Якоби, където* $\alpha \geq \beta > -1$, *то за* $k = 1, 2, \ldots, n$, *имаме*

$$\max_{x\in[0,1]} L_k(P;x) = L_k(P;1)\,.$$

Теорема 4.2 (Г. Николов, Х. Дитерт, В. Пилвейн, А. Александров). *Усилената хипотеза на Патрик е вярна. С други думи, ако* $P = P_n^{(\alpha,\beta)}$ *е* n*-тия полином на Якоби, където* $n \geq 2$ *и* $\alpha \geq \beta > -1$, *то за* $k = 1, \ldots, n-1$, *имаме, че* $L_k(P;x)$ *е строго монотонно растяща функция в* $[0,\infty)$.

Да отбележим, че $L_n(P;x) = const$ също може да се интерпретира като растяща (нестрого) функция в $[0,\infty)$.

Разбира се, Теорема 4.1 следва от Теорема 4.2. Но доказателството на Теорема 4.1 е значително по-просто и затова е изложено отделно.

При формулировката на резултатите в Глава 4 използваме означенията

$$A = \alpha + \beta + 2\,, \quad B = n(n+\alpha+\beta+1)\,, \quad C = \alpha - \beta\,.$$

Тези величини участвуват като коефициенти в обикновеното диференциално уравнение от втори ред, което удовлетворява $P_n^{(\alpha,\beta)}$.

Ключова роля в доказателството на Теореми 4.1 и 4.2 има следната

Лема 4.3. *Нека* $P = P_n^{(\alpha,\beta)}$ *. Тогава*

$$B(k+1)L'_{k+1}(P;x) = 2x\, L_k(P'';x) + \frac{A}{2}\, L'_k(P';x) + (k+1)(Ax+C)L_{k+1}(P';x).$$

Доказателството на Лема 4.3 е доста дълго и минава през две други технически леми – Лема 4.1 и Лема 4.2.

Важна роля в доказателството на Теорема 4.1 има и тъждеството, дадено от

Лема 4.4. *Нека* $P = P_n^{(\alpha,\beta)}$*. Тогава*

$$(1-x^2)L'_k(P';x)+BL'_k(P;x)-2\big[(A+2k)x+C\big]\,L_k(P';x)+L'_{k-1}(P';x)=0.$$

Теорема 4.1 може да се интерпретира като обобщение на метода на Сонин-Пойа за полиномите на Якоби. Случаят $k = n$ е ясен, защото $L_n(P;x) = const$. За доказателството на теоремата при $k \in \{1,\dots,n-1\}$ въвеждаме помощната функция

$$F_k(x) := L_k(P;x) + \frac{A(1-x^2)}{(A+2k)B}\, L_k(P';x)\,,$$

където $P = P_n^{(\alpha,\beta)}$ и $A > 0$, $B > 0$ са коефициенти в диференциалното уравнение, което се удовлетворява от $P_n^{(\alpha,\beta)}$. Да отбележим, че съгласно неравенствата на Йенсен, изпълнено е $L_k(P';x) > 0$. С помощта на Леми 4.3 и 4.4 доказваме, че

$$F'_k(x) \geq 0 \quad \text{за} \quad x \geq 0\,,$$

и значи $F_k(x)$ е растяща функция в $[0,\infty)$. Теорема 4.1 следва веднага от:

$$\max_{x\in[0,1]} L_k(P;x) \leq \max_{x\in[0,1]} F_k(x) = F_k(1) = L_k(P;1)\,.$$

Струва си да се отбележи, че при $k = 0$ функцията $F_k(P;x)$ се редуцира до функцията

$$F_0(P;x) = P^2(x) + \frac{1-x^2}{B}\big[P'(x)\big]^2,$$

интерполираща $L_0(P;x) = P^2(x)$ в точките му на локален максимум в интервала $[-1,1]$ и използвана в метода на Сонин-Пойа за описване поведението на редицата от локалните екстремуми на полиномите на Якоби. С други думи, за доказателството на Теорема 4.1 ние получаваме обобщение на метода на

Сонин-Пойа, прилагайки го към всички функции–коефициенти $\{L_k(P;\cdot)\}_{k=1}^n$ в развитието на $|P(x+i\,y)|^2$ по четните степени на y от формулата на Йенсен. Класическото приложение на метода на Сонин-Пойа се отнася за случая $k=0$.

За доказателството на Теорема 4.2 е достатъчно да докажем неравенството

$$L_k'(P;x) \geq 0 \text{ за } \ x \in [0,1), \text{ където } \ P = P_n^{(\alpha,\beta)} \ \text{ и } \alpha \geq \beta > -1\,.$$

Това неравенство доказваме с индукция по k, като индуктивната стъпка от k към $k+1$ правим с помощта на Лема 4.3. За доказателството на основата на индукцията, означаваме

$$g_n^{(\alpha,\beta)}(x) := L_1'(P;x) = P'(x)P''(x) - P(x)P'''(x)\,, \quad P = P_n^{(\alpha,\beta)}\,.$$

За функцията $g_n^{(\alpha,\beta)}$ доказваме следните две леми, които, по наше мнение, имат и самостоятелно значение:

Лема 4.5. *Нека $n \geq 3$ и $\alpha \geq \beta > -1$. Ако $x = t \in (0,1)$ е точка на локален екстремум на $g_n^{(\alpha,\beta)}$, то $g_n^{(\alpha,\beta)}(t) > 0$.*

Лема 4.6. *Ако $\alpha \geq \beta > -1$ и $n \in \mathbb{N}$, то $g_n^{(\alpha,\beta)}(0) \geq 0$.*

1. Предварителни сведения

В началото ще въведем няколко стандартни означения, които използваме в цялата дисертация.

С π_n ще означаваме множеството на алгебричните полиноми от степен по-малка или равна на n с комплексни коефициенти. С π_n^r ще означаваме подмножеството на π_n, състоящо се от полиномите с реални коефициенти.

С $\|\cdot\|$ ще означаваме равномерната норма в $[-1,1]$, т.е.

$$\|f\| := \sup\{|f(x)| \,:\, x \in [-1,1]\}.$$

С $T_n(x)$ ще означаваме n-тия полином на Чебишов от първи род; да припомним, че $T_n(x) = \cos\,(n \arccos x),\ x \in [-1,1]$. Нулите и точките на локален екстремум на $T_n(x)$ ще означаваме съответно с $\{\xi_\nu\}_{\nu=1}^n$ и $\{\eta_\nu\}_{\nu=0}^n$; напомняме, че $\xi_\nu = \cos\frac{(2\nu-1)\pi}{2n}$ и $\eta_\nu = \cos\frac{\nu\pi}{n}$.

1. Неравенство на братята Маркови и обобщението му, дадено от Дафин и Шефер.

Едно от най-важните неравенства за алгебрични полиноми се съдържа в следната теорема:

Теорема А (А. А. Марков, В. А. Марков). *Ако $f \in \pi_n$ и $\|f\| \le 1$, тогава за $k = 1, \dots, n$ е изпълнено*

$$\|f^{(k)}\| \le \|T_n^{(k)}\| \qquad (= T_n^{(k)}(1)).$$

Равенство в това неравенство имаме тогава и само тогава когато $f = \gamma T_n$, където $\gamma \in \mathbb{C}$ и $|\gamma| = 1$.

Забележка 1.1. Точната стойност на $\|T_n^{(k)}\|$ е

$$\|T_n^{(k)}\| = T_n^{(k)}(1) = \frac{n^2(n^2-1^2)\dots(n^2-(k-1)^2)}{(2k-1)!!}.$$

Случаят $k = 1$ на Теорема A е доказан през 1889 година от известния руски математик Андрей Андреевич Марков [8], а общият случай е доказан през 1892 година от неговия по-малък брат Владимир Андреевич Марков [9].

През 1941 година американските математици Ричард Дафин и Алберт Шефер намират красиво обобщение на Теорема A [5]:

Теорема B (Р. Дафин, А. Шефер). *Ако $f \in \pi_n$ удовлетворява неравенствата*

$$|f(\eta_\nu)| \leq 1 \quad \text{за} \quad \nu = 0, \ldots, n,$$

тогава

$$\|f^{(k)}\| \leq \|T_n^{(k)}\| \quad \text{за} \quad k = 1, \ldots, n.$$

Равенство имаме тогава и само тогава когато $f = \gamma T_n$, където $\gamma \in \mathbb{C}$ и $|\gamma| = 1$.

Ясно е, че Теорема A се получава като следствие от Теорема B. За полиноми с реални коефициенти Дафин и Шефер доказват дори нещо повече:

Теорема C (Р. Дафин, А. Шефер). *Ако $f \in \pi_n^r$ удовлетворява неравенствата*

$$|f(\eta_\nu)| \leq 1 \quad \text{за} \quad \nu = 0, \ldots, n,$$

тогава за $k = 1, \ldots, n$,

$$|f^{(k)}(x + iy)| \leq |T_n^{(k)}(1 + iy)| \ \ \text{при} \ \ (x, y) \in [-1, 1] \times \mathbb{R}.$$

Равенство имаме тогава и само тогава когато $f = \pm T_n$.

2. Доказателство на резултата на Дафин и Шефер.

Ще представим доказателство на Теореми B и C, следвайки идеята на Дафин и Шефер. Освен, че доказателството е поучително само по себе си, неговото проследяване има за цел да подготви читателя за основната част на дисертацията.

Ще постъпим така:

1. Ще формулираме три резултата: Твърдение 1, Твърдение 2 и Теорема D.
2. Ще покажем как от тях следват Теореми B и C.
3. Ще дадем доказателствата на Твърдение 1, Твърдение 2 и Теорема D.

Твърдение 1. *Ако $f \in \pi_n$ удовлетворява неравенствата $|f(\eta_\nu)| \leq |T_n(\eta_\nu)|$, $\nu = 0, \ldots, n$, то*

$$|f'(\xi_\nu)| \leq |T_n'(\xi_\nu)| \qquad \text{за} \ \ \nu = 1, \ldots, n.$$

Равенство имаме тогава и само тогава когато $f = \gamma T_n$, където $\gamma \in \mathbb{C}$ и $|\gamma| = 1$.

Твърдение 2. *Полиномът на Чебишов $T_n(x)$ удовлетворява неравенството*

$$|T_n(x + iy)| \leq |T_n(1 + iy)| \quad \text{за всеки} \quad (x, y) \in [-1, 1] \times \mathbb{R}.$$

Теорема D (Р. Дафин, А. Шефер). *Нека са дадени $a < b$, алгебричен полином $g(z) = c(z - x_1)\cdots(z - x_n)$, където $c, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}, c \neq 0$, $x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b$, и нека*

$$|g(x + iy)| \leq |g(b + iy)|, \quad (x, y) \in [a, b] \times \mathbb{R}\,.$$

Ако $f \in \pi_n^r$ удовлетворява неравенството $|f'(x)| \leq |g'(x)|$ в нулите на g, тогава за $k = 1, \ldots, n$ е изпълнено

$$|f^{(k)}(x + iy)| \leq |g^{(k)}(b + iy)|, \qquad (x, y) \in [a, b] \times \mathbb{R}\,.$$

Нека отбележим, че от Твърдение 2 и Теорема D приложена с $f = g = T_n$ и $a = -1, b = 1, y = 0$ следва $\left\|T_n^{(k)}\right\| = T_n^{(k)}(1)$.

Следствие от Теорема D. *Ако в Теорема D предположим, че $f(x)$ има не реални, а комплексни коефициенти, то тогава ще са изпълнени по-слабите неравенства*

$$|f^{(k)}(x)| \leq |g^{(k)}(b)|, \quad x \in [a, b], \quad k = 1, \ldots, n.$$

Доказателство на следствието: Интерполационната формула на Лагранж за полинома f' с възли $x_1, \ldots, x_n$ ни дава представянето

$$f'(x) = \sum_{\nu=1}^{n} \delta_\nu \, \frac{g(x)}{x - x_\nu},$$

където

$$\delta_\nu = \frac{f'(x_\nu)}{g'(x_\nu)}, \quad \text{и} \quad |\delta_\nu| \leq 1, \quad \nu = 1, \ldots, n.$$

Оттук, след $k - 1$ кратно диференциране получаваме

$$f^{(k)}(x) = \sum_{\nu=1}^{n} \delta_\nu \Big(\frac{g(x)}{x - x_\nu}\Big)^{(k-1)}.$$

За фиксирано $x \in [a, b]$, очевидно $|f^{(k)}(x)|$ ще достигне максимална стойност при $\delta_\nu = \pm 1$, $\nu = 1, \ldots, n$ (с подходящо подбрани знаци). Но тогава $f(x)$ ще е полином с реални коефициенти, и по Теорема D ще имаме $|f^{(k)}(x)| \leq |g^{(k)}(b)|$ за $x \in [a, b]$ и $k = 1, \ldots, n$. $\square$

Нека сега в Теорема D изберем $a = -1, b = 1$ и $g = T_n$ (можем да направим това съгласно Твърдение 2). Ясно е тогава, че Теорема B следва веднага от Твърдение 1 и следствието от Теорема D, а Теорема C следва веднага от Твърдение 1 и Теорема D.

И така, за доказателството на Теореми B и C е достатъчно да докажем Твърдение 1, Твърдение 2 и Теорема D.

Доказателство на Твърдение 1: Първо да припомним, че $T_n(x)$ удовлетворява диференциалното уравнение

$$(1-x^2)T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2T_n(x) = 0\,. \tag{1.1}$$

Наистина, от представянето $T_n(x) = \cos(n \arccos x),\ x \in [-1,1]$, лесно следва тъждеството $(1-x^2)[T_n'(x)]^2 = -n^2(T_n^2(x)-1)$. Оттук, след диференциране, получаваме равенството $2(1-x^2))T_n'(x)T_n''(x) - 2x[T_n'(x)]^2 = -2n^2T_n(x)T_n'(x)$, и за да достигнем до (1.1), остава да разделим двете страни на $2T_n'(x)$.)

Пристъпвайки към доказателството на Твърдение 1, да въведем полинома

$$\psi(x) = (1-x^2)T_n'(x) = -n\,2^{n-1}\prod_{\nu=0}^{n}(x-\eta_\nu).$$

(Напомняме, че, съгласно уговорката в самото начало на тази глава, с η_ν, $\nu = 0, 1, \ldots, n$, означаваме точките на локален екстремум на $T_n(x)$ в $[-1,1]$.) Ако $f(x)$ е полиномът от условието на Твърдение 1, от интерполационната формула на Лагранж с възли $\eta_0, \eta_1, ..., \eta_n$ имаме

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{n}\frac{f(\eta_\nu)}{\psi'(\eta_\nu)}\frac{\psi(x)}{x-\eta_\nu}\,,$$

и от тук, след диференциране, получаваме

$$f'(x) = \sum_{\nu=0}^{n}\frac{f(\eta_\nu)}{\psi'(\eta_\nu)}\frac{\psi'(x)(x-\eta_\nu)-\psi(x)}{(x-\eta_\nu)^2}.$$

Ако x е нула на T_n, тогава, предвид (1.1), имаме

$$\psi'(x) = (1-x^2)T_n''(x) - 2xT_n'(x) = -xT_n'(x) - n^2T_n(x) = -xT_n'(x)\,,$$

и от тук

$$\psi'(x)(x-\eta_\nu) - \psi(x) = -xT_n'(x)(x-\eta_\nu) - (1-x^2)T_n'(x) = -(1-x\eta_\nu)T_n'(x).$$

Следователно, ако x е нула на T_n, имаме

$$f'(x) = -T_n'(x)\sum_{\nu=0}^{n}\frac{f(\eta_\nu)}{\psi'(\eta_\nu)}\frac{1-\eta_\nu x}{(x-\eta_\nu)^2}. \tag{1.2}$$

В частност, при $f = T_n$ и x - нула на T_n получаваме

$$T_n'(x) = -T_n'(x)\sum_{\nu=0}^{n}\frac{T_n(\eta_\nu)}{\psi'(\eta_\nu)}\frac{1-\eta_\nu x}{(x-\eta_\nu)^2}. \tag{1.3}$$

Числата $T_n(\eta_\nu) = (-1)^\nu$ и $\psi'(\eta_\nu)$ алтернативно си сменят знака когато ν пробягва множеството от индекси $\{0, 1, \ldots, n\}$, затова в сумата в дясната страна на (1.3) всички събираеми имат един и същ знак. Следователно, ако x е нула на T_n , от (1.3) имаме

$$|T_n'(x)| = |T_n'(x)| \cdot \left| \sum_{\nu=0}^{n} \frac{T_n(\eta_\nu)}{\psi'(\eta_\nu)} \frac{1-\eta_\nu x}{(x-\eta_\nu)^2} \right| = |T_n'(x)| \cdot \sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{|\psi'(\eta_\nu)|} \frac{1-\eta_\nu x}{(x-\eta_\nu)^2}. \quad (1.4)$$

За да завършим доказателството на Твърдение 1, остава да забележим, че от (1.2), (1.4) и неравенствата $|f(\eta_\nu)| \leq |T_n(\eta_\nu)| = 1$, $\nu = 0, \ldots, n$ (изпълнени по условие) следва, че ако x е нула на T_n, тогава

$$|f'(x)| \leq |T_n'(x)| \sum_{\nu=0}^{n} \left| \frac{f(\eta_\nu)}{\psi'(\eta_\nu)} \right| \frac{1-\eta_\nu x}{(x-\eta_\nu)^2} \leq |T_n'(x)| \sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{|\psi'(\eta_\nu)|} \frac{1-\eta_\nu x}{(x-\eta_\nu)^2} = |T_n'(x)|.$$

Равенството $|f'(x)| = |T_n'(x)|$, x - нула на T_n, ще е изпълнено тогава и само тогава когато $|f(\eta_\nu)| = 1$ за $\nu = 0, \ldots, n$, и в неравенството на триъгълника имаме равенство, т.е. само при $f = \gamma T_n$, където $\gamma \in \mathbb{C}$ и $|\gamma| = 1$. □

Доказателство на Твърдение 2: Първо ще формулираме и докажем едно помощно твърдение.

Лема 1.1. *Нека $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2n}$ са неотрицателни числа, а $\alpha_1', \alpha_2', \ldots, \alpha_{2n}'$ е тяхна пермутация, за която $\alpha_1' \geq \alpha_2' \geq \cdots \geq \alpha_{2n-1}' \geq \alpha_{2n}' \geq 0$. Тогава за всяко $t \geq 0$ е изпълнено*

$$(\alpha_1\alpha_2 + t)(\alpha_3\alpha_4 + t) \cdots (\alpha_{2n-1}\alpha_{2n} + t) \leq (\alpha_1'\alpha_2' + t)(\alpha_3'\alpha_4' + t) \cdots (\alpha_{2n-1}'\alpha_{2n}' + t).$$

Доказателство на Лема 1.1: Да разгледаме произведението на два множителя: $(\alpha_1\alpha_2 + t)(\alpha_3\alpha_4 + t)$. Ако α_1 и α_3 са най-големите от числата $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, тогава

$$\begin{aligned}(\alpha_1\alpha_3 + t)(\alpha_2\alpha_4 + t) - (\alpha_1\alpha_2 + t)(\alpha_3\alpha_4 + t) &= (\alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4)t - (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_3\alpha_4)t \\ &= (\alpha_1 - \alpha_4)(\alpha_3 - \alpha_2)t \geq 0.\end{aligned}$$

Така с последователни пренареждания установяваме, че най-голямо произведение се получава, когато числата $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2n-1}, \alpha_{2n}$ са подредени по големина в намаляващ ред. □

Сега да се върнем към доказателството на Твърдение 2.

