Софийски Университет “Св. Климент Охридски”

Факултет по математика и информатика

Алексей Йорданов Николов

Задача на Протър за уравнения от променлив тип

ДИСЕРТАЦИЯ

за присъждане на образователната и научната степен “доктор”

в професионално направление 4.5 “Математика”

по научна специалност
01.01.05 “Диференциални уравнения”

Научен ръководител:
проф. дмн Недю Попиванов

София, 2015 г.

Съдържание

1. **Увод**

Предмет на настоящата дисертация са някои гранични задачи, многомерни аналози на задачата на Дарбу в равнината. Такива задачи за пръв път са формулирани от Murray H. Protter (Протър) през петдесетте години на миналия век.

Да означим точките в R^k с $(x,t) = (x_1, \ldots, x_{k-1}, t)$, $k \geq 3$ и да въведем числото $m \geq 0$. Разглеждаме уравнението:

$$Lu \equiv t^m \Delta_x u - u_{tt} \equiv t^m \sum_{i=1}^{k-1} u_{x_i x_i} - u_{tt} = f(x,t) \tag{1.1}$$

в областта

$$\Omega_m := \left\{ (x,t) : t > 0,\ \frac{2}{m+2} t^{(m+2)/2} < |x| < 1 - \frac{2}{m+2} t^{(m+2)/2} \right\},$$

ограничена от двете характеристични повърхности

$$\Sigma_{m,1} = \left\{ (x,t) : t > 0,\ |x| = 1 - \frac{2}{m+2} t^{(m+2)/2} \right\},$$

$$\Sigma_{m,2} = \left\{ (x,t) : t > 0,\ |x| = \frac{2}{m+2} t^{(m+2)/2} \right\}$$

и кълбото

$$\Sigma_0 = \{ (x,t) : t = 0, |x| < 1 \}.$$

В случая $m = 0$ уравнение (1.1) е хиперболично в зададената област, докато в случая $m > 0$ уравнението се изражда върху границата Σ_0, т. е. е слабо хиперболично.

През 1952 година, разглеждайки уравнението (1.1) в R^3 (т. е. уравнение (1.1) с $k = 3$), Протър [59, 60] задава данни върху едната характеристична повърхност и повърхността Σ_0 и по този начин поставя нови гранични задачи, които, ако се обобщят за произволно естествено число $k \geq 3$, се формулират по следния начин:

Задачи $P1_m$ и $P2_m$. Да се намери решение $u(x,t)$ на (1.1) в Ω_m, удовлетворяващо условията

$$P1_m : \quad \begin{cases} u|_{\Sigma_0} = 0, \\ u|_{\Sigma_{m,1}} = 0; \end{cases} \qquad P2_m : \quad \begin{cases} u_t|_{\Sigma_0} = 0, \\ u|_{\Sigma_{m,1}} = 0. \end{cases}$$

Задачи $P1_m^*$ и $P2_m^*$. (Спрегнати на $P1_m$ и $P2_m$.) Да се намери решение на (1.1) в Ω_m, такова че

$$P1_m^* : \quad \begin{cases} u|_{\Sigma_0} = 0, \\ u|_{\Sigma_{m,2}} = 0; \end{cases} \qquad P2_m^* : \quad \begin{cases} u_t|_{\Sigma_0} = 0, \\ u|_{\Sigma_{m,2}} = 0. \end{cases}$$

Тези задачи могат да се обобщят и за уравнение с младши членове и гранично условие от смесен тип върху Σ_0 :

Задача $P_{m,\alpha}$. Да се намери решение на уравнението

$$Lu \equiv t^m \sum_{i=1}^{k-1} u_{x_i x_i} - u_{tt} + \sum_{i=1}^{k-1} b_i u_{x_i} + b u_t + cu = f(x,t) \tag{1.2}$$

в областта Ω_m, удовлетворяващо граничните условия

$$u|_{\Sigma_{m,1}} = 0, \quad [u_t + \alpha u]|_{\Sigma_0} = 0.$$

Задача $P^*_{m,\alpha}$. Да се намери решение на уравнението

$$L^* u \equiv t^m \sum_{i=1}^{k-1} u_{x_i x_i} - u_{tt} - \sum_{i=1}^{k-1} (b_i u)_{x_i} - (bu)_t + cu = f(x,t)$$

в областта Ω_m, удовлетворяващо граничните условия

$$u|_{\Sigma_{m,2}} = 0, \quad [u_t + (\alpha + b)u]|_{\Sigma_0} = 0.$$

В настоящата дисертация са изследвани следните две задачи на Протър:

- трета гранична задача за тримерно хиперболично уравнение с младши членове, т. е. Задача $P_{m,\alpha}$ с $m = 0$ и $k = 3$;

- първа гранична задача за четиримерно слабо хиперболично уравнение, т. е. Задача $P1_m$ с $m > 0$ и $k = 4$.

Протър [59, 60] е стигнал до тези задачи, докато е изследвал уравнения от смесен тип (хиперболично-елиптичен) в област, чиято хиперболична част е Ω_m. Задачите $P1_m$, $P2_m$ и $P_{m,\alpha}$ са многомерни аналози на задачата на Дарбу в равнината. Изследването на такива гранични задачи за уравнения от смесен тип е тясно свързано с околозвуковата газова динамика. Обзор на класически двумерни задачи, описващи модели на трансзвукови течения, може да бъде намерен в Morawetz [47]. Задачата на Дарбу в R^2 се знае, че е коректно поставена, оказва се обаче, че задачите на Протър в общия случай не са класически разрешими. Доколкото двата случая – $m = 0$ и $m > 0$ – са от различно естество, т. е. в първия случай разглежданото уравнение е хиперболично, а във втория случай – израждащо се хиперболично, ще направим обзор на задачите на Протър за $m = 0$ и $m > 0$ поотделно.

Задачи на Протър за хиперболични уравнения. Първите резултати за съществуване и единственост по Задачи $P1_0$ и $P1^*_0$ в R^3 са формулирани от Протър [60] .

През 1957 година Tong Kwang-Chang [66] доказва, че тримерната Задача $P1^*_0$ с нулева дясна страна притежава безброй много нетривиални класически решения. Това означава, че за класическата разрешимост на съответстващата й Задача $P1_0$ дясната страна f на уравнение (1.1) трябва да е ортогонална в $L_2(\Omega_0)$ на всички тези решения. Така резултатът за съществуване, формулиран от Протър, се оказва неверен. По тази причина на дневен ред стои въпросът и за единствеността. Гарабедиан [23] доказва единственост на класическото решение на Задача $P1_0$, но в четиримерния случай.

Аналогична се оказва ситуацията и при втора гранична задача в R^3: Попиванов и Schneider [51] и Khe Kan Cher [41] намират конкретни решения на хомогенните Задачи $P1^*_0$ и $P2^*_0$. С цел да избегнат безкрайния брой условия за съществуване на класическо решение, Попиванов и Schneider [51] въвеждат подходящи дефиниции за обобщени решения на Задачи $P1_0$, $P2_0$ в R^3 и доказват теореми за съществуване и единственост на тези обобщени решения. В същата работа ([51]) са получени първи априорни оценки и е показано, че съществуват обобщени решения на Задачи $P1_0$, $P2_0$, които имат силна степенна особеност в началото на координатната система $O(0,0,0)$ дори и при безкрайно гладки функции $f(x,t)$ в дясната страна на уравнението. Тази особеност е изолирана и не се разпространява по бихарактеристиките, което е нехарактерно за хиперболичните уравнения. (Подробни резултати свързани с разпространението на особеностите на решенията на уравнения от втори ред могат да бъдат намерени в Hörmander [28].)

Малко по-късно тримерната Задача $P1_0$ се изследва и от корейски математици. В [34] е доказана единственост на решението на тази задача в подходящ клас от функции, неограничени в началото O. Съществуването на решение от същия клас при определени условия е доказано в Choi и Park [19]. За целта те използват резултати от Choi [18], където са изследвани тясно свързани със Задача $P1_0$ гранични задачи за двумерно хиперболично уравнение.

Задачите на Протър се изследват и за по-високи размерности. През 1960 година, както вече споменахме, Гарабедиан [23] доказва единственост на класическото решение на Задача $P1_0$ в R^4. Khe Kan Cher [40, 41] разглежда в R^k, $k \geq 3$ уравнението на Ойлер-Поасон-Дарбу, което е от по-общ вид от уравнението (1.1) и намира нетривиални решения ([41]) на многомерните хомогенни Задачи $P1_0^*$, $P2_0^*$. Задачи $P1_0$, $P2_0$ в R^k, $k \geq 3$ са разгледани също така и от Алдашев [2, 1, 6, 7] в серия от негови публикации, които целят да докажат различни теореми за съществуване и единственост. В работата [2] е анонсирано, че съществуват сингулярни решения със степенна особеност дори при много гладки функции f в дясната страна на уравнението и в случаите на по-висока размерност $k > 3$ на Задачи $P1_0$ и $P2_0$.

Въпреки че в работи, като [34, 18, 19, 2], се разглеждат сингулярни решения със силна степенна особеност, остава неизяснен въпросът за асимптотичното поведение на тази особеност и от какви условия се определя нейният ред.

За тримерния и четиримерния случай на двете задачи този въпрос е изследван в някои публикации ([52, 20, 54, 53]). В Попиванов и Попов [52] е разгледана Задача $P1_0$ в R^3, а в Дечевски, Попиванов и Попов [20] – Задача $P2_0$ в R^3, във важния частен случай, когато дясната страна на уравнението е тригонометричен полином[1]

$$f(x,t) = \sum_{n=0}^{l} \left(f_n^1(|x|,t)\cos(n \arctan \frac{x_2}{x_1}) + f_n^2(|x|,t)\sin(n \arctan \frac{x_2}{x_1}) \right), \quad l \in \mathrm{N} \cup \{0\}. \tag{1.3}$$

Оказва се, че редът на сингулярност на особеността на обобщените решения се определя от това, дясната страна f на кои от решенията на съответните хомогенни спрегнати Задачи $P1_0^*$ и $P2_0^*$ е ортогонална в $L_2(\Omega_0)$.

Аналогични резултати са получени и за четиримерния случай от Попиванов, Попов и Scherer [54] за Задача $P1_0$ и Попиванов и Попов [53] за Задача $P2_0$ с дясната страна $f(x,t)$ от вида

$$f(x,t) = \sum_{n=0}^{l} \sum_{s=1}^{2n+1} f_n^s(|x|,t) Y_n^s(x/|x|), \quad l \in \mathrm{N} \cup \{0\}, \tag{1.4}$$

където $Y_n^s(x/|x|), \quad n = 0, 1, \ldots, l, \quad s = 1, \ldots, 2n+1$ са сферични функции дефинирани върху единичната сфера в R^3 $S^2 := \{x : |x| = 1\}$. Изследването на

[1] Ако бъдем точни, терминът "тригонометричен полином" означава израз от вида (1.3), в който коефициентите f_n^1 и f_n^2 са константи, а не функции. В настоящата дисертация за удобство ще използваме този термин в по-широк смисъл, т. е. в нашите разглеждания $f_n^1 = f_n^1(|x|,t)$, $f_n^2 = f_n^2(|x|,t)$.

задачите с дясна страна от този вид (хармоничен полином)[2] е съществено, тъй като сферичните функции образуват пълна ортогонална система в $L_2(S^2)$. В [54] и [53] са доказани съществуването и единствеността на обобщените решения на разгледаните задачи, като в [53] са намерени конкретни решения на хомогенните спрегнати Задачи $P1_0^*$ и $P2_0^*$ в R^4. Ако въведем коефициентите

$$\beta_{k,s}^n := \int_{\Omega_0} V_{k,s}^n(x,t) f(x,t)\, dxdt,$$

където $V_{k,s}^n(x,t)$ са намерените в [53] решения на хомогенната спрегната Задача $P1_0^*$ в R^4, точното асимптотично поведение на обобщеното решение на Задача $P1_0$ в R^4 е описано в следната теорема:

Теорема 1.1 ([54]). *Нека дясната страна на уравнението $f \in C^1(\bar{\Omega}_0)$ е от вида (1.4). Тогава единственото обобщено решение $u(x,t)$ на Задача $P1_0$ принадлежи на $C^2(\bar{\Omega}_0 \backslash O)$ и има следното асимптотично представяне в околност на сингулярната точка O: $x = 0$, $t = 0$*

$$u(x,t) = \sum_{p=1}^{l} (|x|^2 + t^2)^{-p/2} F_p(x,t) + F(x,t),$$

където:

1) функцията $F \in C^2(\bar{\Omega}_0 \backslash O)$ и удовлетворява априорната оценка

$$|F(x,t)| \le C||f||_{C^1(\Omega_0)}, \quad (x,t) \in \Omega_0$$

с константа C независеща от f и $||f||_{C^k(\Omega_0)} = \sum_{|\alpha|\le k} \max_{\bar{\Omega}_0} |D^\alpha f(x,t)|$;

2) функциите F_p удовлетворяват равенствата

$$F_p(x,t) = \sum_{k=0}^{[(l-p)/2]} \sum_{s=1}^{2p+4k+1} \beta_{k,s}^{p+2k} F_{k,s}^{p+2k}(x,t), \quad p = 1, \dots, l, \tag{1.5}$$

където функциите $F_{k,s}^n \in C^2(\bar{\Omega}_0 \backslash O)$ са ограничени и не зависят от f;

3) ако поне една от константите $\beta_{k,s}^{p+2k}$ в (1.5) е различна от нула, тогава за съответстващата функция $F_p(x,t)$ съществува посока $(\alpha, 1) := (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, 1)$ с $(\alpha, 1)t \in \Sigma_{0,2}$ за $0 < t < 1/2$, такава че

$$\lim_{t \to +0} F_p(\alpha t, t) = c_p = const \ne 0.$$

Обобщените решения на Задача $P2_0$ в R^4, когато дясната страна на уравнението е хармоничен полином, и на Задачи $P1_0$, $P2_0$ в R^3, когато дясната страна на уравнението е тригонометричен полином, имат аналогична структура.

Задачите $P1_0$ и $P2_0$ в R^4 в случая, когато дясната страна на уравнението не е от вида (1.4), а функция от по-общ вид, са разгледани съответно в [56] и [58] и са намерени необходими и достатъчни условия за функцията $f(x,t)$ за ограничено единствено обобщено решение на тези задачи. Също така в [57] е анонсирано съществуването на сингулярни решения на Задача $P1_0$ в R^4 с експоненциална особеност в началото на координатите.

Що се отнася до Задача $P_{0,\alpha}$, по нея има сравнително по-малко публикации. При това, ние не познаваме нетривиални решения на хомогенната спрегната

[2] За удобство ние ще използваме този термин, въпреки че истинското му значение е малко по-различно.

Задача $P^*_{0,\alpha}$, с изключение на случая когато всички младши членове на уравнението и коефициентът α са равни на нула, т. е. когато Задача $P^*_{0,\alpha}$ съвпада със Задача $P2^*_0$. Също така досега няма отговор на следния важен принципен въпрос: възможно ли е да се намерят подходящи младши коефициенти, или функция α, така че задачата на Протър да не е така силно некоректна?

Алдашев [6, 7] разглежда Задача $P_{0,\alpha}$ с $\alpha(x) \equiv 0$. В Grammatikopoulos, Попиванов и Попов [27] е разгледана задачата за вълновото уравнение (уравнение (1.2) без младши членове, $m = 0$) в R^3 с $\alpha(x) \not\equiv 0$. Каратопраклиев [36] получава априорни оценки за достатъчно гладки решения на Задача $P_{0,\alpha}$, в която условието върху Σ_0 е заменено с условие на Дирихле.

Дефиниция за обобщено решение на Задача $P_{0,\alpha}$ в R^3 е дадена в Grammatikopoulos, Христов и Попиванов [26]. В същата работа е доказано съществуване и единственост на обобщеното решение на тази задача. Освен това са намерени десни страни и условия, които трябва да удовлетворяват коефициентите на уравнението, за да съществуват сингулярни решения със степенна особеност от определен ред. По-подробно, ако в уравнение (1.2) с $m = 0$ и $k = 3$ означим $a_1 := b_1 \cos\arctan(x_2/x_1) + b_2 \sin\arctan(x_2/x_1)$, $a_2 := |x|^{-1}(b_2\cos\arctan(x_2/x_1) - b_1 \sin\arctan(x_2/x_1))$ и предположим, че a_1, a_2, b, c са функции само на $(|x|, t)$, а α е функция само на $|x|$, този резултат се съдържа в следната теорема:

Теорема 1.2 ([26]). *Нека $\alpha \geq 0$; a_1, b, $c \in C^1(\bar{\Omega}_0 \backslash O)$, $a_2 \equiv 0$ и*

$$a_1(|x|, t) \geq |b|(|x|, t), \quad a_1(|x|, t) \geq 2|x|c(|x|, t), \quad (x, t) \in \Omega_0.$$

Тогава за всяка функция

$$f_n(x,t) = |x|^{-n}(|x|^2 - t^2)^{n-1/2} \cos(n \arctan \frac{x_2}{x_1}) \in C^{n-2}(\bar{\Omega}_0) \cap C^\infty(\Omega_0), \qquad (1.6)$$

$n \in \mathrm{N}$, $n \geq 4$ в дясната страна на уравнението съответното обобщено решение u_n на Задача $P_{0,\alpha}$ принадлежи на $C^2(\bar{\Omega}_0 \backslash O)$ и удовлетворява оценката

$$|u_n(x,t)|_{t=|x|} \geq c_0|x|^{-n}|\cos(n \arctan \frac{x_2}{x_1})|, \quad 0 < |x| < 1/2, \qquad (1.7)$$

където $c_0 = const > 0$.

Забележка: Този резултат остава в сила и за дясна страна на уравнението от вида

$$f_n(x,t) = |x|^{-n}(|x|^2 - t^2)^{n-1/2} \sin(n \arctan \frac{x_2}{x_1}) \in C^{n-2}(\bar{\Omega}_0) \cap C^\infty(\Omega_0), \qquad (1.8)$$

вместо (1.6).

Според оценката (1.7) на тази теорема е ясно, че ако коефициентите a_1, a_2, b, c и α са полярно симетрични, а дясната страна на уравнението е тригонометричен полином, т. е. е от вида (1.3), то съществуват решения с ред на сингулярност поне l. Възниква въпросът какъв е максимално възможният ред на тази сингулярност. Христов, Попиванов и Schneider [29] разглеждат същата задача (т. е. Задача $P_{0,\alpha}$ в R^3, където коефициентите a_1, a_2, b, c и α са полярно симетрични, а дясната страна е тригонометричен полином). При условие, че коефициентите b_1, b_2, b, c, α и дясната страна f са непрекъснати в $\bar{\Omega}_0$ функции, те получават следната оценка:

$$|u(x,t)| \leq C_0 \sum_{n=0}^{l} \max_{\bar{\Omega}_0}\{|f_n^1| + |f_n^2|\}|x|^{-n-\psi(K)}, \qquad (1.9)$$

където $C_0 = const > 0$,

$$K := \max\{\sup_{\bar{\Omega}_0} |b_1|, \sup_{\bar{\Omega}_0} |b_2|, \sup_{\bar{\Omega}_0} |b|, \sup_{\bar{\Omega}_0} |c|, \sup_{0\le|x|\le 1} |\alpha(|x|)|\}$$

и $\psi(K)$ е положителна монотонно растяща функция. Тази оценка е в съответствие с резултатите от [20] по Задача $P2_0$, според които максималният ред на сингулярност на обобщеното решение на Задача $P2_0$ в R^3 (т. е. Задача $P_{0,\alpha}$ в R^3 с нулеви коефициенти b_1, b_2, b, c и α) е равен на l.

Всички тези резултати, свързани с асимптотичното поведение на сингулярните решения, пораждат следния въпрос, чийто отговор сме потърсили в дисертацията:

Въпрос 1. ([29]) *Възможно ли е да се намерят коефициенти a_1, a_2, b, c, α и/или дясна страна $f(x,t)$ на уравнението, при които обобщеното решение на Задача $P_{0,\alpha}$ достига ред на сингулярност по-висок от l (евентуално максимално възможния ред, определен от оценката* (1.9)*)?*

За вълновото уравнение освен задачите на Протър се изследват и близки до тях гранични задачи тип Дарбу, например в Базарбеков и Базарбеков [14, 15, 16] и Kharibegashvili [38]. Също така, в Kharibegashvili и Midodashvili [39] са разгледани многомерни аналози на задачите на Дарбу за някои полулинейни уравнения и системи.

Задачи на Протър за израждащи се хиперболични уравнения. Тези задачи, също формулирани от Протър [60], се изследват значително по-сложно и съответно върху тях има по-малък напредък.

Диденко [21] разглежда Задачите $P1_m$ и $P1^*_m$ за $m = 1$ в така наречения симетричен случай, когато решението зависи само от $|x|$ и t.

Зубарев [68] също разглежда симетричния случай на Задачите $P1_m$ и $P1^*_m$ за различни $m > 0$ и доказва съществуване на нетривиални решения на хомогенната Задача $P1^*_m$. Но намерените от него функции не са от $C^2(\Omega_m)$ за $m = 4l$, $l \in \mathrm{N}$, както е показано в статията [49].

Aziz и Schneider [12] получават резултати за единственост на класическото решение за уравненията разглеждани в по-широка област от смесен хиперболично-елиптичен тип.

Попиванов и Schneider [49] намират някои нетривиални класически решения на хомогенните спрегнати Задачи $P1^*_m$ и $P2^*_m$ в R^3. По-късно Попиванов и Попов [55] построяват още такива решения.

Попиванов и Schneider [50]въвеждат понятие за обобщено решение на Задача $P1_m$ в R^3, доказват теореми за съществуване и единственост на обобщеното решение на тази задача и показват, че съществуват решения със степенна особеност, изолирана в началото на координатите. Теореми за съществуване и единственост, а също така и съществуване на сингулярни решения за Задача $P_{m,\alpha}$ в R^3 (в частност - и за Задача $P2_m$ в R^3) могат да бъдат намерени в Христов и Попиванов [30].

Въпреки че двата случая – $m = 0$ и $m > 0$ – са от различно естество и касаят уравнения от различен тип, се вижда, че има известни аналогии в получените резултати. И в двата случая е налице некоректност на задачите в класическа постановка и съществуване на сингулярни решения с изолирана особеност в началото на координатите. Тогава възниква следният въпрос, чийто отговор е потърсен в дисертацията за четиримерния случай на Задача $P1_m$:

Въпрос 2. *Въпреки че техниката, използвана за извеждането на резултата от Теорема 1.1 ([54]) за вълновото уравнение, е неприложима при изследването на Задача $P1_m$, възможно ли е да се намери асимптотична формула, описваща асимптотичното поведение на сингулярните решения на Задача $P1_m$ в зависимост от дясната страна $f(x,t)$ на уравнението?*

В Христов, Попиванов и Schneider [31, 33, 32] се съдържат резултати за единственост за израждащи се хиперболични уравнения в R^3 с младши членове, като се разглеждат не само уравнения тип Трикоми, но и уравнения тип Келдиш. Rassias [62, 61] също получава резултати за единственост за уравнения с младши членове, но в по-широка област от смесен тип. Алдашев [8, 2, 9, 5] изучава задачите $P1_m$, $P2_m$, $P_{m,\alpha}$ и за произволно високи размерности R^k, $k \geq 3$. Lupo и Payne [43, 44] и Lupo, Payne и Попиванов [45] разглеждат задачите на Протър в R^k, $k \geq 3$ за уравнения от смесен тип със суперкритичен степенен нелинеен член.

Други гранични задачи за уравнения от смесен тип, свързани със задачите на Протър, са разгледани в ред публикации на различни автори, например Сорокина [64, 65], Нахушев [48], а също така в сравнително по-новите публикации Алдашев [10, 11], Lupo, Payne и Попиванов [46], Keyfitz, Tesdall, Payne и Попиванов [37]. Широк кръг от многомерни задачи от смесен тип и задачи тип Дарбу е застъпен в книгата на Bitsadze [17]. В книгите на Смирнов [70] и [71] са разгледани много подробно двумерни задачи за слабо хиперболични уравнения и уравнения от смесен тип, които намират непосредствено приложение в изучаването на многомерните задачи на Протър.

Съдържанието на дисертацията е структурирано в Увод, Втора глава, Трета глава и Апендикс. От своя страна двете глави и Апендиксът са разделени на параграфи. И в четирите части номерацията на твърденията е единна, като в началото на етикета стои номерът на главата.

Втора глава е посветена на Задача $P_{0,\alpha}$ в R^3, която в по-нататъшното изложение за краткост ще бъде наричана Задача P_α.

В параграф 2.1 е формулирана разглежданата гранична задача, а именно – да се намери решение на уравнението

$$Lu \equiv u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} - u_{tt} + b_1 u_{x_1} + b_2 u_{x_2} + b u_t + cu = f \tag{1.10}$$

в тримерната област Ω_0, което удовлетворява граничните условия

$$u|_{\Sigma_{0,1}} = 0, \quad [u_t + \alpha u]|_{\Sigma_0 \backslash O} = 0, \tag{1.11}$$

където $\alpha \in C^1(\bar{\Sigma}_0)$. Тъй като е възможно решенията на задачата да имат особености, което ни е известно от една страна от Теорема 1.2 и от друга страна от известните резултати по Задача $P2_0$ (явяваща се частен случай на Задача P_α), ние разглеждаме решенията в обобщен смисъл и използваме следната дефиниция:

Дефиниция 2.1 ([26]). *Функцията $u = u(x_1, x_2, t)$ се нарича обобщено решение на Задача P_α в Ω_0, ако*

1) $u \in C^1(\bar{\Omega}_0 \backslash O)$, $[u_t + \alpha(x)u]\big|_{\Sigma_0 \backslash O} = 0$, $u\big|_{\Sigma_{0,1}} = 0$, *2) тъждеството*

$$\int_{\Omega_0}[u_t v_t - u_{x_1}v_{x_1} - u_{x_2}v_{x_2} + (b_1u_{x_1} + b_2u_{x_2} + bu_t + cu - f)v]dx_1dx_2dt$$
$$= \int_{\Sigma_0}\alpha(x)(uv)(x,0)dx_1dx_2$$

е изпълнено за всички функции v от множеството

$$V_0 := \{v \in C^1(\bar{\Omega}_0) : [v_t + (\alpha + b)v]\big|_{\Sigma_0} = 0,\ v \equiv 0 \textit{ в околност на } \Sigma_{0,2}\}.$$

В следващите два параграфа е следвана статията [26] и задачата е трансформирана в по-удобен за по-нататъшните ни изследвания вид, както е описано по-долу. В параграф 2.2 в задачата се преминава към полярни координати $x_1 = \varrho\cos\varphi$, $x_2 = \varrho\sin\varphi$, при което се получава следното уравнение

$$Lu = \frac{1}{\varrho}(\varrho u_\varrho)_\varrho + \frac{1}{\varrho^2}u_{\varphi\varphi} - u_{tt} + a_1u_\varrho + a_2u_\varphi + bu_t + cu = f.$$

След това, при предположение, че дясната страна на уравнението е от вида

$$f(\varrho,\varphi,t) = f_n^{(1)}(\varrho,t)\cos n\varphi + f_n^{(2)}(\varrho,t)\sin n\varphi, \quad n \in \mathrm{N}$$

и коефициентите a_1, a_2, b, c и α не зависят от ъгъла φ, чрез метода на разделяне на променливите задачата е сведена до система от две уравнения в равнината ϱ, t с две неизвестни функции $u^{(1)}(\varrho,t)$ и $u^{(2)}(\varrho,t)$ (Задача $P_{\alpha,1}$). След смяна на променливите ϱ и t с характеристичните променливи

$$\xi = 1 - \varrho - t, \quad \eta = 1 - \varrho + t$$

и въвеждане на новите функции

$$U^i(\xi,\eta) := (1/2)^{1/2}(2 - \xi - \eta)^{1/2}u^{(i)}(\varrho(\xi,\eta), t(\xi,\eta)), \quad i = 1,2$$

Задача $P_{\alpha,1}$ се редуцира до задача на Дарбу-Гурса (Задача $P_{\alpha,2}$).

В параграф 2.3 Задача $P_{\alpha,2}$ е сведена до еквивалентна система от интегрални уравнения. До тук в изложението не се съдържат нови резултати.

В параграф 2.4 по аналогия със статиите [26] и [29] системата от интегрални уравнения е решена по метода на последователните приближения, от където следва съществуване на решение на Задача $P_{\alpha,2}$, но са направени по-точни оценки на отделните приближения. От тези оценки след обратна трансформация от Задача $P_{\alpha,2}$ към Задача P_α се стига до основния резултат на тази глава от дисертацията:

Теорема 2.5. *Нека в Задача P_α*

1) *дясната страна f на уравнение* (1.10) *е от вида*

$$f(x,t) = f_n^{(1)}(|x|,t)\cos(n\arctan\frac{x_2}{x_1}) + f_n^{(2)}(|x|,t)\sin(n\arctan\frac{x_2}{x_1}), \quad n \in \mathrm{N};$$

2) $b_1, b_2, b, c \in C^1(\bar{\Omega}_0)$, $\alpha \in C^1([0,1])$, $f_n^{(i)} \in C(\bar{\Omega}_0)$, $i = 1,2$;
3) a_1, a_2, b, c *са функции на* $(|x|,t)$, $\alpha = \alpha(|x|)$,
където $a_1 := b_1\cos\arctan(x_2/x_1) + b_2\sin\arctan(x_2/x_1)$,
$a_2 := |x|^{-1}(b_2\cos\arctan(x_2/x_1) - b_1\sin\arctan(x_2/x_1))$.

Тогава за обобщеното решение $u(x,t)$ на Задача P_α са изпълнени следните оценки

$$|u(x,t)| \le C_{n,\sigma} \max_{\bar\Omega_0} \{|f_n^{(1)}| + |f_n^{(2)}|\}|x|^{-n-\sigma},$$

$$\sum_{|\beta|=1} |D^\beta u(x,t)| \le C_{n,\sigma} \max_{\bar\Omega_0} \{|f_n^{(1)}| + |f_n^{(2)}|\}|x|^{-n-\sigma-1},$$

където σ е произволно положително число и $C_{n,\sigma}$ е положителна константа, зависеща от σ, n и коефициентите на (1.10), (1.11).

Интересното в случая е, че отрицателната степен на $|x|$ не зависи от коефициентите b_1, b_2, b, c и α. Този резултат е непосредствено подобрение на досега известния резултат от Христов, Попиванов и Schneider [29], който допуска обобщеното решение $u(x,t)$ да има по-висок ред на сингулярност при наличие на младши членове: като следствие от теоремата се вижда, че ако дясната страна на уравнението е тригонометричен полином от ред l, то досега известната оценка (1.9) е заменена с по-точната

$$|u(x,t)| \le C_\sigma \sum_{n=0}^{l} \max_{\bar\Omega_0}\{|f_n^1| + |f_n^2|\}|x|^{-n-\sigma}.$$

По този начин в настоящата дисертация ние даваме отрицателен отговор на Въпрос 1, формулиран на стр. 6.

В параграф 2.5 е изведен следният резултат:

Теорема 2.8. *Нека $\alpha \ge 0$; b_1, b_2, b, $c \in C^1(\bar\Omega_0 \backslash O)$ и*

$$b_1 = a_1(|x|,t)\cos(\arctan\frac{x_2}{x_1}), \quad b_2 = a_1(|x|,t)\sin(\arctan\frac{x_2}{x_1})$$

за някоя функция $a_1(|x|,t)$, за която $a_1 \ge |b|, a_1 \ge 2|x|c$. Тогава за всяка функция от вида

$$f(x,t) = f_n(|x|,t)\cos(n\arctan\frac{x_2}{x_1}),$$

стояща в дясната страна на уравнение (1.10) *и удовлетворяваща следните условия:*

$$f_n \in C(\bar\Omega_0), \quad f_n \not\equiv 0 \text{ в } \Omega_0 \qquad \text{и} \quad \text{или } f_n \ge 0 \text{ в } \Omega_0, \text{ или } f_n \le 0 \text{ в } \Omega_0,$$

съществува съответно обобщено решение u_n на Задача P_α, което удовлетворява оценката

$$|u_n(x,t)| \ge C_0|x|^{-n}|\cos(n\arctan\frac{x_2}{x_1})|, \quad C_0 = \text{const} > 0 \tag{1.12}$$

в някаква околност на $O(0,0,0)$.