Нека $c = 2^{n-1}$ и $\theta_\nu = \frac{(2\nu-1)\pi}{2n}$, $\nu = 1, \ldots, n$; тогава нулите на T_n са $\xi_\nu = \cos\theta_\nu$, $\nu = 1, \ldots, n$. Имаме

$$|T_n(x+iy)|^2 = c^2 \prod_{\nu=1}^{n} [(x - \cos\theta_\nu)^2 + y^2].$$

Нека $x = \cos\theta$ (тъй като в условието на Твърдение 2 $x \in [-1, 1]$, можем да направим такова полагане). Тогава

$$\begin{aligned}|T_n(x+iy)|^2 &= c^2 \prod_{\nu=1}^{n} [(\cos\theta - \cos\theta_\nu)^2 + y^2] \\ &= c^2 \prod_{\nu=1}^{n} \left[\frac{1}{4}|e^{i\theta} - e^{i\theta_\nu}|^2 |e^{i\theta} - e^{-i\theta_\nu}|^2 + y^2\right].\end{aligned}$$

За да получим последното равенство, използвахме тъждествата

$$\begin{aligned}|e^{i\theta} - e^{i\theta_\nu}|^2 &= |e^{i\frac{\theta+\theta_\nu}{2}}(e^{i\frac{\theta-\theta_\nu}{2}} - e^{-i\frac{\theta-\theta_\nu}{2}})|^2 \\ &= |e^{i\frac{\theta-\theta_\nu}{2}} - e^{-i\frac{\theta-\theta_\nu}{2}}|^2 \\ &= \left|2i\sin\frac{\theta-\theta_\nu}{2}\right|^2 = 4\sin^2\frac{\theta-\theta_\nu}{2}\,,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|e^{i\theta} - e^{-i\theta_\nu}|^2 &= |e^{i\frac{\theta-\theta_\nu}{2}}(e^{i\frac{\theta+\theta_\nu}{2}} - e^{-i\frac{\theta+\theta_\nu}{2}})|^2 \\ &= |e^{i\frac{\theta+\theta_\nu}{2}} - e^{-i\frac{\theta+\theta_\nu}{2}}|^2 \\ &= \left|2i\sin\frac{\theta+\theta_\nu}{2}\right|^2 = 4\sin^2\frac{\theta+\theta_\nu}{2}\,,\end{aligned}$$

$$4\sin^2\frac{\theta-\theta_\nu}{2}\,4\sin^2\frac{\theta+\theta_\nu}{2} = 4\left(\cos\theta - \cos\theta_\nu\right)^2.$$

Геометрично, точките $e^{\pm i\theta_\nu}, \nu = 1, \ldots, n$, задават върховете на правилен $2n$-ъгълник, вписан в единичната окръжност в $\mathbb{C}$ с център началото, а $e^{i\theta}$ е също точка от тази окръжност. Числата $|e^{i\theta} - e^{\pm i\theta_\nu}|$, $\nu = 1, \ldots, n$ са дължините на хордите, свързващи $e^{i\theta}$ с върховете на правилния $2n$-ъгълник. Изменяне на θ с целочислено кратно на $\frac{\pi}{n}$ променя хордите, но множеството от дължините им остава непроменено.

Да изберем $\phi \in [-\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{2n}]$ такова, че $\theta \equiv \phi \pmod{\frac{\pi}{n}}$. Нека, за определеност, $\phi \in [0, \frac{\pi}{2n}]$ (в случая $\phi \in [-\frac{\pi}{2n}, 0)$ се разсъждава напълно аналогично). Ако $x^* = \cos\phi$, тогава

$$|T_n(x^* + iy)|^2 = c^2 \prod_{\nu=1}^{n} \left[\frac{1}{4}|e^{i\phi} - e^{i\theta_\nu}|^2 |e^{i\phi} - e^{-i\theta_\nu}|^2 + y^2\right]$$

и попадаме в ситуацията на Лема 1.1 с $t = y^2$ и

$$\alpha_{2\nu-1} = \frac{1}{2}|e^{i\theta} - e^{i\theta_\nu}|^2, \quad \alpha_{2\nu} = \frac{1}{2}|e^{i\theta} - e^{-i\theta_\nu}|^2, \quad \nu = 1, \ldots, n.$$

При така избраното x^*, за квадратите от дължините на хордите свързващи x^* с върховете на правилния $2n$-ъгълник са изпълнени неравенствата

$$0 \le |e^{i\phi} - e^{i\theta_1}|^2 \le |e^{i\phi} - e^{-i\theta_1}|^2 \le \cdots \le |e^{i\phi} - e^{i\theta_n}|^2 \le |e^{i\phi} - e^{-i\theta_n}|^2,$$

и съгласно Лема 1.1, имаме

$$|T_n(x+iy)|^2 \le |T_n(x^*+iy)|^2.$$

Освен това, $x^* = \cos\phi \ge \cos\theta_1 = \xi_1$, където ξ_1 е най-голямата нула на T_n , така че

$$|x^*+iy-\cos\theta_\nu| \le |1+iy-\cos\theta_\nu|, \qquad \nu = 1,\dots,n\,.$$

От тук,

$$|T_n(x^*+iy)|^2 = 4^{n-1}\prod_{\nu=1}^{n}|x^*+iy-\cos\theta_\nu|^2 \le 4^{n-1}\prod_{\nu=1}^{n}|1+iy-\cos\theta_\nu|^2 \le |T_n(1+iy)|^2.$$

В крайна сметка, получихме

$$|T_n(x+iy)|^2 \le |T_n(x^*+iy)|^2 \le |T_n(1+iy)|^2,$$

откъдето следва и Твърдение 2:

$$|T_n(x+iy)| \le |T_n(1+iy)|.$$

□

Доказателство на теорема D: Първо ще формулираме и докажем едно помощно твърдение.

Лема 1.2. *Нека $g(x) = c(x-x_1)\cdots(x-x_n)$, където $c, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, $c \ne 0$ и $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$. Нека $f \in \pi_n$ и $|f'(x)| \le |g'(x)|$ в нулите на $g(x)$. Тогава за всяко $k \in \{1,\dots,n\}$ е изпълнено $|f^{(k)}(x)| \le |g^{(k)}(x)|$ в нулите на $g^{(k-1)}(x)$.*

Доказателство на Лема 1.2: Ще приложим индукция по k. Твърдението е вярно при $k=1$, както следва от самото условие на Лема 1.2. С това положихме основата на индукцията. За да направим индукционната стъпка, първо ще докажем, че $|f''(x)| \le |g''(x)|$ в нулите на $g'(x)$.

От интерполационната формула на Лагранж с възли $x_1,\dots,x_n$ имаме

$$f'(x) = \sum_{\nu=1}^{n}\frac{f'(x_\nu)}{g'(x_\nu)}\,\frac{g(x)}{x-x_\nu},$$

и следователно

$$\frac{f'(x)}{g(x)} = \sum_{\nu=1}^{n}\delta_\nu\,\frac{1}{x-x_\nu}, \qquad \delta_\nu = \frac{f'(x_\nu)}{g'(x_\nu)}\,.$$

Според условието на Лема 1.2, имаме $|\delta_\nu| \le 1$ за $\nu = 1,\dots,n$. Диференцирайки по x, получаваме

$$\frac{f''(x)g(x)-f'(x)g'(x)}{g^2(x)} = -\sum_{\nu=1}^{n}\delta_\nu\,\frac{1}{(x-x_\nu)^2}$$

Ако x е нула на $g'(x)$, горното равенство добива вида

$$\frac{f''(x)}{g(x)} = -\sum_{\nu=1}^{n} \delta_\nu \frac{1}{(x-x_\nu)^2}. \tag{1.5}$$

От последното равенство при $f = g$ получаваме, че ако x е нула на $g'(x)$, тогава

$$\frac{g''(x)}{g(x)} = -\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{(x-x_\nu)^2}. \tag{1.6}$$

От сравняването на (1.5) и (1.6) намираме, че в нулите на $g'(x)$ е изпълнено

$$\begin{aligned}\frac{|f''(x)|}{|g(x)|} &\leq \sum_{\nu=1}^{n} |\delta_\nu| \frac{1}{(x-x_\nu)^2} \\ &\leq \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{(x-x_\nu)^2} = \frac{|g''(x)|}{|g(x)|}\,,\end{aligned}$$

и от тук заключаваме, че $|f''(x)| \leq |g''(x)|$ в нулите на $g'(x)$.

И така, доказахме, че ако $|f'(x)| \leq |g'(x)|$ в нулите на $g(x)$, то $|f''(x)| \leq |g''(x)|$ в нулите на $g'(x)$. Прилагайки този резултат за $g^{(p-1)}$ вместо за g (да отбележим, че щом нулите на g са реални и различни, то по теоремата на Рол и нулите на $g^{(p-1)}$ са такива), получаваме,че ако $|f^{(p)}(x)| \leq |g^{(p)}(x)|$ в нулите на $g^{(p-1)}(x)$, то $|f^{(p+1)}(x)| \leq |g^{(p+1)}(x)|$ в нулите на $g^{(p)}(x)$. Този факт ни позволява да направим индукционната стъпка в Лема 1.2 и да завършим нейното доказателство. $\square$

Сега вече можем да пристъпим към доказателството на Теорема D. Ще докажем,че ако $x^* + iy^*$ е фиксирана точка от ивицата $\{x \in [a,b],\ y \in \mathbb{R}\}$, то

$$|f'(x^* + iy^*)| \leq |g'(b + iy^*)|.$$

За целта да въведем полинома $h(z) = c(z-y_1)...(z-y_n)$, който има същия старши коефициент като $g(z)$, а нулите му се получават чрез отразяване относно x^* на тези нули на $g(z)$, които са по-големи от x^*. С други думи, полагаме $y_\nu = x_\nu$, ако $x_\nu \leq x^*$ и $y_\nu = 2x^* - x_\nu$, ако $x_\nu > x^*$.

Ясно е, че при така построения полином h имаме

$$|h(x^* + iy)| = |g(x^* + iy)|, \quad y \in \mathbb{R}\,.$$

Първо ще покажем, че е изпълнено неравенството

$$|f'(x^* + iy^*)| \leq |h'(x^* + iy^*)|. \tag{1.7}$$

Имаме

$$\frac{h'(z)}{h(z)} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{z - y_\nu},$$

Освен това, от интерполационната формула на Лагранж с възли $x_1, \ldots, x_n$ получаваме

$$\frac{f'(z)}{g(z)} = \sum_{\nu=1}^{n} \delta_\nu \frac{1}{z - x_\nu},$$

където сме положили $\delta_\nu = \dfrac{f'(x_\nu)}{g'(x_\nu)}$. Според условието на теорема D, изпълнено е $|\delta_\nu| \leq 1$ за $\nu = 1, \ldots, n$. Нека още отбележим, че числата $\delta_1, \ldots, \delta_n$ са реални, защото по условие полиномът $f(x)$ е с реални коефициенти. Тогава ще имаме

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f'(x^* + iy^*)}{g(x^* + iy^*)}\right| &= \left|\sum_{\nu=1}^{n} \delta_\nu \frac{1}{x^* + iy^* - x_\nu}\right| \\
&= \left|\sum_{\nu=1}^{n} \delta_\nu \frac{x^* - x_\nu}{(x^* - x_\nu)^2 + (y^*)^2} - i \sum_{\nu=1}^{n} \delta_\nu \frac{y^*}{(x^* - x_\nu)^2 + (y^*)^2}\right| \\
&\leq \left|\sum_{\nu=1}^{n} \frac{x^* - y_\nu}{(x^* - y_\nu)^2 + (y^*)^2} - i \sum_{\nu=1}^{n} \frac{y^*}{(x^* - y_\nu)^2 + (y^*)^2}\right| \\
&= \left|\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{x^* + iy^* - y_\nu}\right| = \left|\frac{h'(x^* + iy^*)}{h(x^* + iy^*)}\right|.
\end{aligned}$$

Тъй като $|g(x^* + iy^*)| = |h(x^* + iy^*)|$, от горното неравенство получаваме (1.7).

Сега ще покажем, че е изпълнено неравенството

$$|h'(x^* + iy^*)| \leq |g'(b + iy^*)|. \tag{1.8}$$

За целта да разгледаме полинома

$$\varphi(z) = g(z) - \alpha h(z + x^* - b),$$

където $\alpha \in \mathbb{C}$ е фиксирано число и $|\alpha| < 1$.

Нека Γ_R е затворената крива, съставена от отсечката $\{z = b + iy, y \in [-R, R]\}$ и полуокръжността $\{|z - b| = R, \Re z \geq b\}$.

Върху отсечката $\{z = b + iy, y \in [-R, R]\}$ имаме

$$\begin{aligned}
|g(z)| = |g(b + iy)| &> |\alpha\, g(x^* + iy)| = |\alpha\, h(x^* + iy)| \\
&= |\alpha\, h(b + iy + x^* - b)| = |\alpha\, h(z + x^* - b)|.
\end{aligned}$$

Ако изберем R да е достатъчно голямо, тогава върху полуокръжността $\{|z - b| = R, \Re z \geq b\}$ също ще бъде изпълнено неравенството

$$|g(z)| > |\alpha\, h(z + x^* - b)|,$$

защото $g(z)$ и $h(z)$ имат един и същ старши коефициент и $|\alpha| < 1$.

И така, неравенството $|g(z)| > |\alpha h(z + x^* - b)|$ е изпълнено във всяка точка от кривата Γ_R, стига $R > 0$ да е избрано достатъчно голямо. От теоремата на Руше следва, че при такива достатъчно големи R, $\varphi(z)$ и $g(z)$ ще имат един и същ брой нули във вътрешността на кривата Γ_R. Но $g(z)$ няма нули там, следователно и $\varphi(z)$ няма да има. Оставяйки $R \to +\infty$, получаваме, че $\varphi(z)$ няма нули в полуравнината $\{\Re z \geq b\}$. Тогава, според теоремата на Гаус-Люка, $\varphi'(z)$ също няма нули в полуравнината $\{\Re z \geq b\}$ и в частност $\varphi'(z)$ няма нули върху правата $\{\Re z = b\}$. Оттук следва, че

$$g'(b + iy^*) \neq \alpha h'(x^* + iy^*), \tag{1.9}$$

което пък веднага ни дава неравенството

$$|h'(x^* + iy^*)| \leq |g'(b + iy^*)|\,.$$

Наистина, ако допуснем, че $|h'(x^* + iy^*)| > |g'(b + iy^*)|$, тогава за константата $\alpha_0 = \dfrac{g'(b + iy^*)}{h'(x^* + iy^*)}$ ще имаме $|\alpha_0| < 1$, докато $g'(b + iy^*) = \alpha_0 h'(x^* + iy^*)$, в противоречие с (1.9).

Така доказахме неравенството (1.8).

От (1.7) и (1.8) следва

$$|f'(x^* + iy^*)| \leq |g'(b + iy^*)|.$$

Понеже $x^* + iy^*$ беше произволно избрана точка от ивицата $\{x \in [a, b], y \in \mathbb{R}\}$, то получаваме, че

$$|f'(x + iy)| \leq |g'(b + iy)|\,, \qquad x \in [a, b],\, y \in \mathbb{R}\,, \tag{1.10}$$

т.е. доказахме Теорема D за случая $k = 1$. В частност, избирайки $f = g$, от (1.10) получаваме

$$|g'(x + iy)| \leq |g'(b + iy)|, \quad x \in [a, b],\, y \in \mathbb{R}.$$

Освен това, от Лема 1.2 получаваме, че $|f''(x)| \leq |g''(x)|$ в нулите на $g'(x)$. Сега виждаме, че f' и g' също удовлетворяват условията на Теорема D, така че можем да приложим доказания вече случай $k = 1$ на Теорема D за тях, получавайки, че

$$|f''(x + iy)| \leq |g''(b + iy)|\,, \qquad x \in [a, b],\, y \in \mathbb{R},$$

което доказва Теорема D за случая $k = 2$. Повтаряне на същите разсъждения доказва Теорема D и за останалите стойности на k. □

С това доказахме неравенството на Дафин и Шефер за полиноми с комплексни коефициенти (Теорема B) и неговия уточнен вариант за полиноми с реални коефициенти (Теорема C).

3. Коментар върху подхода на Дафин и Шефер. Неравенства от тип на Дафин и Шефер.

Предмет на настоящата дисертация са аналози на Теорема C. С други думи, интересуват ни неравенства от типа на Дафин и Шефер в комплексната равнина. Теорема D на Дафин и Шефер е достатъчно обща, и допуска приложения за установяването на такива неравенства с екстремален полином $Q(x)$ от степен n, различен от T_n. Един директен аналог на Теорема C би изглеждал така:

Задача 1. Нека Q е полином от степен n, който има n различни нули в $(-1,1)$. Ако $f \in \pi_n^r$ и $|f| \leq |Q|$ в нулите на $(1-x^2)Q'(x)$ (т.е. в екстремалните точки на Q в $[-1,1]$), да се докаже, че за $k = 1, \ldots, n$ е изпълнено

$$|f^{(k)}(x+iy)| \leq |Q^{(k)}(1+iy)|, \quad (x,y) \in [-1,1] \times \mathbb{R}.$$

За да можем да приложим подхода на Дафин и Шефер, т.е. следвайки идейно доказателството на Теорема C да решим тази задача, е необходимо да направим две основни стъпки:

1. Да докажем, че екстремалният полином Q притежава свойството

$$|Q(x+iy)| \leq |Q(1+iy)| \quad \text{при} \quad (x,y) \in [-1,1] \times \mathbb{R}.$$

   В своите работи за неравенства от типа на Дафин и Шефер в комплексната равнина, Г. Николов нарича това свойство *End-Point Domination Property* (съкратено EPDP). Тук също ще използваме това название.

2. Да докажем, че от $f \in \pi_n^r$ и $|f| \leq |Q|$ в нулите на $(1-x^2)Q'(x)$ следва $|f'| \leq |Q'|$ в нулите на $Q(x)$.

Както видяхме по-горе, в случая $Q = T_n$ Дафин и Шефер реализират Стъпка 1, използвайки съществено някои геометрични свойства на нулите на T_n. В случая $Q \neq T_n$ тяхната техника не работи, и трябва да се използва друг подход. За реализацията на Стъпка 1 в случая когато Q е класически ортогонален полином (например полином на Гегенбауер) ще използваме формулата на Йенсен за развитието в ред от тип на Маклорен на квадрата на модула но функция от класа на Лагер - Пойа.

За да направим Стъпка 2, ще използваме два красиви резултата от работата на В. А. Марков. Първият от тях се отнася до унаследяването на свойството преплитане на нулите на два алгебрични полиноми, имащи само реални нули, от нулите на техните производни. Вторият резултат описва произтичащите от това унаследяване поточкови оценки за големината на производните на алгебрични полиноми от π_n, върху които са наложени ограничения върху множество от $n+1$ точки от реалната права. Тези два резултата наричаме накратко леми на Марков.

В параграфи 4 и 6 излагаме с доказателства формулата на Йенсен и лемите на В. А. Марков.

4. Една формула на Йенсен.

Основна роля в дисертацията ще играе следната

Формула на Йенсен. *Ако f е алгебричен полином от степен n с реален старши коефициент и всичките му нули са реални, то е в сила формулата*

$$|f(x+iy)|^2 = \sum_{k=0}^{n} L_k(f;x)y^{2k}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

където

$$L_0(f;x) = f^2(x),$$

$$L_k(f;x) = \sum_{j=0}^{2k} (-1)^{k-j} \frac{f^{(j)}(x)}{j!} \frac{f^{(2k-j)}(x)}{(2k-j)!}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

При това, $L_k(f;x) \geq 0, x \in \mathbb{R}, \quad k = 1, \ldots, n$, и ако нулите на f са различни, тогава тези неравенства (ще ги наричаме неравенства на Йенсен) са строги.

Доказателство на формулата на Йенсен:

Разглеждаме $|f(z)|^2 = |f(x+iy)|^2$. Използвайки развитие в ред на Тейлър и факта, че $Im\,|f(x+iy)|^2 = 0$, получаваме

$$\begin{aligned}
|f(x+iy)|^2 = f(x+iy).\overline{f(x+iy)} &= \left[\sum_{m=0}^{n} \frac{f^{(m)}(x)}{m!}(iy)^m\right] \cdot \left[\sum_{l=0}^{n} \frac{f^{(l)}(x)}{l!}(-iy)^l\right] \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{m+l=2k} (-1)^l \frac{f^{(m)}(x)}{m!} \frac{f^{(l)}(x)}{l!} i^{m+l} \right) y^{2k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{2k} (-1)^{k-j} \frac{f^{(j)}(x)}{j!} \frac{f^{(2k-j)}(x)}{(2k-j)!} \right) y^{2k}.
\end{aligned}$$

Така изведохме формулата на Йенсен. За да докажем неравенствата на Йенсен, да означим с c старшия коефициент, а с $x_1, \ldots, x_n$ - нулите на f. Имаме

$$\begin{aligned}
|f(x+iy)|^2 = c^2 \prod_{k=1}^{n} |x+iy-x_k|^2 &= c^2 \prod_{k=1}^{n} [(x-x_k)^2 + y^2] \\
&= c^2 \sum_{k=0}^{n} \left[\sum (x-x_{i_1})^2 \ldots (x-x_{i_{n-k}})^2 \right] y^{2k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left[f^2(x) \cdot \sum \frac{1}{(x-x_{i_1})^2 \ldots (x-x_{i_k})^2} \right] y^{2k},
\end{aligned}$$

където в последната сума сумирането е по всички $k-$ комбинации на $\{1, \ldots, n\}$.

Оттук получаваме следното еквивалентно представяне на $L_k(f;x)$:

$$L_k(f;x) = f^2(x) \cdot \sum \frac{1}{(x - x_{i_1})^2 \ldots (x - x_{i_k})^2},$$

От това представяне стават очевидни и неравенствата на Йенсен. $\square$

Забележка 1.2. Формулата на Йенсен е вярна и за класа от цели функции на Лагер-Пойа, които са реални върху $\mathbb{R}$, ако в нея вместо до n оставим сумационния индекс k да се изменя до ∞. Да припомним, че класът на Лагер-Пойа се състои от целите функции, които са равномерни граници върху компактните подмножества на $\mathbb{C}$ на редици от алгебрични полиноми, имащи само реални нули.

От формулата на Йенсен следва, че ако f е алгебричен полином от степен n с реален старши коефициент и всичките му нули са реални, то неравенството

$$|f(x+iy)| \leq |f(1+iy)|, \quad (x,y) \in [-1,1] \times \mathbb{R}$$

би следвало от неравенствата

$$L_k(f;x) \leq L_k(f;1), x \in [-1,1], \quad k = 0, \ldots, n.$$

С други думи формулата на Йенсен ни дава начин за получаване на EPDP.

Накрая да подчертаем и факта, който лесно следва от самото определение на $L_k(f;x)$, че ако $f(x)$ е четна или нечетна функция (например ако $f(x)$ е полином на Ермит или пък полином на Гегенбауер), то всичките коефициенти $L_k(f;x)$ във формулата на Йенсен са четни функции.

5. Методът на Сонин-Пойа.

Един елегантен подход от класическия анализ за описание на поведението на функции, удовлетворяващи хомогенно обикновено диференциално уравнение от втори ред е методът на Сонин–Пойа, виж например [28, Theorem 7.31] и бележката към нея. Този метод намира широко приложение за описание на поведението на редицата от локалните екстремуми на класическите ортогонални полиноми на Якоби, Лагер и Ермит, на функциите на Бесел, и др. Предвид изложеното в предходния параграф, този подход е приложим за доказване на неравенството

$$L_0(f;x) \leq L_0(f;1), \quad x \in [-1,1]$$

когато f е полином на Ермит, полином на Гегенбауер или полином на Якоби. Тук накратко излагаме този подход.

Нека $y(x)$ е реалнозначно решение на линейното хомогенно обикновено диференциално уравнение от втори ред

$$py'' - qy' + ry = 0, \tag{1.11}$$

където $p(x), q(x), r(x)$ са дадени реалнозначни диференцируеми функции. Тогава помощната функция

$$\varphi(x) = y^2(x) + \frac{p(x)}{r(x)}\, y'(x)^2$$

интерполира $y^2(x)$ в нейните точки на локален максимум и, при условие че $\dfrac{p(x)}{r(x)} \geq 0$, мажорира $y^2(x)$. Освен това, с помощта на (1.11) лесно получаваме, че

$$\varphi'(x) = \frac{2q(x)\, r(x) + p'(x)r(x) - p(x)\, r'(x)}{r^2(x)}\, y'(x)^2\,.$$

Наистина, имаме

$$\begin{aligned}
\varphi'(x) &= 2\, y(x)y'(x) + \frac{p'(x)r(x) - p(x)r'(x)}{r^2(x)}\big[y'(x)\big]^2 + 2\,\frac{p(x)}{r(x)}y'(x)y''(x) \\
&= 2\,\frac{y'(x)}{r(x)}\,(r(x)y(x) + p(x)y''(x)) + \frac{p'(x)r(x) - p(x)r'(x)}{r^2(x)}\big[y'(x)\big]^2 \\
&= 2\,\frac{q(x)}{r(x)}\big[y'(x)\big]^2 + \frac{p'(x)r(x) - p(x)r'(x)}{r^2(x)}\big[y'(x)\big]^2 \\
&= \frac{2\, q(x)r(x) + p'(x)r(x) - p(x)r'(x)}{r^2(x)}\big[y'(x)\big]^2\,.
\end{aligned}$$

От тази формула следва, че за монотонността на $\varphi(x)$, а оттам и монотонността на редицата от локалните екстремуми на $y(x)$, можем да правим заключения само от знака на израза $2q(x)\, r(x) + p'(x)r(x) - p(x)\, r'(x)$, който е лесно да се пресметне, без да е необходимо да знаем решението $y(x)$. В това се състои същността на метода на Сонин-Пойа.

В дисертацията ще направим две конкретни приложения на метода на Сонин-Пойа: в параграф 4 на Глава 2 и в параграф 1 на Глава 3, а в параграф 3 на Глава 4 ще предложим и обобщение на метода на Сонин-Пойа за описание на поведението на функциите $L_k(f;x)$, $k = 0, 1, \ldots, n$, когато f е n-тият полином на Якоби (класическото приложение на този метод е за случая $k = 0$).

6. Две леми на Владимир Марков

Ще формулираме и докажем две леми на В. А. Марков. Първата от тях се използва в доказателството на втората, а втората ще ни потрябва по-нататък в изложението.

Определение. Нека p и q са алгебрични полиноми, имащи само реални и прости нули. Казваме, че нулите на p и q се преплитат, ако можем да обходим всичките нули на двата полинома, движейки се само в една посока, при което

движение скачаме алтернативно от нула на единия към нула на другия полином. Ако нямаме скокове „на място“ , т.е. съвпадение на нула на p с нула на q, казваме, че нулите на p и q се преплитат строго.

Ясно е, че преплитане е възможно само когато p и q са от една и съща степен или степените им се различават с единица. Ако p е от степен n, q е от степен $n-1$ и нулите на p и q се преплитат строго, ще казваме, че нулите на q разделят нулите на p.

Лема 1.3 (Първа лема на Вл. Марков). *Нека p и q, $p \neq q$, са алгебрични полиноми, имащи само реални и прости нули. Ако нулите на p и q се преплитат, то нулите на p' и q' се преплитат строго.*

Доказателство:

Доказателството, предложено тук следва [17]. Първо ще покажем, че ако един полином има само реални и прости нули, то всяка нула на производната му е строго растяща функция на коя да е от нулите на полинома. Нека $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ са нулите на $p \in \pi_n$. Тогава от теоремата на Рол следва, че p' има $n-1$ реални прости нули, които разделят нулите на p. Ако $x = \tau$ е коя да е нула на p', то

$$\frac{p'(\tau)}{p(\tau)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\tau - t_i} = 0.$$

Разглеждаме $\tau = \tau(t_1, \ldots, t_n)$ като неявна функция, зададена посредством тъждеството

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\tau - t_i} = 0.$$

Диференцираме това тъждество спрямо $t_k (1 \leq k \leq n)$ и получаваме

$$\frac{\partial \tau}{\partial t_k} = \frac{(\tau - t_k)^{-2}}{(\tau - t_1)^{-2} + (\tau - t_2)^{-2} + \cdots + (\tau - t_n)^{-2}} > 0,$$

откъдето следва,че τ е строго растяща функция на t_k.

Ще докажем лемата най-напред в случая, когато p и q са от една и съща степен n. Без ограничение на общността можем да считаме, че p и q имат старши коефициент 1 и нека $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$ са нулите на p, а $\mathbf{t}' = (t'_1, t'_2, \ldots, t'_n)$ са нулите на q, като $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ и $t'_1 < t'_2 < \cdots < t'_n$. По условие нулите на p и q се преплитат и нека приемем за определеност, че

$$t_1 \leq t'_1 \leq t_2 \leq t'_2 \leq \cdots \leq t_n \leq t'_n. \tag{1.12}$$

Тъй като нулите на производните на полиномите зависят непрекъснато и строго монотонно от нулите на самите полиноми, ясно е, че за $\mathbf{t}'$ достатъчно близко до $\mathbf{t}$ нулите на p' и q' ще се преплитат строго, като нулите на q' ще са разположени надясно спрямо съответните нули на p'. Ето защо, за да докажем лемата, остава

да се убедим,че е невъзможна ситуация, при която е изпълнено (1.12) и за някое j, $(1 \leq j \leq n-2)$, j-тата по големина нула на q' съвпада с $j+1$-вата нула на p'. Да допуснем противното, т.е. че такава ситуация е възможна, и да означим въпросната нула с τ. Тогава

$$sign\,\{p''(\tau)\} = (-1)^{n-2-j}, \quad sign\,\{q''(\tau)\} = (-1)^{n-1-j}$$

и следователно ще съществува $\lambda > 0$, такова че за полинома ψ от степен n, дефиниран посредством

$$\psi(x) = p(x) + \lambda q(x),$$

е изпълнено

$$\psi'(\tau) = \psi''(\tau) = 0. \tag{1.13}$$

Ние обаче ще докажем, че при условието (1.12),полиномът ψ има точно n реални нули, броени с кратностите им, и няма нули с кратност по-голяма от 2. Тогава, по теоремата на Рол, ψ' трябва да има само реални прости нули, което противоречи на (1.13).

Ще разгледаме отделно два случая:

Случай 1: Нулите на p и q се преплитат строго. Сега в (1.12) всички неравенства са строги. Като използваме (1.12) и факта, че p е с положителен старши коефициент, получаваме

$$sign\,\{\psi(t'_k)\} = sign\,\{p(t'_k)\} = (-1)^{n-k}, \quad k = 1, \ldots, n,$$

което заедно с

$$sign\,\{\psi(-\infty)\} = (-1)^n sign(1+\lambda) = (-1)^n$$

показва,че в този случай ψ има n реални прости нули, противоречие с (1.13).

Случай 2: Нулите на p и q не се преплитат строго. В този случай, ако означим с $r(x)$ най-големия общ делител на p и q , ще имаме

$$\psi(x) = r(x)\left[p_0(x) + \lambda q_0(x)\right],$$

където p_0 и q_0 са полиноми от една и съща степен, чиито нули се преплитат строго. Съгласно доказаното в Случай 1, полиномът $p_0 + \lambda q_0$ има само реални прости нули; същото е вярно и за полинома r, защото по условие нулите на p и q са реални и прости. Следователно полиномът ψ има точно n реални нули, броени с кратностите им, и няма нули с кратност по-голяма от 2. Тогава, по теоремата на Рол, ψ' има само прости нули, което отново е противоречие с (1.13).

Така доказахме лемата в случая, когато p и q са от една и съща степен. Случаят, когато степента на q е с единица по-малка от степента на p, се получава

като приложим разгледания вече случай към полиномите p и $\frac{x-t'_n}{t'_n}q$ и оставим $t'_n \to +\infty$. $\square$

Преди да преминем към втората лема на Владимир Марков, ще въведем някои означения. Нека

$$\omega(x) = (x - t_0)(x - t_1)\dots(x - t_n), \tag{1.14}$$

където $t_0 > t_1 > \dots > t_n$ са фиксирани реални числа и

$$\omega_\nu(x) = \frac{\omega(x)}{x - t_\nu}, \quad \nu = 0, \dots, n. \tag{1.15}$$

При $0 \le i < j \le n$ имаме, че нулите на полиномите ω_i и ω_j се преплитат (нестрого), като нулите на ω_i са по-малки или равни на съответните нули на ω_j. Съгласно първата лема на Марков това преплитане (но вече строго) и тази наредба се унаследяват от нулите на производните $\omega_i^{(k)}$ за $k \in \{1, \dots, n-1\}$. Ето защо, ако при $i = 0, \dots, n$ означим с $\{\gamma_{\nu,i}\}_{\nu=1}^{n-k}$ нулите на $\omega_i^{(k)}$, номерирани в нарастващ ред, то ще имаме

$$\begin{aligned}&\gamma_{1,0} < \gamma_{1,1} < \dots < \gamma_{1,n} < \gamma_{2,0} < \gamma_{2,1} < \dots < \gamma_{2,n}\\ &< \dots < \gamma_{n-k,0} < \gamma_{n-k,1} < \dots < \gamma_{n-k,n}.\end{aligned}$$

Да положим

$$I_{n,k}(\omega) = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{ако } k = n \\ (-\infty, \gamma_{1,0}] \displaystyle\bigcup_{\nu=1}^{n-k-1} [\gamma_{\nu,n}, \gamma_{\nu+1,0}] \cup [\gamma_{n-k,n}, \infty), & \text{ако } k \in \{1, \dots, n-1\} \end{cases} \tag{1.16}$$

В случая, когато $k \in \{1, \dots, n-1\}$, множеството $I_{n,k}(\omega)$ се състои от $n-k+1$ незастъпващи се интервали върху реалната права, които ще наричаме *Чебишови интервали.*

Лема 1.4 (Втора лема на Вл. Марков). *Нека ω, ω_ν и $I_{n,k}(\omega)$ са дефинирани съответно с* (1.14), (1.15) *и* (1.16). *Тогава:*

а) Точката $t \in \mathbb{R}$ е от $I_{n,k}(\omega)$ тогава и само тогава когато $\omega_0^{(k)}(t)\omega_n^{(k)}(t) \ge 0$. При това $t \in \mathbb{R}$ е вътрешна точка за $I_{n,k}(\omega)$ тогава и само тогава когато $\omega_0^{(k)}(t)\omega_n^{(k)}(t) > 0$.

б) Нека $Q \in \pi_n$ има n различни реални нули, които се преплитат с нулите на ω. Ако $f \in \pi_n$ е произволен полином, удовлетворяващ неравенствата

$$|f(t_j)| \le |Q(t_j)|, \quad j = 0, \dots, n, \tag{1.17}$$

то

$$|f^{(k)}(x)| \le |Q^{(k)}(x)|, \quad x \in I_{n,k}(\omega). \tag{1.18}$$

в) Ако x е вътрешна точка за $I_{n,k}(\omega)$ и $f \in \pi_n$ удовлетворява (1.17), то равенство в (1.18) се достига тогава и само тогава когато $f = cQ$ и $|c| = 1$.

Доказателство на втората лема на Марков:

а) В случая $k = n$ няма какво да се доказва, тъй като тогава $I_{n,n}(\omega) = \mathbb{R}$ и $\omega_0^{(n)}(t) = \omega_n^{(n)}(t) = n!$. В случая $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ твърдението следва от факта, че краищата на Чебишовите интервали са нулите на полиномите $\omega_0^{(k)}$ и $\omega_n^{(k)}$ и точките от вътрешността на тези интервали се характеризират със свойството, че всичките полиноми $\left\{\omega_i^{(k)}\right\}_{i=0}^{n}$ (и в частност $\omega_0^{(k)}$ и $\omega_n^{(k)}$) имат един и същ брой нули надясно от тези точки.

Да отбележим, че от казаното току-що следва, че за $\nu = 0, 1, \ldots, n-1$ имаме

$$\omega_\nu^{(k)}(x)\omega_{\nu+1}^{(k)}(x) \geq 0, \quad x \in I_{n,k}(\omega) \tag{1.19}$$

и при това когато x е вътрешна точка за $I_{n,k}(\omega)$, неравенствата (1.19) са строги.

б) Без ограничение на общността можем да считаме, че полиномът Q е с реални коефициенти. Ако $f \in \pi_n$ удовлетворява (1.17), то, диференцирайки k пъти интерполационната формула на Лагранж за f с възли $t_0, t_1, \ldots, t_n$ и използвайки неравенството на триъгълника, получаваме

$$\begin{aligned} |f^{(k)}(x)| &= \Big|\sum_{\nu=0}^{n} \frac{\omega_\nu^{(k)}(x)}{\omega_\nu(t_\nu)} f(t_\nu)\Big| \leq \sum_{\nu=0}^{n} \Big|\frac{\omega_\nu^{(k)}(x)}{\omega_\nu(t_\nu)}\Big| |f(t_\nu)| \\ &\leq \sum_{\nu=0}^{n} \Big|\frac{\omega_\nu^{(k)}(x)}{\omega_\nu(t_\nu)}\Big| |Q(t_\nu)| =: M_k(Q, x). \end{aligned} \tag{1.20}$$

По условие нулите на Q и ω се преплитат, следователно

$$Q(t_\nu)Q(t_{\nu+1}) \leq 0, \quad \nu = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{1.21}$$

Освен това лесно се съобразява, че

$$\omega_\nu(t_\nu)\omega_{\nu+1}(t_{\nu+1}) < 0, \quad \nu = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{1.22}$$

От (1.19), (1.21) и (1.22) следва, че при $x \in I_{n,k}(\omega)$ имаме

$$|Q^{(k)}(x)| = \Big|\sum_{\nu=0}^{n} \frac{\omega_\nu^{(k)}(x)}{\omega_\nu(t_\nu)} Q(t_\nu)\Big| = \sum_{\nu=0}^{n} \Big|\frac{\omega_\nu^{(k)}(x)}{\omega_\nu(t_\nu)}\Big| |Q(t_\nu)| = M_k(Q, x). \tag{1.23}$$

От (1.20) и (1.23) следва б).

в) От (1.20), вземайки предвид (1.19), (1.21) и (1.22), получаваме, че ако x е вътрешна точка за $I_{n,k}(\omega)$, то $|f^{(k)}(x)| = M_k(Q, x)$ тогава и само тогава когато $|f| = |Q|$ в точките $t_0, t_1, \ldots, t_n$ и f има същата знакова структура в тези точки, както Q, т.е. тогава и само тогава, когато съществува $\theta \in \mathbb{R}$, такова че $f(t_\nu) = e^{i\theta}Q(t_\nu)$, $\nu = 0, 1, \ldots, n$. Понеже f, $Q \in \pi_n$, последното изискване е равносилно с $f = e^{i\theta}Q$, т.е. $f = c\,Q$, където $|c| = 1$. $\square$

2. Неравенство от типа на Дафин и Шефер за полиномите на Ермит

1. Някои свойства на полиномите на Ермит.

Изложените в този параграф свойства на полиномите на Ермит са добре известни, и могат да се намерят например в монографията на Сегьо [28]. Навсякъде в тази глава с H_n ще означаваме n-тия полином на Ермит, а с a_{n+1} ще означаваме най-голямата нула на H_{n+1}. Напомняме, че полиномите на Ермит са ортогонални върху $(-\infty, \infty)$ с тегло e^{-x^2} и че те се задават с формулата

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-x^2}\right) .$$

По-нататък ще използваме следните две свойства на H_n:

$$H'_{n+1}(x) = (2n+2)H_n(x) , \tag{2.1}$$

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0, \quad y = H_n . \tag{2.2}$$

За пълнота ще приведем доказателства на (2.1) и (2.2).

Използвайки формулата на Лайбниц за n-та производна на произведение, лесно получаваме

$$\begin{aligned} H_{n+1}(x) &= (-1)^{n+1} e^{x^2} \left(e^{-x^2}\right)^{(n+1)} = (-1)^{n+1} e^{x^2} \left(e^{-x^2}.(-2x)\right)^{(n)} \\ &= (-1)^{n+1} e^{x^2} \left[-2x \left(e^{-x^2}\right)^{(n)} - 2n \left(e^{-x^2}\right)^{(n-1)}\right] \\ &= 2x\, H_n(x) - 2n\, H_{n-1}(x) , \end{aligned}$$

т.е.,

$$2x\, H_n(x) - H_{n+1}(x) = 2nH_{n-1}(x) .$$

От дефиницията на $H_n(x)$ след еднократно диференциране намираме

$$H'_n(x) = 2x\, H_n(x) - H_{n+1}(x) ,$$

и след диференциране още веднъж получаваме

$$H''_n(x) = 2H_n(x) + 2x\, H'_n(x) - H'_{n+1}(x) .$$

От последните три равенства лесно следват (2.1) и (2.2). Наистина, от сравняване на първото и второто равенство получаваме

$$H'_n(x) = 2n\, H_{n-1}(x) ,$$

което е (2.1) с $n+1$ заместено с n.

От третото равенство и току-що полученото (2.1) пък очевидно следва (2.2).

2. Основен резултат и скица на доказателството му.

Напомняме, че с a_{n+1} означаваме най-голямата нула на H_{n+1}.

Основният резултат в тази глава е следният:

Теорема 2.1 (Г. Николов, А. Александров [1]). *Ако $f \in \pi_n^r$ и $|f| \le |H_n|$ в нулите на H_{n+1}, тогава при $k = 1, \dots, n$ имаме*

$$|f^{(k)}(x+iy)| \le |H_n^{(k)}(a_{n+1}+iy)| \quad \text{за всяка точка} \quad (x,y) \in [-a_{n+1}, a_{n+1}] \times \mathbb{R}. \quad (2.3)$$

Равенство в (2.3) се достига само ако $f = \pm H_n$.

Теорема 2.1 е аналог на Теорема C на Дафин и Шефер (виж Глава 1). В този аналог ролята на полинома на Чебишов T_n се изпълнява от полинома на Ермит H_n, точките за сравняване са вече не екстремалните точки на T_n в $[-1,1]$, а нулите на H_{n+1}, и, накрая, интервалът $[-1,1]$ е заменен с $[-a_{n+1}, a_{n+1}]$.

За да докажем Теорема 2.1, ще формулираме и докажем аналози на Твърдение 1 и Твърдение 2 от Глава 1, след което ще приложим теорема D от същата глава.

Твърдение 1′. *Ако $f \in \pi_n$ и $|f| \le |H_n|$ в нулите на H_{n+1}, то $|f'| \le |H_n'|$ в нулите на H_n. Равенството $|f'| = |H_n'|$ се достига в някоя нула на H_n тогава и само тогава когато $f = \gamma H_n$, където $\gamma \in \mathbb{C}$ и $|\gamma| = 1$.*

Твърдение 2′. *Полиномът на Ермит $H_n(x)$ удовлетворява неравенството*

$$|H_n(x+iy)| \le |H_n(a_{n+1}+iy)| \quad \text{за всяка точка} \quad (x,y) \in [-a_{n+1}, a_{n+1}] \times \mathbb{R}.$$

Ясно е, че Теорема 2.1 следва от Теорема D от Глава 1, а условията за нейното прилагане са осигурени от Твърдение 1′ и Твърдение 2′.