Забележка: Аналогично се формулира резултат и за случая, когато дясната страна на уравнение (1.10) *е от вида $f(x,t) = f_n(|x|,t)\sin(n\arctan(x_2/x_1))$.*

Тази теорема е обобщение на Теорема 1.2, но ни дава по-широк клас от функции в дясната страна на уравнението, за които е изпълнена теоремата, а също така оценката (1.12) (за разлика от съответната оценка (1.7)) описва асимптотичното поведение на обобщеното решение в цялата околност на $O(0,0,0)$ съдържаща се в Ω_0, а не само върху конуса $\Sigma_{0,2}$ близо до $O(0,0,0)$.

В частния случай, когато младшите членове са тъждествено равни на нула (т. е. когато разглеждаме Задача $P2_0$), условието "$f_n^1(|x|,t)$ (респ. $f_n^2(|x|,t)$) не си сменя знака" означава, че дясната страна $f_n(x,t)$ на уравнението не е ортогонална на съответно решение на хомогенната спрегната Задача $P2_0^*$, което е причина решението $u_n(x,t)$ в Теорема 1.2 да достигне максималния ред n на сингулярност. Това поражда предположението, че в общия случай на Задача $P_{0,\alpha}$, по аналогичен начин както това е при Задача $P2_0$, степенната особеност на сингулярните решения се определя от ортогонални условия, които удовлетворява дясната страна на уравнението. Този въпрос обаче не е изследван в дисертацията.

Резултатите от дисертацията, изложени във Втора глава, са публикувани в Попиванов и Николов [77] и Николов и Попиванов [72]. Резултати, свързани със задачите на Протър за хиперболични уравнения, се съдържат и в Николов [76], където е изследвана Задача $P1_0$ в R^4 и по метода на Риман-Адамар е получено интегрално представяне на сингулярните решения на тази задача, което е удобно за по-нататъшно изучаване на свойствата на тези решения.

Трета глава е посветена на Задача $P1_m$ в R^4.

В параграф 3.1 е формулирана задачата, а именно – за $m > 0$ да се намери решение на уравнението

$$t^m(u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + u_{x_3x_3}) - u_{tt} = f(x,t) \tag{1.13}$$

в четиримерната област Ω_m, което удовлетворява следните гранични условия

$$u|_{\Sigma_0\setminus O} = 0, \quad u|_{\Sigma_{m,1}} = 0.$$

Ние разглеждаме задачата в случая, когато дясната страна на уравнението е хармоничен полином, т. е. функция от вида (1.4). Тъй като не очакваме в общия случай да имаме класическо решение, ние даваме дефиниция на обобщено решение, което допуска сингулярности върху конуса $\Sigma_{m,2}$ и е аналогична на дефиницията от [50] за тримерния аналог на тази задача.

Дефиниция 3.1. *Функцията $u(x,t)$ се нарича обобщено решение на Задача $P1_m$ в Ω_m, ако:*

1) $u \in C(\bar{\Omega}_m\setminus O) \cap C^1(\Omega_m), \quad u|_{\Sigma_0\setminus O} = 0, \quad u|_{\Sigma_{m,1}} = 0;$

2) *за всяко $\varepsilon \in (0,1)$ съществува положителна константа $c(\varepsilon)$, такава че*

$$|u(x,t)| \le c(\varepsilon)t,$$

$$|u_t(x,t)| \le c(\varepsilon)\left(1 - |x| - \frac{2}{m+2}t^{(m+2)/2}\right)^{-m/(m+2)},$$

$$|u_{x_i}(x,t)| \le c(\varepsilon)t^{-m/2}\left(1 - |x| - \frac{2}{m+2}t^{(m+2)/2}\right)^{-m/(m+2)}, \quad i = 1,2,3$$

в областта $\Omega_{m,\varepsilon} := \Omega_m \cap \{|x| > \varepsilon + \frac{2}{m+2}t^{(m+2)/2}\}$;

3) *тъждеството*

$$\int_{\Omega_m} (u_t v_t - t^m(u_{x_1}v_{x_1} + u_{x_2}v_{x_2} + u_{x_3}v_{x_3}) - fv)\, dxdt = 0$$

е изпълнено за всички функции $v(x,t)$ от множеството $V_\varepsilon := \{v : v \in C^1(\bar{\Omega}_m)$, $v|_{\Sigma_0} = 0, \quad v \equiv 0$ в околност на $\Sigma_{m,2}\}$.

Условие 2) на дефиницията показва, че докато обобщеното решение е "ограничено" в $\Omega_{m,\varepsilon}$, то първите му производни могат да бъдат неограничени върху $\Sigma_{m,1}$ и това всъщност е реалната ситуация.

В параграф 3.2 Задача $P1_m$ е редуцирана до двумерна задача. Първо се преминава към сферични координати в R^3

$$x_1 = \rho \sin\theta \cos\varphi, \quad x_2 = \rho \sin\theta \sin\varphi, \quad x_3 = \rho\cos\theta,$$

$$\rho > 0, \quad 0 \le \theta < \pi, \quad 0 \le \varphi < 2\pi,$$

след което с помощта на метода на разделяне на променливите се стига до краен брой еднотипни двумерни задачи в равнината (ρ, t) с неизвестни функции $u_n^s(\rho, t)$ и десни страни коефициентите $f_n^s(\rho, t)$ на хармоничния полином (1.4) (Задача $P11_m$). След преминаване към характеристичните координати

$$\xi = 1 - \rho - \frac{2}{m+2} t^{(m+2)/2}, \quad \eta = 1 - \rho + \frac{2}{m+2} t^{(m+2)/2}$$

и въвеждане на новите неизвестни функции

$$U_n^s(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(2 - \xi - \eta) u_n^s(\rho(\xi, \eta), t(\xi, \eta))$$

се стига до задача на Дарбу-Гурса в равнината (Задача $P12_m$).

В параграф 3.3 са разгледани въпросите свързани със съществуване и единственост на решение както на Задача $P1_m$, така и на нейната хомогенна спрегната Задача $P1_m^*$, като е направено изследване на базата на известните резултати от [50] и [55] по Задачи $P1_m$ и $P1_m^*$ в R^3. Оказва се, че резултатите за тримерния случай се обобщават и за четиримерния. С помощта на намерените в [55] нетривиални решения на хомогенната спрегната Задача $P1_m^*$ в R^3, ние намираме съответни нетривиални класически решения и на четиримерната задача. По-точно, ако въведем функциите

$$H_k^n(|x|, t) := \sum_{i=0}^{k} A_i^k t |x|^{-n+2i-1} \left(|x|^2 - \left(\frac{2}{m+2} \right)^2 t^{m+2} \right)^{n-k-i-1/2-1/(m+2)},$$

където

$$A_i^k = (-1)^i \frac{(k-i+1)_i (n-k-i+m/(2m+4))_i}{i!(n-i+1/2)_i}, \quad A_0^k = 1$$

и $(a)_i = a(a+1)\dots(a+i-1), \quad i \in \mathrm{N}, \quad (a)_0 = 1$, е в сила следната теорема:

Теорема 3.4. *За $k = 0, 1, \dots [n/2] - 2$ функциите*

$$V_{k,s}^n(x, t) = H_k^n(|x|, t) Y_n^s(x/|x|)$$

са класически решения на хомогенната спрегната Задача $P1_m^*$.

От тук непосредствено следва, че по аналогия с тримерния си аналог четиримерната Задача $P1_m$ в общия случай не е класически разрешима и е целесъобразно да потърсим съществуване и единственост на обобщено решение на тази задача. Следвайки идеите от [50] и разглеждайки последователно Задачи $P12_m$, $P11_m$ и $P1_m$, стигаме до желания резултат.

Теорема 3.5. *Ако $f_n^s \in C^2(\bar{G}_0 \backslash S_{m,2})$, Задача $P1_m$ притежава единствено обобщено решение в Ω_m.*

Забележка: Областта G_0 и повърхността $S_{m,2}$ са дефинирани при формулирането на Задача $P11_m$ по формулите

$$G_0 := \left\{ (\rho, t) : t > 0, \frac{2}{m+2} t^{(m+2)/2} < \rho < 1 - \frac{2}{m+2} t^{(m+2)/2} \right\},$$

$$S_{m,2} = \left\{ (\rho, t) : t > 0, \rho = \frac{2}{m+2} t^{(m+2)/2} \right\}.$$

В параграф 3.4 е изведена интегрална формула за представяне в явен вид на решението на Задача $P12_m$ посредством функция на Риман-Адамар. Именно това е основната новост в методиката на изследване на проблема. В досегашните публикации, в които е разгледана тази гранична задача, диференциалното уравнение е сведено до интегрално уравнение, което е решено по метода на последователните приближения. Използваната нова методика води до по-точни резултати за особеностите на решенията.

Параграф 3.5 съдържа основната част от изчислителната работа по изследванията в тази глава. По-точно, намереното в параграф 3.4 решение на Задача $P12_m$ е преработено до вид, който показва зависимостта на особеностите на това решение от дясната страна на уравнението.

В параграф 3.6 след обратна трансформация от Задача $P12_m$ към Задача $P1_m$ получаваме основния ни резултат по изследването на тази гранична задача, а именно асимптотично представяне на обобщеното решение в околност на особената точка $(0,0,0,0)$. Нека

$$\mu^n_{k,s} := \int_{\Omega_m} V^n_{k,s}(x,t) f(x,t)\, dxdt,$$

където $V^n_{k,s}(x,t)$ са нетривиалните класически решения на хомогенната спрегната Задача $P1^*_m$, намерени в Теорема 3.4. Тогава асимптотичното поведение на решението се описва от следната теорема:

Теорема 3.12. *Нека дясната страна* $f(x,t)$ *на уравнение* (1.13) *е от вида* (1.4)*, където* $f^s_n \in C^2(\bar{\Omega}_m), \quad n = 0, 1, \ldots, l, \quad s = 1, \ldots, 2n+1$. *Тогава единственото обобщено решение* $u(x,t)$ *на Задача* $P1_m$ *има следното асимптотично поведение в околност на точката* $(0,0,0,0)$

$$u(x,t) = \sum_{p=1}^{l} F_p(x,t)|x|^{-p-2\beta} + F(x,t)|x|^{-2\beta}, \quad \beta = \frac{m}{2(m+2)}, \tag{1.14}$$

където $F(x,t)$ *е ограничена в* $\bar{\Omega}_m$ *функция и функциите* $F_p(x,t)$ *имат следната структура:*

$$F_p(x,t) = \sum_{k=0}^{[(l-p)/2]} \sum_{s=1}^{2p+4k+1} \mu^{p+2k}_{k,s} F^{p+2k}_{k,s}(x,t), \quad p = 1, \ldots, l, \tag{1.15}$$

където $F^{p+2k}_{k,s}(x,t)$ *са независими от* $f(x,t)$ *и ограничени в* $\bar{\Omega}_m$ *функции..*

Освен това, ако за някоя тройка индекси (k,s,p) *в* (1.15) *съответният коефициент* $\mu^{p+2k}_{k,s}$ *е различен от нула, то редът на сингулярност на решението е равен поне на* $p + 2\beta$.

От получения резултат се вижда, че обобщеното решение има степенна особеност в началото на координатите, чийто ред се контролира от коефициентите $\mu^{p+2k}_{k,s}$. Максималният възможен ред на сингулярност е равен на $l+m/(m+2)$ и може да бъде намален с определен брой единици само ако дясната страна $f(x,t)$ на уравнението удовлетворява ортогонални условия $\mu^{p+2k}_{k,s} = 0$ за съответни индекси k, s, p. Остава открит следният въпрос: могат ли да се намерят условия за дясната страна $f(x,t)$ на уравнението, при които членът $F(x,t)|x|^{-2\beta}$ във формула (1.14) е ограничен?

Интересно е, че асимтотичната структура на решението $u(x,t)$ наподобява тази на решението на Задача $P1_0$ в R^4, описана в Теорема 1.1 ([54]), но методите и техниките, по които е получен резултатът, са съвсем различни. Чрез Теорема 3.12 ние всъщност даваме отговор на Въпрос 2, формулиран на стр. 7.

Резултатите от дисертацията, изложени в Трета глава, са публикувани в Николов и Попиванов [73] и [75]. Също така в Николов и Попиванов [74] са публикувани аналогични резултати и за тримерната Задача $P1_m$.

В Апендикса са събрани помощни сведения и резултати, които се използват в дисертацията.

Параграф 4.1 съдържа необходимата за целите на дисертацията информация относно някои специални функции, които съществено участват в пресмятанията.

Параграф 4.2 съдържа резултати от предишни публикации по задачите на Протър ([26, 29, 55, 50]), които също така са необходими за извеждането на твърденията в дисертацията.

С цел да не се отклонява вниманието на читателя от основния ход на разсъжденията, в параграф 4.3 някои помощни твърдения, които са част от дълги доказателства на теоремите в настоящата дисертация, са формулирани като отделни леми.

Благодарности. Авторът изказва своите благодарности на научния си ръководител проф. дмн Недю Попиванов за полезните напътствия и градивната критика в процеса на работа, както и на преподавателския екип от катедра "Диференциални уравнения" към ФМИ за тяхната подкрепа и ценни съвети.

Авторът изказва и благодарности за финансовата подкрепа, осъществена от Българския ФНИ, договор № DCVP 02/1 и договор № 02-75/2008, Sofia University Grant, договори № 072/2009, 184/2010, 153/2011, 179/2012, 158/2013, 94/2014 и Европейския социален фонд чрез Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси", договор № BG051PO001-3.3.06 - 0052 (2012-2014).

2. Изследване на трета гранична задача за хиперболично уравнение с младши членове

2.1. **Постановка на задачата.** Да означим точките в R^3 с $(x,t)=(x_1,x_2,t)$ и да разгледаме следното хиперболично уравнение с младши членове

$$Lu \equiv u_{x_1x_1}+u_{x_2x_2}-u_{tt}+b_1u_{x_1}+b_2u_{x_2}+bu_t+cu=f \tag{2.1}$$

в тримерната област

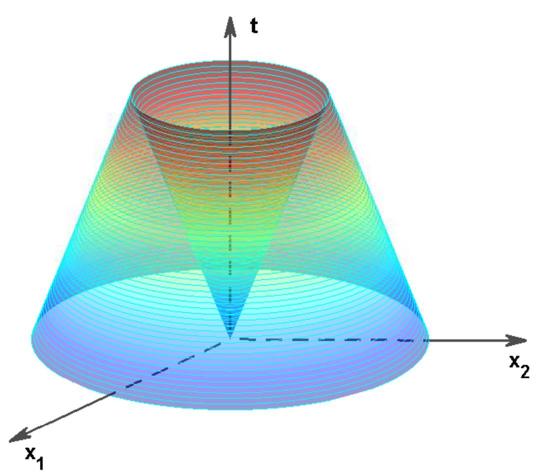
$$\Omega_0 := \{(x,t): 0<t<1/2, t<\sqrt{x_1^2+x_2^2}<1-t\},$$

ограничена от кръга

$$\Sigma_0 := \{(x,t): t=0, x_1^2+x_2^2<1\}$$

с център в началото $O(0,0,0)$ и от характеристичните повърхнини

$$\Sigma_{0,1} := \{(x,t): 0<t<1/2, \sqrt{x_1^2+x_2^2}=1-t\},$$
$$\Sigma_{0,2} := \{(x,t): 0<t<1/2, \sqrt{x_1^2+x_2^2}=t\}.$$



Фигура 1. Областта Ω_0.

Ще изследваме следната задача:

Задача P_α**.** Да се намери решение на уравнение (2.1) в Ω_0, което удовлетворява граничните условия

$$u|_{\Sigma_{0,1}}=0, \quad [u_t+\alpha u]|_{\Sigma_0\setminus O}=0, \tag{2.2}$$

където $\alpha \in C^1(\bar{\Sigma}_0)$. Спрегнатата задача на P_α е съответно:

Задача P_α^***.** Да се намери решение на спрегнатото уравнение

$$L^*u \equiv u_{x_1x_1}+u_{x_2x_2}-u_{tt}-(b_1u)_{x_1}-(b_2u)_{x_2}-(bu)_t+cu=g \quad \text{в } \Omega_0,$$

подчинено на следните гранични условия

$$u|_{\Sigma_{0,2}} = 0, \quad [u_t + (\alpha + b)u]|_{\Sigma_0} = 0.$$

Тъй като Задача P_α в общия случай не е класически разрешима, ние ще използваме следната дефиниция за обобщено решение на тази задача:

Дефиниция 2.1 ([26]). *Функцията $u = u(x_1, x_2, t)$ се нарича обобщено решение на Задача P_α в Ω_0, ако*

1) $u \in C^1(\bar{\Omega}_0 \backslash O)$, $[u_t + \alpha(x)u]\big|_{\Sigma_0 \backslash O} = 0$, $u\big|_{\Sigma_{0,1}} = 0$,

2) тъждеството

$$\int_{\Omega_0} [u_t v_t - u_{x_1} v_{x_1} - u_{x_2} v_{x_2} + (b_1 u_{x_1} + b_2 u_{x_2} + b u_t + cu - f)v] dx_1 dx_2 dt$$
$$= \int_{\Sigma_0} \alpha(x)(uv)(x, 0) dx_1 dx_2$$

е изпълнено за всички функции v от множеството

$$V_0 := \{v \in C^1(\bar{\Omega}_0) : [v_t + (\alpha + b)v]\big|_{\Sigma_0} = 0, \ v \equiv 0 \text{ в околност на } \Sigma_{0,2}\}.$$

Тази дефиниция допуска обобщеното решение на Задача P_α да има особености върху $\Sigma_{0,2}$. В [26], от където е заимствана дефиницията, е показано, че съществуват решения с такива особености.

2.2. **Свеждане на Задача P_α до двумерна задача на Дарбу-Гурса.** Да преминем в уравнение (2.1) към полярните координати $x_1 = \varrho \cos \varphi$, $x_2 = \varrho \sin \varphi$:

$$Lu = \frac{1}{\varrho}(\varrho u_\varrho)_\varrho + \frac{1}{\varrho^2} u_{\varphi\varphi} - u_{tt} + a_1 u_\varrho + a_2 u_\varphi + b u_t + cu = f, \tag{2.3}$$

където $a_1 = b_1 cos\varphi + b_2 sin\varphi$, $a_2 = \varrho^{-1}(b_2 cos\varphi - b_1 sin\varphi)$.

Нека дясната страна на уравнението е от следния вид

$$f(\varrho, \varphi, t) = f_n^{(1)}(\varrho, t) \cos n\varphi + f_n^{(2)}(\varrho, t) \sin n\varphi, \quad n \in \mathrm{N} \tag{2.4}$$

и коефициентите на (2.3) зависят само от ϱ и t, а също така $\alpha(x) \equiv \alpha(\varrho) \in C^1([0, 1])$. Тогава задачата може да се сведе до двумерна задача на Дарбу-Гурса и след това до система от интегрални уравнения, както това е направено в Grammatikopoulos, Христов и Попиванов [26].

Търсейки решения от вида

$$u(\varrho, \varphi, t) = u_n^{(1)}(\varrho, t) \cos n\varphi + u_n^{(2)}(\varrho, t) \sin n\varphi, \tag{2.5}$$

от уравнение (2.3) стигаме до системата

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\varrho}(\varrho u_{n,\varrho}^{(1)})_\varrho - u_{n,tt}^{(1)} + a_1 u_{n,\varrho}^{(1)} + b u_{n,t}^{(1)} + (c - \frac{n^2}{\varrho^2}) u_n^{(1)} + n a_2 u_n^{(2)} = f_n^{(1)}, \\ &\frac{1}{\varrho}(\varrho u_{n,\varrho}^{(2)})_\varrho - u_{n,tt}^{(2)} + a_1 u_{n,\varrho}^{(2)} + b u_{n,t}^{(2)} + (c - \frac{n^2}{\varrho^2}) u_n^{(2)} - n a_2 u_n^{(1)} = f_n^{(2)}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

За да избегнем евентуалните особености върху $t = \varrho$, ще разглеждаме (2.6) в областта

$$G_\varepsilon = \{(\varrho, t) : t > 0, \varepsilon + t < \varrho < 1 - t\}, \ 0 < \varepsilon < 1,$$

ограничена от

$$S_0 = \{(\varrho, t) : t = 0, 0 < \varrho < 1\},$$

$$S_1 = \{(\varrho, t) : \varrho = 1 - t\},$$
$$S_{2,\varepsilon} = \{(\varrho, t) : \varrho = t + \varepsilon\}$$
и, изпускайки за удобство индекса n, ще формулираме следната задача:

Задача $P_{\alpha,1}$**.** Да се намери решение $u = (u^{(1)}, u^{(2)})$ на системата (2.6) в G_ε, което удовлетворява условията

$$u^{(i)}|_{S_1 \cap \partial G_\varepsilon} = 0, \quad [u_t^{(i)} + \alpha(\varrho)u^{(i)}]|_{S_0 \cap \partial G_\varepsilon} = 0, \quad i = 1, 2.$$

Дефиниция 2.2 ([26])**.** *Функцията* $u = (u^{(1)}, u^{(2)})(\varrho, t)$ *се нарича обобщено решение на Задача* $P_{\alpha,1}$ *в* G_ε*, ако:*

1) $u \in C^1(\bar{G}_\varepsilon)$, $[u_t^{(i)} + \alpha(\varrho)u^{(i)}]\big|_{S_0 \cap \partial G_\varepsilon} = 0$, $u^{(i)}\big|_{S_1 \cap \partial G_\varepsilon} = 0, i = 1, 2;$

2) Тъждествата

$$\int_{G_\varepsilon} \big[u_t^{(1)} v_{1,t} - u_\varrho^{(1)} v_{1,\varrho} + \big(a_1 u_\varrho^{(1)} + b u_t^{(1)} + (c - \frac{n^2}{\varrho^2})u^{(1)} + n a_2 u^{(2)} - f^{(1)}\big)v_1\big]\varrho d\varrho\, dt$$
$$= \int_{S_0 \cap \partial G_\varepsilon} \alpha(\varrho) u^{(1)} v_1 \varrho\, d\varrho,$$
$$\int_{G_\varepsilon} [u_t^{(2)} v_{2,t} - u_\varrho^{(2)} v_{2,\varrho} + \big(a_1 u_\varrho^{(2)} + b u_t^{(2)} + (c - \frac{n^2}{\varrho^2})u^{(2)} - n a_2 u^{(1)} - f^{(2)}\big)v_2\big]\varrho d\varrho\, dt$$
$$= \int_{S_0 \cap \partial G_\varepsilon} \alpha(\varrho) u^{(2)} v_2 \varrho\, d\varrho$$

са в сила за всички

$$v_1, v_2 \in V_\varepsilon^{(1)} = \{v \in C^1(\bar{G}_\varepsilon) : [v_t + (\alpha + b)v]\big|_{S_0 \cap \partial G_\varepsilon} = 0, v\big|_{S_{2,\varepsilon} \cap \partial G_\varepsilon} = 0\}.$$

Въвеждаме новата функция $(z^{(1)}, z^{(2)})$, където

$$z^{(i)}(\varrho, t) = \varrho^{\frac{1}{2}} u^{(i)}(\varrho, t) = z^{(i)}(\varrho(\xi, \eta), t(\xi, \eta)) =: U^{(i)}(\xi, \eta),\ i = 1, 2, \tag{2.7}$$

в характеристичните координати

$$\xi = 1 - \varrho - t, \quad \eta = 1 - \varrho + t \tag{2.8}$$

и стигаме до системата

$$\begin{aligned} U_{\xi\eta}^{(1)} - A_1 U_\xi^{(1)} - B_1 U_\eta^{(1)} - C_1 U^{(1)} - D_1 U^{(2)} &= F^1(\xi, \eta) \quad \text{в } D_\varepsilon, \\ U_{\xi\eta}^{(2)} - A_2 U_\xi^{(2)} - B_2 U_\eta^{(2)} - C_2 U^{(2)} - D_2 U^{(1)} &= F^2(\xi, \eta) \quad \text{в } D_\varepsilon, \end{aligned} \tag{2.9}$$

където

$$D_\varepsilon := \{(\xi, \eta) : 0 < \xi < \eta < 1 - \varepsilon\}$$

и

$$F^{(i)}(\xi, \eta) = \frac{1}{4\sqrt{2}}(2 - \xi - \eta)^{\frac{1}{2}} f^{(i)}(\varrho(\xi, \eta), t(\xi, \eta)), \quad i = 1, 2, \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned} A_1 = A_2 = \frac{1}{4}(a_1 + b), \quad B_1 = B_2 = \frac{1}{4}(a_1 - b), \\ D_2 = -D_1 = \frac{1}{4} n a_2, \quad C_1 = C_2 = \frac{1}{4}\Big\{\frac{4n^2 - 1}{(2 - \xi - \eta)^2} + \frac{a_1}{2 - \xi - \eta} - c\Big\}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

По този начин Задача $P_{\alpha,1}$ се редуцира до задача на Дарбу-Гурса за системата (2.9) в D_ε. Нека забележим, че ако разглеждаме тази задача в

$$D_0 = \{(\xi, \eta) : 0 < \xi < \eta < 1\},$$

то коефициентите C_i, D_i $(i = 1, 2)$ са сингулярни в точката $(1, 1)$.

За да изследваме поведението на обобщеното решение на Задача P_α и върху конуса $\Sigma_{0,2}$, ние ще търсим класическо решение на системата (2.9) не само в D_ε, но и в по-широката област

$$D_\varepsilon^{(1)} := \{(\xi, \eta) : 0 < \xi < \eta < 1, 0 < \xi < 1 - \varepsilon\}, \quad \varepsilon \in (0, 1).$$

Стигаме до следната гранична задача:

Задача $P_{\alpha,2}$**.** Да се намери решение $(U^{(1)}, U^{(2)})(\xi, \eta)$ на системата (2.9) в $D_\varepsilon^{(1)}$, което удовлетворява следните граничните условия

$$U^{(i)}(0, \eta) = 0, \quad (U_\eta^{(i)} - U_\xi^{(i)})(\xi, \xi) + \alpha(1 - \xi)U^{(i)}(\xi, \xi) = 0, \tag{2.12}$$

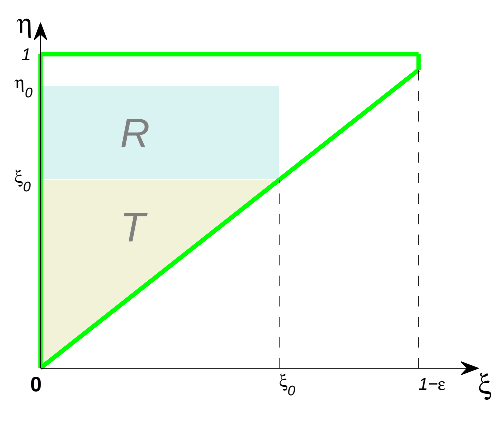
$i = 1, 2, \quad \xi \in (0, 1 - \varepsilon), \eta \in (0, 1)$.

Забележка: Обръщаме внимание, че при формулирането на Задача $P_{\alpha,1}$ *за удобство изпуснахме индекса* n*. Съответно, в Задача* $P_{\alpha,2}$ *функциите* $U^{(i)}(\xi, \eta)$, $i = 1, 2$ *зависят от* n*, това се вижда и от факта, че в системата* (2.9) *някои от коефициентите и десните страни* $F^{(i)}(\xi, \eta)$, $i = 1, 2$ *зависят от* n*. Затова в по-нататъшното изложение, когато искаме да изразим зависимостта на* $U^{(i)}(\xi, \eta)$, $i = 1, 2$ *от* n*, ще използваме означението*

$$U_n^{(i)}(\xi, \eta) := U^{(i)}(\xi, \eta), \quad i = 1, 2.$$

2.3. **Система от интегрални уравнения за Задача** $P_{\alpha,2}$**.** Избираме една точка $(\xi_0, \eta_0) \in D_\varepsilon^{(1)}$ и дефинираме правоъгълника R и триъгълника T по следните формули

$$R := \{(\xi, \eta) : 0 < \xi < \xi_0, \xi_0 < \eta < \eta_0\},$$
$$T := \{(\xi, \eta) : 0 < \xi < \xi_0, \xi < \eta < \xi_0\}.$$



Фигура 2. Областта $D_\varepsilon^{(1)}$.

Прилагайки теоремата на Грийн в

$$\begin{aligned} I_R^{(i)} &:= \iint_R U_{\xi\eta}^{(i)}(\xi,\eta)\,d\xi d\eta = \int_0^{\xi_0}\Big(\int_{\xi_0}^{\eta_0} U_{\xi\eta}^{(i)}(\xi,\eta)\,d\eta\Big)\,d\xi, \\ I_T^{(i)} &:= \iint_T U_{\xi\eta}^{(i)}(\xi,\eta)\,d\xi d\eta = \int_0^{\xi_0}\Big(\int_{\xi}^{\xi_0} U_{\xi\eta}^{(i)}(\xi,\eta)\,d\eta\Big)\,d\xi, \end{aligned} \tag{2.13}$$

$i = 1, 2$, а също така и граничните условия (2.12), получаваме

$$I_R^{(i)} + 2I_T^{(i)} = U^{(i)}(\xi_0,\eta_0) - \int_0^{\xi_0} \alpha(1-\xi)U^{(i)}(\xi,\xi)\,d\xi. \tag{2.14}$$

Дефинираме

$$p^{(i)} := U_\xi^{(i)},$$

$$q^{(i)} := U_\eta^{(i)}$$

и (припомняйки си (2.9))

$$\begin{aligned} E^{(1)}(\xi,\eta) &:= [F^1 + A_1 p^{(1)} + B_1 q^{(1)} + C_1 U^{(1)} + D_1 U^{(2)}](\xi,\eta), \\ E^{(2)}(\xi,\eta) &:= [F^2 + A_2 p^{(2)} + B_2 q^{(2)} + C_2 U^{(2)} + D_2 U^{(1)}](\xi,\eta). \end{aligned} \tag{2.15}$$

Използвайки (2.13) - (2.15) и (2.9), получаваме шест интегрални уравнения ($i = 1, 2$)

$$\begin{aligned} U^{(i)}(\xi_0,\eta_0) = &\int_0^{\xi_0}\Big(\int_{\xi_0}^{\eta_0} E^{(i)}(\xi,\eta)\,d\eta\Big)d\xi + 2\int_0^{\xi_0}\Big(\int_0^{\eta} E^{(i)}(\xi,\eta)\,d\xi\Big)d\eta \\ &+ \int_0^{\xi_0} \alpha(1-\xi)U^{(i)}(\xi,\xi)d\xi, \end{aligned} \tag{2.16}$$

$$p^{(i)}(\xi_0,\eta_0) = \int_0^{\xi_0} E^{(i)}(\xi,\xi_0)d\xi + \int_{\xi_0}^{\eta_0} E^{(i)}(\xi_0,\eta)d\eta + \alpha(1-\xi_0)U^{(i)}(\xi_0,\xi_0), \tag{2.17}$$

$$q^{(i)}(\xi_0,\eta_0) = \int_0^{\xi_0} E^{(i)}(\xi,\eta_0)d\xi. \tag{2.18}$$

Системата (2.16)–(2.18) е еквивалентна на системата (2.9) с гранични условия (2.12).

Ако $A_i, B_i, C_i, D_i, F^i \in C(\bar{D}_\varepsilon^{(1)})$, $i = 1, 2$, системата (2.16)–(2.18) може да се реши по метода на последователните приближения ([26]), с което се доказва съществуването на класическо решение $(U_n^{(1)}, U_n^{(2)})$ на Задача $P_{\alpha,2}$ в $D_\varepsilon^{(1)}$, $\varepsilon \in (0,1)$. Тъй като е известно ([26]), че функцията $(U_n^{(1)}, U_n^{(2)})$, разглеждана в D_0, допуска степенна особеност в точката $(1,1)$, нашата цел е да се направи поточна оценка на максимално възможния ред на тази сингулярност от досега известната оценка, получена в Христов, Попиванов и Schneider [29]. За целта ще използваме някои резултати от [29].