За да приключим с идейната част от доказателството на Теорема 2.1, остава да кажем как се доказват Твърдение 1′ и Твърдение 2′.

Твърдение 1′ доказваме използвайки Лема 1.4 (втората лема на Вл. Марков). По-точно, следвайки означенията от тази лема, ще установим, че нулите на H_n са вътрешни точки за множеството $I_{n,1}(\omega)$, където $\omega = H_{n+1}$.

За доказателството на Твърдение 2′ ще използваме формулата на Йенсен. Напомняме, че с $\{L_k(f;x)\}_{k=0}^n$ означихме коефициентите във формулата на Йенсен за полином $f(x)$ от степен n, имащ само реални нули, и доказахме, че

$$L_0(f;x) = f^2(x), \;\; L_k(f;x) = \sum_{j=0}^{2k} (-1)^{k-j} \frac{f^{(j)}(x)}{j!} \frac{f^{(2k-j)}(x)}{(2k-j)!}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Основна роля в доказателството на Твърдение $2'$ играе следната теорема, която представлява и самостоятелен интерес:

Теорема 2.2 (Г. Николов, А. Александров [1]). *За $k = 1, \ldots, n-1$, функцията $L_k(H_n; x)$ е строго монотонно намаляваща в $(-\infty, 0]$ и строго монотонно растяща в $[0, +\infty)$.*

Да отбележим, че $L_n(H_n; x) = const$ може също да се интерпретира като монотонна (нестрого) функция от същия тип.

Сега преминаваме към техническата част от доказателството на теорема 2.1. От казаното по-горе следва, че е достатъчно да докажем Твърдение $1'$ и Твърдение $2'$.

3. Доказателство на Твърдение $1'$.

Прилагаме Лема 1.4 (втората лема на Вл. Марков) с $Q = H_n$, $w = cH_{n+1}$ и $k = 1$. Ако $H_n(x) = 0$, то използвайки равенството (2.1), получаваме (разбира се, в случая с $t_0 = a_{n+1},\ t_n = -a_{n+1}$)

$$\begin{aligned} w_0'(x) \cdot w_n'(x) &= c^2 \Big(\frac{H_{n+1}(u)}{u - t_0}\Big)'_{|u=x} \cdot \Big(\frac{H_{n+1}(u)}{u + t_0}\Big)'_{|u=x} \\ &= c^2 \frac{H_{n+1}'(u)(u - t_0) - H_{n+1}(u)}{(u - t_0)^2}\Big|_{u=x} \frac{H_{n+1}'(u)(u + t_0) - H_{n+1}(u)}{(u + t_0)^2}\Big|_{u=x} \\ &= c^2 \frac{H_{n+1}^2(x)}{(x^2 - t_0^2)^2} > 0. \end{aligned}$$

Съгласно Лема 1.4а), нулата x на полинома на Ермит H_n е вътрешна точка за множеството $I_{n,1}(\omega)$, и тогава съгласно Лема 1.4б), изпълнено е $|f'(x)| \le |H_n'(x)|$, и неравенството е строго, освен в случая $f = \gamma H_n$, където $\gamma \in \mathbb{C}$ и $|\gamma| = 1$. $\square$

4. Доказателство на Твърдение $2'$.

Ще докажем Твърдение $2'$ при предположението, че Теорема 2.2 е вярна.

Ще започнем с известния факт, че ако a_{n+1} е най-голямата нула на $(n+1)$-вия полином на Ермит H_{n+1}, то

$$\max\{|H_n(x)| \,:\, x \in [-a_{n+1}, a_{n+1}]\} = |H_n(\pm a_{n+1})|. \tag{2.4}$$

За удобство на читателя, тук ще приведем доказателство на (2.4). Това доказателство е всъщност ефектно приложение на метода на Сонин–Пойа. За да докажем (2.4), ще използваме (2.1) и обикновеното диференциално уравнение от втори ред, което се удовлетворява от $y = H_{n+1}$:

$$y'' - 2xy' + (2n+2)y = 0, \tag{2.5}$$

(разбира се, (2.5) се получава като в (2.2) заместим n с $n+1$). Използвайки (2.1), виждаме, че помощната функция

$$f(x) = \frac{1}{(2n+2)^2}\big[y'(x)^2 + (2n+2)y(x)^2\big]$$

изпълнява неравенството $H_n^2(x) \le f(x),\ x \in \mathbb{R}$, и равенство се достига само ако $H_{n+1}(x) = 0$. Освен това, от (2.5) следва, че

$$f'(x) = \frac{1}{(n+1)^2} x\big[y'(x)\big]^2,$$

и значи $f(x)$ е строго монотонно намаляваща в $(-\infty, 0)$ и строго монотонно растяща в $(0, \infty)$. Отчитайки, че $f(x)$ е четна функция, в крайна сметка получаваме, че за всяко $x \in [-a_{n+1}, a_{n+1}]$ имаме

$$H_n^2(x) \le f(x) \le f(\pm a_{n+1}) = H_n^2(\pm a_{n+1}),$$

което доказва (2.4).

Използвайки формулата на Йенсен от Глава 1 с $f = H_n$, получаваме, че за всяко $(x, y) \in [-a_{n+1}, a_{n+1}] \times \mathbb{R}$

$$|H_n(a_{n+1} + iy)|^2 - |H_n(x + iy)|^2 = \sum_{k=0}^{n} [L_k(H_n; a_{n+1}) - L_k(H_n; x)] y^{2k} \ge 0,$$

тъй като всичките изрази $L_k(H_n; a_{n+1}) - L_k(H_n; x)$, $1 \le k \le n$, са неотрицателни съгласно Теорема 2.2, а $L_0(H_n; a_{n+1}) - L_0(H_n; x) = H_n^2(a_{n+1}) - H_n^2(x) \ge 0$ съгласно (2.4). С това доказахме Твърдение $2'$, при предположението, че Теорема 2.2 е вярна. $\square$

Така, за да завършим доказателството на Теорема 2.1, остава да докажем Теорема 2.2. Именно доказателството на Теорема 2.2, към което сега пристъпваме, е технически най–сложната част от тази глава.

5. Доказателство на теорема 2.2.

Ще докажем Теорема 2.2, прилагайки индукция по k. В случая $k = 1$, от $L_1(f; x) = [f'(x)]^2 - f(x)f''(x)$ получаваме

$$L_1'(f; x) = f'(x) \cdot f''(x) - f(x) \cdot f'''(x) = [f''(x)]^2 \cdot \Big[\frac{f(x)}{f''(x)}\Big]'.$$

Следователно, достатъчно е да докажем, че ако $y = H_n$, то

$$\operatorname{sign}\Big[\frac{y(x)}{y''(x)}\Big]' = \operatorname{sign} x. \tag{2.6}$$

От (2.2) получаваме

$$2n\frac{y}{y''} = 2x\frac{y'}{y''} - 1 \;\Rightarrow\; \Big[\frac{y}{y''}\Big]' = \frac{1}{n}\Big[x\frac{y'}{y''}\Big]',$$

затова (2.6) е равносилно на

$$\operatorname{sign}\Big[\frac{xy'(x)}{y''(x)}\Big]' = \operatorname{sign} x. \tag{2.7}$$

Нека $\{x_\nu\}_{\nu=1}^{n-1}$ са нулите на $y'(x)$. Те са разположени симетрично спрямо началото на числовата права, т.е. $\{x_\nu\}_{\nu=1}^{n-1} \equiv \{-x_\nu\}_{\nu=1}^{n-1}$. Следователно

$$\frac{y''(x)}{xy'(x)} = \frac{1}{2x}\sum_{\nu=1}^{n-1}\Big[\frac{1}{x-x_\nu} + \frac{1}{x+x_\nu}\Big] = \sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{1}{x^2-x_\nu^2}.$$

Диференцираме последния израз и получаваме

$$\operatorname{sign}\Big[\frac{xy'(x)}{y''(x)}\Big]' = \operatorname{sign}\Big\{\Big[\sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{1}{x^2-x_\nu^2}\Big]^{-2}\cdot\sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{2x}{(x^2-x_\nu^2)^2}\Big\} = \operatorname{sign} x,$$

което доказва (2.7).

С това случаят $k = 1$ в доказателството на теорема 2.2 е приключен, т.е. положихме основата на индукцията.

Преминаваме към индуктивната стъпка. Да предположим, че Теорема 2.2 е доказана за $L_k(H_n; x)$, където $1 \le k < n$. Индуктивната стъпка $k \mapsto k+1$ се извършва с помощта на следното

Тъждество 1.

$$2n(k+1)L'_{k+1}(H_n; x) = 2(k+1)xL_{k+1}(H'_n; x) + L'_k(H'_n; x).$$

Имайки Тъждество 1 на разположение, преходът от k към $k+1$ е тривиален: и двете събираеми в дясната му страна имат знака на x, и поради това такъв е и знакът на лявата му страна. Наистина, понеже $H'_n = 2n\,H_{n-1}$ има само реални и прости нули, имаме че $L_{k+1}(H'_n; x) > 0$. Освен това, съгласно индукционното предположение, $\operatorname{sign} L'_k(H'_n; x) = \operatorname{sign} x$. Така от Тъждество 1 получаваме, че $\operatorname{sign} L'_{k+1}(H_n; x) = \operatorname{sign} x$, с което е направена индукционната стъпка от k към $k+1$, и Теорема 2.2 е доказана при предположение, че Тъждество 1 е вярно. □

Така, за да докажем Теорема 2.2, остава да докажем Тъждество 1.

6. Доказателство на Тъждество 1.

Доказателството на Тъждество 1 на свой ред минава през няколко помощни тъждества. За тяхното установяване се нуждаем от една техническа лема:

Лема 2.1. *Нека f е произволна достатъчно гладка функция, така че всички появяващи се производни съществуват. Изпълнени са следните равенства :*

а) $$\sum_{j=0}^{2k-1}(-1)^{k-j}\frac{f^{(j)}(x)}{j!}\frac{f^{(2k-1-j)}(x)}{(2k-1-j)!}=0\,;$$

б) $$\sum_{j=0}^{2k}(-1)^{k-j}(k-j)\frac{f^{(j)}(x)}{j!}\frac{f^{(2k-j)}(x)}{(2k-j)!}=0\,;$$

в) $$\sum_{j=0}^{2k}(-1)^{k-j}\frac{f^{(j+1)}(x)}{j!}\frac{f^{(2k-j)}(x)}{(2k-j)!}=\sum_{j=0}^{2k}(-1)^{k-j}\frac{f^{(j)}(x)}{j!}\frac{f^{(2k+1-j)}(x)}{(2k-j)!}$$
$$=\frac{1}{2}L_k'(f;x)\,;$$

г) $$\sum_{j=0}^{2k}(-1)^{k-j}\frac{f^{(j+2)}(x)}{j!}\cdot\frac{f^{(2k-j)}(x)}{(2k-j)!}=\sum_{j=0}^{2k}(-1)^{k-j}\frac{f^{(j)}(x)}{j!}\cdot\frac{f^{(2k+2-j)}(x)}{(2k-j)!}$$
$$=\frac{1}{2}L_k''(f;x)-L_k(f';x)\,.$$

Доказателство на Лема 2.1:

а) Следва от факта, че събираемите са $2k$ на брой и при $j\in\{0,1,\dots,k-1\}$ събираемото с номер j и събираемото с номер $2k-1-j$ взаимно се унищожават.

б) Сега събираемите са $2k+1$ на брой и при $j\in\{0,1,\dots,k-1\}$ събираемите с номера j и $2k-j$ взаимно се унищожават; останалото събираемо (това с номер k) участва с коефициент 0.

в) Понеже
$$L_k'(f;x)=\sum_{j=0}^{2k}\frac{(-1)^{k-j}}{j!(2k-j)!}[f^{(j+1)}(x)f^{(2k-j)}(x)+f^{(j)}(x)f^{(2k+1-j)}(x)],$$
достатъчно е да докажем само първото равенство във в). Използвайки а), за да преминем от първия на втория ред по-долу, получаваме:
$$\sum_{j=0}^{2k}(-1)^{k-j}\frac{f^{(j+1)}(x)}{j!}\frac{f^{(2k-j)}(x)}{(2k-j)!}=\sum_{j=0}^{2k+1}(-1)^{k+1-j}j\frac{f^{(j)}(x)}{j!}\frac{f^{(2k+1-j)}(x)}{(2k+1-j)!}$$
$$=\sum_{j=0}^{2k+1}(-1)^{k-j}(2k+1-j)\frac{f^{(j)}(x)}{j!}\frac{f^{(2k+1-j)}(x)}{(2k+1-j)!}$$
$$=\sum_{j=0}^{2k}(-1)^{k-j}\frac{f^{(j)}(x)}{j!}\frac{f^{(2k+1-j)}(x)}{(2k-j)!}.$$

г) Понеже

$$L_k''(f;x) = \sum_{j=0}^{2k} \frac{(-1)^{k-j}}{j!(2k-j)!}[f^{(j+2)}(x)f^{(2k-j)}(x) + f^{(j)}(x)f^{(2k+2-j)}(x)] + 2L_k(f';x),$$

достатъчно е да докажем само първото равенство в г). Използвайки б), за да преминем от втория на третия ред по-долу, получаваме:

$$\sum_{j=0}^{2k}(-1)^{k-j}\frac{f^{(j+2)}(x)}{j!}\frac{f^{(2k-j)}(x)}{(2k-j)!} = \sum_{j=0}^{2k+2}\frac{(-1)^{k+2-j}j(j-1)}{j!(2k+2-j)!}f^{(j)}(x)f^{(2k+2-j)}(x)$$

$$= \sum_{j=0}^{2k+2}\frac{(-1)^{k-j}[(2k+1-j)(2k+2-j)-(2k+1)(2k+2-2j)]}{j!(2k+2-j)!}f^{(j)}(x)f^{(2k+2-j)}(x)$$

$$= \sum_{j=0}^{2k}(-1)^{k-j}\frac{f^{(j)}(x)}{j!}\frac{f^{(2k+2-j)}(x)}{(2k-j)!}.$$

С това Лема 2.1 е доказана. □

За да докажем Тъждество 1, ще се нуждаем и от следното

Тъждество 2. *Ако $f(x)$ е произволна достатъчно гладка функция, то*

$$L_k''(f;x) = 4L_k(f';x) - (2k+1)(2k+2)L_{k+1}(f;x).$$

Доказателство на тъждество 2:

Правейки подходящи смени на сумационните индекси, получаваме:

$$4\,L_k(f';x) - L_k''(f;x) =$$

$$= \sum_{j=0}^{2k}\frac{(-1)^{k-j}}{j!(2k-j)!}[2f^{(j+1)}(x)f^{(2k+1-j)}(x) - f^{(j+2)}(x)f^{(2k-j)}(x) - f^{(j)}(x)f^{(2k+2-j)}(x)]$$

$$= 2\sum_{j=0}^{2k+2}\frac{(-1)^{k+1-j}j(2k+2-j)}{j!(2k+2-j)!}f^{(j)}(x)f^{(2k+2-j)}(x)$$

$$- \sum_{j=0}^{2k+2}\frac{(-1)^{k+2-j}j(j-1)}{j!(2k+2-j)!}f^{(j)}(x)f^{(2k+2-j)}(x)$$

$$- \sum_{j=0}^{2k+2}\frac{(-1)^{k-j}(2k+1-j)(2k+2-j)}{j!(2k+2-j)!}f^{(j)}(x)f^{(2k+2-j)}(x)$$

$$= \sum_{j=0}^{2k+2} \frac{(-1)^{k+1-j} j(2k+2-j+j-1)}{j!(2k+2-j)!} f^{(j)}(x) f^{(2k+2-j)}(x)$$

$$+ \sum_{j=0}^{2k+2} \frac{(-1)^{k+1-j}(2k+2-j)(j+2k+1-j)}{j!(2k+2-j)!} f^{(j)}(x) f^{(2k+2-j)}(x)$$

$$= (2k+1)(2k+2) \sum_{j=0}^{2k+2} \frac{(-1)^{k+1-j}}{j!(2k+2-j)!} f^{(j)}(x) f^{(2k+2-j)}(x)$$

$$= (2k+1)(2k+2) L_{k+1}(f;x).$$

С това Тъждество 2 е доказано. □

Друг компонент от доказателството на Тъждество 1 е следното:

Тъждество 3. *Ако* $y = H_n$, *то*

$$L_k(y'';x) - xL_k'(y';x) + 2(n+k)L_k(y';x) - 2n(k+1)(2k+1)L_{k+1}(y;x) = 0.$$

Доказателство на тъждество 3:

Диференцираме j пъти равенството $y'' - 2xy' + 2ny = 0$, използвайки формулата на Лайбниц и получаваме $y^{(j+2)} - 2xy^{(j+1)} + 2(n-j)y^{(j)} = 0$. Тогава, използвайки второто равенство в Лема 2.1в), получаваме

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{j=0}^{2k} (-1)^{k-j} \Big[y^{(j+2)} - 2xy^{(j+1)} + 2(n-j)y^{(j)}] \frac{y^{(2k+2-j)}}{j!(2k-j)!} \Big] \\ &= L_k(y'';x) - xL_k'(y';x) + 2\sum_{j=0}^{2k} \frac{(-1)^{k-j}}{j!(2k-j)!}(n-j)y^{(j)}y^{(2k+2-j)}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Остава да опростим последната сума в (2.8). Съгласно второто равенство в Лема 2.1г) имаме

$$n\sum_{j=0}^{2k} \frac{(-1)^{k-j}}{j!(2k-j)!} y^{(j)} y^{(2k+2-j)} = n\Big[\frac{1}{2}L_k''(y;x) - L_k(y';x)\Big].$$

Имаме още

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{2k} \frac{(-1)^{k-j}}{j!(2k-j)!} j y^{(j)} y^{(2k+2-j)} &= \sum_{j=1}^{2k} \frac{(-1)^{k-j}}{(j-1)!(2k-j)!} y^{(j)} y^{(2k+2-j)} \\ &= \sum_{j=0}^{2k-1} \frac{(-1)^{k-1-j}}{j!(2k-1-j)!} y^{(j+1)} y^{(2k+1-j)} \\ &= -\sum_{j=0}^{2k} \frac{(-1)^{k-j}}{j!(2k-j)!} [k+(k-j)] y^{(j+1)} y^{(2k+1-j)} = -kL_k(y';x), \end{aligned}$$

като за последното равенство използвахме Лема 2.1б).

Двете равенства, които получихме току-що, ни позволяват да опростим последната сума в (2.8) така:

$$\sum_{j=0}^{2k} \frac{(-1)^{k-j}}{j!(2k-j)!}(n-j)y^{(j)}y^{(2k+2-j)} = n\Big[\frac{1}{2}L_k''(y;x) - L_k(y';x)\Big] + kL_k(y';x)\,,$$

и замествайки в (2.8) да получим

$$0 = L_k(y'';x) - xL_k'(y';x) + nL_k''(y;x) + 2(k-n)L_k(y';x).$$

Накрая, замествайки $L_k''(y;x)$ с $4L_k(y';x) - 2(k+1)(2k+1)L_{k+1}(y;x)$ съгласно Тъждество 2, получаваме Тъждество 3. □

Последната стъпка по пътя към доказателството на Тъждество 1 е следното:

Тъждество 4. *Ако $y = H_n$, то*

$$L_{k-1}'(y'';x) - 4xL_{k-1}(y'';x) + 2(n-1)L_{k-1}'(y';x) = 0.$$

Доказателство на тъждество 4:

Диференцираме $(j+1)$ пъти равенството $y'' - 2xy' + 2ny = 0$, използвайки формулата на Лайбниц и стигаме до $y^{(j+3)} - 2xy^{(j+2)} + 2(n-j-1)y^{(j+1)} = 0$. След това, използвайки най-напред първото, а после и второто равенство от Лема 2.1в), получаваме

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{j=0}^{2k-2}(-1)^{k-1-j}[y^{(j+3)} - 2xy^{(j+2)} + 2(n-j-1)y^{(j+1)}]\frac{y^{(2k-j)}}{j!(2k-2-j)!} \\ &= \frac{1}{2}L_{k-1}'(y'';x) - 2xL_{k-1}(y'';x) + (n-1)L_{k-1}'(y';x) \\ &\quad - 2\sum_{j=0}^{2k-2}(-1)^{k-1-j}j\frac{y^{(j+1)}y^{(2k-j)}}{j!(2k-2-j)!}. \end{aligned}$$

Последната сума е равна на 0 съгласно Лема 2.1а):

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{2k-2}(-1)^{k-1-j}j\frac{y^{(j+1)}y^{(2k-j)}}{j!(2k-2-j)!} &= \sum_{j=1}^{2k-2}(-1)^{k-1-j}\frac{y^{(j+1)}y^{(2k-j)}}{(j-1)!(2k-2-j)!} \\ &= -\sum_{j=0}^{2k-3}(-1)^{k-1-j}\frac{y^{(j+2)}y^{(2k-1-j)}}{j!(2k-3-j)!} = 0. \end{aligned}$$

С това Тъждество 4 е доказано. □

Сега вече можем да постигнем основната си цел в тази точка:

Доказателство на Тъждество 1:

Диференцираме Тъждество 3 и получаваме

$$L_k'(y'';x)-L_k'(y';x)-xL_k''(y';x)+2(n+k)L_k'(y';x)-2n(k+1)(2k+1)L_{k+1}'(y;x)=0.$$

Тъждество 4 (с $k+1$ вместо k) ни дава

$$L_k'(y'';x)-4xL_k(y'';x)+2(n-1)L_k'(y';x)=0.$$

Изваждаме почленно двете равенства и получаваме

$$(2k+1)L_k'(y';x)+4xL_k(y'';x)-xL_k''(y';x)-2n(k+1)(2k+1)L_{k+1}'(y;x)=0.$$

Съгласно Тъждество 2 имаме

$$L_k''(y';x)=4L_k(y'';x)-2(k+1)(2k+1)L_{k+1}(y';x).$$

Заместваме почленно последното равенство в предпоследното и получаваме

$$(2k+1)L_k'(y';x)+2x(k+1)(2k+1)L_{k+1}(y';x)-2n(k+1)(2k+1)L_{k+1}'(y;x)=0.$$

С това Тъждество 1 е доказано. □

Както вече споменахме, от Тъждество 1 следва Теорема 2.2 , а от Теорема 2.2 следва твърдение $2'$; на свой ред, Твърдение $2'$ и доказаното по-рано Твърдение $1'$ пък доказват Теорема 2.1.

Доказаната от нас Теорема 2.1 е аналог на теорема C на Дафин и Шефер. От Твърдение $1'$, Твърдение $2'$ и следствието на Теорема D веднага се получава и аналог на тяхната Теорема B, а именно:

Ако в Теорема 2.1 предположим, че вместо $f\in\pi_n^r$ имаме по-слабото условие $f\in\pi_n$, то е в сила по-слабото неравенство

$$\|f^{(k)}\|_{C[-a_{n+1},a_{n+1}]}\le\|H_n^{(k)}\|_{C[-a_{n+1},a_{n+1}]},\quad k=1,\dots,n,$$

като равенство в него се достига само ако $f=\gamma\,H_n$, където $\gamma\in\mathbb{C}$ и $|\gamma|=1$.

3. Хипотеза на Патрик и неин усилен вариант за полиномите на Гегенбауер.

1. Някои свойства на полиномите на Якоби и на Гегенбауер.

Както е добре известно, полиномите на Якоби $P_n^{(\alpha,\beta)}$ са ортогонални в интервала $[-1,1]$ при тегло $w_{\alpha,\beta}(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$, $(\alpha,\beta > -1)$. Традиционната нормировка на $P_n^{(\alpha,\beta)}$, която ще следваме и ние, се дава с условието $P_n^{(\alpha,\beta)}(1) = \binom{n+\alpha}{n}$.

Като частен случай от полиномите на Якоби при $\alpha = \beta = \lambda - \frac{1}{2}$ се получават полиномите на Гегенбауер (наричани още и ултрасферични полиноми) $P_n^{(\lambda)}$, които са ортогонални в $[-1,1]$ с тегло $w_\lambda(x) = (1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}$, $(\lambda > -\frac{1}{2})$. Стандартната нормировка на $P_n^{(\lambda)}$, която ще следваме и ние, се дава с условието $P_n^{(\lambda)}(1) = \binom{n+2\lambda-1}{n}$.

В началото на тази глава, за пълнота на изложението, ще докажем тези от свойствата на полиномите на Якоби, които ще ни потрябват по-нататък.

Лема 3.1. *Полиномът на Якоби $y = P_n^{(\alpha,\beta)}$ е решение на диференциалното уравнение*

$$(1-x^2)y'' - [(\alpha+\beta+2)x + \alpha - \beta]y' + n(n+\alpha+\beta+1)y = 0\,. \tag{3.1}$$

Доказателство на Лема 3.1:

Като използваме, че

$$\begin{aligned}&\left[(1-x)^{(\alpha+1)}(1+x)^{(\beta+1)}y'\right]' \\ &\quad = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta\left[(1-x^2)y'' - (\alpha+1)(1+x)y' + (\beta+1)(1-x)y'\right],\end{aligned} \tag{3.2}$$

виждаме, че (3.1) е равносилно с

$$\left[(1-x)^{(\alpha+1)}(1+x)^{(\beta+1)}y'\right]' + n(n+\alpha+\beta+1)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta y = 0\,. \tag{3.3}$$

За да докажем (3.3), да забележим, че съгласно (3.2)

$$\left[(1-x)^{(\alpha+1)}(1+x)^{(\beta+1)}y'\right]' = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta q(x),$$

където $q \in \pi_n^r$.

Пак от (3.2) следва, че $c(q) = -n(n+\alpha+\beta+1)c(y)$, където с $c(f)$ сме означили коефициента пред x^n в $f(x)$.

Така, за да докажем (3.3), е достатъчно да докажем, че q е ортогонален на всеки полином $f \in \pi_{n-1}$ в $[-1,1]$ с тегло $w_{\alpha,\beta}(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$.

Нека $f \in \pi_{n-1}$ е произволен. Интегрирайки два пъти по части, получаваме:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}q(x)f(x)dx &= \int_{-1}^{1}\left[(1-x)^{(\alpha+1)}(1+x)^{(\beta+1)}y'\right]' f(x)dx \\ &= -\int_{-1}^{1}(1-x)^{(\alpha+1)}(1+x)^{(\beta+1)}y'(x)f'(x)dx \\ &= \int_{-1}^{1}\left[(1-x)^{(\alpha+1)}(1+x)^{(\beta+1)}f'(x)\right]' y(x)dx \\ &= \int_{-1}^{1}(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}f_0(x)y(x)dx = 0,\end{aligned}$$

където $f_0 \in \pi_{n-1}$, и последното равенство следва от факта, че $y = P_n^{(\alpha,\beta)}$ е ортогонален в $[-1,1]$ при тегло $w_{\alpha,\beta}(x)$.

С това Лема 3.1 е доказана. □

Като непосредствено следствие от Лема 3.1 получаваме:

Следствие 3.1. *Ултрасферичният полином $y = P_n^{(\lambda)}$ е решение на диференциалното уравнение*

$$(1-x^2)y'' - (2\lambda+1)xy' + n(n+2\lambda)y = 0\,. \tag{3.4}$$

Лема 3.2. *Изпълнено е равенството*

$$\left(P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\right)' = \frac{1}{2}(n+\alpha+\beta+1)P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x).$$

В частност, производната на полином на Якоби е пак полином на Якоби, а производната на полином на Гегенбауер е пак полином на Гегенбауер (разбира се, с други нормировки).

Доказателство на Лема 3.2:

Очевидно $\left(P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\right)'$ е полином от степен $n-1$. Използвайки интегриране по части и ортогоналността на $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, получаваме, че ако $f \in \pi_{n-2}$, то

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^{1}(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}\left(P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\right)' f(x)dx \\ &= \int_{-1}^{1} w_{\alpha,\beta}(x)P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\left\{[(\alpha+1)(1+x)-(\beta+1)(1-x)]f(x)-(1-x^2)f'(x)\right\}dx = 0\,,\end{aligned}$$

защото полиномът в големите фигурни скоби е от степен най-много $n-1$.

Следователно $\left(P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\right)' = C\,P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x)$. За да определим константата C, полагаме $x=1$ в диференциалното уравнение (3.1) и получаваме

$$\left(P_n^{(\alpha,\beta)}(1)\right)' = \frac{n(n+\alpha+\beta+1)}{2(\alpha+1)} P_n^{(\alpha,\beta)}(1).$$

Тогава

$$\begin{aligned} C &= \frac{n(n+\alpha+\beta+1)}{2(\alpha+1)} \frac{P_n^{(\alpha,\beta)}(1)}{P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(1)} = \frac{n(n+\alpha+\beta+1)}{2(\alpha+1)} \frac{\binom{n+\alpha}{n}}{\binom{n+\alpha}{n-1}} \\ &= \frac{n(n+\alpha+\beta+1)}{2(\alpha+1)} \frac{(n+\alpha)\dots(\alpha+1)}{n!} \frac{(n-1)!}{(n+\alpha)\dots(\alpha+2)} \\ &= \frac{1}{2}(n+\alpha+\beta+1). \end{aligned}$$

С това Лема 3.2 е доказана. □

Следствие 3.2. *Коефициентът пред x^n в $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ е $\kappa_n = \frac{1}{2^n}\binom{2n+\alpha+\beta}{n}$.*

Доказателство на следствието:

Като приложим n пъти Лема 3.2, за $\kappa_n = \dfrac{1}{n!}\left(P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\right)^{(n)}(1)$ получаваме

$$\kappa_n = \frac{1}{n!}\frac{1}{2^n}(n+\alpha+\beta+1)\cdots(n+\alpha+\beta+n) = \frac{1}{2^n}\binom{2n+\alpha+\beta}{n}.$$

□

Лема 3.3. *Изпълнено е равенството $P_n^{(\alpha,\beta)}(-x) = (-1)^n P_n^{(\beta,\alpha)}(x)$. В частност, $P_n^{(\alpha,\beta)}(-1) = (-1)^n\binom{n+\beta}{n}$.*

Доказателство на Лема 3.3:

Ако $f \in \pi_{n-1}$, имаме

$$\int_{-1}^{1}(1-x)^\alpha(1+x)^\beta P_n^{(\alpha,\beta)}(x)f(x)dx = 0,$$

откъдето, правейки смяна на променливата $x \to -x$, получаваме

$$\int_{-1}^{1}(1+x)^\alpha(1-x)^\beta P_n^{(\alpha,\beta)}(-x)f(-x)dx = 0.$$

Оттук следва, че $P_n^{(\alpha,\beta)}(-x) = C\,P_n^{(\beta,\alpha)}(x)$ за някаква константа C. Съгласно Следствие 3.2, старшият коефициент на $P_n^{(\alpha,\beta)}(-x)$ е $(-1)^n\frac{1}{2^n}\binom{2n+\alpha+\beta}{n}$, а този на $P_n^{(\beta,\alpha)}(x)$ е $\frac{1}{2^n}\binom{2n+\alpha+\beta}{n}$, и от сравняването намираме $C = (-1)^n$. □

Лема 3.4. *Ако* $\alpha \geq \max\{\beta, -\frac{1}{2}\}$, *то*

$$\max_{x\in[-1,1]} |P_n^{(\alpha,\beta)}(x)| = P_n^{(\alpha,\beta)}(1).$$

В частност, при $\lambda \geq 0$ *е изпълнено*

$$\max_{x\in[-1,1]} |P_n^{(\lambda)}(x)| = P_n^{(\lambda)}(1) = |P_n^{(\lambda)}(-1)|\,.$$

Доказателство на Лема 3.4:

Ще използваме метода на Сонин-Пойа, описан в параграф 5 на Глава 1. В нашия случай (1.11) има вида (3.1), така че е изпълнено

$$\begin{aligned}
&p(x) = 1 - x^2,\\
&q(x) = Ax + C, \quad \text{където} \quad A = \alpha+\beta+2,\ C = \alpha-\beta,\\
&r(x) = B, \quad \text{където} \quad B = n(n+\alpha+\beta+1) > 0.
\end{aligned}$$

Отбелязваме, че $\dfrac{p(x)}{r(x)} \geq 0,\ x \in [-1,1]$, така че методът на Сонин-Пойа е приложим. В случая имаме

$$\begin{aligned}
2\,q(x)\,r(x) + p'(x)r(x) - p(x)\,r'(x) &= 2B(Ax+C) - 2Bx = 2B[(A-1)x + C]\\
&= 2B[(\alpha+\beta+1)x + \alpha - \beta].
\end{aligned}$$

Да означим $f(x) = (\alpha+\beta+1)x + \alpha - \beta$. Ако $\alpha \geq -\frac{1}{2} \geq \beta$, тогава

$$f(1) = 2\alpha + 1 \geq 0, \quad f(-1) = -2\beta - 1 \geq 0,$$

поради което $f(x) \geq 0,\ x \in [-1,1]$. Тогава спомагателната функция $\varphi(x)$ от параграф 5 на Глава 1 е растяща в $[-1,1]$, и затова в този случай имаме $\max_{x\in[-1,1]} |P_n^{(\alpha,\beta)}(x)| = P_n^{(\alpha,\beta)}(1)$.

Ако пък $\alpha \geq \beta \geq -\frac{1}{2}$, тогава $f(1) = 2\alpha + 1 \geq 0,\ f(-1) = -2\beta - 1 \leq 0$, следователно $\varphi(x)$ има единствен локален екстремум (минимум) в $[-1,1]$. Методът на Сонин-Пойа в този случай ни дава, че

$$\max_{x\in[-1,1]} |P_n^{(\alpha,\beta)}(x)| = \max\{P_n^{(\alpha,\beta)}(1),\ |P_n^{(\alpha,\beta)}(-1)|\}.$$

Тъй като

$$\begin{aligned}
P_n^{(\alpha,\beta)}(1) &= \binom{n+\alpha}{n} = \frac{(n+\alpha)\dots(\alpha+1)}{n!}\\
&\geq \frac{(n+\beta)\dots(\beta+1)}{n!} = |(-1)^n\binom{n+\beta}{n}| = |P_n^{(\alpha,\beta)}(-1)|,
\end{aligned}$$

и в този случай е изпълнено $\max_{x\in[-1,1]} |P_n^{(\alpha,\beta)}(x)| = P_n^{(\alpha,\beta)}(1)$. $\square$

2. Хипотезата на М. Патрик.

Напомняме, че с $L_k(f;x)$ означаваме коефициентите във формулата на Йенсен за $f(x)$, където $L_0(f;x) = f^2(x)$ и

$$L_k(f;x) = \sum_{j=0}^{2k} (-1)^{k-j} \frac{f^{(j)}(x)}{j!} \frac{f^{(2k-j)}(x)}{(2k-j)!}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

През 1971г. в статията си [25] американският математик Мерил Патрик формулира следната хипотеза:

Хипотеза на М. Патрик. *Нека $P = P_n^{(\alpha,\beta)}$ е n-тия полином на Якоби, където $\alpha \geq \beta > -1$. Тогава за $k = 1, 2, \ldots, n$,*

$$\max_{x\in[0,1]} L_k(P;x) = L_k(P;1)\,. \tag{3.5}$$

За случая $\beta \geq \alpha > -1$, можем да се възползваме от доказаното в Лема 3.3 равенство $P_n^{(\alpha,\beta)}(-x) = (-1)^n P_n^{(\beta,\alpha)}(x)$, получаваме $L_k(P_n^{(\alpha,\beta)};x) = L_k(P_n^{(\beta,\alpha)};-x)$, което ни води до следната

Алтернативна версия на хипотезата на Патрик. *Нека $P = P_n^{(\alpha,\beta)}$ е n-тия полином на Якоби, където $\beta \geq \alpha > -1$. Тогава за $k = 1, 2, \ldots, n$,*

$$\max_{x\in[-1,0]} L_k(P;x) = L_k(P;-1).$$

Патрик успява да докаже своята хипотеза само за $1 \leq k \leq 3$. Въпреки че в статията му не е формулирана явно, най-вероятно целта на Патрик, който е докторант на Дафин, е била да докаже свойството (което в параграф 3 на Глава 1 нарекохме EPDP)

$$|P(x+iy)| \leq |P(1+iy)| \ \text{ при } \ x \in [-1,1],\ y \in \mathbb{R} \tag{3.6}$$

за полинома на Якоби $P = P_n^{(\alpha,\beta)}$, $\alpha \geq \beta > -1$. Имайки доказано това свойство, Патрик би могъл да получи неравенство от типа на Дафин и Шефер за подходящ подклас от полиномите на Якоби.

Най-напред този план е реализиран от Г. Николов в симетричния случай $\alpha = \beta = \lambda - 1/2$. В своята статия [18], той доказва, че хипотезата на Патрик е вярна за ултрасферичните полиноми, т.е. при $P = P_n^{(\lambda)}$, $n \in \mathbb{N}$.

Понеже при $\alpha = \beta = \lambda - 1/2$ $L_k(P;x)$ са четни функции, то от (3.5) следва, че

$$\max_{x\in[-1,1]} L_k(P;x) = L_k(P;1)\,, \quad 1 \leq k \leq n\,. \tag{3.7}$$

Както знаем от Лема 3.4, същото е вярно и за $L_0(P;x) = P^2(x)$, ако $\lambda \geq 0$. Тогава при $\lambda \geq 0$ от формулата на Йенсен заключаваме, че за $x \in [-1,1],\ y \in \mathbb{R}$ е изпълнено

$$|P_n^{(\lambda)}(x+iy)|^2 = \sum_{k=0}^{n} L_k(P_n^{(\lambda)};x)y^{2k} \leq \sum_{k=0}^{n} L_k(P_n^{(\lambda)};1)y^{2k} = |P_n^{(\lambda)}(1+iy)|^2.$$

С такива съображения в [18] е доказана следната

Теорема E (Г. Николов). *За всяко $\lambda \geq 0$ и $n \in \mathbb{N}$, ултрасферичният полином $P = P_n^{(\lambda)}$ удовлетворява неравенството*

$$|P(x+iy)| \leq |P(1+iy)| \quad \text{при} \quad x \in [-1,1],\ y \in \mathbb{R}.$$

При това, ако $\lambda > 0$ или ако $\lambda = 0$ и $y \neq 0$, равенство се достига само за $x = \pm 1$.

От своя страна, Теорема E е ключовият елемент в доказателството на следното неравенство от типа на Дафин и Шефер, получено в [18]:

Теорема F (Г. Николов). *Нека $P = P_n^{(\lambda)}$ ($\lambda \in [0, \frac{1}{2}],\ n \in \mathbb{N}$) и $\{t_\nu\}_{\nu=0}^n$ са нулите на $(1-x^2)P'(x)$. Ако $f \in \pi_n^r$ удовлетворява неравенствата*

$$|f(t_\nu)| \leq |P(t_\nu)| \qquad \text{при} \quad \nu = 0, 1, \ldots, n\,,$$

то за $k = 1, \ldots, n$ имаме

$$|f^{(k)}(x+i\,y)| \leq |P^{(k)}(1+i\,y)| \qquad \text{при} \quad x \in [-1,1], \quad y \in \mathbb{R}\,.$$

Равенство се достига само ако $f = \pm P$.

Ето как, веднъж доказана за някакъв клас от полиноми на Якоби, хипотезата на Патрик позволява да получим неравенство от типа на Дафин и Шефер за полиномите от този клас.

В същата статия [18], доказвайки хипотезата на Патрик за ултрасферичните полиноми, Г. Николов прави предположение, основаващо се на компютърни експерименти, че е в сила по-силно твърдение, а именно:

Усилена хипотеза на Патрик за ултрасферичните полиноми.
За $k = 1, \ldots, n-1$, функцията $L_k(P_n^{(\lambda)};x)$ е строго монотонно намаляваща в $(-\infty, 0]$ и строго монотонно растяща в $[0, +\infty)$.

Нека отбележим, че $L_n(P_n^{(\lambda)};x) = const$ може да се интерпретира като монотонна (нестрого) функция от същия тип.

Глава 3 се основава на статията [22] и в нея се доказва усилената хипотеза на Патрик за ултрасферичните полиноми.

3. Три технически леми.

В този параграф ще формулираме и докажем три леми от статията [22]. Първите две от тях се използват в доказателството на третата, а тя пък играе решаваща роля в доказателството на усилената хипотеза на Патрик за ултрасферичните полиноми. В целия параграф 3 многократно ще използваме Лема 2.1 и Тъждество 2 от Глава 2.

Първо нека напомним, че, както вече доказахме в следствието от Лема 3.1, $y = P_n^{(\lambda)}$ удовлетворява обикновеното диференциално уравнение от втори ред

$$(1-x^2)y'' - Axy' + By = 0, \tag{3.8}$$

където за краткост сме положили

$$A = 2\lambda + 1 > 0, \quad B = n(n+2\lambda) > 0.$$

Лема 3.5. *При $y = P_n^{(\lambda)}$ е изпълнено тъждеството*

$$\begin{aligned} B(k+1)(2k+1)L_{k+1}(y;x) =& (1-x^2)L_k(y'';x) - \frac{A}{2}xL_k'(y';x) \\ &+ (Ak+B)L_k(y';x) + L_{k-1}(y'';x). \end{aligned}$$

Доказателство на Лема 3.5:

Диференцираме j пъти (3.8), използвайки формулата на Лайбниц и получаваме

$$(1-x^2)y^{(j+2)} - (A+2j)xy^{(j+1)} + [B - Aj - j(j-1)]y^{(j)} = 0,$$

откъдето

$$\begin{aligned} 0 =& (1-x^2)\sum_{j=0}^{2k} \frac{(-1)^{k-j}}{j!(2k-j)!} y^{(j+2)} y^{(2k+2-j)} \\ &- x\sum_{j=0}^{2k} \frac{(-1)^{k-j}(A+2j)}{j!(2k-j)!} y^{(j+1)} y^{(2k+2-j)} \\ &+ \sum_{j=0}^{2k} \frac{(-1)^{k-j}[B - Aj - j(j-1)]}{j!(2k-j)!} y^{(j)} y^{(2k+2-j)}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Сега ще преработим трите суми в дясната страна на (3.9).