Дефинираме в $D_\varepsilon^{(1)}$ функциите $(U_m^{(i)}, p_m^{(i)}, q_m^{(i)})$, $i = 1, 2$, $m \in \mathrm{N}$ чрез формулите

$$\begin{aligned}
U_{m+1}^{(i)}(\xi_0, \eta_0) &= \int_0^{\xi_0} \Big(\int_{\xi_0}^{\eta_0} E_m^{(i)}(\xi, \eta)\, d\eta \Big)\, d\xi + 2 \int_0^{\xi_0} \Big(\int_0^{\eta} E_m^{(i)}(\xi, \eta)\, d\xi \Big)\, d\eta \\
&\quad + \int_0^{\xi_0} \alpha(1-\xi) U_m^{(i)}(\xi, \xi)\, d\xi, \qquad i = 1, 2; \quad m = 0, 1, 2 \ldots \\
p_{m+1}^{(i)}(\xi_0, \eta_0) &= \int_0^{\xi_0} E_m^{(i)}(\xi, \xi_0)\, d\xi + \int_{\xi_0}^{\eta_0} E_m^{(i)}(\xi_0, \eta)\, d\eta \\
&\quad + \alpha(1-\xi_0) U_m^{(i)}(\xi_0, \xi_0), \qquad i = 1, 2; \quad m = 0, 1, 2 \ldots \\
q_{m+1}^{(i)}(\xi_0, \eta_0) &= \int_0^{\xi_0} E_m^{(i)}(\xi, \eta_0)\, d\xi, \quad i = 1, 2; \quad m = 0, 1, 2 \ldots \\
U_0^{(i)}(\xi_0, \eta_0) &= 0, \quad p_0^{(i)}(\xi_0, \eta_0) = 0, \quad q_0^{(i)}(\xi_0, \eta_0) = 0, \quad i = 1, 2,
\end{aligned} \tag{2.19}$$

в $D_\varepsilon^{(1)}$, където

$$\begin{aligned}
E_m^{(1)}(\xi, \eta) &:= [F^1 + A_1 p_m^{(1)} + B_1 q_m^{(1)} + C_1 U_m^{(1)} + D_1 U_m^{(2)}](\xi, \eta), \\
E_m^{(2)}(\xi, \eta) &:= [F^2 + A_2 p_m^{(2)} + B_2 q_m^{(2)} + C_2 U_m^{(2)} + D_2 U_m^{(1)}](\xi, \eta).
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Нека коефициентите на уравнение (2.1) са непрекъснати в $\bar{\Omega}_0$ функции. Тогава съществуват неотрицателни константи K_1, K_0, K_α, такива че

$$\sup_{\bar{\Omega}_0} \{|b_1|, |b_2|, |b|\} \le K_1, \quad \sup_{\bar{\Omega}_0} |c| \le K_0, \quad \sup_{[0,1]} |\alpha(\varrho)| \le K_\alpha. \tag{2.21}$$

Тогава от (2.11) получаваме следните неравенства ([29]):

$$|a_1| \le 2K_1, \quad |a_2| \le \frac{2K_1}{\rho}$$

и съответно

$$\begin{aligned}
|A_1| = |A_2| \le \frac{3K_1}{4}, \quad |B_1| = |B_2| \le \frac{3K_1}{4}, \quad |D_1| = |D_2| \le \frac{nK_1}{2\rho} = \frac{(\nu + 1/2)K_1}{2 - \xi - \eta}, \\
|C_1| = |C_2| \le \frac{\nu(\nu+1)}{(2-\xi-\eta)^2} + \frac{K_1}{2(2-\xi-\eta)} + \frac{K_0}{4},
\end{aligned} \tag{2.22}$$

където $\nu := n - \frac{1}{2}$. Означавайки $\gamma_1 = 2, \gamma_2 = 1$, съгласно (2.20) можем да запишем

$$E_m^{(i)}(\xi, \eta) := [F^i + A_i p_m^{(i)} + B_i q_m^{(i)} + C_i U_m^{(i)} + D_i U_m^{(\gamma_i)}](\xi, \eta),$$

и за $i = 1, 2$ получаваме ([29]):

$$\begin{aligned}
&|(E_m^{(i)} - E_{m-1}^{(i)})(\xi, \eta)| \\
&\le \Big\{ \frac{\nu(\nu+1)}{(2-\xi-\eta)^2} + \frac{K_1}{2(2-\xi-\eta)} + \frac{K_0}{4} \Big\} |U_m^{(i)} - U_{m-1}^{(i)}| \\
&\quad + \frac{(\nu+1/2)K_1}{2-\xi-\eta} |U_m^{(\gamma_i)} - U_{m-1}^{(\gamma_i)}| + \frac{3K_1}{4} |p_m^{(i)} - p_{m-1}^{(i)}| + \frac{3K_1}{4} |q_m^{(i)} - q_{m-1}^{(i)}|.
\end{aligned} \tag{2.23}$$

2.4. **Нови оценки за решението на Задача $P_{\alpha,2}$.**

Теорема 2.3. *Нека $n \in \mathrm{N}$ е фиксирано число и в Задача $P_{\alpha,2}$ са налице следните условия:*

1) *коефициентите A_i, B_i, C_i, D_i, $i = 1, 2$ са непрекъснати в $\bar{D}_\varepsilon^{(1)}$ и удовлетворяват неравенствата (2.22), $\alpha(1-\xi) \in C^1([0,1])$ и $|\alpha| < K_\alpha$;*
2) *десните страни F^i, $i = 1, 2$ на системата (2.9) са непрекъснати в $\bar{D}_0$.*

Тогава съществува класическо решение $(U_n^{(1)}, U_n^{(2)}) \in C^1(\bar{D}_\varepsilon^{(1)})$, $U_{n,\xi_0\eta_0}^{(i)} \in C(\bar{D}_\varepsilon^{(1)})$, $i = 1, 2$ на Задача $P_{\alpha,2}$, което в $\bar{D}_\varepsilon^{(1)}$ удовлетворява оценките

$$\begin{aligned} |U_n^{(i)}(\xi,\eta)| &\le C_\sigma \max_{\bar{D}_0^{(1)}} |F^{(i)}| (2-\xi-\eta)^{-\nu-\sigma}, \\ |U_{n,\xi}^{(i)}(\xi,\eta)| &\le (\nu+\sigma) C_\sigma \max_{\bar{D}_0^{(1)}} |F^{(i)}| (2-\xi-\eta)^{-\nu-\sigma-1}, \\ |U_{n,\eta}^{(i)}(\xi,\eta)| &\le (\nu+\sigma) C_\sigma \max_{\bar{D}_0^{(1)}} |F^{(i)}| (2-\xi-\eta)^{-\nu-\sigma-1}, \end{aligned} \tag{2.24}$$

където $\sigma > 0$ е произволно положително число, а $C_\sigma > 0$ е положителна константа, зависеща от σ, ν, K_1, K_0 и K_α.

Доказателство. От [26] е известно, че при $m \to \infty$ функциите $\{U_{n,m}^{(i)}, p_{n,m}^{(i)}, q_{n,m}^{(i)}\}_{m=0}^\infty \in C(\bar{D}_\varepsilon^{(1)})$, $i = 1, 2$ равномерно клонят към такива функции $\{U_n^{(i)}, p_n^{(i)}, q_n^{(i)}\} \in C(\bar{D}_\varepsilon^{(1)})$, които решават системата (2.16)–(2.18), при това $(U_n^{(1)}, U_n^{(2)}) \in C^1(\bar{D}_\varepsilon^{(1)})$, е класическо решение на Задача $P_{\alpha,2}$ и $U_{n,\xi_0\eta_0}^{(i)} \in C(\bar{D}_\varepsilon^{(1)})$. Остава да покажем, че това решение на задачата удовлетворява оценките (2.24)

Избираме и фиксираме някое число $\mu > \nu$ удовлетворяващо Лема 4.3 от Апендикса. След това избираме и фиксираме произволно положително число σ, такова че $\nu + \sigma < \mu$. Също така, избираме $\delta_\nu \in (0,1)$, което удовлетворява условието (4.25) от Лема 4.2. От Лема 4.3 виждаме, че това е възможно. Въвеждаме положителното число

$$\tau := \max\{(1-\delta_\nu), \theta\} < 1, \tag{2.25}$$

където

$$\theta := \frac{\nu(\nu+1)}{(\nu+\sigma/2)(\nu+\sigma/2+1)}.$$

За краткост в следващите пресмятания ще използваме означението

$$N(K_1, K_0, K_\alpha) := \frac{(5\nu+3\sigma+2)K_1 + K_0 + 2(\nu+\sigma+1/2)K_\alpha + 1}{(\nu+\sigma-1/2)(\nu+\sigma+1/2)}.$$

Ще забележим, че $N(K_1, K_0, K_\alpha) > 0$ и

$$\frac{\nu(\nu+1)}{(\nu+\sigma)(\nu+\sigma+1)} < \theta.$$

След това разделяме $D_\varepsilon^{(1)}$ с правата

$$2-\xi-\eta = \frac{1}{N(K_1,K_0,K_\alpha)^2} \left(\theta - \frac{\nu(\nu+1)}{(\nu+\sigma)(\nu+\sigma+1)}\right)^2$$

на две части:

$$D1 := \Big\{(\xi,\eta) : 0 < \xi < \eta < 1, \quad 0 < \xi < 1-\varepsilon,$$
$$(2-\xi-\eta)^{1/2} > \frac{1}{N(K_1,K_0,K_\alpha)}\Big(\theta - \frac{\nu(\nu+1)}{(\nu+\sigma)(\nu+\sigma+1)}\Big)\Big\},$$

и

$$D2 := \Big\{(\xi,\eta) : 0 < \xi < \eta < 1, \quad 0 < \xi < 1-\varepsilon,$$
$$(2-\xi-\eta)^{1/2} \le \frac{1}{N(K_1,K_0,K_\alpha)}\Big(\theta - \frac{\nu(\nu+1)}{(\nu+\sigma)(\nu+\sigma+1)}\Big)\Big\}.$$

Възможно е $D1 = \emptyset$ или $D2 = \emptyset$.

И накрая, за $\lambda > 0$ означаваме

$$A_\lambda := \frac{1}{\lambda(\lambda+1)} \max_{(\xi_0,\eta_0)\in \bar{D}_0^{(1)}} |(2-\xi_0-\eta_0)^{\lambda+2} F^{(i)}(\xi_0,\eta_0)| \tag{2.26}$$

и

$$C_1 = \max\big\{A_{\nu+\sigma}, \frac{\mu}{\nu+\sigma} A_\mu \max_{\overline{D1}} (2-\xi_0-\eta_0)^{-\mu+\nu+\sigma}\big\} \le C_{\mu,\sigma} \max_{\bar{D}_0^{(1)}} |F^{(i)}|, \tag{2.27}$$

където $C_{\mu,\sigma} > 0$ не зависи от $F^{(i)}$. Ако $D1 = \emptyset$, дефинираме $\max_{\overline{D1}}(\dots) = 1$. След тази подготовка сме готови да докажем Теорема 2.3 по индукция.

(1) За $m = 0$:

$$U_{n,0}^{(i)}(\xi,\eta) = p_{n,0}^{(i)}(\xi,\eta) = q_{n,0}^{(i)}(\xi,\eta) \equiv 0 \text{ в } \bar{D}_\varepsilon^{(1)},$$
$$E_{n,0}^{(i)}(\xi,\eta) = F_n^{(i)}(\xi,\eta).$$

(2) За $m = 1$:

$$\begin{aligned}
&(U_{n,1}^{(i)} - U_{n,0}^{(i)})(\xi_0,\eta_0)\\
&= \int_0^{\xi_0} \Big(\int_{\xi_0}^{\eta_0} E_{n,0}^{(i)}(\xi,\eta)\,d\eta\Big) d\xi + 2\int_0^{\xi_0} \Big(\int_0^{\eta} E_{n,0}^{(i)}(\xi,\eta)\,d\xi\Big) d\eta\\
&= \int_0^{\xi_0} \Big(\int_{\xi_0}^{\eta_0} (2-\xi-\eta)^{-\lambda-2}(2-\xi-\eta)^{\lambda+2} F^{(i)}(\xi,\eta)\,d\eta\Big) d\xi\\
&\quad + 2\int_0^{\xi_0} \Big(\int_0^{\eta} (2-\xi-\eta)^{-\lambda-2}(2-\xi-\eta)^{\lambda+2} F^{(i)}(\xi,\eta)\,d\xi\Big) d\eta.
\end{aligned}$$

Прилагайки Лема 4.1 и припомняйки си формула (2.26), получаваме

$$|(U_{n,1}^{(i)} - U_{n,0}^{(i)})(\xi_0,\eta_0)| \le A_\lambda (2-\xi_0-\eta_0)^{-\lambda}. \tag{2.28}$$

Аналогично имаме

$$(p_{n,1}^{(i)} - p_{n,0}^{(i)})(\xi_0,\eta_0) = \int_0^{\xi_0} F^{(i)}(\xi,\xi_0) d\xi + \int_{\xi_0}^{\eta_0} F^{(i)}(\xi_0,\eta) d\eta$$

и след интегриране

$$|(p_{n,1}^{(i)} - p_{n,0}^{(i)})(\xi_0,\eta_0)| \le \lambda A_\lambda (2-\xi_0-\eta_0)^{-\lambda-1}, \tag{2.29}$$

и съответно

$$|(q_{n,1}^{(i)} - q_{n,0}^{(i)})(\xi_0,\eta_0)| \le \lambda A_\lambda (2-\xi_0-\eta_0)^{-\lambda-1}. \tag{2.30}$$

За $\lambda = \nu + \sigma$ имаме

$$\begin{aligned} |(U^{(i)}_{n,1} - U^{(i)}_{n,0})(\xi_0, \eta_0)| &\le A_{\nu+\sigma}(2 - \xi_0 - \eta_0)^{-\nu-\sigma}, \\ |(p^{(i)}_{n,1} - p^{(i)}_{n,0})(\xi_0, \eta_0)| &\le (\nu+\sigma) A_{\nu+\sigma}(2 - \xi_0 - \eta_0)^{-\nu-\sigma-1}, \\ |(q^{(i)}_{n,1} - q^{(i)}_{n,0})(\xi_0, \eta_0)| &\le (\nu+\sigma) A_{\nu+\sigma}(2 - \xi_0 - \eta_0)^{-\nu-\sigma-1}. \end{aligned} \tag{2.31}$$

(3) За $m = 2, 3, \dots$ От Лема 4.2 и от неравенствата (2.28)–(2.30) за $\lambda = \mu$ по индукция следва, че съществуват редици $\{U^{(i)}_{n,m}\}$, $\{p^{(i)}_{n,m}\}$ и $\{q^{(i)}_{n,m}\}$, $m \in \mathrm{N}$, от непрекъснати функции и са в сила следните оценки

$$\begin{aligned} |(U^{(i)}_{n,m+1} - U^{(i)}_{n,m})(\xi_0, \eta_0)| &\le A_\mu (1-\delta_\nu)^m (2 - \xi_0 - \eta_0)^{-\mu}, \\ |(p^{(i)}_{n,m+1} - p^{(i)}_{n,m})(\xi_0, \eta_0)| &\le \mu A_\mu (1-\delta_\nu)^m (2 - \xi_0 - \eta_0)^{-\mu-1}, \\ |(q^{(i)}_{n,m+1} - q^{(i)}_{n,m})(\xi_0, \eta_0)| &\le \mu A_\mu (1-\delta_\nu)^m (2 - \xi_0 - \eta_0)^{-\mu-1} \end{aligned} \tag{2.32}$$

за $m = 0, 1, 2, \dots$.

За точките $(\xi_0, \eta_0) \in D1$ от (2.32) получаваме:

$$\begin{aligned} &|(U^{(i)}_{n,m+1} - U^{(i)}_{n,m})(\xi_0, \eta_0)| \\ &\le A_\mu (1-\delta_\nu)^m (2 - \xi_0 - \eta_0)^{-\nu-\sigma} \max_{\bar{D}1} (2 - \xi_0 - \eta_0)^{-\mu+\nu+\sigma}, \\ &|(p^{(i)}_{n,m+1} - p^{(i)}_{n,m})(\xi_0, \eta_0)| \\ &\le (\nu+\sigma) \frac{\mu}{\nu+\sigma} A_\mu (1-\delta_\nu)^m (2 - \xi_0 - \eta_0)^{-\nu-\sigma-1} \max_{\bar{D}1} (2 - \xi_0 - \eta_0)^{-\mu+\nu+\sigma}, \\ &|(q^{(i)}_{n,m+1} - q^{(i)}_{n,m})(\xi_0, \eta_0)| \\ &\le (\nu+\sigma) \frac{\mu}{\nu+\sigma} A_\mu (1-\delta_\nu)^m (2 - \xi_0 - \eta_0)^{-\nu-\sigma-1} \max_{\bar{D}1} (2 - \xi_0 - \eta_0)^{-\mu+\nu+\sigma}. \end{aligned}$$

Тогава, използвайки (2.25) и (2.27), заключаваме, че за $m \in N$ в $D1$ са в сила оценките

$$\begin{aligned} |(U^{(i)}_{n,m+1} - U^{(i)}_{n,m})(\xi_0, \eta_0)| &\le C_1 \tau^m (2 - \xi_0 - \eta_0)^{-\nu-\sigma}, \\ |(p^{(i)}_{n,m+1} - p^{(i)}_{n,m})(\xi_0, \eta_0)| &\le (\nu+\sigma) C_1 \tau^m (2 - \xi_0 - \eta_0)^{-\nu-\sigma-1}, \\ |(q^{(i)}_{n,m+1} - q^{(i)}_{n,m})(\xi_0, \eta_0)| &\le (\nu+\sigma) C_1 \tau^m (2 - \xi_0 - \eta_0)^{-\nu-\sigma-1}. \end{aligned} \tag{2.33}$$

Ние ще покажем, че такива оценки са в сила и за $(\xi_0, \eta_0) \in D2$.

Нашата индукционна хипотеза е, че за някое $m \in \mathrm{N}$ е изпълнено

$$\begin{aligned} |(U^{(i)}_{n,m} - U^{(i)}_{n,m-1})(\xi_0, \eta_0)| &\le C_1 \tau^{m-1} (2 - \xi_0 - \eta_0)^{-\nu-\sigma}, \\ |(p^{(i)}_{n,m} - p^{(i)}_{n,m-1})(\xi_0, \eta_0)| &\le (\nu+\sigma) C_1 \tau^{m-1} (2 - \xi_0 - \eta_0)^{-\nu-\sigma-1}, \\ |(q^{(i)}_{n,m} - q^{(i)}_{n,m-1})(\xi_0, \eta_0)| &\le (\nu+\sigma) C_1 \tau^{m-1} (2 - \xi_0 - \eta_0)^{-\nu-\sigma-1} \end{aligned} \tag{2.34}$$

в $D^{(1)}_\varepsilon$, което за $m = 1$ е вярно предвид (2.31) и $C_1 \ge A_{\nu+\sigma}$. Трябва да докажем неравенствата (2.33) в $D^{(1)}_\varepsilon$, което вече е известно за $D1 \subset D^{(1)}_\varepsilon$.

Полагаме неравенствата (2.34) в (2.23) и получаваме

$$
\begin{aligned}
&|(E_m^{(i)} - E_{m-1}^{(i)})|(\xi,\eta) \\
&\le \Big\{\frac{\nu(\nu+1)}{(2-\xi-\eta)^2} + \frac{K_1}{2(2-\xi-\eta)} + \frac{K_0}{4}\Big\} C_1\tau^{m-1}(2-\xi-\eta)^{-\nu-\sigma} \\
&\quad + \frac{(\nu+1/2)K_1}{2-\xi-\eta} C_1\tau^{m-1}(2-\xi-\eta)^{-\nu-\sigma} \\
&\quad + \frac{3K_1}{2}(\nu+\sigma)C_1\tau^{m-1}(2-\xi-\eta)^{-\nu-\sigma-1} \\
&\le C_1\tau^{m-1}\Big\{\nu(\nu+1)(2-\xi-\eta)^{-\nu-\sigma-2} + (5\nu+3\sigma+2)K_1(2-\xi-\eta)^{-\nu-\sigma-3/2} \\
&\quad + K_0(2-\xi-\eta)^{-\nu-\sigma-3/2}\Big\}
\end{aligned}
$$

в цялата област $D_\varepsilon^{(1)}$. В последното неравенство използвахме, че $(2-\xi-\eta)^{-\nu-\sigma-1} = (2-\xi-\eta)^{1/2}(2-\xi-\eta)^{-\nu-\sigma-3/2} \le 2(2-\xi-\eta)^{-\nu-\sigma-3/2}$ и, респективно, $(2-\xi-\eta)^{-\nu-\sigma} \le 4(2-\xi-\eta)^{-\nu-\sigma-3/2}$, като целяхме степента на $2-\xi-\eta$ във всички членове на сумата да е по-малка от -2, за да можем да използваме Лема 4.1 от Апендикса. Заместваме последното неравенство във формулите (2.19) и след интегриране и прилагане на Лема 4.1 получаваме:

$$
\begin{aligned}
&|(U_{n,m+1}^{(i)} - U_{n,m}^{(i)})(\xi_0,\eta_0)| \\
&\le C_1\tau^{m-1}\Big\{\frac{\nu(\nu+1)}{(\nu+\sigma)(\nu+\sigma+1)}(2-\xi_0-\eta_0)^{-\nu-\sigma} \\
&\quad + \frac{(5\nu+3\sigma+2)K_1+K_0}{(\nu+\sigma-1/2)(\nu+\sigma+1/2)}(2-\xi_0-\eta_0)^{-\nu-\sigma+1/2}\Big\} \\
&\quad + K_\alpha\int_0^{\xi_0} |(U_{n,m}^{(i)} - U_{n,m-1}^{(i)})(\xi,\xi)|d\xi \\
&\le C_1\tau^{m-1}(2-\xi_0-\eta_0)^{-\nu-\sigma}\Big\{\frac{\nu(\nu+1)}{(\nu+\sigma)(\nu+\sigma+1)} \\
&\quad + (2-\xi_0-\eta_0)^{1/2}N(K_1,K_0,K_\alpha)\Big\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&|(p_{n,m+1}^{(i)} - p_{n,m}^{(i)})(\xi_0,\eta_0)| \\
&\le (\nu+\sigma)C_1\tau^{m-1}\Big\{\frac{\nu(\nu+1)}{(\nu+\sigma)(\nu+\sigma+1)}(2-\xi_0-\eta_0)^{-\nu-\sigma-1} \\
&\quad + \frac{(5\nu+3\sigma+2)K_1+K_0}{(\nu+\sigma-1/2)(\nu+\sigma+1/2)}(2-\xi_0-\eta_0)^{-\nu-\sigma-1/2}\Big\} \\
&\quad + 2K_\alpha C_1\tau^{m-1}(2-2\xi_0)^{-\nu-\sigma-1/2} \\
&\le (\nu+\sigma)C_1\tau^{m-1}(2-\xi_0-\eta_0)^{-\nu-\sigma-1}\Big\{\frac{\nu(\nu+1)}{(\nu+\sigma)(\nu+\sigma+1)} \\
&\quad + (2-\xi_0-\eta_0)^{1/2}N(K_1,K_0,K_\alpha)\Big\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&|(q^{(i)}_{n,m+1} - q^{(i)}_{n,m})(\xi_0,\eta_0)| \\
&\le (\nu+\sigma)C_1\tau^{m-1}(2-\xi_0-\eta_0)^{-\nu-\sigma-1}\Big\{\frac{\nu(\nu+1)}{(\nu+\sigma)(\nu+\sigma+1)} \\
&\quad + (2-\xi_0-\eta_0)^{1/2}N(K_1,K_0,K_\alpha)\Big\}
\end{aligned}
$$

в $D^{(1)}_\varepsilon$. Тъй като по дефиниция

$$
\frac{\nu(\nu+1)}{(\nu+\sigma)(\nu+\sigma+1)} + (2-\xi_0-\eta_0)^{1/2}N(K_1,K_0,K_\alpha) \le \theta \le \tau \quad \text{в } D2,
$$

за точките $(\xi_0,\eta_0) \in D2$ от последните три неравенства получаваме (2.33). Така по индукция заключаваме, че оценките (2.33) са изпълнени в $D^{(1)}_\varepsilon$ за $m = 2, 3, \ldots$.

За функциите $\{U^{(i)}_n, p^{(i)}_n, q^{(i)}_n\} = \lim_{m\to\infty}\{U^{(i)}_{n,m}, p^{(i)}_{n,m}, q^{(i)}_{n,m}\}$, $i = 1,2$ получаваме

$$
\begin{aligned}
|U^{(i)}_n(\xi_0,\eta_0)| &= \Big|\sum_{m=0}^{\infty}(U^{(i)}_{n,m+1} - U^{(i)}_{n,m})(\xi_0,\eta_0)\Big| \\
&\le C_1(1-\tau)^{-1}(2-\xi_0-\eta_0)^{-\nu-\sigma}, \\
|U^{(i)}_{n,\xi_0}(\xi_0,\eta_0)| &= \Big|\sum_{m=0}^{\infty}(p^{(i)}_{n,m+1} - p^{(i)}_{n,m})(\xi_0,\eta_0)\Big| \\
&\le (\nu+\sigma)C_1(1-\tau)^{-1}(2-\xi_0-\eta_0)^{-\nu-\sigma-1}, \\
|U^{(i)}_{n,\eta_0}(\xi_0,\eta_0)| &= \Big|\sum_{m=0}^{\infty}(q^{(i)}_{n,m+1} - q^{(i)}_{n,m})(\xi_0,\eta_0)\Big| \\
&\le (\nu+\sigma)C_1(1-\tau)^{-1}(2-\xi_0-\eta_0)^{-\nu-\sigma-1}.
\end{aligned}
$$

Предвид (2.27), тези оценки съвпадат с (2.24), където $C_\sigma = C_{\mu,\sigma}(1-\tau)^{-1}$. □

Коментар 2.4. *Резултатът от тази теорема показва, че възможният ред на степенната особеност в* $(\xi,\eta) = (1,1)$ *на решението* $U_n(\xi,\eta)$ *(ако разглеждаме задачата в* D_0*) не зависи от коефициентите* (2.11) *на системата* (2.9) *и коефициента* α. *Досега известната априорна оценка от* [29] *допуска по-висок ред на сингулярност, равен на параметъра* $\mu > \nu$, *който удовлетворява неравенството* $(\mu-\nu)(\mu+\nu+1) > (3\mu+2\nu+2)K_1 + 2(\mu+1)K_\alpha + K_0$. *От последното неравенство можем да заключим, че*

$$
\mu > \frac{3}{2}K_1 + K_\alpha - \frac{1}{2} + \sqrt{(\frac{3}{2}K_1 + K_\alpha - \frac{1}{2})^2 + \nu^2 + \nu + (2\nu+2)K_1 + 2K_\alpha + K_0}
$$

или

$$
\mu > \nu + \psi(K_1, K_\alpha, K_0),
$$

където

$$
\begin{aligned}
\psi(K_1,K_\alpha,K_0) = -\nu + \frac{3}{2}K_1 + K_\alpha - \frac{1}{2} \\
+ \sqrt{(\frac{3}{2}K_1 + K_\alpha - \frac{1}{2})^2 + \nu^2 + \nu + (2\nu+2)K_1 + 2K_\alpha + K_0}.
\end{aligned}
$$

За $K_1, K_\alpha, K_0 \geq 0$, $K_1+K_\alpha+K_0 \neq 0$ функцията $\psi(K_1, K_\alpha, K_0)$ е положителна и монотонно растяща по всяка от променливите K_1, K_α, K_0, а също така $\psi(0,0,0) = 0$.

С помощта на тази теорема можем да формулираме резултат относно възможния ред на сингулярност на обобщеното решение $u(x,t)$ на Задача P_α. От [26] знаем, че ако $b_1, b_2, b, c \in C^1(\bar{\Omega}_0)$, задачата притежава не повече от едно обобщено решение, което означава, че при тези условия не можем допълнително да построим решения с по-висок ред на сингулярност.

Теорема 2.5. *Нека в Задача P_α*

1) *дясната страна f на уравнение (2.1) е от вида*

$$f(x,t) = f_n^{(1)}(|x|,t)\cos(n \arctan\frac{x_2}{x_1}) + f_n^{(2)}(|x|,t)\sin(n \arctan\frac{x_2}{x_1}), \quad n \in \mathrm{N};$$

2) *$b_1, b_2, b, c \in C^1(\bar{\Omega}_0)$, $\alpha \in C^1([0,1])$, $f_n^{(i)} \in C(\bar{\Omega}_0)$, $i = 1,2$;*
3) *a_1, a_2, b, c са функции на $(|x|,t)$, $\alpha = \alpha(|x|)$,
където $a_1 := b_1 \cos\arctan(x_2/x_1) + b_2 \sin\arctan(x_2/x_1)$,
$a_2 := |x|^{-1}(b_2 \cos\arctan(x_2/x_1) - b_1 \sin\arctan(x_2/x_1))$.*

Тогава за обобщеното решение $u(x,t)$ на Задача P_α са изпълнени следните оценки

$$|u(x,t)| \leq C_{n,\sigma} \max_{\bar{\Omega}_0}\{|f_n^{(1)}| + |f_n^{(2)}|\}|x|^{-n-\sigma}, \tag{2.35}$$

$$\sum_{|\beta|=1} |D^\beta u(x,t)| \leq C_{n,\sigma} \max_{\bar{\Omega}_0}\{|f_n^{(1)}| + |f_n^{(2)}|\}|x|^{-n-\sigma-1},$$

където σ е произволно положително число и $C_{n,\sigma}$ е положителна константа, зависеща от σ, n и коефициентите на (2.1), (2.2).

Доказателство. Първо ще забележим, че при тези условия Задача P_α се свежда до Задача $P_{\alpha,2}$, в която условията на Теорема 2.3 са изпълнени и следователно можем да приложим тази теорема. Използвайки връзките (2.7) и (2.8), извършваме обратна трансформация от Задача $P_{\alpha,2}$ към Задача P_α и виждаме, че обобщеното решение $u(x,t)$ принадлежи на $C^1(\bar{\Omega}_0 \backslash O)$ и удовлетворява оценките

$$|u(x,t)| \leq C_{n,\sigma} \max_{\bar{\Omega}_0}\{|f_n^{(1)}| + |f_n^{(2)}|\}|x|^{-n-\sigma},$$

$$\sum_{|\beta|=1} |D^\beta u(x,t)| \leq C_{n,\sigma} \max_{\bar{\Omega}_0}\{|f_n^{(1)}| + |f_n^{(2)}|\}|x|^{-n-\sigma-1},$$

където $C_{n,\sigma} > 0$ зависи от n, σ и коефициентите на (2.1), (2.2). □

Този резултат непосредствено се обобщава по следния начин.

Теорема 2.6. *Нека дясната страна $f(x,t)$ на уравнение (2.1) е тригонометричен полином*

$$f(x,t) = \sum_{n=0}^{l} \left(f_n^{(1)}(|x|,t)\cos(n \arctan\frac{x_2}{x_1}) + f_n^{(2)}(|x|,t)\sin(n \arctan\frac{x_2}{x_1}) \right), \quad l \in \mathrm{N}. \tag{2.36}$$

Ако условията 2) и 3) на Теорема 2.5 са изпълнени, то съществува единствено обобщено решение $u(x,t) \in C^1(\bar{\Omega}_0 \backslash O)$ на Задача P_α и са изпълнени следните оценки

$$|u(x,t)| \le C_{l,\sigma} \max_{\bar{\Omega}_0} \{|f_l^{(1)}| + |f_l^{(2)}|\}|x|^{-l-\sigma} + O(|x|^{-l-\sigma+1}),$$

$$\sum_{|\beta|=1} |D^\beta u(x,t)| \le C_{l,\sigma} \max_{\bar{\Omega}_0} \{|f_l^{(1)}| + |f_l^{(2)}|\}|x|^{-l-\sigma-1} + O(|x|^{-l-\sigma}).$$

2.5. **Съществуване на сингулярни решения на Задача P_α.** В този параграф показваме, че съществуват сингулярни решения на Задача P_α при някои достатъчни условия за коефициентите и дясната страна на уравнение (2.1), в това число и коефициента $\alpha(x)$ от граничното условие върху $t = 0$. Такива сингулярни решения са намерени в Grammatikopoulos, Христов и Попиванов [26], Теорема 1.2. Ние тук следваме доказателството на тази теорема и с извършване на модификации получаваме малко по-общ резултат.