Сумата на първия ред в (3.9) е равна на $L_k(y'';x)$.

Сумата на втория ред в (3.9) се опростява с помощта на второто равенство от Лема 2.1в) и на Лема 2.1а) така:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{2k}\frac{(-1)^{k-j}(A+2j)}{j!(2k-j)!}y^{(j+1)}y^{(2k+2-j)}\\
&\qquad=\frac{A}{2}L_k'(y';x)+2\sum_{j=0}^{2k-1}\frac{(-1)^{k-1-j}}{j!(2k-1-j)!}y^{(j+2)}y^{(2k+1-j)}\\
&\qquad=\frac{A}{2}L_k'(y';x).
\end{aligned}$$

Сумата на третия ред в (3.9) опростяваме като последователно приложим второто равенство от Лема 2.1г), Тъждество 2 от Глава 2 и Лема 2.1б):

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{2k}\frac{(-1)^{k-j}[B-Aj-j(j-1)]}{j!(2k-j)!}y^{(j)}y^{(2k+2-j)}\\
&\quad=\frac{B}{2}\big[L_k''(y;x)-2L_k(y';x)\big]-A\sum_{j=0}^{2k-1}\frac{(-1)^{k-1-j}}{j!(2k-1-j)!}y^{(j+1)}y^{(2k+1-j)}\\
&\qquad-\sum_{j=0}^{2k-2}\frac{(-1)^{k-2-j}}{j!(2k-2-j)!}y^{(j+2)}y^{(2k-j)}\\
&\quad=B\big[L_k(y';x)-(k+1)(2k+1)L_{k+1}(y;x)\big]\\
&\qquad+A\sum_{j=0}^{2k}\frac{(-1)^{k-j}(k+k-j)}{j!(2k-j)!}y^{(j+1)}y^{(2k+1-j)}+L_{k-1}(y'';x)\\
&\quad=B\big[L_k(y';x)-(k+1)(2k+1)L_{k+1}(y;x)\big]+AkL_k(y';x)+L_{k-1}(y'';x)\\
&\quad=(Ak+B)L_k(y';x)+L_{k-1}(y'';x)-B(k+1)(2k+1)L_{k+1}(y;x).
\end{aligned}$$

Заместваме трите суми в (3.9) с изразите, които получихме за тях и стигаме до равенството от Лема 3.5. □

Лема 3.6. *Нека* $y=P_n^{(\lambda)}$. *Тогава*

$$(1-x^2)L_k'(y'';x)-2(A+2k+2)xL_k(y'';x)+(B-A)L_k'(y';x)+L_{k-1}'(y'';x)=0\,.$$

Доказателство на Лема 3.6:

Диференцираме $(j+1)$ пъти (3.8), използвайки формулата на Лайбниц и получаваме

$$(1-x^2)y^{(j+3)}-(A+2j+2)xy^{(j+2)}+[B-A(j+1)-j(j+1)]y^{(j+1)}=0,$$

откъдето

$$
\begin{aligned}
0 =&(1-x^2)\sum_{j=0}^{2k}\frac{(-1)^{k-j}}{j!(2k-j)!}y^{(j+3)}y^{(2k+2-j)}\\
&-x\sum_{j=0}^{2k}\frac{(-1)^{k-j}(A+2j+2)}{j!(2k-j)!}y^{(j+2)}y^{(2k+2-j)}\\
&+\sum_{j=0}^{2k}\frac{(-1)^{k-j}[B-A(j+1)-j(j+1)]}{j!(2k-j)!}y^{(j+1)}y^{(2k+2-j)}.
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

Съгласно Лема 2.1в) сумата на първия ред в (3.10) е равна на $L'_k(y'';x)/2$.

За сумата на втория ред в (3.10) получаваме съгласно Лема 2.1б)

$$
\sum_{j=0}^{2k}\frac{(-1)^{k-j}[(A+2k+2)+2(j-k)]}{j!(2k-j)!}y^{(j+2)}y^{(2k+2-j)}=(A+2k+2)L_k(y'';x).
$$

Сумата на третия ред в (3.10) се опростява с последователно прилагане на Лема 2.1в), Лема 2.1а) и накрая пак Лема2.1в), както следва:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{2k}\frac{(-1)^{k-j}[B-A-(A+2)j-j(j-1)]}{j!(2k-j)!}y^{(j+1)}y^{(2k+2-j)}\\
&\quad=\frac{B-A}{2}L'_k(y';x)-(A+2)\sum_{j=0}^{2k-1}\frac{(-1)^{k-1-j}}{j!(2k-1-j)!}y^{(j+2)}y^{(2k+1-j)}\\
&\qquad-\sum_{j=0}^{2k-2}\frac{(-1)^{k-2-j}}{j!(2k-2-j)!}y^{(j+3)}y^{(2k-j)}\\
&\quad=\frac{B-A}{2}L'_k(y';x)+\frac{1}{2}L'_{k-1}(y'';x).
\end{aligned}
$$

Заместваме трите суми в (3.10) с изразите, които получихме за тях и стигаме до равенството от Лема 3.6. □

Като следствие от Лема 3.5 и Лема 3.6 получаваме следващата лема, която играе основна роля в доказателството на усилената хипотеза на Патрик за ултрасферичните полиноми.

Лема 3.7. *Нека* $y=P_n^{(\lambda)}$. *Тогава*

$$
B(k+1)L'_{k+1}(y;x)=2xL_k(y'';x)+\frac{A}{2}L'_k(y';x)+A(k+1)xL_{k+1}(y';x)\,.
$$

Доказателство на Лема 3.7:

Диференцираме равенството от Лема 3.5 и получаваме

$$\begin{aligned} B(k+1)(2k+1)L'_{k+1}(y;x) =&(1-x^2)L'_k(y'';x) - 2xL_k(y'';x) \\ &+L'_{k-1}(y'';x)+\big[A(k-\frac{1}{2})+B\big]L'_k(y';x)-\frac{A}{2}xL''_k(y';x). \end{aligned}$$

Съгласно Тъждество 2 от Глава 2, в горното равенство можем да заместим $L''_k(y';x)$ с

$$4L_k(y'';x) - (2k+1)(2k+2)L_{k+1}(y';x),$$

при което получаваме

$$\begin{aligned} B(k+1)(2k+1)L'_{k+1}(y;x) =&(1-x^2)L'_k(y'';x) - 2(A+1)xL_k(y'';x) \\ &+ L'_{k-1}(y'';x) + +\big[A(k-\frac{1}{2})+B\big]L'_k(y';x) \\ &+ A(k+1)(2k+1)x\,L_{k+1}(y';x). \end{aligned}$$

От друга страна, съгласно Лема 3.6 имаме

$$0 = (1-x^2)L'_k(y'';x) - 2(A+2k+2)xL_k(y'';x) + L'_{k-1}(y'';x) + (B-A)L'_k(y';x)\,.$$

Изваждаме почленно последните две тъждества и получаваме

$$\begin{aligned} B(k+1)(2k+1)L'_{k+1}(y;x) =&2(2k+1)xL_k(y'';x) + A(k+\frac{1}{2})L'_k(y';x) \\ &+ A(2k+1)(k+1)xL_{k+1}(y';x), \end{aligned}$$

откъдето, разделяйки двете страни на константата $2k+1$, стигаме до равенството от Лема 3.7. □

4. Доказателство на усилената хипотеза на Патрик за ултрасферичните полиноми.

Сега вече можем да преминем към основния резултат в Глава 3 на дисертацията:

Теорема 3.1 (Г. Николов, А. Александров [22]). *Усилената хипотеза на Патрик за ултрасферичните полиноми е вярна. С други думи, ако $y = P_n^{(\lambda)}$, където $\lambda > -1/2$ и $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$, то $L_k(y;x)$ е строго монотонно намаляваща в $(-\infty, 0]$ и строго монотонно растяща в $[0,\infty)$ за $k = 1,\ldots,n-1$.*

Доказателство на теорема 3.1:

Ще докажем теоремата с индукция по k. За базовия случай $k = 1$ имаме $L_1(f;x) = [f'(x)]^2 - f(x)f''(x)$. След диференциране намираме

$$L_1'(f;x) = f'(x)f''(x) - f(x)f'''(x) = [f''(x)]^2 \frac{d}{dx}\Big\{\frac{f(x)}{f''(x)}\Big\}.$$

Виждаме, че твърдението на теоремата в случая $k = 1$ ще бъде доказано, ако покажем, че

$$\operatorname{sign}\Big\{\frac{d}{dx}\Big[\frac{y(x)}{y''(x)}\Big]\Big\} = \operatorname{sign}\{x\}\,,\ x \in \mathbb{R}\,. \tag{3.11}$$

Използвайки диференциалното уравнение (3.8), получаваме

$$\frac{y(x)}{y''(x)} = \frac{1}{B}\big[x^2 - 1 + Ax\frac{y'(x)}{y''(x)}\big],$$

откъдето виждаме (да напомним,че $B > 0$), че (3.11) е равносилно с

$$\operatorname{sign}\Big\{2x + A\frac{d}{dx}\Big[x\frac{y'(x)}{y''(x)}\Big]\Big\} = \operatorname{sign}\{x\}\,,\ x \in \mathbb{R}\,.$$

Очевидно последното ще бъде доказано, ако успеем да установим, че

$$\operatorname{sign}\Big\{\frac{d}{dx}\Big[x\frac{y'(x)}{y''(x)}\Big]\Big\} = \operatorname{sign}\{x\}\,,\ x \in \mathbb{R}\,. \tag{3.12}$$

Сега ще докажем (3.12), с което и случаят $k = 1$ на Теорема 3.1 ще бъде доказан.

Нека $\{x_\nu\}_{\nu=1}^{n-1}$ са нулите на $y'(x)$; понеже те са симетрично разположени спрямо началото, имаме $\{x_\nu\}_{\nu=1}^{n-1} \equiv \{-x_\nu\}_{\nu=1}^{n-1}$. Оттук

$$\frac{y''(x)}{xy'(x)} = \frac{1}{2x}\sum_{\nu=1}^{n-1}\Big[\frac{1}{x - x_\nu} + \frac{1}{x + x_\nu}\Big] = \sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{1}{x^2 - x_\nu^2}.$$

Тогава

$$\operatorname{sign}\Big\{\frac{d}{dx}\Big[x\frac{y'(x)}{y''(x)}\Big]\Big\} = \operatorname{sign}\Big\{\Big(\sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{1}{x^2 - x_\nu^2}\Big)^{-2}\cdot\sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{2x}{(x^2 - x_\nu^2)^2}\Big\} = \operatorname{sign}\{x\},$$

с което (3.12) е установено и случаят $k = 1$ на Теорема 3.1 е доказан.

Индукционната стъпка ще направим с помощта на Лема 3.7. Да предположим, че твърдението на Теорема 3.1 е вярно за някое $k \in \mathbb{N}$, $k < n$. От Лема 3.7 следва, че

$$\operatorname{sign}\{L_{k+1}'(y;x)\} = \operatorname{sign}\{2xL_k(y'';x) + \frac{A}{2}L_k'(y';x) + A(k+1)xL_{k+1}(y';x)\}\,.$$

И трите събираеми в дясната страна на последното равенство имат знака на x (да напомним, че $A > 0$). Наистина, понеже $y = P_n^{(\lambda)}$ има само реални и прости нули, то според теоремата на Рол същото е вярно и за y', и за y''. От неравенствата на Йенсен (параграф 4 от Глава 1) следва $L_k(y''; x) > 0$ и $L_{k+1}(y'; x) > 0$. Следователно първото и третото събираемо имат знака на x. Понеже y' също е ултрасферичен полином (виж Лема 3.2), то според индукционното допускане и второто събираемо има знака на x.

Следователно $\operatorname{sign}\{L'_{k+1}(y; x)\} = \operatorname{sign}\{x\}$, с което индукционната стъпка от k към $k+1$ е направена и доказателството на теорема 3.1 е завършено. □

Като непосредствено следствие от Теорема 3.1 получаваме

Следствие 3.3. *Нека $P = P_n^{(\lambda)}$, където $\lambda > -1/2$ и $n \in \mathbb{N}$. Тогава за всяко фиксирано $y \in \mathbb{R}$, функцията $\varphi(x) = \varphi(P; x) := |P(x+iy)|^2 - |P(x)|^2$ е строго монотонно намаляваща в $(-\infty, 0]$ и строго монотонно растяща в $[0, \infty)$.*

Доказателство на следствието:

Формулата на Йенсен ни дава

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{n} L_k(P; x) y^{2k},$$

и твърдението следва веднага от Теорема 3.1. □

Накрая да отбележим, че от Теорема 3.1 и Лема 3.4 следва теорема E. Наистина, понеже $\{L_k(P_n^{(\lambda)}; x)\}$ са четни функции, то Теорема 3.1 ни дава, че $\max_{x\in[-1,1]} L_k(P_n^{(\lambda)}; x) = L_k(P_n^{(\lambda)}; 1)\,, \quad 1 \le k \le n\,.$

Както знаем от Лема 3.4, $\max_{x\in[-1,1]} |P_n^{(\lambda)}(x)| = |P_n^{(\lambda)}(\pm 1)|$ при $\lambda \ge 0$ и следователно

$$\max_{x\in[-1,1]} L_0(P_n^{(\lambda)}; x) = \max_{x\in[-1,1]} [P_n^{(\lambda)}(x)]^2 = [P_n^{(\lambda)}(1)]^2 = L_0(P_n^{(\lambda)}; 1), \text{ ако } \lambda \ge 0.$$

Тогава при $\lambda \ge 0$ от формулата на Йенсен следва, че за $x \in [-1, 1],\ y \in \mathbb{R}$ имаме

$$|P_n^{(\lambda)}(x+iy)|^2 = \sum_{k=0}^{n} L_k(P_n^{(\lambda)}; x) y^{2k} \le \sum_{k=0}^{n} L_k(P_n^{(\lambda)}; 1) y^{2k} = |P_n^{(\lambda)}(1+iy)|^2.$$

4. Доказателство на хипотезата на Патрик и на усилената хипотеза на Патрик за полиномите на Якоби.

1. Формулировка на основите резултати.

Глава 4 се основава на статията [2] и основните резултати в нея са следните две теореми:

Теорема 4.1 (Г. Николов, Х. Дитерт, В. Пилвейн, А. Александров). *Хипотезата на Патрик е вярна. С други думи, ако $P = P_n^{(\alpha,\beta)}$ е n-тия полином на Якоби, където $\alpha \geq \beta > -1$, то за $k = 1, 2, \ldots, n$, имаме*

$$\max_{x\in[0,1]} L_k(P; x) = L_k(P; 1)\,.$$

Теорема 4.2 (Г. Николов, Х. Дитерт, В. Пилвейн, А. Александров). *Усилената хипотеза на Патрик е вярна. С други думи, ако $P = P_n^{(\alpha,\beta)}$ е n-тия полином на Якоби, където $n \geq 2$ и $\alpha \geq \beta > -1$, то за $k = 1, \ldots, n-1$, имаме, че $L_k(P; x)$ е строго монотонно растяща функция в $[0, \infty)$.*

Да отбележим, че $L_n(P; x) = const$ също може да се интерпретира като растяща (нестрого) функция в $[0, \infty)$.

Разбира се, Теорема 4.1 следва от Теорема 4.2. Но доказателството на Теорема 4.1 е значително по-просто и затова ще го изложим отделно.

От Теорема 4.2 и Лема 3.4 получаваме две следствия, описващи свойства на полиномите на Якоби в комплексната равнина:

Следствие 4.1. *Нека $P = P_n^{(\alpha,\beta)}$, където $n \in \mathbb{N}$ и $\alpha \geq \max\{-1/2, \beta\}$. Тогава*

$$|P(x + iy)| \leq |P(1 + iy)| \quad \text{при } (x, y) \in [0, 1] \times \mathbb{R},$$

и неравенството е строго, освен ако $y = 0$.

Доказателство на Следствие 4.1:

От Теорема 4.2 следва, че $\max_{x\in[0,1]} L_k(P_n^{(\alpha,\beta)}; x) = L_k(P_n^{(\alpha,\beta)}; 1)\,, \quad 1 \leq k \leq n\,.$
От Лема 3.4 пък знаем, че ако $\alpha \geq \max\{\beta, -\frac{1}{2}\}$, тогава

$$\max_{x\in[0,1]} L_0(P_n^{(\alpha,\beta)}; x) = L_0(P_n^{(\alpha,\beta)}; 1).$$

Тези две твърдения и формулата на Йенсен показват, че при $\alpha \geq \max\{\beta, -\frac{1}{2}\}$

и $x \in [0,1],\ y \in \mathbb{R}$ имаме

$$\begin{aligned}|P_n^{(\alpha,\beta)}(x+iy)|^2 &= \sum_{k=0}^{n} L_k(P_n^{(\alpha,\beta)};x)y^{2k} \\ &\le \sum_{k=0}^{n} L_k(P_n^{(\alpha,\beta)};1)y^{2k} = |P_n^{(\alpha,\beta)}(1+iy)|^2. \qquad \square\end{aligned}$$

Следствие 4.2. *Нека $P = P_n^{(\alpha,\beta)}$, където $\alpha \ge \beta > -1$ и $n \in \mathbb{N}$. Тогава за всяко фиксирано $y \in \mathbb{R}$, $y \ne 0$, функцията*

$$\psi(x) = \psi(P;x) := |P(x+iy)|^2 - |P(x)|^2$$

е строго монотонно растяща в $[0,\infty)$.

Доказателство на Следствие 4.2:

Формулата на Йенсен ни дава, че $\psi(x) = \sum_{k=1}^{n} L_k(P;x)y^{2k}$ и твърдението следва веднага от Теорема 4.2. $\square$

Сега пристъпваме към доказателствата на Теорема 4.1 и Теорема 4.2.

Ще започнем с няколко помощни резултата.

2. Четири технически леми.

В този параграф ще формулираме и докажем четири леми от [2]. Първите две от тях се използват в доказателството на третата, а тя заедно с четвъртата играе решаваща роля в доказателството на хипотезата на Патрик. Третата лема лежи в основата и на доказателството на усилената хипотеза на Патрик. В целия параграф 2 многократно използваме Лема 2.1 и Тъждество 2 от Глава 2.

Да припомним отначало, че, както знаем от Лема 3.1, n-тия полином на Якоби удовлетворява обикновеното диференциално уравнение от втори ред

$$(1-x^2)P'' - (Ax+C)P' + BP = 0, \quad P = P_n^{(\alpha,\beta)}, \tag{4.1}$$

където за краткост сме положили (и ще използваме тези означения до края на Глава 4)

$$\begin{aligned} A &= A(P) = \alpha+\beta+2, \\ B &= B(P) = n(n+\alpha+\beta+1), \\ C &= C(P) = \alpha-\beta. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Понеже $\alpha, \beta > -1$, $A(P)$ и $B(P)$ са положителни числа; ако $\alpha > \beta$, то $C(P)$ също е положително число. Да припомним също, че, съгласно Лема 3.2, производната P' на полинома на Якоби P е също полином на Якоби, по-точно

$$\frac{d}{dx}\left\{P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\right\} = \frac{1}{2}(n+\alpha+\beta+1)P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x)\,. \tag{4.3}$$

Оттук следва, че $A(P') = A(P)+2$, $B(P') = B(P) - A(P)$ и $C(P') = C(P)$.

Лема 4.1. *Нека* $P = P_n^{(\alpha,\beta)}$. *Тогава*

$$\begin{aligned} B(k+1)(2k+1)L_{k+1}(P;x) =& (1-x^2)L_k(P'';x) - \frac{1}{2}\left(Ax+C\right)L_k'(P';x) \\ &+ (Ak+B)L_k(P';x) + L_{k-1}(P'';x). \end{aligned}$$

Доказателство на Лема 4.1:

Диференцираме j пъти (4.1), използвайки формулата на Лайбниц и получаваме

$$(1-x^2)P^{(j+2)}(x) - \big[(A+2j)x+C\big]P^{(j+1)}(x) + [B-Aj-j(j-1)]P^{(j)}(x) = 0, \quad (4.4)$$

откъдето

$$\begin{aligned} 0 =& (1-x^2)\sum_{j=0}^{2k}\frac{(-1)^{k-j}}{j!(2k-j)!}P^{(j+2)}(x)P^{(2k+2-j)}(x) \\ &- \sum_{j=0}^{2k}\frac{(-1)^{k-j}\big[(A+2j)x+C\big]}{j!(2k-j)!}P^{(j+1)}(x)P^{(2k+2-j)}(x) \\ &+ \sum_{j=0}^{2k}\frac{(-1)^{k-j}[B-Aj-j(j-1)]}{j!(2k-j)!}P^{(j)}(x)P^{(2k+2-j)}(x). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Сега ще пресметнем трите суми в дясната страна на (4.5).

Сумата на първия ред в (4.5) е равна на $L_k(P'';x)$.

Сумата на втория ред в (4.5) опростяваме с помощта на Лема 2.1в) и Лема 2.1а), както следва:

$$\begin{aligned} &\sum_{j=0}^{2k}\frac{(-1)^{k-j}\big[(A+2j)x+C\big]}{j!(2k-j)!}P^{(j+1)}(x)P^{(2k+2-j)}(x) \\ &\quad = \frac{1}{2}\left(Ax+C\right)L_k'(P';x) + 2\sum_{j=0}^{2k-1}\frac{(-1)^{k-1-j}}{j!(2k-1-j)!}P^{(j+2)}(x)P^{(2k+1-j)}(x) \\ &\quad = \frac{1}{2}\left(Ax+C\right)L_k'(P';x)\,. \end{aligned}$$

За сумата на третия ред в (4.5) прилагаме последователно Лема 2.1г), Лема 2.1б) и Тъждество 2 от Глава 2 и получаваме

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{2k} \frac{(-1)^{k-j}[B - Aj - j(j-1)]}{j!(2k-j)!} P^{(j)}(x) P^{(2k+2-j)}(x) \\
&= \frac{B}{2}\big[L_k''(P;x) - 2L_k(P';x)\big] \\
&\qquad - A \sum_{j=0}^{2k} \frac{(-1)^{k-1-j}(k+k-j)}{j!(2k-j)!} P^{(j+1)}(x) P^{(2k+1-j)}(x) \\
&\qquad - \sum_{j=0}^{2k-2} \frac{(-1)^{k-2-j}}{j!(2k-2-j)!} P^{(j+2)}(x) P^{(2k-j)}(x) \\
&= B\big[L_k(P';x) - (k+1)(2k+1)L_{k+1}(P;x)\big] + A\,k\,L_k(P';x) + L_{k-1}(P'';x) \\
&= (Ak+B)L_k(P';x) + L_{k-1}(P'';x) - B(k+1)(2k+1)L_{k+1}(P;x).
\end{aligned}
$$

Заместваме трите суми в (4.5) с изразите, които получихме за тях и стигаме до равенството от Лема 4.1. □

Лема 4.2. *Нека* $P = P_n^{(\alpha,\beta)}$. *Тогава*

$$(1-x^2)L_k'(P'';x) - 2\big[(A+2k+2)x + C\big]L_k(P'';x) + (B-A)L_k'(P';x) + L_{k-1}'(P'';x) = 0.$$

Доказателство на Лема 4.2:

Диференцираме $(j+1)$ пъти (4.1), използвайки формулата на Лайбниц и получаваме

$$(1-x^2)P^{(j+3)}(x) - \big[(A+2)x + C + 2jx\big]P^{(j+2)}(x) - [j(j-1) + (A+2)j + A - B]P^{(j+1)}(x) = 0,$$

откъдето

$$
\begin{aligned}
0 =& (1-x^2)\sum_{j=0}^{2k} \frac{(-1)^{k-j}}{j!(2k-j)!} P^{(j+3)}(x) P^{(2k+2-j)}(x) \\
&- \big[(A+2)x + C\big] \sum_{j=0}^{2k} \frac{(-1)^{k-j}}{j!(2k-j)!} P^{(j+2)}(x) P^{(2k+2-j)}(x) \\
&- 2x \sum_{j=0}^{2k} \frac{(-1)^{k-j}(j-k+k)}{j!(2k-j)!} P^{(j+2)}(x) P^{(2k+2-j)}(x) \\
&- \sum_{j=0}^{2k} \frac{(-1)^{k-j}[j(j-1) + (A+2)j + A - B]}{j!(2k-j)!} P^{(j+1)}(x) P^{(2k+2-j)}(x).
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

Съгласно Лема 2.1в), сумата на първия ред в (4.6) е равна на $L'_k(P'';x)/2$.

Сумата на втория ред в (4.6) е равна на $L_k(P'';x)$.

Съгласно Лема 2.1б), сумата на третия ред в (4.6) е равна на $kL_k(P'';x)$.

Сумата на четвъртия ред в (4.6) се опростява с помощта на Лема 2.1в) и Лема 2.1а), както следва:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{2k}\frac{(-1)^{k-j}[j(j-1)+(A+2)j+A-B]}{j!(2k-j)!}P^{(j+1)}(x)P^{(2k+2-j)}(x)\\
&=\sum_{j=0}^{2k-2}\frac{(-1)^{k-2-j}}{j!(2k-2-j)!}P^{(j+3)}(x)P^{(2k-j)}(x)\\
&\quad+(A+2)\sum_{j=0}^{2k-1}\frac{(-1)^{k-1-j}}{j!(2k-1-j)!}P^{(j+2)}(x)P^{(2k+1-j)}(x)\\
&\quad+\frac{A-B}{2}\,L'_k(P';x)\\
&=\frac{A-B}{2}\,L'_k(P';x)-\frac{1}{2}\,L'_{k-1}(P'';x)\,.
\end{aligned}$$

Заместваме четирите суми в (4.6) с изразите, които получихме за тях и стигаме до равенството от Лема 4.2. □

Лема 4.3. *Нека* $P=P_n^{(\alpha,\beta)}$. *Тогава*

$$B(k+1)L'_{k+1}(P;x)=2x\,L_k(P'';x)+\frac{A}{2}\,L'_k(P';x)+(k+1)(Ax+C)L_{k+1}(P';x).$$

Доказателство на Лема 4.3:

Диференцираме равенството от Лема 4.1 и получаваме

$$\begin{aligned}
B(k+1)(2k+1)L'_{k+1}(P;x)=&(1-x^2)L'_k(P'';x)-2xL_k(P'';x)+L'_{k-1}(P'';x)\\
&+\big[A(k-\frac{1}{2})+B\big]L'_k(P';x)-\frac{1}{2}(Ax+C)L''_k(P';x)\,.
\end{aligned}$$

Но Тъждество 2 от Глава 2 ни дава

$$L''_k(P';x)=4L_k(P'';x)-(2k+1)(2k+2)L_{k+1}(P';x),$$

и така стигаме до равенството

$$\begin{aligned}
B(k+1)(2k+1)L'_{k+1}(P;x)=&(1-x^2)L'_k(P'';x)-2\big[(A+1)x+C\big]L_k(P'';x)\\
&+L'_{k-1}(P'';x)+\big[A(k-\frac{1}{2})+B\big]\,L'_k(P';x)\\
&+(Ax+C)(k+1)(2k+1)L_{k+1}(P';x)\,.
\end{aligned}$$

От друга страна, съгласно Лема 4.2 имаме

$$0 = (1-x^2)L_k'(P'';x) - 2[(A+2k+2)x+C]L_k(P'';x) + L_{k-1}'(P'';x) + (B-A)L_k'(P';x),$$

Изваждаме почленно последните две равенства и получаваме

$$\begin{aligned} B(k+1)(2k+1)L_{k+1}'(P;x) =& 2(2k+1)x\, L_k(P'';x) + A(k+\frac{1}{2})L_k'(P';x) \\ &+ (Ax+C)(2k+1)(k+1)L_{k+1}(P';x)\,. \end{aligned}$$

След разделяме на двете страни на последното равенство с константата $2k+1$ получаваме равенството от Лема 4.3. □

Лема 4.4. *Нека $P = P_n^{(\alpha,\beta)}$. Тогава*

$$(1-x^2)L_k'(P';x) + BL_k'(P;x) - 2\big[(A+2k)x+C\big]L_k(P';x) + L_{k-1}'(P';x) = 0.$$

Доказателство на Лема 4.4:

Доказателството на Лема 4.4 е много сходно с доказателството на Лема 4.1, но за пълнота ще го приведем.

Умножаваме равенствата (4.4) с $(-1)^{k-j}\dfrac{P^{(2k+1-j)}(x)}{j!(2k-j)!}$ и сумираме получените изрази за $0 \le j \le 2k$. Така стигаме до равенството

$$\begin{aligned} 0 =& (1-x^2)\sum_{j=0}^{2k}\frac{(-1)^{k-j}}{j!(2k-j)!}P^{(j+2)}(x)P^{(2k+1-j)}(x) \\ &- \sum_{j=0}^{2k}\frac{(-1)^{k-j}\big[(A+2j)x+C\big]}{j!(2k-j)!}P^{(j+1)}(x)P^{(2k+1-j)}(x) \\ &+ \sum_{j=0}^{2k}\frac{(-1)^{k-j}[B-Aj-j(j-1)]}{j!(2k-j)!}P^{(j)}(x)P^{(2k+1-j)}(x). \end{aligned} \tag{4.7}$$

Съгласно Лема 2.1в) сумата на първия ред в (4.7) е равна на $\frac{1}{2}L_k'(P';x)$.

Сумата на втория ред в (4.7) опростяваме с помощта на Лема 2.1б):

$$\begin{aligned} &\sum_{j=0}^{2k}\frac{(-1)^{k-j}\big[(A+2j)x+C\big]}{j!(2k-j)!}P^{(j+1)}(x)P^{(2k+1-j)}(x) \\ &\quad = (Ax+C)L_k(P';x) + 2x\sum_{j=0}^{2k}\frac{(-1)^{k-j}(j-k+k)}{j!(2k-j)!}P^{(j+1)}(x)P^{(2k+1-j)}(x) \\ &\quad = (Ax+C)L_k(P';x) + 2kxL_k(P';x) = [(A+2k)x+C]L_k(P';x). \end{aligned}$$

За сумата на третия ред в (4.7) съгласно Лема 2.1в) и Лема 2.1а) имаме:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{2k}\frac{(-1)^{k-j}[B-Aj-j(j-1)]}{j!(2k-j)!}P^{(j)}(x)P^{(2k+1-j)}(x)\\
&=\frac{B}{2}L_k'(P;x)-A\sum_{j=0}^{2k-1}\frac{(-1)^{k-1-j}}{j!(2k-1-j)!}P^{(j+1)}(x)P^{(2k-j)}(x)\\
&\quad-\sum_{j=0}^{2k-2}\frac{(-1)^{k-2-j}}{j!(2k-2-j)!}P^{(j+2)}(x)P^{(2k-1-j)}(x)\\
&=\frac{B}{2}L_k'(P;x)+\frac{1}{2}L_{k-1}'(P';x).
\end{aligned}$$

Заместваме трите суми в (4.7) с изразите, които получихме за тях и стигаме до равенството от Лема 4.4. □

3. Доказателство на хипотезата на Патрик

Сега вече сме в състояние да докажем Теорема 4.1.

Доказателство на Теорема 4.1:

Да отбележим отначало, че случаят $k=n$ в Теорема 4.1 е очевиден, защото $L_n(P;x)=const$. Затова по-нататък ще считаме, че $k\in\{1,\dots,n-1\}$.

За $k\in\{1,\dots,n-1\}$ въвеждаме помощната функция

$$F_k(x):=L_k(P;x)+\frac{A(1-x^2)}{(A+2k)B}\,L_k(P';x)\,, \tag{4.8}$$

където A и B са коефициентите в (4.1), определени с равенствата (4.2).

Ще покажем, че $F_k'(x)$ може да се представи във вида

$$F_k'(x)=c\Big\{2xL_{k-1}(P'';x)+\big[(A+k)C+A(A+3k-1)x\big]L_k(P';x)\Big\}\,, \tag{4.9}$$

където

$$c=\frac{2}{(A+2k)B}\,.$$

Да отбележим, че $A>0$, $B>0$ и $C\geq 0$ (вж. (4.2)), а също така и $c>0$. Освен това от неравенствата на Йенсен (Глава 1, параграф 4) следва, че $L_{k-1}(P'';x)>0$ и $L_k(P';x)>0$ за $x\in\mathbb{R}$.

Тогава от (4.9) получаваме, че

$$F_k'(x) \geq 0 \quad \text{за} \quad x \geq 0\,,$$

и значи $F_k(x)$ е растяща функция в $[0,\infty)$. Сега Теорема 4.1 следва веднага от веригата неравенства

$$\max_{x\in[0,1]} L_k(P;x) \leq \max_{x\in[0,1]} F_k(x) = F_k(1) = L_k(P;1)\,.$$

Така, за да докажем Теорема 4.1, остава да докажем равенството (4.9), което, както лесно се проверява, е равносилно с равенството

$$\begin{aligned}(A+2k)B\,L_k'(P;x) + A(1-x^2)L_k'(P';x) = \\ = 4x\,L_{k-1}(P'';x) + 2\big[A(A+3k)x + (A+k)C\big]L_k(P';x)\,.\end{aligned} \tag{4.10}$$

Ако в Лема 4.3 заменим k с $k-1$, получаваме

$$-k(Ax+C)\,L_k(P';x) + Bk\,L_k'(P;x) - \frac{A}{2}\,L_{k-1}'(P';x) - 2x\,L_{k-1}(P'';x) = 0\,.$$

Събираме последното равенство почленно с равенството

$$\frac{A}{2}(1-x^2)L_k'(P';x) + \frac{A}{2}BL_k'(P;x) - A\big[(A+2k)x+C\big]L_k(P';x) + \frac{A}{2}L_{k-1}'(P';x) = 0$$

(то се получава като двете страни на тъждеството в Лема 4.4 умножим с $\frac{A}{2}$) и стигаме до (4.10).

С това Теорема 4.1 е доказана. □

Накрая да отбележим, че функцията $F_k(P;x)$, която въведохме в (4.8), при $k=0$ се редуцира до функцията

$$F_0(P;x) = P^2(x) + \frac{1-x^2}{B}\big[P'(x)\big]^2, \tag{4.11}$$

която интерполира P^2 в точките му на локален максимум в интервала $[-1,1]$ и която се използва в метода на Сонин-Пойа за описване поведението на редицата от локалните екстремуми на полиномите на Якоби. С други думи, за доказателството на Теорема 4.1 ние получихме обобщение на метода на Сонин-Пойа, прилагайки го към всички функции–коефициенти $\{L_k(P;\cdot)\}_{k=1}^n$ в развитието на $|P(x+i\,y)|^2$ по четните степени на y от формулата на Йенсен. Класическото приложение на метода на Сонин-Пойа се отнася за случая $k=0$.

4. Доказателство на усилената хипотеза на Патрик

Сега пристъпваме към доказателството на Теорема 4.2.

Доказателство на Теорема 4.2:

Преди всичко да отбележим, че ако P е произволен реалнозначен полином от степен n, чиито нули $\{x_i\}_{i=1}^n$ лежат в $(-\infty, 1)$, то $\{L_k(P;x)\}_{k=1}^{n-1}$ са монотонно растящи функции в интервала $[1,\infty)$. Наистина, от

$$|P(x+iy)|^2 = c^2 \prod_{i=1}^{n} \left((x-x_i)^2 + y^2\right) = \sum_{k=0}^{n} L_k(P;x)\, y^{2k}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2\,,$$

следва, че

$$L_k(P;x) = c^2 \sum (x-x_{i_1})^2 \cdots (x-x_{i_{n-k}})^2\,,$$

където сумирането е по всички $(n-k)$-комбинации $\{i_1,\ldots,i_{n-k}\}$ на $\{1,2,\ldots,n\}$. Това представяне показва както че $\{L_k(P;x)\}_{k=0}^n$ са неотрицателни за $x \in \mathbb{R}$, така и че $\{L_k(P;x)\}_{k=1}^{n-1}$ са монотонно растящи за $x \geq x_n$, най-голямата нула на P.

Следователно за $P = P_n^{(\alpha,\beta)}$, където $\alpha \geq \beta > -1$, остава само да покажем, че $\{L_k(P;x)\}_{k=1}^{n-1}$ са монотонно растящи в $[0,1)$, а за това е достатъчно да установим, че

$$L_k'(P;x) \geq 0 \text{ за } \ x \in [0,1) \text{ при } \ P = P_n^{(\alpha,\beta)} \ \text{ и } \alpha \geq \beta > -1\,. \tag{4.12}$$

Ще докажем (4.12) с индукция по k. Индукционната стъпка от k към $k+1$ лесно се извършва с помощта на Лема 4.3. Наистина, ако предположим, че (4.12) е вярно за някое k, $1 \leq k \leq n-2$, тогава $L_k'(P';x) \geq 0$, $x \in [0,1)$, понеже P' е също полином на Якоби, удовлетворяващ предположенията в (4.12) (вж.(4.3) или пък направо лема 3.2). Съгласно неравенствата на Йенсен (виж параграф 4 от Глава 1) имаме $L_k(P'';x) > 0$ и $L_{k+1}(P';x) > 0$ за $x \in \mathbb{R}$. Сега равенството

$$B(k+1)L_{k+1}'(P;x) = 2x\, L_k(P'';x) + \frac{A}{2}\, L_k'(P';x) + (k+1)(Ax+C)L_{k+1}(P';x)$$

от Лема 4.3 показва, че $L_{k+1}'(P;x) \geq 0$ за $x \in [0,1)$ и индукционната стъпка от k към $k+1$ е направена.

Така остава да положим основата на индукцията, т.е. да докажем (4.12) за $k=1$.
Полагаме

$$g_n^{(\alpha,\beta)}(x) := L_1'(P;x) = P'(x)P''(x) - P(x)P'''(x)\,, \quad P = P_n^{(\alpha,\beta)}\,. \tag{4.13}$$

По-нататък в изложението многократно ще използваме диференциалното уравнение (4.1), което за удобство тук преписваме:

$$(1-x^2)P'' - (Ax+C)P' + BP = 0, \quad P = P_n^{(\alpha,\beta)}. \tag{4.14}$$

Ще се нуждаем и от уравненията, които се получават от (4.14) съответно след еднократно, двукратно и трикратно диференциране:

$$(1-x^2)P''' - ((A+2)x+C)P'' + (B-A)P' = 0, \quad P = P_n^{(\alpha,\beta)}, \tag{4.15}$$

$$(1-x^2)P^{(4)} - ((A+4)x+C)P''' + (B-2A-2)P'' = 0, \quad P = P_n^{(\alpha,\beta)}, \tag{4.16}$$

$$(1-x^2)P^{(5)} - ((A+6)x+C)P^{(4)} + (B-3A-6)P''' = 0, \quad P = P_n^{(\alpha,\beta)}. \tag{4.17}$$

(извеждането на тези уравнения става много бързо, ако читателят си припомни казаното непосредствено след равенството (4.3)).

Лема 4.5. *Нека $n \geq 3$ и $\alpha \geq \beta > -1$. Ако $x = t \in (0,1)$ е точка на локален екстремум на $g_n^{(\alpha,\beta)}$, то $g_n^{(\alpha,\beta)}(t) > 0$.*

Доказателство на Лема 4.5:

Да отбележим отначало, че при $n = 2$ $g_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ е линейна функция и не може да има локален екстремум.

За простота по-нататък в доказателството ще пишем g вместо $g_n^{(\alpha,\beta)}$.

Най-напред ще изложим идеята на доказателството, а нейната техническа реализация, която е доста тежка, ще оставим за накрая.

Използвайки (4.14), (4.15) и (4.16), след някои пресмятания, които ще изложим накрая, изразяваме g и g' като квадратични форми на P' и P'', както следва:

$$\begin{aligned} Bg(x) =& \frac{(B-A)(Ax+C)}{1-x^2}\, P'(x)^2 - \Big[\frac{(Ax+C)((A+2)x+C)}{1-x^2} - A\Big] P'(x)P''(x) \\ &+ \big[(A+2)x+C\big] P''(x)^2, \end{aligned} \tag{4.18}$$

$$\begin{aligned} B(1-x^2)g'(x) =& \frac{(B-A)(Ax+C)((A+4)x+C)}{1-x^2}\, P'(x)^2 \\ &- \Big[\frac{(Ax+C)((A+2)x+C)((A+4)x+C)}{1-x^2} \\ &+(2A+2-B)(Ax+C)+(B-A)((A+4)x+C)\Big] P'(x)P''(x) \\ &+ \Big[((A+2)x+C)((A+4)x+C)+2(A+1)(1-x^2)\Big]\, P''(x)^2. \end{aligned} \tag{4.19}$$

От (4.18) и (4.19) елиминираме $P'(x)P''(x)$ (ще направим подробно това накрая) и получаваме

$$B\big[\varphi_1(x)g(x)+\varphi_2(x)g'(x)\big]=c_1(x)\big[P'(x)\big]^2+c_2(x)\big[P''(x)\big]^2\,, \tag{4.20}$$

където

$$\varphi_1(x)=\frac{(Ax+C)((A+2)x+C)((A+4)x+C)}{1-x^2}+(4B+A^2-2A)x+(A+2)C\,,$$

$$\varphi_2(x)=A(1-x^2)-(Ax+C)((A+2)x+C)\,,$$

$$c_1(x)=\frac{(B-A)(Ax+C)\big[2(A+1)(Ax+C)+4B\,x\big]}{1-x^2}\,,$$

$$c_2(x)=2A(A+1)(1-x^2)+4Bx((A+2)x+C)\,.$$

Понеже $A>0$, $B>0$, $C\geq 0$ и $B-A=(n-1)(n+\alpha+\beta+2)>0$, имаме, че

$$\varphi_1(x)>0,\quad c_1(x)>0,\quad c_2(x)>0,\quad x\in(0,1)\,.$$

Ако $g'(t)=0$ за някое $t\in(0,1)$, то, съгласно (4.20),

$$g(t)=\frac{c_1(t)\big[P'(t)\big]^2+c_2(t)\big[P''(t)\big]^2}{B\varphi_1(t)}>0\,,$$

което трябваше да се докаже.