Нека коефициентите (2.11) в Задача $P_{\alpha,2}$ са такива, че да е изпълнена Лема 4.4 от Апендикса, която е доказана в [26] и е важна за извеждането на резултатите ни в този параграф. Ще забележим, че понеже $D_1 = -D_2$, за да бъде изпълнено (4.27), е необходимо $D_1 = D_2 \equiv 0$. Следователно в случая можем да разглеждаме системата (2.9) като две отделни независими едно от друго уравнения

$$U_{\xi\eta} - AU_\xi - BU_\eta - CU = F(\xi,\eta) \tag{2.37}$$

с гранични условия

$$U(0,\eta) = 0, \quad (U_\eta - U_\xi)(\xi,\xi) + \alpha(1-\xi)U(\xi,\xi) = 0. \tag{2.38}$$

Формулираме следната теорема:

Теорема 2.7. *Нека в задачата* (2.37), (2.38)

1) $A, B, C \in C(\bar{D}_\varepsilon^{(1)}), \alpha \in C^1([0, 1-\varepsilon])$ *и*

$$A \ge 0, \quad B \ge 0, \quad C \ge \frac{4n^2 - 1}{4(2-\xi-\eta)^2}, \quad \alpha(1-\xi) \ge 0 \text{ в } \bar{D}_\varepsilon^{(1)}; \tag{2.39}$$

2) $F(\xi,\eta) \in C(\bar{D}_0)$ *не си сменя знака, (т. е. или $F \ge 0$, или $F \le 0$,) и също така $F \not\equiv 0$ в D_0.*

Тогава за $\eta \in [1-\varepsilon, 1]$ и $\varepsilon \in (0, \varepsilon_F)$, където $\varepsilon_F \in (0,1)$ е число зависещо от F, е в сила неравенството

$$|U(1-\varepsilon,\eta)| \ge C_0 \varepsilon^{-(n-\frac{1}{2})}, \quad C_0 = const > 0. \tag{2.40}$$

Забележка: В тази теорема върху коефициентите A, B, C не са наложени ограниченията (2.22) и съответно не можем да твърдим, че съществува класическо решение $U(\xi,\eta)$ на тази задача, позовавайки се на Теорема 2.3, но можем да се позовем на [26], където е доказано съществуването на класическо решение при тези условия.

Доказателство. За определеност ще считаме, че $F \ge 0$. Случаят $F \le 0$ е очевидно аналогичен.

Въвеждаме функцията

$$W(\xi,\eta) := \frac{(1-\xi)^{n-1/2}(1-\eta)^{n-1/2}}{(2-\xi-\eta)^{n-1/2}}.$$

Първо забелязваме, че $W(\xi,\eta) > 0$ в D_ε. След това, понеже $F(\xi,\eta)$ е непрекъсната в D_0 и $F \not\equiv 0$, следва, че съществува отворен кръг в D_0, където $F > 0$. Следователно, ако ε е достатъчно малко (по-малко от някое ε_F), е в сила неравенството

$$\int_{D_\varepsilon} (FW)(\xi,\eta)d\xi d\eta \geq K, \quad K = \mathrm{const} > 0. \tag{2.41}$$

За да изведем желаната от нас оценка, ще следваме доказателството на Теорема 1.2 в [26], но тук вместо в $D_\varepsilon^{(1)}$ ще извършим пресмятанията в $D_\varepsilon \subset D_\varepsilon^{(1)}$.

С помощта на (2.37) преобразуваме (2.41) по следния начин:

$$\begin{aligned} 0 < K &\leq \int_{D_\varepsilon} (FW)(\xi,\eta)d\xi d\eta \\ &= \int_{D_\varepsilon} (U_{\xi\eta}W)(\xi,\eta)d\xi d\eta - \int_{D_\varepsilon} [(AU_\xi + BU_\eta)W](\xi,\eta)d\xi d\eta \\ &\quad - \int_{D_\varepsilon} (CUW)(\xi,\eta)d\xi d\eta := I_1 - I_2 - I_3. \end{aligned}$$

Понеже $W \geq 0$ и Лема 4.4 е изпълнена, от където следва, че $U \geq 0, U_\xi \geq 0, U_\eta \geq 0$, се вижда, че $I_2 \geq 0$ и следователно можем да пренебрегнем този член:

$$0 < K \leq I_1 - I_3. \tag{2.42}$$

Отчитайки първото гранично условие от формула (2.38), с интегриране по части пресмятаме:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{D_\varepsilon} (U_{\xi\eta}W)(\xi,\eta)d\xi d\eta \\ &= \int_{D_\varepsilon} (UW_{\xi\eta})(\xi,\eta)d\xi d\eta - \int_0^{1-\varepsilon} (U_\xi W + UW_\eta)(\xi,\xi)d\xi \\ &\quad + \int_0^{1-\varepsilon} (U_\xi W)(\xi, 1-\varepsilon)d\xi := I_{D_\varepsilon} - I_{\partial 1} + I_{\partial 2}. \end{aligned}$$

След това проверяваме, че

$$W_{\xi\eta}(\xi,\eta) = \frac{4n^2-1}{4(2-\xi-\eta)^2}W(\xi,\eta).$$

От това равенство и от формула (2.39) следва, че

$$I_{D_\varepsilon} - I_3 = \int_{D_\varepsilon} \Big(\frac{4n^2-1}{4(2-\xi-\eta)^2} - C\Big)(UW)(\xi,\eta)d\xi d\eta \leq 0.$$

С помощта на това неравенство от (2.42) получаваме

$$0 < K \leq I_1 - I_3 = I_{D_\varepsilon} - I_{\partial 1} + I_{\partial 2} - I_3 \leq -I_{\partial 1} + I_{\partial 2}.$$

Лесно се проверява, че

$$W_\eta(\xi,\xi) = \frac{1}{2}[W(\xi,\xi)]_\xi. \tag{2.43}$$

От друга страна, използвайки второто гранично условие от (2.38), получаваме

$$U_\xi(\xi,\xi)=\frac{1}{2}[U(\xi,\xi)]_\xi+\frac{1}{2}\alpha(1-\xi)U(\xi,\xi). \tag{2.44}$$

Полагането на (2.43) и (2.44) в израза за $I_{\partial 1}$ ни дава

$$\begin{aligned}
I_{\partial 1} &= \int_0^{1-\varepsilon}(U_\xi W+UW_\eta)(\xi,\xi)d\xi \\
&= \int_0^{1-\varepsilon}\Big\{\frac{1}{2}[U(\xi,\xi)]_\xi W(\xi,\xi)+\frac{1}{2}\alpha(1-\xi)U(\xi,\xi)W(\xi,\xi) \\
&\quad +\frac{1}{2}U(\xi,\xi)[W(\xi,\xi)]_\xi\Big\}d\xi \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{1-\varepsilon}[UW(\xi,\xi)]_\xi d\xi+\frac{1}{2}\int_0^{1-\varepsilon}\alpha(1-\xi)(UW)(\xi,\xi)d\xi \\
&= \frac{1}{2}(UW)(1-\varepsilon,1-\varepsilon)+\frac{1}{2}\int_0^{1-\varepsilon}\alpha(1-\xi)(UW)(\xi,\xi)d\xi\ge 0,
\end{aligned}$$

като в последното неравенство използваме знака на α от (2.39). По този начин от (2.42) стигаме до

$$0<K\le I_{\partial 2}. \tag{2.45}$$

Непосредствена проверка показва, че $W_\xi\le 0$ в $\bar{D}_\varepsilon$ и ние правим следната оценка на $I_{\partial 2}$:

$$\begin{aligned}
I_{\partial 2} &= \int_0^{1-\varepsilon}(U_\xi W)(\xi,1-\varepsilon)d\xi \\
&= -\int_0^{1-\varepsilon}(UW_\xi)(\xi,1-\varepsilon)d\xi+(UW)(1-\varepsilon,1-\varepsilon) \\
&\le U(1-\varepsilon,1-\varepsilon)\left\{\int_0^{1-\varepsilon}|W_\xi(\xi,1-\varepsilon)|d\xi+W(1-\varepsilon,1-\varepsilon)\right\} \\
&= U(1-\varepsilon,1-\varepsilon)W(0,1-\varepsilon) \\
&= U(1-\varepsilon,1-\varepsilon)(1+\varepsilon)^{-(n-\frac{1}{2})}\varepsilon^{n-\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Използването на тази оценка в (2.45) ни води до неравенството

$$U(1-\varepsilon,1-\varepsilon)\ge(1+\varepsilon)^{n-\frac{1}{2}}K\varepsilon^{-(n-\frac{1}{2})},\quad \varepsilon\in(0,\varepsilon_F).$$

Спомняме си още веднъж, че от Лема 4.4 следва, че $U_\eta\ge 0$ в $\bar{D}_\varepsilon^{(1)}$ и следователно $U(1-\varepsilon,\eta)\ge U(1-\varepsilon,1-\varepsilon)$ в $\bar{D}_\varepsilon^{(1)}$ за $\eta\in(1-\varepsilon,1]$.

От тук следва непосредствено твърдението на теоремата. □

Използвайки тази теорема, можем да формулираме следния резултат за съществуване на сингулярни решения на Задача P_α:

Теорема 2.8. *Нека $\alpha\ge 0$; b_1, b_2, b, $c\in C^1(\bar{\Omega}_0\backslash O)$ и*

$$b_1=a_1(|x|,t)\cos(\arctan\frac{x_2}{x_1}),\quad b_2=a_1(|x|,t)\sin(\arctan\frac{x_2}{x_1})$$

за някоя функция $a_1(|x|,t)$, за която $a_1\ge|b|, a_1\ge 2|x|c$. Тогава за всяка функция от вида

$$f(x,t)=f_n(|x|,t)\cos(n\arctan\frac{x_2}{x_1}),$$

стояща в дясната страна на уравнение (2.1) *и удовлетворяваща следните условия:*

$$f_n \in C(\bar{\Omega}_0), \quad f_n \not\equiv 0 \text{ в } \Omega_0 \qquad \textit{и} \quad \text{или } f_n \geq 0 \text{ в } \Omega_0, \text{ или } f_n \leq 0 \text{ в } \Omega_0,$$

съществува съответно обобщено решение u_n *на Задача* P_α, *което удовлетворява оценката*

$$|u_n(x,t)| \geq C_0|x|^{-n}|\cos(n \arctan \frac{x_2}{x_1})|, \quad C_0 = \textit{const} > 0 \tag{2.46}$$

в някаква околност на $O(0,0,0)$.

Забележка: Аналогично се формулира резултат и за случая, когато дясната страна на уравнение (2.1) *е от вида* $f(x,t) = f_n(|x|,t)\sin(n\arctan(x_2/x_1))$.

Доказателство. Първо ще извършим трансформация от Задача P_α към Задача $P_{\alpha,1}$ и предвид отношенията

$$a_1 = b_1\cos\varphi + b_2\sin\varphi, \quad a_2 = \varrho^{-1}(b_2\cos\varphi - b_1\sin\varphi)$$

виждаме, че за коефициентите на система (2.6) е изпълнено

$$a_2 \equiv 0, \quad a_1 \geq |b|, \quad a_1 \geq 2\varrho c, \quad \alpha(\varrho) \geq 0 \quad \text{в} \quad G_\varepsilon.$$

След това свеждаме Задача $P_{\alpha,1}$ до Задача $P_{\alpha,2}$ и припомняйки си връзките

$$A_1 = A_2 = \frac{1}{4}(a_1 + b), \quad B_1 = B_2 = \frac{1}{4}(a_1 - b),$$
$$D_2 = -D_1 = \frac{1}{4}na_2, \quad C_1 = C_2 = \frac{1}{4}\left\{\frac{4n^2-1}{(2-\xi-\eta)^2} + \frac{a_1}{2-\xi-\eta} - c\right\},$$

виждаме, че $D_1 = D_2 \equiv 0$ и че неравенствата (2.39) са изпълнени. След това, непосредствено проверяваме, че и останалите условия на Теорема 2.7 са изпълнени и съответно можем да я приложим. Следователно за $\eta \in [1-\varepsilon, 1]$ и $\varepsilon \in (0, \varepsilon_F)$ е в сила оценката (2.40). Тогава, извършвайки обратна трансформация от Задача $P_{\alpha,2}$ към Задача P_α, заключаваме, че е изпълнена оценката (2.46) в някаква околност на $O(0,0,0)$. □

Коментар 2.9. *Разликата му тази теорема и Теорема 1.2 е, че тук имаме същия резултат за по-широк клас от функции в дясната страна на уравнението, а също така във формула* (2.46) *имаме оценка на* $|u_n(x,t)|$, *докато в* (1.7) *е оценена рестрикцията* $|u_n(x,t)|_{t=|x|}$.

Коментар 2.10. *Ще забележим, че сингулярните решения, намерени в Теорема 2.8 достигат максимално възможния ред на сингулярност, определен от Теорема 2.5, т. е. ако в Задача* P_α *едновременно са налице условията на Теореми 2.5 и 2.8, то за единственото обобщено решение на задачата знаем точното асимптотично поведение в околност на* $O(0,0,0)$.

3. Изследване на първа гранична задача за (3+1)-D слабо хиперболично уравнение

3.1. **Постановка на задачата.** Въвеждайки числото $m > 0$, да разгледаме уравнението

$$t^m(u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + u_{x_3x_3}) - u_{tt} = f(x,t) \tag{3.1}$$

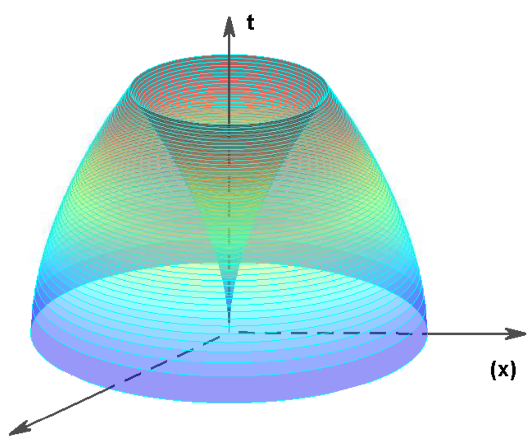
в областта $\Omega_m := \left\{(x,t) : t > 0, \frac{2}{m+2}t^{(m+2)/2} < |x| < 1 - \frac{2}{m+2}t^{(m+2)/2}\right\}$, ограничена от повърхностите

$$\Sigma_0 = \{(x,t) : t = 0, |x| < 1\},$$

$$\Sigma_{m,1} = \left\{(x,t) : t > 0, |x| = 1 - \frac{2}{m+2}t^{(m+2)/2}\right\},$$

$$\Sigma_{m,2} = \left\{(x,t) : t > 0, |x| = \frac{2}{m+2}t^{(m+2)/2}\right\},$$

където сме означили $x = (x_1, x_2, x_3)$.



Фигура 3. Областта Ω_m.

Нека дясната страна на уравнението е от вида

$$f(x,t) = \sum_{n=0}^{l} \sum_{s=1}^{2n+1} f_n^s(|x|,t)Y_n^s(x/|x|), \quad l \in \mathrm{N} \cup \{0\}, \tag{3.2}$$

където $Y_n^s(x/|x|)$, $n = 0,1,2,\ldots$, $s = 1,\ldots,2n+1$ са сферични функции дефинирани върху единичната сфера в R^3 $S^2 := \{x : |x| = 1\}$. Известно е, че $Y_n^s(x/|x|)$ образуват пълна ортогонална система в $L_2(S^2)$. Подробна информация за сферичните функции може да бъде намерена например в Jones [35].

Разглеждаме следната гранична задача:

Задача $P1_m$. Да се намери решение на уравнение (3.1) в Ω_m с гранични условия

$$u|_{\Sigma_0 \setminus O} = 0, \quad u|_{\Sigma_{m,1}} = 0. \tag{3.3}$$

Спрегнатата задача на $P1_m$ е съответно:

Задача $P1_m^*$**.** Да се намери решение на уравнение (3.1) в Ω_m с гранични условия

$$u|_{\Sigma_0} = 0, \quad u|_{\Sigma_{m,2}} = 0.$$

В общия случай не очакваме задача $P1_m$ да има класически решения, тъй като хомогенната спрегната Задача $P1_m^*$ има безброй много нетривиални класически решения, което е показано по-нататък в Теорема 3.4. Затова ще дефинираме обобщено решение на Задача $P1_m$, което допуска сингулярности върху конуса $\Sigma_{m,2}$ и е аналогично на това, дадено в Попиванов и Schneider [50], за тримерния аналог на тази задача. Сингулярностите са очаквани предвид описаните в Увода известни факти по задачите на Протър.

Дефиниция 3.1. *Функцията $u(x,t)$ се нарича обобщено решение на Задача $P1_m$ в Ω_m, ако:*

1) $u \in C(\bar{\Omega}_m \backslash O) \cap C^1(\Omega_m), \quad u|_{\Sigma_0 \backslash O} = 0, \quad u|_{\Sigma_{m,1}} = 0$;

2) за всяко $\varepsilon \in (0,1)$ съществува положителна константа $c(\varepsilon)$, такава че

$$|u(x,t)| \leq c(\varepsilon) t,$$

$$|u_t(x,t)| \leq c(\varepsilon) \left(1 - |x| - \frac{2}{m+2} t^{(m+2)/2}\right)^{-m/(m+2)},$$

$$|u_{x_i}(x,t)| \leq c(\varepsilon) t^{-m/2} \left(1 - |x| - \frac{2}{m+2} t^{(m+2)/2}\right)^{-m/(m+2)}, \quad i = 1,2,3$$

в областта $\Omega_{m,\varepsilon} := \Omega_m \cap \{|x| > \varepsilon + \frac{2}{m+2} t^{(m+2)/2}\}$;

3) тъждеството

$$\int_{\Omega_m} \left(u_t v_t - t^m (u_{x_1} v_{x_1} + u_{x_2} v_{x_2} + u_{x_3} v_{x_3}) - f v\right) dx dt = 0 \tag{3.4}$$

е изпълнено за всички функции $v(x,t)$ от множеството $V_\varepsilon := \{v : v \in C^1(\bar{\Omega}_m),\ v|_{\Sigma_0} = 0, \quad v \equiv 0$ в околност на $\Sigma_{m,2}\}$.

Коментар 3.2. *Условие 2) на дефиницията показва, че докато обобщеното решение е "ограничено" в $\Omega_{m,\varepsilon}$, то първите му производни могат да бъдат неограничени върху $\Sigma_{m,1}$ и това всъщност е реалната ситуация.*

3.2. **Свеждане на Задача $P1_m$ до двумерна задача на Дарбу-Гурса.** Специалният вид (3.2) на дясната страна на уравнението ни позволява да сведем четиримерната Задача $P1_m$ до двумерна задача чрез разделяне на променливите. За целта минаваме към сферични координати в R^3:

$$x_1 = \rho \sin\theta \cos\varphi, \quad x_2 = \rho \sin\theta \sin\varphi, \quad x_3 = \rho\cos\theta,$$

$$\rho > 0, \quad 0 \leq \theta < \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

От уравнение (3.1) стигаме до уравнението

$$t^m \left(u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho^2} u_{\theta\theta} + \frac{1}{\rho^2 \sin^2\theta} u_{\varphi\varphi} + \frac{2}{\rho} u_\rho + \frac{\cos\theta}{\rho^2 \sin\theta} u_\theta\right) - u_{tt} = f(\rho,\theta,\varphi,t),$$

където според (3.2)

$$f(\rho,\theta,\varphi,t) = \sum_{n=0}^{l} \sum_{s=1}^{2n+1} f_n^s(\rho,t) Y_n^s(\theta,\varphi).$$

Търсим решение от вида

$$u(\rho,\theta,\varphi,t)=\sum_{n=0}^{l}\sum_{s=1}^{2n+1}u_n^s(\rho,t)Y_n^s(\theta,\varphi).$$

Известно е ([35]), че сферичните функции $Y_n^s(\theta,\varphi)$ удовлетворяват следното диференциално уравнение:

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}Y_n^s\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}Y_n^s+n(n+1)Y_n^s=0, \tag{3.5}$$

затова за всяка от функциите $u_n^s(\rho,t)$ получаваме следното диференциално уравнение:

$$t^m\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{2}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}-\frac{n(n+1)}{\rho^2}\right)u_n^s-\frac{\partial^2}{\partial t^2}u_n^s=f_n^s \tag{3.6}$$

в

$$G_0:=\left\{(\rho,t):t>0,\frac{2}{m+2}t^{(m+2)/2}<\rho<1-\frac{2}{m+2}t^{(m+2)/2}\right\}.$$

С оглед очакваните сингулярности на решенията, е целесъобразно да разглеждаме уравнението в по-малката област

$$G_\varepsilon:=\left\{(\rho,t):t>0,\varepsilon+\frac{2}{m+2}t^{(m+2)/2}<\rho<1-\frac{2}{m+2}t^{(m+2)/2}\right\},\quad 0<\varepsilon<1,$$

ограничена от повърхностите

$$S_0=\{(\rho,t):t=0,\rho<1\},$$

$$S_{m,1}=\left\{(\rho,t):t>0,\rho=1-\frac{2}{m+2}t^{(m+2)/2}\right\},$$

$$S_{m,2\varepsilon}=\left\{(\rho,t):t>0,\rho=\varepsilon+\frac{2}{m+2}t^{(m+2)/2}\right\}.$$

Също така ще ни е необходимо да означим и повърхността

$$S_{m,2}=\left\{(\rho,t):t>0,\rho=\frac{2}{m+2}t^{(m+2)/2}\right\},$$

която е част от границата на G_0.

Така задача $P1_m$ се редуцира до

Задача $P11_m$**.** Да се намери решение на уравнение (3.6) в G_ε удовлетворяващо граничните условия

$$u_n^s|_{S_0}=0,\quad u_n^s|_{S_{m,1}}=0.$$

Дефинираме обобщено решение на тази задача аналогично на Дефиниция 4.7 в Апендикса, дадена в Попиванов и Schneider [50] при изследването на задачата на Протър за тримерно слабо хиперболично уравнение.

Дефиниция 3.3. *Функцията $u_n^s(\rho,t)$ се нарича обобщено решение на Задача $P11_m$ в G_ε, ако:*

1) $u_n^s\in C(\bar{G}_\varepsilon)$, $\quad u_n^s|_{S_0\cup S_{m,1}}=0$;

2) $u_{n,\rho}^s,u_{n,t}^s\in C(G_\varepsilon\cup S_{m,2\varepsilon})$;

3) за всяко $\varepsilon\in(0,1)$ съществува положителна константа $c(\varepsilon)$, такава че

$$|u_n^s(\rho,t)|\le c(\varepsilon)t,$$

$$|u^s_{n,t}(\rho,t)| \le c(\varepsilon)\left(1-\rho-\frac{2}{m+2}t^{(m+2)/2}\right)^{-m/(m+2)},$$

$$|u^s_{n,\rho}(\rho,t)| \le c(\varepsilon)t^{-m/2}\left(1-\rho-\frac{2}{m+2}t^{(m+2)/2}\right)^{-m/(m+2)}$$

в G_ε*;*

4) тъждеството

$$\int_{G_\varepsilon}\left[u^s_{n,t}v_t - t^m\left(u^s_{n,\rho}v_\rho + \frac{n(n+1)}{\rho^2}u^s_n v\right)\right]\rho^2\,d\rho dt = \int_{G_\varepsilon} f^s_n v\rho^2\,d\rho dt \tag{3.7}$$

е изпълнено за всички функции $v \in \tilde{V}_\varepsilon := \{v : v \in C^1(\bar{G}_0), \quad v|_{S_0} = 0, \quad v \equiv 0$ *в* $\quad G_0 \backslash G_\varepsilon\}$.

Последната стъпка в редуцирането на Задача $P1_m$ до задача на Дарбу-Гурса в равнината е въвеждането на характеристичните променливи

$$\xi = 1-\rho-\frac{2}{m+2}t^{(m+2)/2}, \quad \eta = 1-\rho+\frac{2}{m+2}t^{(m+2)/2} \tag{3.8}$$

и новата функция

$$U^s_n(\xi,\eta) = \rho(\xi,\eta)u^s_n(\rho(\xi,\eta),t(\xi,\eta)).$$

За удобство, в по-нататъшното изложение ще използваме по-краткото означение

$$U(\xi,\eta) := U^s_n(\xi,\eta).$$

Стигаме до уравнението

$$U_{\xi\eta} + \frac{\beta}{\eta-\xi}(U_\xi - U_\eta) - \frac{n(n+1)}{(2-\xi-\eta)^2}U = (\eta-\xi)^{-4\beta}\tilde{f}(\xi,\eta) \tag{3.9}$$

с гранични условия

$$U|_{\xi=0} = 0, \quad U|_{\eta=\xi} = 0 \tag{3.10}$$

в областта

$$D_\varepsilon := \{(\xi,\eta) : 0 < \xi < \eta < 1-\varepsilon\},$$

където

$$\tilde{f}(\xi,\eta) = c_{m,1}(2-\xi-\eta)f^s_n(\rho(\xi,\eta),t(\xi,\eta)), \quad c_{m,1} = \frac{1}{8}\left(\frac{m+2}{4}\right)^{-2m/(m+2)}$$

и

$$\beta = \frac{m}{2(m+2)}.$$

За нашите цели е необходимо да изследваме това уравнение и в по-широката област

$$D^{(1)}_\varepsilon := \{(\xi,\eta) : 0 < \xi < \eta < 1, \quad 0 < \xi < 1-\varepsilon\}.$$

Така стигаме до

Задача $P12_m$**.** Да се намери решение на уравнение (3.9) в областта $D^{(1)}_\varepsilon$, удовлетворяващо условията (3.10).

3.3. **Теореми за съществуване и единственост на Задачи $P1_m$ и $P1_m^*$.** Теоремите за съществуване и единственост, получени в Попиванов и Schneider [50] и Попиванов и Попов [55] за тримерните аналози на Задачи $P1_m$ и $P1_m^*$, се обобщават и за четиримерния случай.

Да въведем функциите

$$H_k^n(|x|,t) := \sum_{i=0}^{k} A_i^k t|x|^{-n+2i-1}\left(|x|^2 - \left(\frac{2}{m+2}\right)^2 t^{m+2}\right)^{n-k-i-1/2-1/(m+2)},$$

където

$$A_i^k = (-1)^i \frac{(k-i+1)_i(n-k-i+m/(2m+4))_i}{i!(n-i+1/2)_i}, \quad A_0^k = 1 \tag{3.11}$$

и $(a)_i = a(a+1)\dots(a+i-1), \quad i \in \mathrm{N}, \quad (a)_0 = 1$. Тогава е в сила:

Теорема 3.4. *За $k = 0,1,\dots,[n/2]-2$ функциите*

$$V_{k,s}^n(x,t) = H_k^n(|x|,t)Y_n^s(x/|x|)$$

са класически решения на хомогенната спрегната Задача $P1_m^*$.

Доказателство. От Теорема 4.5 ([55]) в Апендикса знаем, че за $k = 0,1,\dots,[n/2]-2$ функциите

$$\hat{V}_{k,1}^n(x,t) := \hat{H}_k^n(|x|,t)\cos\left(n\arctan\frac{x_2}{x_1}\right),$$

където $\hat{H}_k^n(|x|,t)$ и $\hat{A}_i^k$ са дефинирани чрез формулите (4.35) и (4.36), са класически решения на тримерната задача (4.33), (4.34). Също така от [50] знаем, че ако търсим решения от вида

$$u(x,t) = u_n^1(|x|,t)\cos\left(n\arctan\frac{x_2}{x_1}\right)$$

и положим

$$U(\xi,\eta) = \rho^{1/2}(\xi,\eta)u_n^1(\rho(\xi,\eta),t(\xi,\eta)),$$

където сме преминали към характеристичните променливи (3.8), уравнението (4.33) се свежда до следното двумерно уравнение

$$U_{\xi\eta} + \frac{\beta}{\eta-\xi}(U_\xi - U_\eta) - \frac{(n-1/2)(n+1/2)}{(2-\xi-\eta)^2}U = 0 \tag{3.12}$$

и граничните условия придобиват вида

$$U(\xi,1) = 0, \quad U(\xi,\xi) = 0.$$

Следователно функцията

$$\begin{aligned}\rho^{1/2}(\xi,\eta)\hat{H}_k^n(\rho(\xi,\eta),t(\xi,\eta)) &= c_{m,2}\sum_{i=0}^{k}\hat{A}_i^k(\eta-\xi)^{1-2\beta} \\ &\times \frac{2^{n-2i-1/2}(1-\xi)^{n-k-i-1-1/(m+2)}(1-\eta)^{n-k-i-1-1/(m+2)}}{(2-\xi-\eta)^{n-2i-1/2}},\end{aligned} \tag{3.13}$$

където $c_{m,2} = ((m+2)/4)^{2/(m+2)}$, е решение на уравнение (3.12) с хомогенни условия върху $\eta = 1$ и $\eta = \xi$. Но нека забележим, че уравнение (3.12) се различава от хомогенното уравнение (3.9) само по това, че вместо числото n имаме $n-1/2$. Следователно функцията $c_{m,2}\tilde{H}_k^n(\xi,\eta)$, където

$$\tilde{H}_k^n(\xi,\eta) := \sum_{i=0}^{k} A_i^k(\eta-\xi)^{1-2\beta}\frac{2^{n-2i}(1-\xi)^{n-1-k-i+\beta}(1-\eta)^{n-1-k-i+\beta}}{(2-\xi-\eta)^{n-2i}}, \quad (3.14)$$

решава уравнение (3.9) с $\tilde{f}(\xi,\eta)\equiv 0$ в дясната страна, защото се различава от функцията (3.13) само по това, че числото n е заменено с $n+1/2$. Правейки обратна трансформация от уравнение (3.9) към (3.1), виждаме, че функциите $V_{k,s}^n(x,t)$ решават уравнение (3.1), при това хомогенните гранични условия върху Σ_0 и $\Sigma_{m,2}$ очевидно са изпълнени. Освен това непосредствена проверка показва, че за $k=0,1,\ldots,[n/2]-2$ вторите производни на функциите $V_{k,s}^n(x,t)$ са непрекъснати в $\bar{\Omega}_0$, а за $k>[n/2]-2$ те имат особеност в началото $O(0,0,0,0)$. $\square$

Теорема 3.5. *Ако $f_n^s \in C^2(\bar{G}_0\backslash S_{m,2})$, Задача $P1_m$ притежава единствено обобщено решение в Ω_m.*

Доказателство. Доказателството е аналогично на това в Попиванов и Schnider [50], използваните методи за доказване на съществуване и единственост на обобщено решение на тримерната задача се обобщават и за четиримерния случай.

Съществуването на решение на Задача $P12_m$ в областта D_ε е доказано в [50], Теорема 4.6 от Апендикса. Ще забележим, че уравнението (3.9) в Задача $P12_m$ е частен случай на уравнение (4.37) и че са налице необходимите условия да приложим Теорема 4.6 към Задача $P12_m$.

Съществуване на решение на Задача $P11_m$. От съществуването на решението $U(\xi,\eta)$ можем да получим и съществуване на обобщено решение на Задача $P11_m$ по аналогичен начин както това е направено в [50]. Необходимо е да се провери, че функцията $u_n^s(\rho,t)=\rho^{-1}U(\xi(\rho,t),\eta(\rho,t))$ е такова решение. Отчитайки гладкостта на функцията $U(\xi,\eta)$ и априорните оценки за нея, които са известни от Теорема 4.6, виждаме, че $u_n^s(\rho,t)$ удовлетворява първите три свойства на Дефиниция 3.3. Остава да покажем, че интегралното тъждество (3.7) е в сила за всички тестови функции $v\in\tilde{V}_\varepsilon$. Нека $V(\xi,\eta)$ е произволна функция от вида $V(\xi,\eta)=\rho(\xi,\eta)v(\rho(\xi,\eta),t(\xi,\eta))$, където $v(\rho,t)\in\tilde{V}_\varepsilon$. Умножаваме двете страни на уравнение (3.9) по $(\eta-\xi)^{2\beta}V(\xi,\eta)$ и интегрираме полученото равенство върху областта $D_\varepsilon^\delta\subset D_\varepsilon$, където

$$D_\varepsilon^\delta := \{(\xi,\eta) : \xi>\delta_1, \xi+\delta_2<\eta<1-\delta_3-\varepsilon\}$$

и $\delta_1,\delta_2,\delta_3>0$ са достатъчно малки, за да бъде смислена дефиницията. Според Теорема 4.6 функциите, влизащи в уравнение (3.9), са непрекъснати в $\bar{D}_\varepsilon^\delta$ и съответно ние можем да интегрираме по части и да получим:

$$\iint_{D_\varepsilon^\delta} (\eta-\xi)^{2\beta}\left\{U_{\xi\eta}+\frac{\beta}{\eta-\xi}(U_\xi-U_\eta)-\frac{n(n+1)}{(2-\xi-\eta)^2}U\right\}V\,d\xi d\eta$$

$$=-\frac{1}{2}\iint_{D_\varepsilon^\delta}(\eta-\xi)^{2\beta}\left\{U_\xi V_\eta+U_\eta V_\xi+\frac{2n(n+1)}{(2-\xi-\eta)^2}UV\right\}d\xi d\eta$$

$$-\frac{1}{2}\int_{\partial D_\varepsilon^\delta}(\eta-\xi)^{2\beta}V(U_\xi\,d\xi-U_\eta\,d\eta)=\iint_{D_\varepsilon^\delta}(\eta-\xi)^{-2\beta}\tilde{f}V\,d\xi d\eta.$$

След преминаване в интегралите по област към променливите ρ, t получаваме

$$\int_{G_\varepsilon^\delta}\left[\rho^2 u^s_{n,t}v_t-t^m\left(\rho^2 u^s_{n,\rho}v_\rho+\rho(u^s_n v)_\rho+u^s_n v+n(n+1)u^s_n v\right)\right]d\rho dt$$

$$-\left(\frac{m+2}{4}\right)^{\frac{2}{m+2}}\int_{\partial D_\varepsilon^\delta}(\eta-\xi)^{2\beta}V(U_\xi\,d\xi-U_\eta\,d\eta)=\int_{G_\varepsilon^\delta}f^s_n v\rho^2\,d\rho dt.$$

Извършваме граничен преход $\delta_1\to 0$, $\delta_2\to 0$, $\delta_3\to 0$ и получаваме тъждеството (3.7). От една страна имаме

$$\int_{\partial D_\varepsilon^\delta}(\eta-\xi)^{2\beta}V(U_\xi\,d\xi-U_\eta\,d\eta)\to 0$$

поради граничните условия, които удовлетворяват $U(\xi,\eta)$ и $V(\xi,\eta)$ и поради априорните оценки на първите производни на $U(\xi,\eta)$ от Теорема 4.6. От друга страна имаме

$$\int_{G_\varepsilon^\delta}t^m[\rho(u^s_n v)_\rho+u^s_n v]\,d\rho dt\to 0$$

след интегриране по части и отчитане на граничните условия, които изпълняват функциите $u^s_n(\rho,t)$ и $v(\rho,t)$.

Единственост на обобщеното решение на Задача $P11_m$. За да докажем единствеността на обобщеното решение, трябва да покажем, че ако са изпълнени първите три условия на Дефиниция 3.3, то от

$$\int_{G_\varepsilon}\left[u^s_{n,t}v_t-t^m\left(u^s_{n,\rho}v_\rho+\frac{n(n+1)}{\rho^2}u^s_n v\right)\right]\rho^2\,d\rho dt=0,\quad\forall v\in\tilde{V}_\varepsilon \tag{3.15}$$

следва, че $u^s_n(\rho,t)\equiv 0$ в G_ε.

Нека $v(\rho,t)$ е функция от множеството $\tilde{V}_\varepsilon$. Въвеждаме функциите

$$w(\rho,t):=\rho^{1/2}u^s_n(\rho,t),\quad \hat{v}(\rho,t):=\rho^{1/2}v(\rho,t).$$

Тогава равенството (3.15) може да се запише като

$$\int_{G_\varepsilon}\left[w_t\hat{v}_t-t^m\left(w_\rho\hat{v}_\rho+\frac{n^2+n+1/4}{\rho^2}w\hat{v}\right)\right]\rho\,d\rho dt=0.$$

Нека забележим, че по Дефиниция 4.7 $w(\rho,t)$ е обобщено решение на задача (4.38) с нулева дясна страна и $d(\rho,t)=(n^2+n+1/4)/\rho^2$, защото функцията $\hat{v}(\rho,t)$ принадлежи на $\tilde{V}_\varepsilon$ и освен това функциите, получени по същия начин като функцията $\hat{v}(\rho,t)$, изпълват цялото множество $\tilde{V}_\varepsilon$. Тогава от Теорема 4.8 заключаваме, че $w(\rho,t)\equiv 0$ в G_ε и съответно $u_n^s(\rho,t)\equiv 0$ в G_ε.

Съществуване на обобщено решение на Задача $P1_m$. Нека за $n=0,1,\dots,l$, $s=1,\dots,2n+1$ функциите $u_n^s(\rho,t)$ са обобщени решения на Задача $P11_m$. Ние твърдим, че функцията

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{l}\sum_{s=1}^{2n+1}u_n^s(|x|,t)Y_n^s(x/|x|) \tag{3.16}$$

е обобщено решение на Задача $P1_m$.

С помощта на свойствата на $u_n^s(\rho,t)$ лесно се проверява, че са изпълнени първите две условия на Дефиниция 3.1. Остава да проверим, че е изпълнено тъждеството (3.4).

Нека $v(x,t)$ е тестова функция от множеството V_ε и е от вида

$$v(x,t)=v_n^s(|x|,t)Y_n^s(x/|x|), \tag{3.17}$$

където $v_n^s\in\tilde{V}_\varepsilon$ за някое $\varepsilon\in(0,1)$. След преминаване към сферични координати от (3.4) стигаме до

$$\int\limits_{supp\,v}\left[u_tv_t-t^m\left(u_\rho v_\rho+\frac{1}{\rho^2}u_\theta v_\theta+\frac{1}{\rho^2\sin^2\theta}u_\varphi v_\varphi\right)\right]\rho^2\sin\theta\,d\rho d\theta d\varphi dt$$
$$=\int\limits_{supp\,v}fv\rho^2\sin\theta\,d\rho d\theta d\varphi dt. \tag{3.18}$$

Полагаме в тъждеството (3.18)

$$u(\rho,\theta,\varphi,t)=\sum_{n=0}^{l}\sum_{s=1}^{2n+1}u_n^s(\rho,t)Y_n^s(\theta,\varphi)$$

и

$$v(\rho,\theta,\varphi,t)=v_n^s(\rho,t)Y_n^s(\theta,\varphi).$$

Припомняйки си уравнението (3.5) и използвайки факта, че $Y_n^s|_{\varphi=0}=Y_n^s|_{\varphi=2\pi}$ ([35]), за $n=1,\dots,l,\quad s=1,\dots,2n+1$ можем да пресметнем

$$\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\left(Y_{n,\theta}^sY_{\hat{n},\theta}^{\hat{s}}+\frac{1}{\sin^2\theta}Y_{n,\varphi}^sY_{\hat{n},\varphi}^{\hat{s}}\right)\sin\theta\,d\varphi d\theta$$
$$=-\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\left(Y_{n,\theta\theta}^s+\operatorname{cotg}\theta Y_{n,\theta}^s+\frac{1}{\sin^2\theta}Y_{n,\varphi}^s\right)Y_{\hat{n}}^{\hat{s}}\sin\theta\,d\varphi d\theta$$
$$=n(n+1)\int_0^\pi\int_0^{2\pi}Y_n^sY_{\hat{n}}^{\hat{s}}\sin\theta\,d\varphi d\theta.$$

Тогава отчитайки това равенство и ортогоналността на функциите Y_n^s в $L_2(S^2)$, получаваме

$$\sum_{n=0}^{l}\sum_{s=1}^{2n+1}\int_{G_\varepsilon}\left[u_{n,t}^sv_{n,t}^s-t^m\left(u_{n,\rho}^sv_{n,\rho}^s+\frac{n(n+1)}{\rho^2}u_n^sv_n^s\right)\right]\rho^2\,d\rho dt$$
$$=\sum_{n=0}^{l}\sum_{s=1}^{2n+1}\int_{G_\varepsilon}f_n^sv_n^s\rho^2\,d\rho dt.$$

Това тъждество е изпълнено поради условие 4) на Дефиниция 3.3 и факта, че $v_n^s \in \tilde{V}_\varepsilon, \quad n = 1, \dots, l, \quad s = 1, \dots, 2n+1$.

Проверихме, че интегралното тъждество (3.4) е изпълнено за тестовите функции $v \in V_\varepsilon$ от вида (3.17). Интегралното тъждество е изпълнено и за всички тестови функции от множеството V_ε, защото линейните комбинации на функциите от вида (3.17) са гъсти във V_ε. Това следва от факта, че тестовите функции $v \in V_\varepsilon$ могат да се разлагат в ред на Фурие по сферичните функции Y_n^s.

Единственост на решението на Задача $P1_m$. Трябва да покажем, че само функцията $u \equiv 0$ може да удовлетворява едновременно първите две условия на Дефиниция 3.1 и тъждеството

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_{G_0} \left[u_t v_t - t^m \left(u_\rho v_\rho + \frac{1}{\rho^2} u_\theta v_\theta + \frac{1}{\rho^2 \sin^2\theta} u_\varphi v_\varphi \right) \right] \rho^2 \sin\theta \, d\rho dt d\varphi d\theta = 0 \quad (3.19)$$

за всички тестови функции $v(\rho, \theta, \varphi, t)$. Достатъчно е да проверим това с тестовите функции от вида

$$v(\rho, \theta, \varphi, t) = w(\rho, t) Y_n^s(\theta, \varphi), \quad (3.20)$$

където $w \in \tilde{V}_\varepsilon$ за някое $\varepsilon \in (0, 1)$.

Нека в (3.19) функцията $u(\rho, \theta, \varphi, t)$ е разложена в ред на Фурие

$$u(\rho, \theta, \varphi, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{2n+1} u_n^s(\rho, t) Y_n^s(\theta, \varphi). \quad (3.21)$$

Ще покажем, че фуриеровите коефициенти $u_n^s(\rho, t)$ в това развитие са тъждествено равни на нула.

В (3.19) полагаме (3.20) и (3.21), за да получим за $n = 0, 1, 2, \dots, \quad s = 1, \dots, 2n+1$

$$\int_{G_\varepsilon} \left[u_{n,t}^s w_t - t^m \left(u_{n,\rho}^s w_\rho + \frac{n(n+1)}{\rho^2} u_n^s w \right) \right] \rho^2 \, d\rho dt = 0.$$

Тъй като функциията $w \in \tilde{V}_\varepsilon$ и числото $\varepsilon \in (0, 1)$ са избрани произволно, стигаме до извода, че за всяко $\varepsilon \in (0, 1)$ $u_n^s(\rho, t)$ е обобщено решение на хомогенната Задача $P11_m$ и следователно $u_n^s(\rho, t) \equiv 0$ в G_0, съответно и $u(x, t) \equiv 0$ в Ω_0. □

Преди да продължим нататък, ще покажем, че решението $U(\xi, \eta)$ на Задача $P12_m$, чието съществуване и гладкост в D_ε са намерени ([50], Теорема 4.6 от Апендикса), може да се продължи в по-широката област $D_\varepsilon^{(1)}$ със запазване на същата гладкост. Това ни е необходимо, тъй като по-нататък ще изследваме асимптотичното поведение на $U(\xi, \eta)$ върху $\eta = 1$.

Лема 3.6. *Ако $f_n^s \in C^2(\bar{G}_\varepsilon)$, съществува функция $U(\xi, \eta)$, която решава диференциалното уравнение* (3.9) *в $D_\varepsilon^{(1)}$, удовлетворява граничните условия* (3.10) *и притежава следните свойства:*

$$U \in C(\bar{D}_\varepsilon^{(1)}) \cap C^1(D_\varepsilon^{(1)} \cup \{\eta = 1, \xi \in (0, 1-\varepsilon)\}),$$
$$U_{\xi\eta} \in C(D_\varepsilon^{(1)} \cup \{\eta = 1, \xi \in (0, 1-\varepsilon)\}), \quad (3.22)$$

освен това съществува константа $c(\varepsilon) > 0$*, такава че*

$$|U(\xi, \eta)| \leq c(\varepsilon)(\eta - \xi)^{1-2\beta} \quad \textit{в} \quad \bar{D}_\varepsilon^{(1)}, \quad (3.23)$$

$$\sup_{D_\varepsilon^{(1)}} \{\xi^{2\beta}|U_\xi(\xi, \eta)|, |U_\eta(\xi, \eta)|\} \leq c(\varepsilon)(\eta - \xi)^{-2\beta}. \quad (3.24)$$

Доказателство. Първо построяваме решение в $D_{\varepsilon/2}$. Това е възможно, тъй като $\varepsilon \in (0, 1)$ е произволно, при това свойствата на $U(\xi, \eta)$ от Теорема 4.6 очевидно са в сила и в $D_{\varepsilon/2}$. След това решаваме уравнението (3.9) в правоъгълника $D_\varepsilon^{(1)} \backslash (D_{\varepsilon/2} \cap D_\varepsilon^{(1)})$ с хомогенно гранично условие върху $\xi = 0$ и условие върху $\eta = \varepsilon/2$, което определяме от познатото вече решение в $D_{\varepsilon/2}$. Получената задача е задача на Гурса за хиперболично уравнение без израждане. Съгласно общата теория на тези уравнения, съществува единствено решение, което е търсеното продължение на $U(\xi, \eta)$ с желаните свойства. □

3.4. **Интегрална формула за представяне на решението на Задача** $P12_m$**.** За да изследваме поведението на решението на задачата, ще представим функцията $U(\xi, \eta)$ в явен вид чрез интегрална формула.

За целта избираме точка $(\xi_0, \eta_0) \in D_\varepsilon^{(1)} \cup \{\eta = 1, \xi \in (0, 1-\varepsilon)\}$ и въвеждаме функцията:

$$\Phi(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) =$$
$$\begin{cases} \left(\dfrac{\eta - \xi}{\eta_0 - \xi_0}\right)^\beta F_3(\beta, n+1, 1-\beta, -n, 1; X, Y), & \eta > \xi_0, \\ k_1 \left(\dfrac{\eta - \xi}{\eta_0 - \xi_0}\right)^\beta X^{\beta-1} \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{(n+1)_i(-n)_i}{(\beta)_i\, i!} Y^i \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(1-\beta-i)_j(1-\beta)_j}{(2-2\beta)_j\, j!} X^{-j}, & \eta < \xi_0 \end{cases}$$
$$:= \begin{cases} \Phi^+(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0), & \eta > \xi_0, \\ \Phi^-(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0), & \eta < \xi_0, \end{cases} \quad (3.25)$$

където

$$X = \frac{(\eta_0 - \eta)(\xi_0 - \xi)}{(\eta_0 - \xi_0)(\eta - \xi)}, \quad (3.26)$$

$$Y = \frac{-(\eta_0 - \eta)(\xi_0 - \xi)}{(2 - \xi_0 - \eta_0)(2 - \xi - \eta)}, \quad (3.27)$$

$$k_1 = \frac{\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(\beta)\Gamma(2-2\beta)} \quad (3.28)$$

и $F_3(a_1, a_2, b_1, b_2, c; X, Y)$ е двоен хипергеометричен ред. В Апендикса са събрани необходимите ни сведения за хипергеометрични и двойни хипергеометрични редове, в частност редовете $F_3(a_1, a_2, b_1, b_2, c; X, Y)$ ($a_1, a_2, b_1, b_2, c \in \mathbb{C}$, $c \neq 0, -1, -2, \ldots$) са дефинирани чрез формула (4.22), съответно в нашия случай имаме:

$$F_3(\beta, n+1, 1-\beta, -n, 1; X, Y) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\beta)_j(1-\beta)_j(n+1)_i(-n)_i}{(i+j)!\, i!\, j!} X^j Y^i. \quad (3.29)$$

Известно е ([25, 63]), че радиусът на сходимост на редовете $F_3(a_1, a_2, b_1, b_2, c; X, Y)$ е $|X| < 1, |Y| < 1$, но в нашия частен случай сумата в реда (3.29) по индекса i е крайна, затова за равномерната сходимост на този ред е достатъчно само условието $|X| < 1$, $|Y| < \infty$, защото (3.29) се свежда до крайна сума, съдържаща хипергеометрични редове с аргумент X, които са равномерно сходящи при $|X| < 1$.

В отворения правоъгълник

$$R := \{(\xi, \eta) : 0 < \xi < \xi_0, \xi_0 < \eta < \eta_0\}$$

е в сила $|X| < 1$, $|Y| < \infty$ като $\lim_{\eta \to \xi_0} X = 1$, което означава, че $\Phi^+(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0)$ е добре дефинирана в R и е възможно неограничено да расте при $\eta \to \xi_0$. Съществено за нашите изследвания е, че производните от първи и по-висок ред на $\Phi^+(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0)$ по ξ и по η също се свеждат до крайни суми, съдържащи хипергеометрични редове с аргумент X, умножени по безкрайно гладки в R функции, което следва от правилото за диференциране на хипергеометрични функции (формула (4.9) в Апендикса). От тук лесно се проверява, че всички производни на $\Phi^+(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0)$ са непрекъснати в R и е възможно неограничено да растат при $\eta \to \xi_0$.

В отворения триъгълник

$$T := \{(\xi, \eta) : 0 < \xi < \eta < \xi_0\}$$

е в сила $|X^{-1}| < 1$, $|Y| < \infty$ като $\lim_{\eta \to \xi_0} X^{-1} = 1$ и съответно $\Phi^-(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0)$ е добре дефинирана в T функция и евентуално неограничено растяща при $\eta \to \xi_0$. Съответно, производните на $\Phi^-(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0)$ по ξ и по η са непрекъснати в T и е възможно неограничено да растат при $\eta \to \xi_0$, защото се свеждат до крайни суми, съдържащи хипергеометрични редове с аргумент X^{-1}, умножени по безкрайно гладки в T функции.

Непосредствено се вижда, че върху част от границите на R и T производните на $\Phi(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0)$ също са непрекъснати и за нашите цели в по-нататъшното изложение ще ни е достатъчно да знаем, че

$$\Phi \in C^2(\bar{R} \cup \bar{T} \backslash \{(\xi, \eta) : \eta = \xi_0\}). \tag{3.30}$$

Функцията $\Phi(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0)$ е особено важна за нашите изследвания, тъй като всъщност представлява функция на Риман-Адамар за Задача $P12_m$ и съответно решението $U(\xi, \eta)$ може да се изрази в явен вид чрез тази функция. По-точно, $\Phi(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0)$ притежава следните свойства, чиято проверка ние извършваме в Апендикса, Лема 4.12:

1) $\Phi(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0)$ е решение на спрегнатото хомогенно диференциално уравнение в $R \cup T$:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\beta \Phi}{\eta - \xi}\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\beta \Phi}{\eta - \xi}\right) - \frac{n(n+1)}{(2 - \xi - \eta)^2}\Phi = 0; \tag{3.31}$$

2) $\Phi(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0)$ удовлетворява следните гранични условия:

$$\Phi(\xi_0, \eta_0; \xi_0, \eta_0) = 1 \tag{3.32}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\beta}{\eta - \xi}\right)\Phi^+(\xi, \eta_0; \xi_0, \eta_0) = 0, \quad 0 < \xi < \xi_0, \tag{3.33}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \eta} - \frac{\beta}{\eta - \xi}\right)\Phi^+(\xi_0, \eta; \xi_0, \eta_0) = 0, \quad \xi_0 < \eta < \eta_0, \tag{3.34}$$

$$\lim_{\eta\to\xi}(\eta-\xi)^{-2\beta}\Phi^-(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)=0, \quad (\xi,\eta)\in T, \tag{3.35}$$

$$\frac{\partial[[\Phi]]}{\partial\xi}+\beta\frac{[[\Phi]]}{\eta-\xi}=0, \quad 0<\xi<\xi_0, \tag{3.36}$$

където

$$[[\Phi]]:=\lim_{\epsilon'\to+0}\{\Phi^+(\xi,\xi_0+\epsilon';\xi_0,\eta_0)-\Phi^-(\xi,\xi_0-\epsilon';\xi_0,\eta_0)\}.$$

Построяването на такава функция на Риман-Адамар е мотивирано от търсенето на отговор на Въпрос 2 (стр. 7), който бе поставен от научния ръководител в качеството на задание в дисертацията. Година след получаването на резултатите, съдържащи се в дисертацията, установихме, че функции на Риман-Адамар за много широк кръг от уравнения са построени от руски математематици от Самарския Университет, но не успяхме да намерим в библиотеките и в интернет подходяща литература по тази темата. По-късно, на конференцията "Differential Equations and their Applications" в Белгород, Русия 2013, се сдобихме със справочника на Волкодавов, Захаров [69] (не съдържащ доказателства), където е дадена функцията на Риман-Адамар за гранична задача с уравнение

$$(y+x)(y-x)V_{xy}-q(y-x)(V_x+V_y)-p(y+x)(V_x-V_y)=0. \tag{3.37}$$

Това уравнение се свежда до уравнение (3.9) с нулева дясна страна и $\beta=-p$, $n=q$, след като разделим уравнение (3.37) на $(y+x)(y-x)$, въведем новата неизвестна функция $U=V(y+x)^{-q}$ и направим смяната $\xi=1-y$, $\eta=1-x$.

Формула (3.25) е в съответствие с тази, съдържаща се в справочника [69], за функцията на Риман-Адамар за граничната задача с уравнение (3.37). До настоящия момент не ни е известно кой пръв е построил функцията на Риман-Адамар за задача на Дарбу-Гурса с уравнение (3.9) или уравнение, което се свежда до (3.9).

Теорема 3.7. *Ако $f_n^s\in C^2(\bar G_\varepsilon)$, решението на Задача $P12_m$ в точката $(\xi_0,\eta_0)\in D_\varepsilon^{(1)}\cup\{\eta=1,\xi\in(0,1-\varepsilon)\}$ може да се представи в следния вид:*

$$U(\xi_0,\eta_0)=\iint\limits_{R\cup T}(\eta-\xi)^{-4\beta}\tilde f(\xi,\eta)\Phi(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)\,d\xi d\eta. \tag{3.38}$$

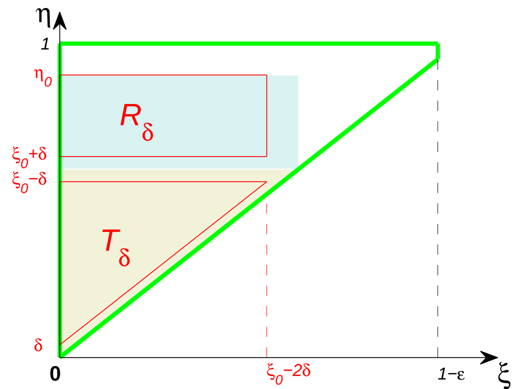
Доказателство. Нека за някое достатъчно малко число $\delta>0$ дефинираме $R_\delta\subset R$ и $T_\delta\subset T$:

$$R_\delta:=\{(\xi,\eta):0<\xi<\xi_0-2\delta,\xi_0+\delta<\eta<\eta_0\},$$

$$T_\delta:=\{(\xi,\eta):\xi>0,\xi+\delta<\eta<\xi_0-\delta\}.$$

Умножаваме двете страни на уравнение (3.9) по $\Phi(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)$ и интегрираме полученото тъждество по $R_\delta\cup T_\delta$:

$$\iint_{R_\delta\cup T_\delta}\left\{U_{\xi\eta}+\frac{\beta}{\eta-\xi}\,(U_\xi-U_\eta)-\frac{n(n+1)}{(2-\xi-\eta)^2}U\right\}\Phi\,d\xi d\eta$$
$$=\iint_{R_\delta\cup T_\delta}(\eta-\xi)^{-4\beta}\tilde f(\xi,\eta)\Phi\,d\xi d\eta. \tag{3.39}$$



Фигура 4. R_δ и T_δ.

Гладкостта на функцията $U(\xi,\eta)$, както се вижда от (3.22), а също така и гладкостта (3.30) на функцията $\Phi(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)$, ни позволяват да интегрираме по части и с помощта на (3.31) да получим:

$$\iint_{R_\delta\cup T_\delta}\left\{U_{\xi\eta}+\frac{\beta}{\eta-\xi}\left(U_\xi-U_\eta\right)-\frac{n(n+1)}{(2-\xi-\eta)^2}U\right\}\Phi\, d\xi d\eta=$$

$$\iint_{R_\delta\cup T_\delta}\left\{\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi\partial\eta}-\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\beta\Phi}{\eta-\xi}\right)+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\beta\Phi}{\eta-\xi}\right)-\frac{n(n+1)}{(2-\xi-\eta)^2}\Phi\right\}U\, d\xi d\eta$$
$$+I_1+I_2+I_3+I_4+I_5+I_6+I_7+I_8$$
$$=I_1+I_2+I_3+I_4+I_5+I_6+I_7+I_8,$$

където

$$I_1:=\int_{\xi_0+\delta}^{\eta_0}\left\{U_\eta+\frac{\beta}{\eta-\xi}U\right\}(\xi_0-2\delta,\eta)\Phi(\xi_0-2\delta,\eta;\xi_0,\eta_0)\, d\eta$$
$$=\int_{\xi_0+\delta}^{\eta_0}\left\{-\Phi_\eta+\frac{\beta}{\eta-\xi}\Phi\right\}(\xi_0-2\delta,\eta;\xi_0,\eta_0)U(\xi_0-2\delta,\eta)\, d\eta$$
$$+U(\xi_0-2\delta,\eta_0)\Phi(\xi_0-2\delta,\eta_0;\xi_0,\eta_0)-U(\xi_0-2\delta,\xi_0+\delta)\Phi(\xi_0-2\delta,\xi_0+\delta;\xi_0,\eta_0),$$

$$I_2:=-\int_0^{\xi_0-2\delta}\left\{\Phi_\xi+\frac{\beta}{\eta-\xi}\Phi\right\}(\xi,\eta_0;\xi_0,\eta_0)U(\xi,\eta_0)\, d\xi,$$

$$I_3:=-\int_{\xi_0+\delta}^{\eta_0}\left\{U_\eta+\frac{\beta}{\eta-\xi}U\right\}(0,\eta)\Phi(0,\eta;\xi_0,\eta_0)\, d\eta,$$

$$I_4:=\int_0^{\xi_0-2\delta}\left\{\Phi_\xi+\frac{\beta}{\eta-\xi}\Phi\right\}(\xi,\xi_0+\delta;\xi_0,\eta_0)U(\xi,\xi_0+\delta)\, d\xi,$$

$$I_5:=-\int_0^{\xi_0-2\delta}\left\{\Phi_\xi+\frac{\beta}{\eta-\xi}\Phi\right\}(\xi,\xi_0-\delta;\xi_0,\eta_0)U(\xi,\xi_0-\delta)\, d\xi,$$

$$I_6 := -\int_{\delta}^{\xi_0-\delta} \left\{ U_\eta + \frac{\beta}{\eta-\xi} U \right\} (0,\eta)\Phi(0,\eta;\xi_0,\eta_0)\,d\eta,$$

$$I_7 := \int_0^{\xi_0-2\delta} \left\{ \Phi_\xi + \frac{\beta}{\eta-\xi} \Phi \right\} (\xi,\xi+\delta;\xi_0,\eta_0) U(\xi,\xi+\delta)\,d\xi,$$

$$I_8 := \int_0^{\xi_0-2\delta} \left\{ U_\eta + \frac{\beta}{\eta-\xi} U \right\} (\xi,\xi+\delta)\Phi(\xi,\xi+\delta;\xi_0,\eta_0)\,d\xi.$$

Извършваме граничен преход $\delta \to 0$. Използвайки свойствата (3.32)–(3.34), (3.36) на функцията $\Phi(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)$ и граничните условия (3.10), получаваме

$$I_1 = U(\xi_0,\eta_0),$$

$$I_2 = 0, \quad I_3 = 0, \quad I_4 + I_5 = 0, \quad I_6 = 0.$$

Накрая, за да пресметнем I_7 и I_8, записваме $\Phi^-(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)$ в следния вид

$$\begin{aligned} &\Phi^-(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0) \\ &= k_1 \frac{(\eta-\xi)(\eta_0-\xi_0)^{1-2\beta}}{(\xi_0-\xi)^{1-\beta}(\eta_0-\eta)^{1-\beta}} \sum_{i=0}^{n} \frac{(n+1)_i(-n)_i}{(\beta)_i\, i!} Y^i F(1-\beta-i, 1-\beta, 2-2\beta; X^{-1}), \end{aligned} \tag{3.40}$$

където $F(1-\beta-i,1-\beta,2-2\beta;X^{-1})$ е хипергеометрична функция. Сведения за хипергеометричните функции са събрани в Апендикса на стр. 58. Тогава според формулите (4.12) и (4.14) можем да изберем число $\alpha : 0 < \alpha < 1-2\beta$, такова че върху $\eta = \xi + \delta$ да е изпълнено

$$\begin{aligned} &|F(1-\beta-i,1-\beta,2-2\beta;X^{-1})|(\xi,\xi+\delta;\xi_0,\eta_0) \\ &\qquad \le C(\alpha)\frac{(\eta_0-\xi-\delta)^\alpha(\xi_0-\xi)^\alpha}{(\eta_0-\xi)^\alpha(\xi_0-\xi-\delta)^\alpha} \le C(\alpha)\frac{1}{\delta^\alpha}, \end{aligned} \tag{3.41}$$

където $C(\alpha)$ е положителна зависеща от α константа. Също така от формулите (4.9) и (4.11) можем да получим оценката

$$\begin{aligned} &\left| \frac{\partial}{\partial\xi} F(1-\beta-i,1-\beta,2-2\beta;X^{-1}) \right| (\xi,\xi+\delta;\xi_0,\eta_0) \\ &\qquad = \frac{(\xi_0-\eta)(\eta_0-\xi_0)}{(\eta_0-\xi-\delta)(\xi_0-\xi)^2} \left| \frac{(1-\beta-i)(1-\beta)}{2-2\beta} \right| \\ &\qquad \times |F(2-\beta-i,2-\beta,3-2\beta;X^{-1})(\xi,\xi+\delta;\xi_0,\eta_0)| \le \tilde{C}\frac{1}{\delta}, \end{aligned} \tag{3.42}$$

където $\tilde{C}$ е положителна константа. Тогава, отчитайки получените оценки (3.41) и (3.42), от израза (3.40) можем да получим неравенството

$$\sup_{\eta=\xi+\delta} \left\{ \left| \frac{\Phi^-(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)}{\eta-\xi} \right|, \left| \frac{\partial}{\partial\xi}\Phi^-(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0) \right| \right\} \le C_1(\alpha)\frac{1}{\delta^\alpha},$$

където $C_1(\alpha)$ е положителна константа, зависеща от α. От друга страна съгласно (3.23) и (3.24) имаме

$$|U(\xi,\xi+\delta)| \le c(\varepsilon)\delta^{1-2\beta}, \quad |U_\eta(\xi,\xi+\delta)| \le c(\varepsilon)\delta^{-2\beta}.$$

Следователно $|I_7|, |I_8| \le C(\alpha,\varepsilon)\delta^{1-2\beta-\alpha}, \quad C(\alpha,\varepsilon) > 0$ и след извършване на граничния преход $\delta \to 0$ стигаме до

$$I_7 = 0, \quad I_8 = 0.$$

$\square$

3.5. **Асимптотично поведение на решението на Задача $P12_m$.** Нашата цел е, използвайки интегралната формула (3.38) за представяне на функцията $U(\xi,\eta)$, да изучим асимптотичното поведение на сингулярностите на решението на Задача $P12_m$, а от там – и на решението $u(x,t)$ на Задача $P1_m$. Ще покажем, че редът на сингулярност на функцията $U(\xi,\eta)$ зависи от коефициентите:

$$\tilde{\mu}^n_{k,s} := \int_{D_0} (\eta-\xi)^{-2\beta} \tilde{H}^n_k(\xi,\eta) \tilde{f}(\xi,\eta)\, d\xi d\eta, \tag{3.43}$$

където

$$D_0 := \{(\xi,\eta) : 0 < \xi < \eta < 1\},$$

а редът на сингулярност на решението $u(x,t)$ – от коефициентите:

$$\mu^n_{k,s} := \int_{\Omega_m} V^n_{k,s}(x,t) f(x,t)\, dxdt. \tag{3.44}$$

Напомняме, че функциите $V^n_{k,s}(x,t)$ са дефинирани в Теорема 3.4 и за $k = 0,1,\dots,[n/2]-2$ са класически решения на хомогенната спрегната Задача $P1^*_m$, а функциите $\tilde{H}^n_k(\xi,\eta)$ са дефинирани чрез формула (3.14) и за $k=0,1,\dots,[n/2]-1$ решават хомогенното уравнение (3.9) в D_0 с хомогенни гранични условия върху $\eta=1$ и $\xi=\eta$. В по-нататъшните ни разгледания ще участват коефициентите $\tilde{\mu}^n_{k,s}$ и $\mu^n_{k,s}$ за $k=0,1,\dots,[n/2]$, като при $k=[n/2]$ функциите $\tilde{H}^n_k(\xi,\eta)$ и $V^n_{k,s}(x,t)$ имат особености, но интегралите в (3.43) и (3.44) съществуват.