Така, за да завършим доказателството на Лема 4.5, остава да докажем (4.18), (4.19) и (4.20).

Доказателство на (4.18)*:*

За по-кратко записване, в равенствата по-долу изпускаме аргумента x на P и производните му. Като използваме (4.14) и (4.15), получаваме

$$\begin{aligned} g(x)&=P'P''-PP'''\\ &=P'P''-\frac{(Ax+C)P'-(1-x^2)P''}{B}\cdot\frac{((A+2)x+C)P''-(B-A)P'}{1-x^2}, \end{aligned}$$

откъдето

$$Bg(x)=\frac{(B-A)(Ax+C)}{1-x^2}\,P'^2-\Big[\frac{(Ax+C)((A+2)x+C)}{1-x^2}-A\Big]P'P''+\big[(A+2)x+C\big]P''^2,$$

което е точно представянето (4.18). □

Доказателство на (4.19)*:*

Като използваме (4.14) и (4.16), получаваме

$$\begin{aligned} g'(x) &= P''^2 + P'P''' - P'P''' - PP^{(4)} = P''^2 - PP^{(4)} \\ &= P''^2 - \frac{(Ax+C)P' - (1-x^2)P''}{B} \cdot \frac{(2A+2-B)P'' + ((A+4)x+C)P'''}{1-x^2}. \end{aligned}$$

Използвайки (4.15), за да изразим P''' чрез P' и P'', стигаме до

$$\begin{aligned} B(1-x^2)g'(x) =& B(1-x^2)P''^2 - \big[(Ax+C)P' - (1-x^2)P''\big] \\ & \times \Big[(2A+2-B)P'' + ((A+4)x+C)\frac{((A+2)x+C)P'' - (B-A)P'}{1-x^2}\Big]. \end{aligned}$$

Извършвайки опростяванията в дясната страна на последния израз, получаваме

$$\begin{aligned} B(1-x^2)g'(x) =& \frac{(B-A)(Ax+C)((A+4)x+C)}{1-x^2}P'^2 \\ & - \Bigg[\frac{(Ax+C)((A+2)x+C)((A+4)x+C)}{1-x^2} \\ & \quad + (2A+2-B)(Ax+C) + (B-A)((A+4)x+C)\Bigg]P'P'' \\ & + \Big[((A+2)x+C)((A+4)x+C) + 2(A+1)(1-x^2)\Big]P''^2, \end{aligned}$$

което е точно представянето (4.19). □

Доказателство на (4.20)*:*

Сега от равенството (4.18) вадим почленно равенството (4.19), разделено на $(A+4)x+C$, получавайки

$$B\Big[g(x) - \frac{1-x^2}{(A+4)x+C}g'(x)\Big] = \Big[B + (2A+2-B)\frac{Ax+C}{(A+4)x+C}\Big]P'P'' - 2(A+1)\frac{1-x^2}{(A+4)x+C}P''^2$$

и след освобождаване от знаменателя,

$$B\big[((A+4)x+C)g(x) - (1-x^2)g'(x)\big] = \big[4Bx + 2(A+1)(Ax+C)\big]P'P'' - 2(A+1)(1-x^2)P''^2.$$

От последното равенство изразяваме $P'P''$:

$$\begin{aligned} P'P'' =& \frac{B[(A+4)x+C]}{4Bx+2(A+1)(Ax+C)}\,g(x) - \frac{B(1-x^2)}{4Bx+2(A+1)(Ax+C)}\,g'(x) \\ & + \frac{2(A+1)(1-x^2)}{4Bx+2(A+1)(Ax+C)}\,P''^2. \end{aligned}$$

Заместваме в (4.18) $P'P''$ с този израз и получаваме

$$\begin{aligned}
B\,g(x) =& \frac{(B-A)(Ax+C)}{1-x^2}\,P'^2 \\
&- \Big[\frac{(Ax+C)((A+2)x+C)}{1-x^2} - A\Big]\frac{(A+4)x+C}{4Bx+2(A+1)(Ax+C)}B\,g(x) \\
&+ \frac{(Ax+C)((A+2)x+C) - A(1-x^2)}{4Bx+2(A+1)(Ax+C)}\,B\,g'(x) \\
&- \Big[\frac{(Ax+C)((A+2)x+C)}{1-x^2} - A\Big]\frac{2(A+1)(1-x^2)}{4Bx+2(A+1)(Ax+C)}P''^2 \\
&+ ((A+2)x+C)\,P''^2\,.
\end{aligned}$$

Обединяването на изразите в последното равенство, съдържащи g, g', P' и P'', води до равенството

$$\begin{aligned}
&\left\{1 + \Big[\frac{(Ax+C)((A+2)x+C)}{1-x^2} - A\Big]\frac{(A+4)x+C}{4Bx+2(A+1)(Ax+C)}\right\}B\,g(x) \\
&\quad - \frac{(Ax+C)((A+2)x+C) - A(1-x^2)}{4Bx+2(A+1)(Ax+C)}\,B\,g'(x) \\
&= \frac{(B-A)(Ax+C)}{1-x^2}\,P'^2 \\
&\quad + \left\{\frac{(A+2)x+C}{4Bx+2(A+1)(Ax+C)}4Bx + \frac{2A(A+1)(1-x^2)}{4Bx+2(A+1)(Ax+C)}\right\}P''^2\,.
\end{aligned}$$

От тук намираме

$$\begin{aligned}
&B\,g(x)\,\left\{\frac{(Ax+C)((A+2)x+C)((A+4)x+C)}{1-x^2} + (4B+A^2-2A)x + (A+2)C\right\} \\
&\quad + \big\{A(1-x^2) - (Ax+C)((A+2)x+C)\big\}\,B\,g'(x) \\
&= \frac{(B-A)(Ax+C)[4Bx+2(A+1)(Ax+C)]}{1-x^2}\,P'^2 \\
&\quad + \big[4Bx((A+2)x+C) + 2A(A+1)(1-x^2)\big]P''^2,
\end{aligned}$$

което е точно (4.20).

С това Лема 4.5 е доказана. □

Предвид Лема 4.5, за да приключим със случая $k=1$ в Теорема 4.2 е достатъчно да докажем, че $g_n^{(\alpha,\beta)}(0) \geq 0$, когато $\alpha \geq \beta > -1$. Това е и съдържанието на следващата лема.

Лема 4.6. *При $\alpha \geq \beta > -1$ и $n \in \mathbb{N}$ е изпълнено*

$$g_n^{(\alpha,\beta)}(0) \geq 0\,. \tag{4.21}$$

Доказателство на Лема 4.6:

Ще докажем Лема 4.6 с индукция по n, а индуктивната стъпка ще направим като намерим връзка между $g_n^{(\alpha,\beta)}(0)$ и $g_{n-2}^{(\alpha+2,\beta+2)}(0)$.

От (4.18) следва, че

$$B\, g_n^{(\alpha,\beta)}(0) = (B-A)C\big[P'(0)\big]^2 + (A-C^2)\, P'(0)P''(0) + C\,\big[P''(0)\big]^2\,,$$

и използвайки, че според (4.15), $(B-A)P'(0) = CP''(0) - P'''(0)$, получаваме

$$Bg_n^{(\alpha,\beta)}(0) = C\frac{[CP''(0)-P'''(0)]^2}{B-A} + (A-C^2)\frac{CP''(0)-P'''(0)}{B-A}P''(0) + C\big[P''(0)\big]^2,$$

откъдето

$$B(B-A)g_n^{(\alpha,\beta)}(0) = BC\big[P''(0)\big]^2 - (A+C^2)P''(0)P'''(0) + C\big[P'''(0)\big]^2. \tag{4.22}$$

От (4.3) и (4.13) следва, че

$$\mu^2 g_{n-2}^{(\alpha+2,\beta+2)}(x) = P'''(x)P^{(4)}(x) - P''(x)P^{(5)}(x)\,, \tag{4.23}$$

където

$$\mu = \frac{1}{4}(n+\alpha+\beta+1)(n+\alpha+\beta+2)\,.$$

От (4.16) и (4.17) изразяваме $P^{(4)}(0)$ и $P^{(5)}(0)$ чрез $P''(0)$ и $P'''(0)$:

$$P^{(4)}(0) = CP'''(0) - (B-2A-2)P''(0)\,,$$

$$\begin{aligned} P^{(5)}(0) &= CP^{(4)}(0) - (B-3A-6)P'''(0) \\ &= (C^2-B+3A+6)P'''(0) - C(B-2A-2)P''(0)\,. \end{aligned}$$

Заместваме в (4.23) $P^{(4)}(0)$ и $P^{(5)}(0)$ с изразите, които току-що намерихме за тях и получаваме, че

$$\mu^2 g_{n-2}^{(\alpha+2,\beta+2)}(0) = (B-2A-2)C\big[P''(0)\big]^2 - (A+4+C^2)P''(0)P'''(0) + C\big[P'''(0)\big]^2.$$

Оттук намираме

$$P''(0)P'''(0) = \frac{(B-2A-2)C\big[P''(0)\big]^2 + C\big[P'''(0)\big]^2 - \mu^2 g_{n-2}^{(\alpha+2,\beta+2)}(0)}{A+4+C^2}$$

Заместваме с току-що намерения израз за $P''(0)P'''(0)$ в (4.22) и получаваме:

$$\begin{aligned} B(B-A)g_n^{(\alpha,\beta)}(0) = &\left[BC - \frac{(B-2A-2)C(A+C^2)}{A+4+C^2}\right]\big[P''(0)\big]^2 \\ &+ \left[C - \frac{C(A+C^2)}{A+4+C^2}\right]\big[P'''(0)\big]^2 \\ &+ \frac{\mu^2(A+C^2)}{A+4+C^2}\, g_{n-2}^{(\alpha+2,\beta+2)}(0)\,. \end{aligned}$$

След опростяване, намираме нужната ни връзка между $g_n^{(\alpha,\beta)}(0)$ и $g_{n-2}^{(\alpha+2,\beta+2)}(0)$. Тя изглежда така:

$$\begin{aligned} B(B-A)\, g_n^{(\alpha,\beta)}(0) &= \frac{\mu^2(A+C^2)}{A+4+C^2}\, g_{n-2}^{(\alpha+2,\beta+2)}(0) \\ &+ \frac{2C}{A+4+C^2}\Big[\big[2B+(A+1)(A+C^2)\big]\,\big[P''(0)\big]^2 + 2\big[P'''(0)\big]^2\Big]. \end{aligned} \tag{4.24}$$

Вече сме готови да докажем (4.21) по индукция.

Очевидно е изпълнено $g_0^{(\alpha,\beta)}(0) = g_1^{(\alpha,\beta)}(0) = g_0^{(\alpha+2,\beta+2)}(0) = g_1^{(\alpha+2,\beta+2)}(0) = 0$, тъй като втората производна на полиноми от степен ненадминаваща единица е равна на 0.

Да предположим сега, че (4.21) е вярно за $n-2$, където $n \geq 2$. Тъй като $\alpha+2 \geq \beta+2 > -1$, индукционното предположение означава, че е изпълнено също $g_{n-2}^{(\alpha+2,\beta+2)}(0) \geq 0$. Понеже $A > 0$, $B > 0$, $B - A > 0$ и $C \geq 0$, равенството (4.24) показва, че $g_n^{(\alpha,\beta)}(0) \geq 0$. С това извършихме индукционната стъпка от $n-2$ към n. Тъй като имаме база за индукцията с $n = 0$ и $n = 1$, получаваме, че неравенството $g_n^{(\alpha,\beta)}(0) \geq 0$ е изпълнено за всяко $n \in \mathbb{N}$. С това Лема 4.6 е доказана. □

С доказателството на Лема 4.6 завършихме доказателството на Теорема 4.2 за случая $k = 1$. Понеже още в началото направихме индукционната стъпка от k към $k+1$, доказателството по индукция на Теорема 4.2 е завършено. □

Литература

[1] A. Alexandrov and G. Nikolov, An inequality of Duffin-Schaeffer type for Hermite polynomials. B: *Constructive Theory of Functions, Sozopol 2010* (G. Nikolov and R. Uluchev, Eds.), pp. 9–20, Prof. Marin Drinov Academic Publishing House, Sofia, 2012.

[2] A. Alexandrov, H. Dietert, G. Nikolov, and V. Pillwein, Proof of a conjecture of M.Patrick concerning Jacobi polynomials. *J. Math. Anal. Appl.* **428** (2015), 750–761.

[3] B. Bojanov, Markov-type Inequalities for Polynomials and Splines. B: *Approximation Theory X: Abstract and Classical Analysis* (Charles K. Chui, Larry L. Schumaker and Joachim Stöckler, Eds.), Vanderbilt University Press, Nashville, TN, 2001, 31–90.

[4] B. Bojanov and G. Nikolov, Duffin and Schaeffer type inequality for ultraspherical polynomials. *J. Approx. Theory* **84** (1996), 129–138.

[5] R. J. Duffin and A. C. Schaeffer, A refinement of an inequality of brothers Markoff. *Trans. Amer. Math. Soc.* **50** (1941), 517–528.

[6] D. B. Hunter and G. P. Nikolov, Gegenbauer weight functions admitting L_2 Duffin and Schaeffer type inequalities. B: *Computation and application of orthogonal polynomials* (G. Golub, W. Gautschi and G. Opfer, Eds.), ESNM, Vol. 131, Birkhäuser, Basel, 1999, 121–131.

[7] J. L. W. V. Jensen, Recherches sur la theorie des equations. *Acta Math.* **36** (1913), 181–195.

[8] A. A. Markov, On a question of D. I. Mendeleev. Zap. Petersburg Akad. Nauk, **62** (1889), 1–24 (in Russian).

[9] V. A. Markov, *On functions least deviated from zero in a given interval*, St. Petersburg, 1892 (in Russian). German translation: Über Polynome, die in einem gegebenen Intervalle möglichst wenig von Null abweichen, *Math. Ann.* **77** (1916), 213–258.

[10] L. Milev and G. Nikolov, On the inequality of I. Schur. *J. Math. Anal. Appl.* **16** (1997), 421–437.

[11] G. Nikolov, On certain Duffin and Schaeffer type inequalities. *J. Approx. Theory* **93** (1998), 157–176.

[12] G. Nikolov, Inequalities of Duffin-Schaeffer-Schur type. *Annuaire Univ. Sofia* **90** (1998), 109–123.

[13] G. Nikolov, An inequality for polynomials with elliptic majorant. *J. Inequal. Appl.* **4** (1999), 315–325.

[14] G. Nikolov, Inequalities of Duffin-Schaeffer type. *SIAM J. Math. Anal.* **33** (2001), 686–698.

[15] G. Nikolov, Snake polynomials and Markov-type inequalities. B: *Approximation Theory: A volume dedicated to Blagovest Sendov* (B. Bojanov, Ed.), Darba, Sofia, 2001, 342–352.

[16] G. Nikolov, Markov-type inequalities in the L_2 norms induced by the Tchebycheff weights. *Arch. Inequal. Appl.* **1** (2003), 361–376.

[17] G. Nikolov, An extremal property of Hermite polynomials. *J. Math. Anal. Appl.* **290** (2004), 405–413.

[18] G. Nikolov, An extension of an inequality of Duffin and Schaeffer. *Constr. Approx.* **21** (2005), 181–191.

[19] G. Nikolov, An extension of an inequality of I. Schur. *Math. Nachr.* **278** (2005), no. 10, 1190—-1208.

[20] G. Nikolov, Inequalities of Duffin-Schaeffer type II. *East J. Approx.* **11** (2005), 147–168.

[21] G. Nikolov, Polynomial inequalities of Markov and Duffin-Schaeffer type. B: *Constructive theory of functions. Varna 2005* (B. Bojanov, ed.), Prof. Marin Drinov Academic Publ. House, Sofia, 2006, 201—246.

[22] G. Nikolov and A. Alexandrov, On the behavior of Gegenbauer polynomials in the complex plane. *Results. Math.* **62** (2012), 415–428.

[23] G. Nikolov and A. Shadrin, On Markov–Duffin–Schaeffer inequalities with a majorant. B: *Constructive theory of functions, Sozopol 2010* (G. Nikolov and R. Uluchev, Eds.), Prof. Marin Drinov Academic Publishing House, Sofia, 2012, pp. 227–264.

[24] G. Nikolov and A. Shadrin, On Markov–Duffin–Schaeffer inequalities with a majorant. II. B: *Constructive theory of functions, Sozopol 2013* (K. Ivanov, G. Nikolov and R. Uluchev, Eds.), Prof. Marin Drinov Academic Publishing House, Sofia, 2014, pp. 175–197.

[25] M. L. Patrick, Some inequalities concerning Jacobi polynomials. *SIAM J. Math. Anal.* **2** (1971), 213–220.

[26] M. L. Patrick, Extensions of inequalities of the Laguerre and Turán type. *Pacific J. Math.* **44** (1973), 675–682.

[27] A. Shadrin, Twelve proofs of the Markov inequality. B: *Approximation Theory: A volume dedicated to Borislav Bojanov* (D. K. Dimitrov, G. Nikolov, and R. Uluchev, Eds.), Professor Marin Drinov Academic Publishing House, Sofia, 2004, pp. 233–298. Available also at: http://www.damtp.cam.ac.uk/user/na/people/Alexei/papers/markov.pdf.

[28] G. Szegö, *Orthogonal Polynomials*. Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., Vol. 23, AMS, Providence, RI, 1975.

Апробация на резултатите

Резултатите, включени в дисертацията, са публикувани в следните статии ([1, 2, 22] от списъка на цитираната литература):

1. A. Alexandrov and G. Nikolov, An inequality of Duffin-Schaeffer type for Hermite polynomials, in: *Constructive Theory of Functions, Sozopol 2010* (G. Nikolov and R. Uluchev, Eds.), pp. 9–20, Prof. Marin Drinov Academic Publishing House, Sofia, 2012.

2. G. Nikolov and A. Alexandrov, On the behavior of Gegenbauer polynomials in the complex plane, *Results. Math.* **62** (2012), 415–428.

3. A. Alexandrov, H. Dietert, G. Nikolov, and V. Pillwein, Proof of a conjecture of M.Patrick concerning Jacobi polynomials, *J. Math. Anal. Appl.* **428** (2015), 750–761.

Публикациите [2] и [3] са в списания с импакт-фактор, съответно 0.508 (2012) и 1.12 (2014/2015).

Части от резултатите, включени в дисертацията са докладвани на:

International Conference "Constructive Theory of Functions", June 3-10, 2010, Sozopol, Bulgaria

Jaen Conference on Approximation Theory, July 15-20, 2012, Ubeda, Jaen, Spain.

Авторска справка

По мнение на автора, основните приноси на дисертационния труд са:

1. Доказано е ново неравенство от типа на Дафин и Шефер, в което екстремалният полином е полиномът на Ермит.

2. Доказана е усилената хипотеза на Патрик за полиномите на Гегенбауер.

3. Доказана е хипотезата на Патрик за полиномите на Якоби, и е предложено обобщение на метода на Сонин–Пойа за оценяване на функциите–коефициенти в развитието на квадрата на модула им по формулата на Йенсен.

4. Доказана е усилената хипотеза на Патрик за полиномите на Якоби.

Декларация за оригиналност на резултатите

Декларирам, че настоящата дисертация съдържа оригинални резултати, получени като резултат от научни изследвания, проведени от мен с подкрепата и в сътрудничество с научния ми ръководител, проф. Гено Николов. Резултатите, които са получени, описани и/или публикувани от други учени, са цитирани надлежно в библиографията към дисертацията.

Настоящата дисертация не е прилагана за придобиване на научна степен в друго висше училище, университет или научен институт.

Подпис:.....

Благодарности

За създаването на дисертацията безспорно най-голяма заслуга има научният ми ръководител проф. Гено Николов. Без него дисертацията просто нямаше да съществува.

Докторантурата ми започна под ръководството на покойния акад. Борислав Боянов, който преди това ми беше и дипломен ръководител. В съзнанието ми той остана като един от най-светлите примери на човек и математик.

Огромен принос за оформянето ми като математик има доц. Ваня Хаджийски. Със сигурност той е един от хората, от които съм научил най-много математика.

Използвам възможността да кажа едно голямо " БЛАГОДАРЯ! " на тези трима човека, изиграли най-важна роля в процеса на докторантурата ми.