За постигането на нашата цел първо ще изведем асимптотична формула за поведението на $U(\xi,1)$, като ключовата стъпка преди това е да преработим функцията $\Phi^-(\xi,\eta;\xi_0,1)$ в подходящ вид.

Теорема 3.8. *За функцията*

$$\Phi(\xi,\eta;\xi_0,1) = \begin{cases} \Phi^+(\xi,\eta;\xi_0,1) & \textit{при} \quad \eta > \xi_0, \\ \Phi^-(\xi,\eta;\xi_0,1) & \textit{при} \quad \eta < \xi_0, \end{cases}$$

е изпълнено:

1) функцията $\Phi^-(\xi,\eta;\xi_0,1)$ може да се представи в следния вид:

$$\Phi^-(\xi,\eta;\xi_0,1) = \Phi^-_1(\xi,\eta;\xi_0) + \Phi^-_2(\xi,\eta;\xi_0), \tag{3.45}$$

където

$$\Phi^-_1(\xi,\eta;\xi_0) = (\eta-\xi)^{2\beta} \sum_{k=0}^{[n/2]} c^n_k (1-\xi_0)^{-n+1-2\beta+2k} \tilde{H}^n_k(\xi,\eta) \tag{3.46}$$

и c^n_k са ненулеви константи, а функцията $\Phi^-_2(\xi,\eta;\xi_0)$ удовлетворява следното неравенство

$$|\Phi^-_2(\xi,\eta;\xi_0)| \le c_1 \frac{(\eta-\xi)(1-\xi_0)^{1-2\beta}}{(\xi_0-\xi)^{1-\beta}(1-\eta)^{1-\beta}} F\left(1-\beta, 1-\beta, 2-2\beta; \frac{(1-\xi_0)(\eta-\xi)}{(\xi_0-\xi)(1-\eta)}\right),$$
$$c_1 = const > 0 \tag{3.47}$$

в областта T;

2) за функцията $\Phi^+(\xi,\eta;\xi_0,1)$ е в сила следната оценка:

$$|\Phi^+(\xi,\eta;\xi_0,1)| \le c_2 \left(\frac{\eta-\xi}{1-\xi_0}\right)^\beta F\left(\beta, 1-\beta, 1; \frac{(\xi_0-\xi)(1-\eta)}{(1-\xi_0)(\eta-\xi)}\right), \quad c_2 = const > 0 \tag{3.48}$$

в областта R.

Доказателство. Полагаме $\eta_0 = 1$ във формулите (3.25)–(3.27) и за $\Phi^-(\xi,\eta;\xi_0,1)$ получаваме израза

$$\Phi^-(\xi,\eta;\xi_0,1) = k_1 \frac{(\eta-\xi)(1-\xi_0)^{1-2\beta}}{(\xi_0-\xi)^{1-\beta}(1-\eta)^{1-\beta}} \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(n+1)_i(-n)_i}{(\beta)_i\, i!} \frac{(1-\beta-i)_j(1-\beta)_j}{(2-2\beta)_j\, j!} \times \frac{(-1)^i(\xi_0-\xi)^{i-j}(1-\eta)^{i-j}(\eta-\xi)^j}{(2-\xi-\eta)^i(1-\xi_0)^{i-j}}.$$

Като използваме, че в T

$$(\xi_0-\xi)^{i-j+\beta-1} = (1-\xi)^{i-j+\beta-1} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(j-i+1-\beta)_q}{q!} \left(\frac{1-\xi_0}{1-\xi}\right)^q,$$

ще разделим функцията $\Phi^-(\xi,\eta;\xi_0,1)$ на три съставляващи:

$$\Phi^-(\xi,\eta;\xi_0,1) = \Phi_1^-(\xi,\eta;\xi_0) + \Phi_{2,1}^-(\xi,\eta;\xi_0) + \Phi_{2,2}^-(\xi,\eta;\xi_0),$$

където

$$\Phi_1^-(\xi,\eta;\xi_0) := k_1 \frac{(\eta-\xi)(1-\xi_0)^{1-2\beta}}{(1-\xi)^{1-\beta}(1-\eta)^{1-\beta}} \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}\sum_{q=0}^{i-j} \frac{(n+1)_i(-n)_i}{(\beta)_i\, i!} \frac{(1-\beta-i)_j(1-\beta)_j}{(2-2\beta)_j\, j!} \times \frac{(j-i+1-\beta)_q}{q!} \frac{(-1)^i(1-\xi)^{i-j-q}(1-\eta)^{i-j}(\eta-\xi)^j}{(2-\xi-\eta)^i(1-\xi_0)^{i-j-q}}, \tag{3.49}$$

$$\Phi_{2,1}^-(\xi,\eta;\xi_0) := k_1 \frac{(\eta-\xi)(1-\xi_0)^{1-2\beta}}{(1-\xi)^{1-\beta}(1-\eta)^{1-\beta}} \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}\sum_{q=i-j+1}^{\infty} \frac{(n+1)_i(-n)_i}{(\beta)_i\, i!} \frac{(1-\beta-i)_j(1-\beta)_j}{(2-2\beta)_j\, j!} \times \frac{(j-i+1-\beta)_q}{q!} \frac{(-1)^i(1-\xi)^{i-j-q}(1-\eta)^{i-j}(\eta-\xi)^j}{(2-\xi-\eta)^i(1-\xi_0)^{i-j-q}}, \tag{3.50}$$

$$\Phi_{2,2}^-(\xi,\eta;\xi_0) := k_1 \frac{(\eta-\xi)(1-\xi_0)^{1-2\beta}}{(\xi_0-\xi)^{1-\beta}(1-\eta)^{1-\beta}} \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i+1}^{\infty} \frac{(n+1)_i(-n)_i}{(\beta)_i\, i!} \frac{(1-\beta-i)_j(1-\beta)_j}{(2-2\beta)_j\, j!} \times \frac{(-1)^i(\xi_0-\xi)^{i-j}(1-\eta)^{i-j}(\eta-\xi)^j}{(2-\xi-\eta)^i(1-\xi_0)^{i-j}}. \tag{3.51}$$

Изследване на функцията $\Phi_1^-(\xi,\eta;\xi_0)$. Нашата цел е да развием тази функция по отрицателни степени на $1-\xi_0$ и вместо индекса i въвеждаме индекса $p = i - j - q$:

$$\Phi_1^-(\xi,\eta;\xi_0) = k_1 \sum_{p=0}^{n} (\eta-\xi) \frac{(-1)^p (1-\xi)^{p-1+\beta}(1-\eta)^{p-1+\beta}}{(2-\xi-\eta)^p (1-\xi_0)^{p-1+2\beta}}$$
$$\times \sum_{j=0}^{n-p} \sum_{q=0}^{n-p-j} \frac{(n+1)_{p+j+q}(-n)_{p+j+q}}{(\beta)_{p+j+q}\,(p+j+q)!} \frac{(1-\beta-p-q-j)_j (1-\beta)_j}{(2-2\beta)_j\, j!} \frac{(1-\beta-p-q)_q}{q!}$$
$$\times \frac{(-1)^j (\eta-\xi)^j}{(2-\xi-\eta)^j} \frac{(-1)^q (1-\eta)^q}{(2-\xi-\eta)^q}.$$

Използвайки правилата (4.3) и (4.4), получаваме

$$\Phi_1^-(\xi,\eta;\xi_0) = k_1 \sum_{p=0}^{n} \frac{(n+1)_p(-n)_p}{(\beta)_p\, p!} (\eta-\xi) \frac{(-1)^p (1-\xi)^{p-1+\beta}(1-\eta)^{p-1+\beta}}{(2-\xi-\eta)^p (1-\xi_0)^{p-1+2\beta}}$$
$$\times \sum_{j=0}^{n-p} \sum_{q=0}^{n-p-j} \frac{(1-\beta)_j}{(2-2\beta)_j\, j!} \frac{(n+p+1)_j (p-n)_j}{(p+1)_j} \frac{(n+p+j+1)_q (p-n+j)_q}{(p+j+1)_q\, q!}$$
$$\times \frac{(\eta-\xi)^j}{(2-\xi-\eta)^j} \frac{(1-\eta)^q}{(2-\xi-\eta)^q}$$

или

$$\Phi_1^-(\xi,\eta;\xi_0) = k_1 \sum_{p=0}^{n} \frac{(n+1)_p(-n)_p}{(\beta)_p\, p!} (\eta-\xi) \frac{(-1)^p (1-\xi)^{p-1+\beta}(1-\eta)^{p-1+\beta}}{(2-\xi-\eta)^p (1-\xi_0)^{p-1+2\beta}}$$
$$\times Q(\xi,\eta), \quad (3.52)$$

където $Q(\xi,\eta)$ е функцията (4.39) от Лема 4.10 в Апендикса. Заместваме в последното равенство резултата (4.40)–(4.41) от лемата и виждаме, че членовете на сумата, съответстващи на индекси p с различна четност от числото n, са равни на нула. Затова е целесъобразно да въведем новия индекс $k = (n-p)/2$:

$$\Phi_1^-(\xi,\eta;\xi_0) = k_1 \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^n \sqrt{\pi}\,(n+1)_{n-2k}(-n)_{n-2k}}{\Gamma(n-k+1)\Gamma(-k+1/2)(\beta)_{n-2k}}$$
$$\times (\eta-\xi) \frac{(1-\xi)^{n-2k-1+\beta}(1-\eta)^{n-2k-1+\beta}}{(2-\xi-\eta)^{n-2k}(1-\xi_0)^{n-2k-1+2\beta}}$$
$$\times F\left(n-k+\frac{1}{2}, -k, \frac{3}{2}-\beta; \left(\frac{\eta-\xi}{2-\xi-\eta}\right)^2\right). \quad (3.53)$$

И накрая в израза (3.53) преобразуваме хипергеометричната функция по формула (4.15):

$$F\left(n-k+\frac{1}{2},-k,\frac{3}{2}-\beta;\left(\frac{\eta-\xi}{2-\xi-\eta}\right)^2\right)=\frac{(-1)^k(1/2-n)_k}{(3/2-\beta)_k}$$
$$\times\left(\frac{4(1-\xi)(1-\eta)}{(2-\xi-\eta)^2}\right)^k F\left(k-n+1-\beta,-k,-n+\frac{1}{2};\frac{(2-\xi-\eta)^2}{4(1-\xi)(1-\eta)}\right)$$
$$=\frac{(-1)^k(1/2-n)_k}{(3/2-\beta)_k}\sum_{i=0}^{k}A_i^k\left(\frac{4(1-\xi)(1-\eta)}{(2-\xi-\eta)^2}\right)^{k-i},$$

където A_i^k са коефициентите (3.11). Заместваме последното равенство в (3.53) и намираме

$$\Phi_1^-(\xi,\eta;\xi_0)=(\eta-\xi)^{2\beta}\sum_{k=0}^{[n/2]}c_k^n(1-\xi_0)^{-n+1-2\beta+2k}$$
$$\times\sum_{i=0}^{k}A_i^k(\eta-\xi)^{1-2\beta}\frac{2^{n-2i}(1-\xi)^{n-1-k-i+\beta}(1-\eta)^{n-1-k-i+\beta}}{(2-\xi-\eta)^{n-2i}}$$
$$=(\eta-\xi)^{2\beta}\sum_{k=0}^{[n/2]}c_k^n(1-\xi_0)^{-n+1-2\beta+2k}\tilde{H}_k^n(\xi,\eta),$$

където $\tilde{H}_k^n(\xi,\eta)$ са функциите (3.14) и

$$c_k^n=k_1\frac{(-1)^n\sqrt{\pi}\,(n+1)_{n-2k}(-n)_{n-2k}}{\Gamma(n-k+1)\Gamma(-k+1/2)(\beta)_{n-2k}}\frac{(-1)^k(1/2-n)_k}{(3/2-\beta)_k}\frac{2^{2k}}{2^n}\neq 0. \qquad (3.54)$$

С това равенството (3.46) е доказано.

Изследване на функциите $\Phi_{2,1}^-(\xi,\eta;\xi_0)$ *и* $\Phi_{2,2}^-(\xi,\eta;\xi_0)$. За да изведем подходяща оценка за $\Phi_{2,1}^-(\xi,\eta;\xi_0)$, ще преработим част от израза на тази функция:

$$\sum_{q=i-j+1}^{\infty}\frac{(j-i+1-\beta)_q}{q!}\frac{(1-\xi_0)^q}{(1-\xi)^q}$$
$$=(-1)^{i-j+1}(\beta-1)_{i-j+1}\frac{(1-\xi_0)^{i-j+1}}{(1-\xi)^{i-j+1}}\sum_{N=0}^{\infty}\frac{(2-\beta)_N}{(1+N)_{i-j+1}\,N!}\frac{(1-\xi_0)^N}{(1-\xi)^N}$$
$$=(-1)^{i-j}(\beta)_{i-j}\frac{(1-\xi_0)^{i-j+1}}{(1-\xi)^{i-j+1}}\sum_{N=0}^{\infty}\frac{(1-\beta+N)(1-\beta)_N}{(1+N)_{i-j+1}\,N!}\frac{(1-\xi_0)^N}{(1-\xi)^N}.$$

Понеже

$$\frac{1-\beta+N}{(1+N)_{i-j+1}}<1,$$

следва оценката

$$\left|\sum_{q=i-j+1}^{\infty}\frac{(j-i+1-\beta)_q}{q!}\frac{(1-\xi_0)^q}{(1-\xi)^q}\right|$$

$$\leq(\beta)_{i-j}\frac{(1-\xi_0)^{i-j+1}}{(1-\xi)^{i-j+1}}\sum_{N=0}^{\infty}\frac{(1-\beta)_N}{N!}\frac{(1-\xi_0)^N}{(1-\xi)^N}$$

$$=(\beta)_{i-j}\frac{(1-\xi_0)^{i-j+1}}{(1-\xi)^{i-j+1}}\left(1-\frac{1-\xi_0}{1-\xi}\right)^{\beta-1}=(\beta)_{i-j}\frac{(1-\xi_0)^{i-j+1}}{(1-\xi)^{i-j+\beta}(\xi_0-\xi)^{1-\beta}}$$

в T. Замествайки тази оценка в (3.50), стигаме до

$$|\Phi_{2,1}^{-}(\xi,\eta;\xi_0)|\leq k_1\frac{(\eta-\xi)(1-\xi_0)^{1-2\beta}}{(\xi_0-\xi)^{1-\beta}(1-\eta)^{1-\beta}}\frac{1-\xi_0}{1-\xi}$$

$$\times\left|\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}\frac{(n+1)_i(-n)_i}{(\beta)_i\,i!}\frac{(\beta)_{i-j}(1-\beta-i)_j(1-\beta)_j}{(2-2\beta)_j\,j!}\frac{(-1)^i(1-\eta)^{i-j}(\eta-\xi)^j}{(2-\xi-\eta)^i}\right|$$

$$\leq c_{1,1}\frac{(\eta-\xi)(1-\xi_0)^{1-2\beta}}{(\xi_0-\xi)^{1-\beta}(1-\eta)^{1-\beta}},\quad c_{1,1}=const>0,\quad(3.55)$$

в T.

За да изследваме $\Phi_{2,2}^{-}(\xi,\eta;\xi_0)$, ще пресметнем:

$$\sum_{j=i+1}^{\infty}\frac{(1-\beta-i)_j(1-\beta)_j}{(2-2\beta)_j\,j!}\frac{(1-\xi_0)^j(\eta-\xi)^j}{(\xi_0-\xi)^j(1-\eta)^j}=(-1)^i(\beta)_i\frac{(1-\xi_0)^{i+1}(\eta-\xi)^{i+1}}{(\xi_0-\xi)^{i+1}(1-\eta)^{i+1}}$$

$$\times\sum_{N=0}^{\infty}\frac{(1-\beta)_{N+1}(1-\beta)_N(1-\beta+N)_{i+1}}{(2-2\beta)_N(2-2\beta+N)_{i+1}(1+N)_{i+1}\,N!}\frac{(1-\xi_0)^N(\eta-\xi)^N}{(\xi_0-\xi)^N(1-\eta)^N},$$

от където в областта T следва неравенството

$$\left|\sum_{j=i+1}^{\infty}\frac{(1-\beta-i)_j(1-\beta)_j}{(2-2\beta)_j\,j!}\frac{(1-\xi_0)^j(\eta-\xi)^j}{(\xi_0-\xi)^j(1-\eta)^j}\right|\leq(\beta)_i\frac{(1-\xi_0)^{i+1}(\eta-\xi)^{i+1}}{(\xi_0-\xi)^{i+1}(1-\eta)^{i+1}}$$

$$\times F\left(1-\beta,1-\beta,2-2\beta;\frac{(1-\xi_0)(\eta-\xi)}{(\xi_0-\xi)(1-\eta)}\right).$$

Прилагаме това неравенство в израза (3.51) и получаваме следната оценка:

$$|\Phi_{2,2}^{-}(\xi,\eta;\xi_0)|\leq c_{1,2}\frac{(\eta-\xi)(1-\xi_0)^{1-2\beta}}{(\xi_0-\xi)^{1-\beta}(1-\eta)^{1-\beta}}$$

$$\times F\left(1-\beta,1-\beta,2-2\beta;\frac{(1-\xi_0)(\eta-\xi)}{(\xi_0-\xi)(1-\eta)}\right),$$

$$c_{1,2}=const>0\quad(3.56)$$

в T.

Накрая дефинираме

$$\Phi_2^{-}(\xi,\eta;\xi_0):=\Phi_{2,1}^{-}(\xi,\eta;\xi_0)+\Phi_{2,2}^{-}(\xi,\eta;\xi_0).$$

Нека забележим, че в T

$$F\left(1-\beta, 1-\beta, 2-2\beta; \frac{(1-\xi_0)(\eta-\xi)}{(\xi_0-\xi)(1-\eta)}\right) > 1,$$

защото е хипергеометричен ред с положителни членове. Тогава от (3.55) и (3.56) заключаваме, че в T е изпълнено неравенството (3.47), където

$$c_1 = 2\max\{c_{1,1}, c_{1,2}\}.$$

Изследване на функцията $\Phi^+(\xi, \eta; \xi_0, 1)$. Полагаме $\eta_0 = 1$ във формула (3.25) и с отчитане на факта, че

$$Y(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) = \frac{-(\eta_0-\eta)(\xi_0-\xi)}{(2-\xi_0-\eta_0)(2-\xi-\eta)}$$

е ограничена в $\bar{R}$ функция, непосредствено пресмятаме

$$\begin{aligned}
&0 < \Phi^+(\xi, \eta; \xi_0, 1)\\
&= \left(\frac{\eta-\xi}{1-\xi_0}\right)^\beta \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\beta)_j(1-\beta)_j(n+1)_i(-n)_i}{(i+j)!\,i!\,j!} Y^i(\xi, \eta; \xi_0, 1) X^j(\xi, \eta; \xi_0, 1)\\
&\le F(n+1, -n, 1; Y(\xi, \eta; \xi_0, 1)) \left(\frac{\eta-\xi}{1-\xi_0}\right)^\beta F(\beta, 1-\beta, 1; X(\xi, \eta; \xi_0, 1))\\
&\le c_2 \left(\frac{\eta-\xi}{1-\xi_0}\right)^\beta F(\beta, 1-\beta, 1; X(\xi, \eta; \xi_0, 1)), \quad c_2 = const > 0
\end{aligned}$$

в R, което потвърждава неравенство (3.48). С това и теоремата е доказана. □

След като сме намерили подходяща структура на функцията $\Phi(\xi, \eta; \xi_0, 1)$ и разполагаме с интегралната формула (3.38) за представяне на решението $U(\xi, \eta)$, непосредствено получаваме асимптотична формула за функцията $U(\xi, 1)$:

Теорема 3.9. *Ако $f_n^s \in C^2(\bar{G}_\varepsilon) \cap C(\bar{G}_0)$, рестрикцията на решението на Задача $P12_m$ върху $\eta = 1$, $0 < \xi < 1 - \varepsilon$ може да се представи в следния вид:*

$$U(\xi, 1) = \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} c_k^n \tilde{\mu}_{k,s}^n (1-\xi)^{-n+1-2\beta+2k} + (1-\xi)^{1-2\beta} g(\xi), \tag{3.57}$$

където $c_k^n \ne 0$ са независещи от $\tilde{f}(\xi, \eta)$ константи, $\tilde{\mu}_{k,s}^n$ са коефициентите (3.43), а $g(\xi)$ е ограничена в $[0, 1]$ функция.

Доказателство. Условието $f_n^s \in C^2(\bar{G}_\varepsilon)$ ни осигурява съществуването на решението на задачата, а от условието $f_n^s \in C(\bar{G}_0)$ следва, че $\tilde{f}(\xi, \eta)$ е ограничена в $\bar{D}_0$ функция, което ще използваме в следващите пресмятания.

Полагаме $\eta_0 = 1$ във формула (3.38) и използвайки (3.45) получаваме

$$U(\xi_0, 1) = \iint\limits_{R \cup T} (\eta-\xi)^{-4\beta} \tilde{f}(\xi, \eta) \Phi(\xi, \eta; \xi_0, 1)\, d\xi d\eta = I_1 - I_2 + I_3 + I_4, \tag{3.58}$$

където

$$I_1 := \iint\limits_{D_0} (\eta-\xi)^{-4\beta} \tilde{f}(\xi, \eta) \Phi_1^-(\xi, \eta; \xi_0)\, d\xi d\eta,$$

$$I_2 := \iint\limits_{D_0\setminus T} (\eta-\xi)^{-4\beta}\tilde{f}(\xi,\eta)\Phi_1^-(\xi,\eta;\xi_0)\,d\xi d\eta,$$

$$I_3 := \iint\limits_{T} (\eta-\xi)^{-4\beta}\tilde{f}(\xi,\eta)\Phi_2^-(\xi,\eta;\xi_0)\,d\xi d\eta,$$

$$I_4 := \iint\limits_{R} (\eta-\xi)^{-4\beta}\tilde{f}(\xi,\eta)\Phi^+(\xi,\eta;\xi_0,1)\,d\xi d\eta.$$

Заместваме формула (3.46) в I_1 и получаваме:

$$I_1 = \sum_{k=0}^{[n/2]} c_k^n \tilde{\mu}_{k,s}^n (1-\xi_0)^{-n+1-2\beta+2k}. \tag{3.59}$$

Преди да разгледаме I_2, ще направим оценка на $\tilde{H}_k^n(\xi,\eta)$. Понеже

$$\begin{aligned}
&\frac{(1-\xi)^{n-1-k-i+\beta}(1-\eta)^{n-1-k-i+\beta}}{(2-\xi-\eta)^{n-2i}} \\
&\qquad = \frac{(1-\xi)^{n-1-2k+\beta}(1-\eta)^{n-1-2k+\beta}}{(2-\xi-\eta)^{n-2k}}\,\frac{(1-\xi)^{k-i}(1-\eta)^{k-i}}{(2-\xi-\eta)^{2k-2i}} \\
&\qquad \le \frac{(1-\xi)^{n-1-2k+\beta}(1-\eta)^{n-1-2k+\beta}}{(2-\xi-\eta)^{n-2k}} \le (1-\xi)^{-1+\beta}(1-\eta)^{n-1-2k+\beta}
\end{aligned}$$

в D_0, за $\tilde{H}_k^n$ получаваме

$$\begin{aligned}
|\tilde{H}_k^n(\xi,\eta)| &= \left|\sum_{i=0}^{k} A_i^k (\eta-\xi)^{1-2\beta}\frac{2^{n-2i}(1-\xi)^{n-1-k-i+\beta}(1-\eta)^{n-1-k-i+\beta}}{(2-\xi-\eta)^{n-2i}}\right| \\
&\le c_3(\eta-\xi)^{1-2\beta}(1-\xi)^{-1+\beta}(1-\eta)^{n-1-2k+\beta}, \quad c_3 = const > 0
\end{aligned}$$

в D_0. Това неравенство и формула (3.46) приложени в подинтегралния израз на I_2 ни дават

$$\begin{aligned}
|I_2| &= \left|\sum_{k=0}^{[n/2]} c_k^n (1-\xi_0)^{-n+1-2\beta+2k} \iint\limits_{D_0\setminus T} (\eta-\xi)^{-2\beta}\tilde{f}(\xi,\eta)\tilde{H}_k^n(\xi,\eta)\,d\xi d\eta\right| \\
&\le c_4 \sum_{k=0}^{[n/2]} |c_k^n|(1-\xi_0)^{-n+1-2\beta+2k} \iint\limits_{D_0\setminus T} (\eta-\xi)^{1-4\beta}(1-\xi)^{-1+\beta}(1-\eta)^{n-1-2k+\beta}\,d\xi d\eta \\
&\le c_4 \sum_{k=0}^{[n/2]} |c_k^n|(1-\xi_0)^{1-2\beta} \iint\limits_{D_0\setminus T} (\eta-\xi)^{1-4\beta}(1-\xi)^{-1+\beta}(1-\eta)^{-1+\beta}\,d\xi d\eta, \quad c_4 = const > 0,
\end{aligned}$$

като използвахме че

$$\max_{\bar{D}_0\setminus T}(1-\eta)^{n-2k} = (1-\xi_0)^{n-2k}.$$

След това избираме положително число $\alpha : \alpha < \min(\beta, 1-2\beta)$ и пресмятаме

$$
\begin{aligned}
0 &< \iint\limits_{D_0\setminus T} (\eta-\xi)^{1-4\beta}(1-\xi)^{-1+\beta}(1-\eta)^{-1+\beta}\, d\xi d\eta \\
&\leq \iint\limits_{D_0\setminus T} (\eta-\xi)^{-2\beta}(1-\eta)^{-1+\beta}(1-\xi)^{-\beta}\, d\xi d\eta \leq \iint\limits_{D_0\setminus T} (\eta-\xi)^{-2\beta-\alpha}(1-\eta)^{-1+\alpha}\, d\xi d\eta \\
&= \int_{\xi_0}^{1} (1-\eta)^{-1+\alpha} \left(\int_0^{\eta} (\eta-\xi)^{-2\beta-\alpha}\, d\xi \right) d\eta = \frac{1}{1-2\beta-\alpha} \int_{\xi_0}^{1} \frac{\eta^{1-2\beta-\alpha}\, d\eta}{(1-\eta)^{\alpha-1}} \\
&\leq \frac{1}{1-2\beta-\alpha} \int_{\xi_0}^{1} \frac{d\eta}{(1-\eta)^{\alpha-1}} < \infty.
\end{aligned}
$$

По този начин за I_2 получаваме окончателно оценката.

$$
|I_2| \leq c_5(1-\xi_0)^{1-2\beta}, \quad c_5 = const > 0. \tag{3.60}
$$

За да оценим I_3 ще използваме неравенство (3.47), а за I_4 ще използваме (3.48):

$$
|I_3 + I_4| \leq c_6 \iint\limits_{R\cup T} (\eta-\xi)^{-4\beta} \tilde{f}(\xi,\eta) v(\xi,\eta;\xi_0,1)\, d\xi d\eta, \quad c_6 = const > 0, \tag{3.61}
$$

където $v(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)$ е функцията (4.30), описана в Апендикса. Използваме оценката (4.32) и стигаме до

$$
|I_3 + I_4| \leq c_7(1-\xi_0)^{1-2\beta}, \quad c_7 = const > 0. \tag{3.62}
$$

Накрая прилагайки във формула (3.58) получените резултати (3.59),(3.60),(3.62) за интегралите $I_1 - I_4$, пресмятаме

$$
\begin{aligned}
U(\xi_0, 1) &= \sum_{k=0}^{[n/2]} c_k^n \tilde{\mu}_{k,s}^n (1-\xi_0)^{-n+1-2\beta+2k} + (1-\xi_0)^{1-2\beta}\tilde{g}(\xi_0) \\
&= \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} c_k^n \tilde{\mu}_{k,s}^n (1-\xi_0)^{-n+1-2\beta+2k} + (1-\xi_0)^{1-2\beta} g(\xi_0),
\end{aligned}
$$

където $\tilde{g}(\xi)$ и $g(\xi)$ са ограничени в $[0,1]$ функции, с което завършваме доказателството на теоремата. $\square$

С помощта на получената в тази теорема асимптотична формула за $U(\xi,1)$ се извежда асимптотична формула за функцията $U(\xi,\eta)$.

Теорема 3.10. *Ако $f_n^s \in C^2(\bar{G}_\varepsilon) \cap C(\bar{G}_0)$, решението на Задача $P12_m$ в точката $(\xi_0,\eta_0) \in D_\varepsilon^{(1)} \cup \{\eta = 1, \xi \in (0, 1-\varepsilon)\}$ може да се представи в следния вид:*

$$
U(\xi_0,\eta_0) = \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} \tilde{\mu}_{k,s}^n G_k^n(\xi_0,\eta_0)(1-\xi_0)^{-n+1-2\beta+2k} + (1-\xi_0)^{1-2\beta} G(\xi_0,\eta_0), \tag{3.63}
$$

където $G_k^n(\xi,\eta)$ и $G(\xi,\eta)$ са ограничени в $\bar{D}_0$ функции и $G_k^n(\xi,\eta)$ не зависят от $\tilde{f}(\xi,\eta)$.

Доказателство. След като вече ни е известно решението върху двете характеристики – $\xi = 0$ и $\eta = 1$ – можем да решаваме задачата по метода на Риман, използвайки тези данни.

В следващите пресмятания ще считаме, че точката $(\xi_0, \eta_0) \in D_\varepsilon^{(1)}$, (т. е. $\eta_0 < 1$, случаят $\eta_0 = 1$ е разгледан в предишната теорема). И така, разглеждаме уравнение (3.9) с гранични условия

$$U(0,\eta) = 0, \quad U(\xi,1) = \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} c_k^n \tilde{\mu}_{k,s}^n (1-\xi)^{-n+1-2\beta+2k} + (1-\xi)^{1-2\beta} g(\xi).$$

Оказва се, че с оглед получаване на по-точни резултати е целесъобразно да сведем тази задача към задача с хомогенни гранични условия и ще въведем новата неизвестна функция

$$W(\xi,\eta) := U(\xi,\eta) - U(\xi,1). \tag{3.64}$$

Тогава $W(\xi,\eta)$ е решение на уравнението

$$\begin{aligned} W_{\xi\eta} + \frac{\beta}{\eta-\xi}(W_\xi - W_\eta) - \frac{n(n+1)}{(2-\xi-\eta)^2} W \\ = (\eta-\xi)^{-4\beta} \tilde{f}(\xi,\eta) - \frac{\beta}{\eta-\xi}[U(\xi,1)]_\xi + \frac{n(n+1)}{(2-\xi-\eta)^2} U(\xi,1) \end{aligned} \tag{3.65}$$

с гранични условия

$$W(0,\eta) = 0, \quad W(\xi,1) = 0.$$

Функцията $\Phi^+(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)$, чиято дефиниция се съдържа във формула (3.25), би била функция на Риман за уравнение (3.65), ако сме сигурни, че решава диференциалното уравнение (3.31) в областта

$$\Pi := \{(\xi,\eta) : 0 < \xi < \xi_0,\ \eta_0 < \eta < 1\},$$

където ще се извършват по-нататъшните пресмятания, тъй като тази функция удовлетворява необходимите граничните условия, т. е. (3.32), (3.33) и уравнението (3.34) за $\eta_0 < \eta < 1$. Въпреки че $\Phi^+(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)$ удовлетворява формално (3.31), не за всички точки $(\xi,\eta) \in \Pi$ тя е добре дефинирана: от формула (3.26) се вижда, че X може да допуска стойности по-малки от -1 в Π, а, както споменахме по-рано, радиусът на сходимост на реда $F_3(\beta, n+1, 1-\beta, -n, 1; X, Y)$ е $|X| < 1$. Затова ще потърсим подходящо продължение на този ред.

Записваме $\Phi^+(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)$ в следния вид

$$\Phi^+(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0) = \left(\frac{\eta-\xi}{\eta_0-\xi_0}\right)^\beta \sum_{i=0}^{n} \frac{(n+1)_i(-n)_i}{i!\,i!} Y^i F(\beta, 1-\beta, i+1; X). \tag{3.66}$$

Към хипергеометричната функция $F(\beta, 1-\beta, i+1; X)$ прилагаме формулата за трансформация (4.16) и получаваме:

$$F(\beta, 1-\beta, i+1; X) = \left(\frac{(\eta-\xi)(\eta_0-\xi_0)}{(\eta-\xi_0)(\eta_0-\xi)}\right)^\beta F(\beta, \beta+i, i+1; Z),$$

където

$$Z = \frac{X}{X-1}.$$

Понеже $X \leq 0$ в Π, следва, че $0 \leq Z < 1$ в $\bar{\Pi}$. По този начин от (3.66) получаваме функцията

$$\Phi_\Pi(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0) := \frac{(\eta-\xi)^{2\beta}}{(\eta-\xi_0)^\beta(\eta_0-\xi)^\beta}\sum_{i=0}^{n}\frac{(n+1)_i(-n)_i}{i!\,i!}\,Y^iF(\beta,\beta+i,i+1;Z),$$

която съвпада с $\Phi^+(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)$ в $\bar{\Pi}\cap\{(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0):|X|<1\}$ и е добре дефинирана в $\bar{\Pi}$.

За да намерим израз за $W(\xi_0,\eta_0)$, умножаваме двете страни на уравнение (3.65) по $\Phi_\Pi(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)$ и интегрираме полученото равенство върху правоъгълника Π, след което извършваме и интегриране по части, за да получим

$$\begin{aligned}
-W(\xi_0,\eta_0) &= \iint\limits_{\Pi}(\eta-\xi)^{-4\beta}\tilde{f}(\xi,\eta)\Phi_\Pi(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)\,d\xi d\eta \\
&\quad - \iint\limits_{\Pi}\frac{\beta}{\eta-\xi}[U(\xi,1)]_\xi\Phi_\Pi(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)\,d\xi d\eta \\
&\quad + \iint\limits_{\Pi}\frac{n(n+1)}{(2-\xi-\eta)^2}U(\xi,1)\Phi_\Pi(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)\,d\xi d\eta := I_1 - I_2 + I_3. \qquad (3.67)
\end{aligned}$$

За да изследваме интегралите $I_1 - I_3$, ни е необходима подходяща априорна оценка на функцията $\Phi_\Pi(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)$. Първо от (3.27) ще забележим, че $|Y|<1$ в $\bar{\Pi}$, а също така, че $|F(\beta,\beta+i,i+1;Z)| < const$ поради (4.12). Тогава получаваме оценката

$$|\Phi_\Pi| \leq c_8\frac{(\eta-\xi)^{2\beta}}{(\eta-\xi_0)^\beta(\eta_0-\xi)^\beta}, \quad (\xi,\eta)\in\bar{\Pi}, \quad c_8 = const > 0. \qquad (3.68)$$

За първия интеграл с помощта на (3.68) получаваме

$$\begin{aligned}
|I_1| &\leq c_9\iint\limits_{\Pi}(\eta-\xi)^{-2\beta}(\eta-\xi_0)^{-\beta}(\eta_0-\xi)^{-\beta}\,d\xi d\eta \\
&\leq c_9\iint\limits_{\Pi}(\eta-\xi_0)^{-2\beta}(\eta_0-\xi)^{-2\beta}\,d\xi d\eta = c_9\int_{\eta_0}^{1}(\eta-\xi_0)^{-2\beta}\,d\eta\int_0^{\xi_0}(\eta_0-\xi)^{-2\beta}\,d\xi \\
&\leq c_{10}(1-\xi_0)^{1-2\beta}, \quad c_9, c_{10} = const > 0. \qquad (3.69)
\end{aligned}$$

За да оценим I_2, ще разгледаме $[U(\xi,1)]_\xi$. Предвид Теорема 3.9 имаме:

$$\begin{aligned}
[U(\xi,1)]_\xi &= \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]}(n-1+2\beta-2k)c_k^n\tilde{\mu}_{k,s}^n(1-\xi)^{-n-2\beta+2k} \\
&\quad -(1-2\beta)(1-\xi)^{-2\beta}g(\xi) + (1-\xi)^{1-2\beta}g_\xi(\xi). \qquad (3.70)
\end{aligned}$$

От Лема 3.6 следва, че $g_\xi \in C((0,1))$ и допуска особености в двата края на интервала. От (3.24) и от това, че първообразната функция $g(\xi)$ е непрекъсната и ограничена в $[0,1]$, можем да заключим, че

$$|g_\xi(\xi)| \leq c_{11}\xi^{-2\beta}(1-\xi)^{-1}, \quad c_{11} = const > 0. \qquad (3.71)$$

Сега вече сме готови да разгледаме I_2. Заместваме израза (3.70) в израза за I_2, чиято дефиниция се съдържа във формула (3.67) и получаваме

$$I_2 = \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} \beta(n-1+2\beta-2k)c_k^n \tilde{\mu}_{k,s}^n \iint\limits_{\Pi} \frac{(1-\xi)^{-n-2\beta+2k}}{\eta-\xi} \Phi_\Pi(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)\, d\xi d\eta$$
$$- \beta(1-2\beta) \iint\limits_{\Pi} \frac{(1-\xi)^{-2\beta}}{\eta-\xi} \Phi_\Pi(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0) g(\xi)\, d\xi d\eta$$
$$+ \beta \iint\limits_{\Pi} \frac{(1-\xi)^{1-2\beta}}{\eta-\xi} \Phi_\Pi(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0) g_\xi(\xi)\, d\xi d\eta.$$

Използването на оценките (3.68), (3.71) и ограничеността на $g(\xi)$ в $[0,1]$ ни дават

$$|I_2| \le c_{12} \left(\sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} |\tilde{\mu}_{k,s}^n| I_k^n + I_0 \right), \quad c_{12} = const > 0,$$

където I_k^n, $k = 0, \dots, [(n-1)/2]$ и I_0 са интеграли, дефинирани и оценени в Лема 4.11 от Апендикса. С помощта на оценките (4.53) и (4.54) от лемата получаваме

$$|I_2| \le c_{13} \left(\sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} |\tilde{\mu}_{k,s}^n| (1-\xi_0)^{-n+1-2\beta+2k} + \xi_0^{-\beta}(1-\xi_0)^{1-2\beta} \right), \quad c_{13} = const > 0. \tag{3.72}$$

Накрая, за да оценим интеграла I_3, полагаме формула (3.57) в дефиницията на този интеграл, съдържаща се във формула (3.67). С помощта на оценката (3.68) и неравенството

$$(2-\xi-\eta)^{-2} \le (\eta-\xi)^{-1}(1-\xi)^{-1},$$

при оценяването на I_3 стигаме до аналогичен мажориращ израз, съдържащ интегралите $|\tilde{\mu}_{k,s}^n| I_k^n$ и I_0, в съответствие с което получаваме

$$|I_2 + I_3| \le c_{14} \left(\sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} |\tilde{\mu}_{k,s}^n| (1-\xi_0)^{-n+1-2\beta+2k} + \xi_0^{-\beta}(1-\xi_0)^{1-2\beta} \right),$$
$$c_{14} = const > 0. \tag{3.73}$$

Получените оценки (3.69) и (3.73) за интегралите I_1 – I_3, приложени във формула (3.67) ни дават, че функцията $W(\xi,\eta)$ може да се представи чрез следната асимптотична формула в точката (ξ_0,η_0):

$$W(\xi_0,\eta_0) = \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} \tilde{\mu}_{k,s}^n \hat{G}_k^n(\xi_0,\eta_0)(1-\xi_0)^{-n+1-2\beta+2k} + \xi_0^{-\beta}(1-\xi_0)^{1-2\beta} \hat{G}(\xi_0,\eta_0),$$

където $\hat{G}_k^n(\xi,\eta)$ и $\hat{G}(\xi,\eta)$ са ограничени в $\bar{D}_0$ функции. За функцията $W(\xi,\eta)$ знаем, че е непрекъсната в $\bar{D}_\varepsilon^{(1)}$ и че $W(0,\eta) = 0$, следователно не може да има особеност върху $\xi = 0$. Следователно функцията $\xi^{-\beta}\hat{G}(\xi,\eta)$ също е ограничена в $\bar{D}_0$. Тогава с помощта на връзката (3.64) между функциите $U(\xi,\eta)$ и $W(\xi,\eta)$ заключаваме, че равенството (3.63) от условието на теоремата е изпълнено.

От извършените в доказателството изчисления не е трудно да се проследи, че в дясната част на (3.63) функциите $G_k^n(\xi,\eta)$ не зависят от $\tilde{f}(\xi,\eta)$. С това приключваме доказателството. □

Коментар 3.11. *Тази теорема ни показва какъв е максималният възможен ред на сингулярност на функцията $U(\xi,\eta)$, т. е. ако във формула (3.63) поне един от коефициентите $\tilde{\mu}_{k,s}^n$, $k=0,\ldots,[(n-1)/2]$ е различен от нула и*

$$k_0 = \min_{\tilde{\mu}_{k,s}^n \neq 0} k,$$

то

$$|U(\xi,\eta)| \leq const(1-\xi)^{-n+1-2\beta+2k_0}.$$

От друга страна от Теорема 3.9 виждаме, че $G_k^n(\xi,1) = c_k^n \neq 0$ и следователно

$$|U(\xi,1)| \geq const(1-\xi)^{-n+1-2\beta+2k_0}.$$

3.6. **Асимптотично поведение на обобщеното решение на Задача $P1_m$.** След като сме намерили асимптотична формула за представяне на решението $U(\xi,\eta)$ на Задача $P12_m$, можем да направим обратна трансформация към Задача $P1_m$ и да видим как изглежда асимптотичната формула на решението $u(x,t)$.

Теорема 3.12. *Нека дясната страна $f(x,t)$ на уравнение (3.1) е от вида (3.2), където $f_n^s \in C^2(\bar{\Omega}_m)$, $\quad n=0,1,\ldots,l, \quad s=1,\ldots,2n+1$. Тогава единственото обобщено решение $u(x,t)$ на Задача $P1_m$ има следното асимптотично поведение в околност на точката $(0,0,0,0)$*

$$u(x,t) = \sum_{p=1}^{l} F_p(x,t)|x|^{-p-2\beta} + F(x,t)|x|^{-2\beta}, \quad \beta = \frac{m}{2(m+2)}, \tag{3.74}$$

където $F(x,t)$ е ограничена в $\bar{\Omega}_m$ функция и функциите $F_p(x,t)$ имат следната структура:

$$F_p(x,t) = \sum_{k=0}^{[(l-p)/2]} \sum_{s=1}^{2p+4k+1} \mu_{k,s}^{p+2k} F_{k,s}^{p+2k}(x,t), \quad p=1,\ldots,l, \tag{3.75}$$

където $F_{k,s}^{p+2k}(x,t)$ са независими от $f(x,t)$ и ограничени в $\bar{\Omega}_m$ функции.

Освен това, ако за някоя тройка индекси (k,s,p) в (3.75) съответният коефициент $\mu_{k,s}^{p+2k}$ е различен от нула, то редът на сингулярност на решението е равен поне на $p+2\beta$.

Доказателство.

Първо ще забележим, че ако $f_n^s \in C^2(\bar{\Omega}_m)$ следва, че за всяко $\varepsilon \in (0,1)$ $f_n^s \in C^2(\bar{G}_\varepsilon) \cap C(\bar{G}_0)$ и Теорема 3.5 за съществуване и единственост на обобщеното решение е в сила, а също така можем да използваме Теореми 3.9 и 3.10.

След това ще покажем, че коефициентите $\mu_{k,s}^n$ и $\tilde{\mu}_{k,s}^n$ са пропорционални помежду си. Припомняйки си техните дефиниции от формулите (3.43), (3.44) и използвайки, че функциите $Y_n^s(x/|x|)$ са ортогонални помежду си в $L_2(S^2)$, $S^2 = \{x \in \mathrm{R}^3 : |x| = 1\}$, пресмятаме:

$$\begin{aligned}
\mu_{k,s}^n &= \int_{\Omega_m} V_{k,s}^n(x,t) f(x,t)\, dxdt \\
&= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_{G_0} H_k^n(\rho,t) Y_n^s(\theta,\varphi) \left(\sum_{\hat{n}=0}^{l} \sum_{\hat{s}=1}^{2\hat{n}+1} f_{\hat{n}}^{\hat{s}}(\rho,t) Y_{\hat{n}}^{\hat{s}}(\theta,\varphi) \right) \sin\theta \rho^2\, d\rho dt d\varphi d\theta \\
&\qquad = \sum_{\hat{n}=0}^{l} \sum_{\hat{s}=1}^{2\hat{n}+1} \int_{S^2} Y_{\hat{n}}^{\hat{s}} Y_n^s(x/|x|)\, dS \int_{G_0} H_k^n f_{\hat{n}}^{\hat{s}}(\rho,t) \rho^2\, d\rho dt \\
&= ||Y_n^s||_{L_2(S^2)}^2 \int_{D_0} c_{m,3} (\eta-\xi)^{-2\beta} \tilde{H}_k^n \tilde{f}(\xi,\eta)\, d\xi d\eta = c_{m,3} ||Y_n^s||_{L_2(S^2)}^2 \tilde{\mu}_{k,s}^n,
\end{aligned} \tag{3.76}$$

където

$$c_{m,3} = (m+2)/2 \neq 0. \tag{3.77}$$

Извършваме обратна трансформация от Задача $P12_m$ към Задача $P11_m$ и от Теорема 3.10 установяваме, че за функциите $u_n^s(\rho,t)$ е в сила следната формула за асимптотично представяне

$$\begin{aligned}
u_n^s(\rho,t) = \rho^{-1} \Bigg\{ &\sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} \tilde{\mu}_{k,s}^n G_k^n(\xi(\rho,t),\eta(\rho,t)) \left(\rho + \frac{2}{m+2} t^{(m+2)/2}\right)^{-n+1-2\beta+2k} \\
&+ \left(\rho + \frac{2}{m+2} t^{(m+2)/2}\right)^{1-2\beta} G(\xi(\rho,t),\eta(\rho,t)) \Bigg\}
\end{aligned}$$

или

$$u_n^s(\rho,t) = \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} \tilde{\mu}_{k,s}^n \hat{G}_k^n(\rho,t) \rho^{-n-2\beta+2k} + \hat{G}(\rho,t)\rho^{-2\beta}.$$

където $\hat{G}_k^n(\rho,t)$ и $\hat{G}(\rho,t)$ са ограничени в G_0 функции.

След това извършваме обратна трансформация от Задача $P11_m$ към Задача $P1_m$ и с отчитане на връзката (3.76) получаваме (3.74), (3.75).

Накрая нека да проверим, че ако някой от коефициентите $\mu_{k,s}^{p+2k}$ е различен от нула, то редът на сингулярност на решението е равен поне на $p+2\beta$. Понеже от Теорема 3.9 знаем, че в Задача $P12_m$ върху $\eta = 1$ решението $U(\xi,\eta)$ достига максималния възможен ред на сингулярност, определен от Теорема 3.10, то ние ще проверим дали това е вярно за функцията $u(x,t)$ върху повърхността $\Sigma_{m,2}$.

Отчитайки Теорема 3.9 и формула (3.76), за функциите $F_{k,s}^{p+2k}(x,t)$ върху $\Sigma_{m,2}$ получаваме

$$F_{k,s}^{p+2k}|_{\Sigma_{m,2}} = 2^{1-2\beta-p} c_k^{p+2k} c_{m,3}^{-1} ||Y_{p+2k}^s||_{L_2(S^2)}^{-2} Y_{p+2k}^s(x/|x|),$$

където c_k^{p+2k} и $c_{m,3}$ са ненулевите константи (3.54) и (3.77). Разглеждане последния израз в сферични координати:

$$\begin{aligned}
F_{k,s}^{p+2k}(\rho,\theta,\varphi,t(\rho)) &= 2^{1-2\beta-p} c_k^{p+2k} c_{m,3}^{-1} ||Y_{p+2k}^s||_{L_2(S^2)}^{-2} Y_{p+2k}^s(\theta,\varphi) \\
&= c_{k,s}^p Y_{p+2k}^s(\theta,\varphi),
\end{aligned}$$

където $c_{k,s}^p = const \neq 0$ и сме означили

$$t(\rho) := (2^{-1}(m+2)\rho)^{2/(m+2)}.$$

Съответно за $p = 1, \dots, l$

$$F_p\left(\rho, \theta, \varphi, t(\rho)\right) = \sum_{k=0}^{[(l-p)/2]} \sum_{s=1}^{2p+4k+1} \mu_{k,s}^{p+2k} c_{k,s}^p Y_{p+2k}^s(\theta, \varphi). \tag{3.78}$$

Нека сега $\hat{p}, \hat{k}, \hat{s}$ са такива, че $\mu_{\hat{k},\hat{s}}^{\hat{p}+2\hat{k}} \neq 0$ и θ_0, φ_0 са такива, че $Y_{\hat{p}+2\hat{k}}^{\hat{s}}(\theta_0, \varphi_0) \neq 0$. Понеже сферичните функции са линейно независими функции, от (3.78) следва, че

$$F_{\hat{p}}\left(\rho, \theta_0, \varphi_0, t(\rho)\right) = const \neq 0.$$

Следователно съществува положителна константа $\hat{c}_0$, такава че

$$|u(\rho, \theta_0, \varphi_0, t(\rho))| \geq \hat{c}_0 \rho^{-\hat{p}-2\beta}, \quad \rho \in (0, \rho_1),$$

където ρ_1 е точка от интервала $(0, 1/2)$. □

Коментар 3.13. *От теоремата се вижда, че обобщеното решение $u(x,t)$ на Задача $P1_m$ има степенна особеност в началото на координатната система даже за функции $f \in C^\infty(\bar{\Omega}_m)$ в дясната страна на уравнението. Максималният възможен ред на сингулярност е равен на $l + m/(m+2)$ и той се достига, ако поне един от коефициентите $\mu_{0,s}^l$, $s = 1, ..., 2l+1$ е различен от нула. Редът на сингулярност може да се намали до $l + m/(m+2) - j$, $j = 1, \dots, l$, ако функцията $f(x,t)$ удовлетворява ортогоналните условия $\mu_{k,s}^{p+2k} = 0$, $p > l - j$. Ограничено решение е възможно единствено ако всички коефициенти $\mu_{k,s}^{p+2k}$ са равни на нула и функцията $F(x,t)$ удовлетворява оценката $|F(x,t)| \leq c_F |x|^{2\beta}, c_F = const > 0$. Интересен е въпросът: могат ли да се намерят условия, които да удовлетворява дясната страна $f(x,t)$ на уравнението, за да се получи такова ограничено решение?*

4. Апендикс

Тук са събрани някои помощни сведения и резултати, които използваме в настоящата дисертация.

4.1. **Свойства на някои специални функции.** На нас ни е необходима следната информация, свързана със специалните функции.

Символ на Pochhammer. Символът на Pochhammer се дефинира чрез формулата

$$(a)_i = a(a+1)\dots(a+i-1), \quad i \in \mathrm{N}, \quad (a)_0 = 1. \tag{4.1}$$

Ако $a \neq 0, -1, -2, \dots$, то $(a)_i$ може да се изрази чрез гама функции:

$$(a)_i = \frac{\Gamma(a+i)}{\Gamma(a)}. \tag{4.2}$$

В сила са следните връзки ([63]):

$$(a)_{i+j} = (a)_i(a+i)_j, \tag{4.3}$$

$$(1-a-j)_j = (-1)^j(a)_j, \tag{4.4}$$

$$(a)_{N-n} = (-1)^n \frac{(a)_N}{(1-a-N)_n} \tag{4.5}$$

$$2^{2n}\left(\frac{a}{2}\right)_n\left(\frac{a+1}{2}\right)_n = (a)_{2n}, \tag{4.6}$$

$$2^{2n+1}\left(\frac{a}{2}\right)_{n+1}\left(\frac{a+1}{2}\right)_n = (a)_{2n+1}. \tag{4.7}$$

Хипергеометрични функции. В хода на изчисленията използваме някои формули, свързани с хипергеометричните функции $F(a,b,c;z)$, сведения за които могат да бъдат намерени например в Трикоми [67].

За $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$ хипергеометричните функции се представят чрез реда

$$F(a,b,c;z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(a)_i, (b)_i}{(c)_i\, i!} z^i, \tag{4.8}$$

където $a, b, c \in \mathbb{C}$, $c \neq 0, -1, -2, \dots$ и $(a)_i$ е символът на Pochhammer (4.1).

Хипергеометричните функции се диференцират по правилото:

$$\frac{d}{dz}F(a,b,c;z) = \frac{ab}{c}F(a+1,b+1,c+1;z). \tag{4.9}$$

При $0 < Re\, a < Re\, c$ е в сила интегралното представяне

$$F(a,b,c;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}(1-zt)^{-b}\, dt \tag{4.10}$$

и са в сила следните оценки

$$|F(a,b,c;z)| \leq const(1-z)^{c-a-b}, \quad c-a-b < 0, \tag{4.11}$$

$$|F(a,b,c;z)| \leq const, \quad c-a-b > 0, \tag{4.12}$$

като

$$\lim_{z \to 1} F(a,b,c;z) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}, \quad c-a-b > 0. \tag{4.13}$$

Освен това за всяко число $\alpha > 0$ съществува константа $C(\alpha) > 0$, такава че

$$|F(a,b,c;z)| \leq C(\alpha)(1-z)^{-\alpha}, \quad c-a-b = 0. \tag{4.14}$$

Също така използваме следните формули за трансформация:

$$F(a,b,c;z) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)\Gamma(c-a)}(1-z)^{-a}F\left(a, c-b, a-b+1; \frac{1}{1-z}\right) \\ + \frac{\Gamma(c)\Gamma(a-b)}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)}(1-z)^{-b}F\left(c-a, b, b-a+1; \frac{1}{1-z}\right), \quad (4.15)$$

което остава в сила, ако дефинираме $1/\Gamma(k) = 0$ при $k = 0, -1, -2, \ldots$.

$$F(a,b,c;z) = (1-z)^{-a}F\left(a, c-b, c; \frac{z}{z-1}\right) = (1-z)^{-b}F\left(c-a, b, c; \frac{z}{z-1}\right). \quad (4.16)$$

Хипергеометричните функции, при които е изпълнено условието $c = (a+b+1)/2$, могат да се преобразуват чрез формулата за квадратична трансформация:

$$F(a, b, \frac{a+b+1}{2}; z) = h_1 F\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{1}{2}; (2z-1)^2\right) \\ + h_2(2z-1)F\left(\frac{a+1}{2}, \frac{b+1}{2}, \frac{3}{2}; (2z-1)^2\right), \quad (4.17)$$

където

$$h_1 = \sqrt{\pi}\frac{\Gamma(\frac{a+b+1}{2})}{\Gamma(\frac{a+1}{2})\Gamma(\frac{b+1}{2})}, \quad h_2 = 2\sqrt{\pi}\frac{\Gamma(\frac{a+b+1}{2})}{\Gamma(\frac{a}{2})\Gamma(\frac{b}{2})}, \quad (4.18)$$

което остава в сила, ако дефинираме $1/\Gamma(k) = 0$ при $k = 0, -1, -2, \ldots$.

Двойни хипергеометрични редове. Подробна информация за двойните хипергеометрични редове може да бъде намерена в [13, 25, 63]. На нас ни е необходима следната информация.

Двойният хипергеометричен ред $F_2(a, b_1, b_2, c_1, c_2; X, Y)$ се дефинира по следната формула

$$F_2(a, b_1, b_2, c_1, c_2; X, Y) = \sum_{i,j=0}^{\infty} \frac{(a)_{i+j}(b_1)_i(b_2)_j}{(c_1)_i(c_2)_j\, i!\, j!}\, X^j Y^i, \quad (4.19)$$

където $a, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{C}$, $c_1, c_2 \neq 0, -1, -2, \ldots$ и $F_2(a, b_1, b_2, c_1, c_2; X, Y)$ е решение на следната система:

$$\Big(X(1-X)\frac{\partial^2}{\partial X^2} - XY\frac{\partial^2}{\partial X \partial Y} + [c_1 - (a+b_1+1)X]\frac{\partial}{\partial X} \\ - b_1 Y\frac{\partial}{\partial Y} - ab_1\Big) F_2 = 0, \quad (4.20)$$

$$\Big(Y(1-Y)\frac{\partial^2}{\partial Y^2} - XY\frac{\partial^2}{\partial X \partial Y} + [c_2 - (a+b_2+1)Y]\frac{\partial}{\partial Y} \\ - b_2 X\frac{\partial}{\partial X} - ab_2\Big) F_2 = 0. \quad (4.21)$$

Двойният хипергеометричен ред $F_3(a_1, a_2, b_1, b_2, c; X, Y)$ се дефинира по следната формула

$$F_3(a_1, a_2, b_1, b_2, c; X, Y) = \sum_{i,j=0}^{\infty} \frac{(a_1)_j (b_1)_j (a_2)_i (b_2)_i}{(c)_{i+j}\, i!\, j!} X^j Y^i, \tag{4.22}$$

където $a_1, a_2, b_1, b_2, c \in \mathbb{C}$, $c \neq 0, -1, -2, \dots$ и $F_3(a_1, a_2, b_1, b_2, c; X, Y)$ е решение на следната система диференциални уравнения:

$$\left(X(1-X)\frac{\partial^2}{\partial X^2} + Y\frac{\partial^2}{\partial X \partial Y} + [c - (a_1 + b_1 + 1)X]\frac{\partial}{\partial X} - a_1 b_1 \right) F_3 = 0, \tag{4.23}$$

$$\left(Y(1-Y)\frac{\partial^2}{\partial Y^2} + X\frac{\partial^2}{\partial X \partial Y} + [c - (a_2 + b_2 + 1)Y]\frac{\partial}{\partial Y} - a_2 b_2 \right) F_3 = 0. \tag{4.24}$$

4.2. **Използвани резултати от автори, работили по сходен тип проблеми.** При изследването на задачата на Протър за хиперболично уравнение с младши членове ние използваме някои резултати от [29] и [26].

Лема 4.1 ([29]). *Нека за* $(\xi_0, \eta_0) \in D_\varepsilon^{(1)} = \{(\xi, \eta) : 0 < \xi < \eta < 1, 0 < \xi < 1 - \varepsilon\}, \varepsilon \in (0,1)$ *и* $\mu \in \mathrm{R}_+$ *дефинираме*

$$I_\mu := \int_0^{\xi_0} \Big(\int_{\xi_0}^{\eta_0} (2 - \xi - \eta)^{-\mu-2} d\eta \Big) d\xi + 2\int_0^{\xi_0} \Big(\int_{\xi}^{\xi_0} (2 - \xi - \eta)^{-\mu-2} d\eta \Big) d\xi.$$

Тогава

$$I_\mu \le \frac{1}{\mu(\mu+1)} (2 - \xi_0 - \eta_0)^{-\mu}.$$

Нека ни е дадена Задача $P_{\alpha,2}$, формулирана на стр. 17 и $(U_m^{(i)}, p_m^{(i)}, q_m^{(i)})$, $i = 1, 2$, $m \in \mathrm{N}$ са функциите, дефинирани в областта $D_\varepsilon^{(1)} = \{(\xi, \eta) : 0 < \xi < \eta < 1, 0 < \xi < 1 - \varepsilon\}, \varepsilon \in (0,1)$ чрез формули (2.19), (2.20). До Задача $P_{\alpha,2}$ се стига от Задача P_α (стр. 14) при определени условия за коефициентите b_1, b_2, b, c, α в тази задача и дясната страна на уравнение (2.1). В следващите две леми допълнително ще предположим, че коефициентите b_1, b_2, b, c, α удовлетворяват условията (2.21), където $K_1, K_0, K_\alpha \ge 0$.

Лема 4.2 ([29]). *Нека условията* (2.21) *са изпълнени и съществува такава константа* $A > 0$, *че*

$$|(U_m^{(i)} - U_{m-1}^{(i)})(\xi_0, \eta_0)| \le A(2 - \xi_0 - \eta_0)^{-\mu},$$
$$|(p_m^{(i)} - p_{m-1}^{(i)})(\xi_0, \eta_0)| \le \mu A(2 - \xi_0 - \eta_0)^{-\mu-1},$$
$$|(q_m^{(i)} - q_{m-1}^{(i)})(\xi_0, \eta_0)| \le \mu A(2 - \xi_0 - \eta_0)^{-\mu-1},$$

където $\mu \in \mathrm{R}_+, \mu > \nu = n - 1/2, m \in \mathrm{N}$. *Ако параметърът* δ_ν *е такъв, че*

$$(\mu - \nu)(\mu + \nu + 1) \ge \delta_\nu \mu(\mu+1) + (3\mu + 2\nu + 2)K_1 + 2(\mu+1)K_\alpha + K_0, \tag{4.25}$$

тогава за $m \in \mathrm{N}$, $i = 1, 2$ *имаме*

$$|(U_{m+1}^{(i)} - U_m^{(i)})(\xi_0, \eta_0)| \le A(1 - \delta_\nu)(2 - \xi_0 - \eta_0)^{-\mu},$$
$$|(p_{m+1}^{(i)} - p_m^{(i)})(\xi_0, \eta_0)| \le \mu A(1 - \delta_\nu)(2 - \xi_0 - \eta_0)^{-\mu-1},$$
$$|(q_{m+1}^{(i)} - q_m^{(i)})(\xi_0, \eta_0)| \le \mu A(1 - \delta_\nu)(2 - \xi_0 - \eta_0)^{-\mu-1}.$$

Лема 4.3 ([29]). *Нека $\nu = n - 1/2, n \in \mathrm{N}$ е фиксирано число. Ако параметърът μ е достатъчно голям, $\mu > \nu$, то*

$$(\mu - \nu)(\mu + \nu + 1) - [(3\mu + 2\nu + 2)K_1 + 2(\mu + 1)K_\alpha + K_0] > 0 \tag{4.26}$$

и можем да изберем число $\delta_\nu > 0$ така, че условието (4.25) да е изпълнено.

Да разгледаме Задача $P_{\alpha,2}$ (стр. 17). При условията, посочени в следващата лема, в [26] е построено решение на задачата по метода на последователните приближения. В същата статия за така построеното решение е доказан следният резултат.

Лема 4.4 ([26]). *Нека $F^i, A_i, B_i, C_i, D_i \in C(\bar{D}_\varepsilon^{(1)}),\ i = 1, 2,$*

$$A_i \geq 0, \quad B_i \geq 0, \quad C_i \geq 0, \quad D_i \geq 0, \quad \alpha(1 - \xi) \geq 0 \quad \text{в } \bar{D}_\varepsilon^{(1)}, \quad i = 1, 2 \tag{4.27}$$

и

$$F^{(i)} \geq 0 \quad \text{в } \bar{D}_\varepsilon^{(1)}, \quad i = 1, 2. \tag{4.28}$$

Тогава за решението $(U^{(1)}, U^{(2)})$ на Задача $P_{\alpha,2}$ (построено по метода на последователните приближения в [26]) е изпълнено

$$U^{(i)}(\xi, \eta) \geq 0, \quad U_\eta^{(i)}(\xi, \eta) \geq 0, \quad U_\xi^{(i)}(\xi, \eta) \geq 0 \quad \text{за } (\xi, \eta) \in \bar{D}_\varepsilon^{(1)},\ i = 1, 2. \tag{4.29}$$

При изследването на задачата на Протър за слабо хиперболично уравнение ние използваме следните резултати.

Функцията

$$v(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) := \begin{cases} \left(\dfrac{\eta - \xi}{\eta_0 - \xi_0}\right)^\beta F(\beta, 1 - \beta, 1; X), & \eta > \xi_0, \\ k_1 \dfrac{(\eta - \xi)(\eta_0 - \xi_0)^{1-2\beta}}{(\xi_0 - \xi)^{1-\beta}(\eta_0 - \eta)^{1-\beta}} F(1 - \beta, 1 - \beta, 2 - 2\beta; X^{-1}), & \eta < \xi_0, \end{cases} \tag{4.30}$$

разглеждана в областта $D_\varepsilon^{(1)}$, където X и k_1 са определени чрез формулите (3.26) и (3.28), е функция на Риман-Адамар за задача (3.9), (3.10) с $n = 0$. Тази функция е построена от Gellerstedt [24]. За нея е известно [24], че изпълнява граничното условие

$$\frac{\partial[[v]]}{\partial \xi} + \beta \frac{[[v]]}{\eta - \xi} = 0, \quad 0 < \xi < \xi_0, \tag{4.31}$$

където

$$[[v]] := \lim_{\epsilon' \to +0} \{v(\xi, \xi_0 + \epsilon'; \xi_0, \eta_0) - v(\xi, \xi_0 - \epsilon'; \xi_0, \eta_0)\}.$$

Освен това, в Попиванов и Schneider [50], Lemma 3.1 (стр. 552, Step 1 от доказателството) е показано, че е в сила следната оценка:

$$\left| \int_{\xi=0}^{\xi_0} \int_{\eta=\xi}^{\eta_0} (\eta - \xi)^{-4\beta} v(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0)\, d\eta d\xi \right| \leq const(\eta_0 - \xi_0)^{1-2\beta}. \tag{4.32}$$

Нека за $m > 0$ в тримерната област

$$\hat{\Omega}_0 := \left\{ (x, t) : t > 0, \frac{2}{m+2} t^{(m+2)/2} < |x| < 1 - \frac{2}{m+2} t^{(m+2)/2} \right\},$$

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

е зададено уравнението

$$t^m(u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2}) - u_{tt} = 0 \tag{4.33}$$

с гранични условия

$$u|_{\hat{\Sigma}_0 \cup \hat{\Sigma}_{m,2}} = 0, \tag{4.34}$$

където

$$\hat{\Sigma}_0 := \{(x,t) : t = 0, |x| < 1\}$$

и

$$\hat{\Sigma}_{m,2} := \left\{(x,t) : t > 0, |x| = \frac{2}{m+2} t^{(m+2)/2}\right\}.$$

Нека

$$\hat{H}_k^n(|x|,t) = \sum_{i=0}^{k} \hat{A}_i^k t |x|^{-n+2i} \left(|x|^2 - \left(\frac{2}{m+2}\right)^2 t^{m+2}\right)^{n-k-i-1-1/(m+2)}, \tag{4.35}$$

$$\hat{A}_i^k = (-1)^i \frac{(k-i+1)_i (n-k-i-1/(m+2))_i}{i!(n-i)_i} \tag{4.36}$$

и

$$\bar{H}_k^{n,m}(|x|,t) = |x|^{-n} \hat{H}_k^n(|x|,t).$$

Теорема 4.5 ([55]). *Функциите*

$$V_{1,k}^{n,m}(x_1,x_2,t) = \bar{H}_k^{n,m}(|x|,t) \mathrm{Re}\,\{(x_1 + ix_2)^n\}$$

и

$$V_{2,k}^{n,m}(x_1,x_2,t) = \bar{H}_k^{n,m}(|x|,t) \mathrm{Im}\,\{(x_1 + ix_2)^n\}$$

са класически решения на задачата (4.33), (4.34) за всяко $k = 0, 1, \ldots [n/2] - 2$.

Нека в областта D_ε е дадено уравнението

$$U_{\xi\eta} + \frac{\beta}{\eta - \xi}(U_\xi - U_\eta) + c(\xi,\eta)U = (\eta - \xi)^{-4\beta} f_1(\xi,\eta) \tag{4.37}$$

и

$$\beta = \frac{m}{2(m+2)}.$$

Теорема 4.6 ([50]). *Ако* $m \geq 0$, $f_1(\xi(\rho,t),\eta(\rho,t)) \in C^2(\bar{G}_\varepsilon)$, $c(\xi,\eta) \in C(\bar{D}_\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, *тогава съществува функция* $U(\xi,\eta) \in C(\bar{D}_\varepsilon) \cap C^1(D_\varepsilon)$, $U_{\xi\eta} \in C(D_\varepsilon)$, $U|_{\xi=0} = 0$, $|U(\xi,\eta)| \leq C_0(\eta - \xi)^{1-2\beta}$ *в* $\bar{D}_\varepsilon$, *където първите производни на* U *удовлетворяват оценките*

$$|U_\eta(\xi,\eta)| \leq C_1(\eta - \xi)^{-2\beta} \xi^{1-2\beta}$$

$$|U_\xi(\xi,\eta)| \leq C_1(\eta - \xi)^{-2\beta}[\xi^{1-4\beta}\eta^{2\beta} + \eta^{1-2\beta}], \quad m \neq 2,$$

$$|U_\xi(\xi,\eta)| \leq C(\alpha)\xi^{-\alpha}\eta^{2\beta+\alpha}(\eta - \xi)^{-2\beta}, \quad m = 2, \quad \alpha > 0, \quad 0 < \alpha < \beta$$

с константи $C_1 > 0, C(\alpha) > 0$ *и* U *е решение на диференциалното уравнение (4.37) в* D_ε.

Забележка: Положителните константи $C_0, C_1, C(\alpha)$ в тази теорема зависят от ε.

Нека в $G_\varepsilon := \left\{(\rho, t) : t > 0, \varepsilon + \frac{2}{m+2}t^{(m+2)/2} < \rho < 1 - \frac{2}{m+2}t^{(m+2)/2}\right\}, \quad \varepsilon \in (0,1)$ е поставена следната гранична задача:

$$
\begin{aligned}
&L_m[u] = t^m \left[\frac{1}{\rho}(\rho u_\rho)_\rho + d(\rho,t)u\right] - u_{tt} = g(\rho,t) \quad \text{в} \quad G_\varepsilon, \\
&u|_{S_0 \cup S_1} = 0.
\end{aligned}
\tag{4.38}
$$

В [50] е дефинирано понятието *обобщено решение* на задачата (4.38) по следния начин.

Дефиниция 4.7 ([50])**.** *Функцията $u = u(\rho, t)$ се нарича обобщено решение на задача* (4.38) *в G_ε, $\varepsilon \in (0,1)$, ако:*
1) $u \in C(\bar{G}_\varepsilon), \quad u|_{\partial G_\varepsilon \setminus S_{m,2\varepsilon}} = 0$;
2) $u_\rho, u_t \in C(G_\varepsilon \cup S_{m,2\varepsilon})$;
3) съществува константа $c(\varepsilon) > 0$, такава че

$$|u(\rho,t)| \le c(\varepsilon)t,$$

$$\sup_{G_\varepsilon}\{t^{m/2}|u_\rho|, |u_t|\} \le c(\varepsilon)\left(1 - \rho - \frac{2}{m+2}t^{(m+2)/2}\right)^{-2\beta};$$

4) тъждеството

$$\int_{G_\varepsilon}[u_t v_t - t^m u_\rho v_\rho + t^m d u v]\rho\, d\rho dt = \int_{G_\varepsilon} g v \rho\, d\rho dt$$

е изпълнено за всички функции $v \in \tilde{V}_\varepsilon := \{v : v \in C^1(\bar{G}_0), \quad v|_{S_0} = 0, \quad v \equiv 0$ в $\quad G_0 \setminus G_\varepsilon\}$.

В сила е следната теорема за съществуване и единственост на обобщено решение на задачата (4.38).

Теорема 4.8 ([50])**.** *Ако $g(\rho,t) \in C^2(\bar{G}_\varepsilon), d(\rho,t) \in C(\bar{G}_\varepsilon)$, $\varepsilon \in (0,1)$, тогава съществува единствено обобщено решение на задачата* (4.38).

4.3. **Извеждане на помощни резултати.** Тук са доказани няколко леми, които се използват за доказване на основните ни резултати.

Лема 4.9. *За $b > 0$ са в сила равенствата:*
1)

$$F(b, -2N-1, 2b; 2) = 0, \qquad N = 0, 1, 2 \ldots;$$

2)

$$F(b, -2N, 2b; 2) = \frac{(1/2)_N}{(1/2+b)_N}, \qquad N = 1, 2 \ldots.$$

Доказателство:
Ще проведем доказателството по индукция.
1) В случая $N = 0$ по формула (4.8) имаме

$$F(b, -1, 2b; 2) = 1 + \frac{(-1)b}{2b}.2 = 0.$$

Нека сега ни е известно, че твърдението е изпълнено за някое неотрицателно цяло число N. Тогава, използвайки интегралното представяне (4.10), за $N+1$ с интегриране по части пресмятаме:

$$F(b,-2N-3,2b;2)=\frac{\Gamma(2b)}{\Gamma(b)\Gamma(b)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{b-1}(1-2t)^{2N+3}dt$$
$$=\frac{\Gamma(2b)}{\Gamma(b)\Gamma(b)}\int_0^1(t-t^2)^{b-1}(1-2t)^{2N+2}\frac{d}{dt}(t-t^2)dt$$
$$=(1-b)\frac{\Gamma(2b)}{\Gamma(b)\Gamma(b)}\int_0^1(t-t^2)^{b-1}(1-2t)^{2N+3}dt$$
$$+(4N+4)\frac{\Gamma(2b)}{\Gamma(b)\Gamma(b)}\int_0^1(t-t^2)^{b}(1-2t)^{2N+1}dt=(1-b)F(b,-2N-3,2b;2)$$
$$+\frac{(2N+2)b}{2b+1}F(b+1,-2N-1,2(b+1);2)=(1-b)F(b,-2N-3,2b;2).$$

Но това равенство е възможно само ако

$$F(b,-2N-3,2b;2)=0.$$

2) В случая $N=1$ след директното прилагане на формула (4.8) получаваме

$$F(b,-2,2b;2)=\frac{1/2}{1/2+b}.$$

Да допуснем сега, че твърдението е изпълнено за някое естествено число N. Тогава

$$F(b,-2N-2,2b;2)=\frac{\Gamma(2b)}{\Gamma(b)\Gamma(b)}\int_0^1(t-t^2)^{b-1}(1-2t)^{2N+1}\frac{d}{dt}(t-t^2)dt$$
$$=(1-b)\frac{\Gamma(2b)}{\Gamma(b)\Gamma(b)}\int_0^1(t-t^2)^{b-1}(1-2t)^{2N+2}dt$$
$$+(4N+2)\frac{\Gamma(2b)}{\Gamma(b)\Gamma(b)}\int_0^1(t-t^2)^{b}(1-2t)^{2N}dt=(1-b)F(b,-2N-2,2b;2)$$
$$+\frac{(2N+1)b}{2b+1}F(b+1,-2N,2(b+1);2)=(1-b)F(b,-2N-2,2b;2)+\frac{(2N+1)b}{2b+1}\frac{(1/2)_N}{(3/2+b)_N}$$

или

$$F(b,-2N-2,2b;2)=\frac{2N+1}{2b+1}\frac{(1/2)_N}{(3/2+b)_N}=\frac{(1/2)_{N+1}}{(1/2+b)_{N+1}},$$

с което завършваме доказателството. □

Лема 4.10. *Нека функцията $Q(\xi,\eta)$ е функция дефинирана в областта $T:=\{(\xi,\eta):0<\xi<\eta<\xi_0\}$, $\xi_0\in(0,1)$ чрез формулата:*

$$Q(\xi,\eta):=\sum_{j=0}^{n-p}\frac{(1-\beta)_j}{(2-2\beta)_j\,j!}\frac{(n+p+1)_j(p-n)_j}{(p+1)_j}\frac{(\eta-\xi)^j}{(2-\xi-\eta)^j}$$
$$\times F\left(n+p+j+1,p-n+j,p+j+1;\frac{1-\eta}{2-\xi-\eta}\right),\quad (4.39)$$

където p и n са цели неотрицателни числа, $p \le n$ и $\beta \in (0, 1/2)$. Тогава

$$Q(\xi,\eta) = \begin{cases} 0, & \textit{ако} \quad (n-p+1)/2 \in \mathrm{N}, \\ c_{n,p} F\left(\frac{n+p+1}{2}, \frac{p-n}{2}, \frac{3}{2}-\beta; \left(\frac{\eta-\xi}{2-\xi-\eta}\right)^2\right), & \textit{ако} \quad (n-p+2)/2 \in \mathrm{N}, \end{cases} \tag{4.40}$$

където

$$c_{n,p} = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(\frac{n+p+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p-n+1}{2}\right)}. \tag{4.41}$$

Доказателство. Първо ще забележим, че

$$p+j+1 = [(n+p+j+1)+(p-n+j)+1]/2,$$

следователно $F(n+p+j+1, p-n+j, p+j+1; (1-\eta)/(2-\xi-\eta))$ може да се преобразува по формула (4.17):

$$\begin{aligned} F&\left(n+p+j+1, p-n+j, p+j+1; \frac{1-\eta}{2-\xi-\eta}\right) \\ &= h_1 F\left(\frac{n+p+j+1}{2}, \frac{p-n+j}{2}, \frac{1}{2}; \left(\frac{\eta-\xi}{2-\xi-\eta}\right)^2\right) \\ &\quad - h_2\left(\frac{\eta-\xi}{2-\xi-\eta}\right) F\left(\frac{n+p+j+2}{2}, \frac{p-n+j+1}{2}, \frac{3}{2}; \left(\frac{\eta-\xi}{2-\xi-\eta}\right)^2\right) \end{aligned}$$

с константи

$$h_1 = \sqrt{\pi}\frac{\Gamma(p+j+1)}{\Gamma\left(\frac{n+p+j+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p-n+j+1}{2}\right)}, \quad h_2 = 2\sqrt{\pi}\frac{\Gamma(p+j+1)}{\Gamma\left(\frac{n+p+j+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p-n+j}{2}\right)}. \tag{4.42}$$

В зависимост от това дали $n-p$ е четно или нечетно число, се получават два различни резултата за функцията $Q(\xi,\eta)$. Да ги разгледаме поотделно.

Случай $n-p$ е нечетно число. Тогава за четни индекси j излиза, че $h_1 = 0$ (понеже $(p-n+j+1)/2$ е цяло неположително число), а за нечетни индекси j – че $h_2 = 0$ (понеже $(p-n+j)/2$ е цяло неположително число). Следователно (4.39) може да се запише във вида:

$$\begin{aligned} Q(\xi,\eta) = -h_2 &\sum_{r=0}^{\frac{n-p-1}{2}} \frac{(1-\beta)_{2r}}{(2-2\beta)_{2r}\,(2r)!}\frac{(n+p+1)_{2r}(p-n)_{2r}}{(p+1)_{2r}} \\ &\times \sum_{s=0}^{\frac{n-p-2r-1}{2}} \frac{\left(\frac{n+p+2r+2}{2}\right)_s\left(\frac{p-n+2r+1}{2}\right)_s}{\left(\frac{3}{2}\right)_s\ s!}\left(\frac{\eta-\xi}{2-\xi-\eta}\right)^{2r+2s+1} \\ &+ h_1 \sum_{r=0}^{\frac{n-p-1}{2}} \frac{(1-\beta)_{2r+1}}{(2-2\beta)_{2r+1}\,(2r+1)!}\frac{(n+p+1)_{2r+1}(p-n)_{2r+1}}{(p+1)_{2r+1}} \\ &\quad \times \sum_{s=0}^{\frac{n-p-2r-1}{2}} \frac{\left(\frac{n+p+2r+2}{2}\right)_s\left(\frac{p-n+2r+1}{2}\right)_s}{\left(\frac{1}{2}\right)_s\ s!}\left(\frac{\eta-\xi}{2-\xi-\eta}\right)^{2r+2s+1}, \end{aligned} \tag{4.43}$$

където в (4.42) заместваме в израза за h_1 j с $2r+1$, а в израза за h_2 – j с $2r$:

$$h_1 = \sqrt{\pi}\frac{\Gamma(p+2r+2)}{\Gamma\left(\frac{n+p+2r+3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p-n+2r+2}{2}\right)}, \quad h_2 = 2\sqrt{\pi}\frac{\Gamma(p+2r+1)}{\Gamma\left(\frac{n+p+2r+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p-n+2r}{2}\right)}.$$

С отчитане на (4.2), (4.3), (4.6) и (4.7) са в сила следните връзки:

$$\frac{\Gamma(p+2r+1)}{(p+1)_{2r}} = \Gamma(p+1), \tag{4.44}$$

$$\left(\frac{n+p+2r+2}{2}\right)_s \frac{(n+p+1)_{2r}}{\Gamma\left(\frac{n+p+2r+1}{2}\right)} = \frac{\left(\frac{n+p+2}{2}\right)_{r+s}}{\Gamma\left(\frac{n+p+1}{2}\right)} 2^{2r}, \tag{4.45}$$

$$\left(\frac{p-n+2r+1}{2}\right)_s \frac{(p-n)_{2r}}{\Gamma\left(\frac{p-n+2r}{2}\right)} = \frac{\left(\frac{p-n+1}{2}\right)_{r+s}}{\Gamma\left(\frac{p-n}{2}\right)} 2^{2r}, \tag{4.46}$$

а също така

$$\frac{\Gamma(p+2r+2)}{(p+1)_{2r+1}} = \Gamma(p+1), \tag{4.47}$$

$$\left(\frac{n+p+2r+2}{2}\right)_s \frac{(n+p+1)_{2r+1}}{\Gamma\left(\frac{n+p+2r+3}{2}\right)} = \frac{\left(\frac{n+p+2}{2}\right)_{r+s}}{\Gamma\left(\frac{n+p+1}{2}\right)} 2^{2r+1}, \tag{4.48}$$

$$\left(\frac{p-n+2r+1}{2}\right)_s \frac{(p-n)_{2r+1}}{\Gamma\left(\frac{p-n+2r+2}{2}\right)} = \frac{\left(\frac{p-n+1}{2}\right)_{r+s}}{\Gamma\left(\frac{p-n}{2}\right)} 2^{2r+1}. \tag{4.49}$$

Замествайки (4.44)–(4.46) в първата сума по r на (4.43) и (4.47)–(4.49) във втората сума, получаваме опростен израз:

$$\begin{aligned} Q(\xi,\eta) &= \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(\frac{n+p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p-n}{2}\right)} \\ &\times\left\{-2\sum_{r=0}^{\frac{n-p-1}{2}} \frac{(1-\beta)_{2r}\,2^{4r}}{(2-2\beta)_{2r}\,(2r)!} \sum_{s=0}^{\frac{n-p-2r-1}{2}} \frac{\left(\frac{n+p+2}{2}\right)_{r+s}\left(\frac{p-n+1}{2}\right)_{r+s}}{\left(\frac{3}{2}\right)_s\, s!}\left(\frac{\eta-\xi}{2-\xi-\eta}\right)^{2r+2s+1}\right. \\ &+\left.\sum_{r=0}^{\frac{n-p-1}{2}} \frac{(1-\beta)_{2r+1}\,2^{4r+2}}{(2-2\beta)_{2r+1}\,(2r+1)!} \sum_{s=0}^{\frac{n-p-2r-1}{2}} \frac{\left(\frac{n+p+2}{2}\right)_{r+s}\left(\frac{p-n+1}{2}\right)_{r+s}}{\left(\frac{1}{2}\right)_s\, s!}\left(\frac{\eta-\xi}{2-\xi-\eta}\right)^{2r+2s+1}\right\}. \end{aligned}$$

Сега вече можем да изчислим коефициентите пред еднаквите степени на $(\eta-\xi)/(2-\xi-\eta)$. За целта ще положим $N=r+s$. За $Q(\xi,\eta)$ се получава:

$$\begin{aligned} Q(\xi,\eta) &= \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(\frac{n+p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p-n}{2}\right)} \sum_{N=0}^{\frac{n-p-1}{2}} \left(\frac{n+p+2}{2}\right)_N \left(\frac{p-n+1}{2}\right)_N \left(\frac{\eta-\xi}{2-\xi-\eta}\right)^{2N+1} \\ &\times\left\{-2\sum_{r=0}^{\frac{n-p-1}{2}} \frac{(1-\beta)_{2r}\,2^{4r}}{(2-2\beta)_{2r}\,(2r)!}\frac{1}{(3/2)_{N-r}\,(N-r)!}\right. \\ &+\left.\sum_{r=0}^{\frac{n-p-1}{2}} \frac{(1-\beta)_{2r+1}\,2^{4r+2}}{(2-2\beta)_{2r+1}\,(2r+1)!}\frac{1}{(1/2)_{N-r}\,(N-r)!}\right\}. \end{aligned} \tag{4.50}$$

С помощта на формулите (4.1), (4.5) и (4.6) можем да пресметнем:

$$\frac{1}{(3/2)_{N-r}\,(N-r)!} = \frac{1}{2^{2r}}\frac{(-2N-1)_{2r}}{(3/2)_N\,N!}, \tag{4.51}$$

$$\frac{1}{(1/2)_{N-r}\,(N-r)!} = \frac{-1}{2^{2r}}\frac{(-2N-1)_{2r+1}}{(3/2)_N\,N!}, \tag{4.52}$$

което заместено в (4.50) ни дава:

$$Q(\xi,\eta) = \frac{-2\sqrt{\pi}\,\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(\frac{n+p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p-n}{2}\right)} \sum_{N=0}^{\frac{n-p-1}{2}} \frac{\left(\frac{n+p+2}{2}\right)_N \left(\frac{p-n+1}{2}\right)_N}{(3/2)_N\, N!} \left(\frac{\eta-\xi}{2-\xi-\eta}\right)^{2N+1}$$

$$\times \left\{ \sum_{r=0}^{\frac{n-p-1}{2}} \frac{(1-\beta)_{2r}(-2N-1)_{2r}}{(2-2\beta)_{2r}\,(2r)!}\, 2^{2r} + \sum_{r=0}^{\frac{n-p-1}{2}} \frac{(1-\beta)_{2r+1}(-2N-1)_{2r+1}}{(2-2\beta)_{2r+1}\,(2r+1)!}\, 2^{2r+1} \right\}$$

$$= \frac{-2\sqrt{\pi}\,\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(\frac{n+p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p-n}{2}\right)} \sum_{N=0}^{\frac{n-p-1}{2}} \frac{\left(\frac{n+p+2}{2}\right)_N \left(\frac{p-n+1}{2}\right)_N}{(3/2)_N\, N!} \left(\frac{\eta-\xi}{2-\xi-\eta}\right)^{2N+1}$$

$$\times F(1-\beta, -2N-1, 2-2\beta; 2) \equiv 0,$$

защото от Лема 4.9 с $b = 1-\beta$ следва, че

$$F(1-\beta, -2N-1, 2-2\beta; 2) = 0.$$

Случай $n-p$ е четно число. Изчисленията в този случай са напълно аналогични на предишните. За четни индекси j имаме $h_2 = 0$, а за нечетни индекси j – $h_1 = 0$. В съответствие с това (4.39) се преобразува по следния начин:

$$Q(\xi,\eta) = h_1 \sum_{r=0}^{\frac{n-p}{2}} \frac{(1-\beta)_{2r}}{(2-2\beta)_{2r}\,(2r)!} \frac{(n+p+1)_{2r}(p-n)_{2r}}{(p+1)_{2r}}$$

$$\times \sum_{s=0}^{\frac{n-p-2r}{2}} \frac{\left(\frac{n+p+2r+1}{2}\right)_s \left(\frac{p-n+2r}{2}\right)_s}{\left(\frac{1}{2}\right)_s\, s!} \left(\frac{\eta-\xi}{2-\xi-\eta}\right)^{2r+2s}$$

$$- h_2 \sum_{r=0}^{\frac{n-p-2}{2}} \frac{(1-\beta)_{2r+1}}{(2-2\beta)_{2r+1}\,(2r+1)!} \frac{(n+p+1)_{2r+1}(p-n)_{2r+1}}{(p+1)_{2r+1}}$$

$$\times \sum_{s=0}^{\frac{n-p-2r-2}{2}} \frac{\left(\frac{n+p+2r+3}{2}\right)_s \left(\frac{p-n+2r+2}{2}\right)_s}{\left(\frac{3}{2}\right)_s\, s!} \left(\frac{\eta-\xi}{2-\xi-\eta}\right)^{2r+2s+2}.$$

В (4.42) в израза за h_1 заместваме j с $2r$, а в израза за h_2 – j с $2r+1$:

$$h_1 = \sqrt{\pi}\frac{\Gamma(p+2r+1)}{\Gamma\left(\frac{n+p+2r+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p-n+2r+1}{2}\right)}, \quad h_2 = 2\sqrt{\pi}\frac{\Gamma(p+2r+2)}{\Gamma\left(\frac{n+p+2r+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p-n+2r+1}{2}\right)}.$$

С помощта на (4.44), (4.47) и получените по формули (4.2), (4.3), (4.6) и (4.7) отношения

$$\left(\frac{n+p+2r+1}{2}\right)_s \frac{(n+p+1)_{2r}}{\Gamma\left(\frac{n+p+2r+2}{2}\right)} = \frac{\left(\frac{n+p+1}{2}\right)_{r+s}}{\Gamma\left(\frac{n+p+2}{2}\right)}\, 2^{2r},$$

$$\left(\frac{p-n+2r}{2}\right)_s \frac{(p-n)_{2r}}{\Gamma\left(\frac{p-n+2r+1}{2}\right)} = \frac{\left(\frac{p-n}{2}\right)_{r+s}}{\Gamma\left(\frac{p-n+1}{2}\right)}\, 2^{2r},$$

$$\left(\frac{n+p+2r+3}{2}\right)_s \frac{(n+p+1)_{2r+1}}{\Gamma\left(\frac{n+p+2r+2}{2}\right)} = \frac{\left(\frac{n+p+1}{2}\right)_{r+s+1}}{\Gamma\left(\frac{n+p+2}{2}\right)}\, 2^{2r+1},$$

$$\left(\frac{p-n+2r+2}{2}\right)_s \frac{(p-n)_{2r+1}}{\Gamma\left(\frac{p-n+2r+1}{2}\right)} = \frac{\left(\frac{p-n}{2}\right)_{r+s+1}}{\Gamma\left(\frac{p-n+1}{2}\right)} 2^{2r+1}$$

стигаме до

$$\begin{aligned} Q(\xi,\eta) &= \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(\frac{n+p+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p-n+1}{2}\right)} \\ &\times \left\{ \sum_{r=0}^{\frac{n-p}{2}} \frac{(1-\beta)_{2r}\, 2^{4r}}{(2-2\beta)_{2r}\,(2r)!} \sum_{s=0}^{\frac{n-p-2r}{2}} \frac{\left(\frac{n+p+1}{2}\right)_{r+s}\left(\frac{p-n}{2}\right)_{r+s}}{\left(\frac{1}{2}\right)_s\, s!} \left(\frac{\eta-\xi}{2-\xi-\eta}\right)^{2r+2s} \right. \\ &\left. -2\sum_{r=0}^{\frac{n-p-2}{2}} \frac{(1-\beta)_{2r+1}\, 2^{4r+2}}{(2-2\beta)_{2r+1}\,(2r+1)!} \sum_{s=0}^{\frac{n-p-2r-2}{2}} \frac{\left(\frac{n+p+1}{2}\right)_{r+s+1}\left(\frac{p-n}{2}\right)_{r+s+1}}{\left(\frac{3}{2}\right)_s\, s!} \left(\frac{\eta-\xi}{2-\xi-\eta}\right)^{2r+2s+2} \right\}. \end{aligned}$$

За да изчислим коефициентите пред еднаквите степени на $(\eta-\xi)/(2-\xi-\eta)$ ще положим $N=r+s$ в първата сума по r и $N=r+s+1$ във втората сума:

$$\begin{aligned} Q(\xi,\eta) &= \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(\frac{n+p+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p-n+1}{2}\right)} \\ &\times \left\{ \sum_{N=0}^{\frac{n-p}{2}} \left(\frac{n+p+1}{2}\right)_N \left(\frac{p-n}{2}\right)_N \left(\frac{\eta-\xi}{2-\xi-\eta}\right)^{2N} \right. \\ &\quad \times \sum_{r=0}^{\frac{n-p}{2}} \frac{(1-\beta)_{2r}\, 2^{4r}}{(2-2\beta)_{2r}\,(2r)!} \frac{1}{(1/2)_{N-r}\,(N-r)!} \\ &- 2\sum_{N=1}^{\frac{n-p}{2}} \left(\frac{n+p+1}{2}\right)_N \left(\frac{p-n}{2}\right)_N \left(\frac{\eta-\xi}{2-\xi-\eta}\right)^{2N} \\ &\quad \left. \times \sum_{r=0}^{\frac{n-p-2}{2}} \frac{(1-\beta)_{2r+1}\, 2^{4r+2}}{(2-2\beta)_{2r+1}\,(2r+1)!} \frac{1}{(3/2)_{N-r-1}\,(N-r-1)!} \right\}. \end{aligned}$$

По аналогичен начин, както получихме отношенията (4.51)–(4.52), ще изведем и отношенията

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1/2)_{N-r}\,(N-r)!} &= \frac{1}{2^{2r}} \frac{(-2N)_{2r}}{(1/2)_N\, N!}, \\ \frac{1}{(3/2)_{N-r-1}\,(N-r-1)!} &= \frac{-1}{2^{2r+2}} \frac{(-2N)_{2r+1}}{(1/2)_N\, N!}, \end{aligned}$$

и за $Q(\xi,\eta)$ ще получим

$$\begin{aligned} Q(\xi,\eta) &= \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(\frac{n+p+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p-n+1}{2}\right)} \\ &\times \left\{ 1 + \sum_{N=1}^{\frac{n-p}{2}} \frac{\left(\frac{n+p+1}{2}\right)_N \left(\frac{p-n}{2}\right)_N}{(1/2)_N\, N!} \left(\frac{\eta-\xi}{2-\xi-\eta}\right)^{2N} F(1-\beta,-2N,2-2\beta;2) \right\}. \end{aligned}$$

От лема 4.9 знаем, че

$$F(1-\beta,-2N,2-2\beta;2)=\frac{(1/2)_N}{(3/2-\beta)_N}$$

и за $Q(\xi,\eta)$ получаваме окончателно

$$Q(\xi,\eta)=\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(\frac{n+p+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p-n+1}{2}\right)}F\left(\frac{n+p+1}{2},\frac{p-n}{2},\frac{3}{2}-\beta;\left(\frac{\eta-\xi}{2-\xi-\eta}\right)^2\right)$$

за четни $n-p$. □

Лема 4.11. *Нека за $k=0,1,\dots,[(n-1)/2]$ са дефинирани интегралите*

$$I_k^n:=\iint\limits_{\Pi}(\eta-\xi)^{2\beta-1}(\eta-\xi_0)^{-\beta}(\eta_0-\xi)^{-\beta}(1-\xi)^{-n-2\beta+2k}\,d\xi d\eta,$$

$$I_0:=\iint\limits_{\Pi}\xi^{-2\beta}(\eta-\xi)^{2\beta-1}(\eta-\xi_0)^{-\beta}(\eta_0-\xi)^{-\beta}(1-\xi)^{-2\beta}\,d\xi d\eta,$$

където

$$\Pi:=\{(\xi,\eta):0<\xi<\xi_0,\,\eta_0<\eta<1\},\quad 0<\xi_0<\eta_0<1.$$

Тогава са в сила следните оценки

$$|I_k^n|\le c_{n,k}(1-\xi_0)^{-n+1-2\beta+2k},\quad c_{n,k}=const>0, \tag{4.53}$$

$$|I_0|\le c_0\xi_0^{-\beta}(1-\xi_0)^{1-2\beta},\quad c_0=const>0. \tag{4.54}$$

Доказателство. За I_k^n пресмятаме:

$$\begin{aligned}0\le I_k^n&\le\int_{\eta_0}^1(\eta-\xi_0)^{-\beta}\,d\eta\int_0^{\xi_0}(\eta_0-\xi)^{\beta-1}(1-\xi)^{-n-2\beta+2k}\,d\xi\\ &\le c_{n,k}^1(1-\xi_0)^{1-\beta}\int_0^{\xi_0}(\xi_0-\xi)^{\beta-1}(1-\xi)^{-n-2\beta+2k}\,d\xi,\quad c_{n,k}^1=const>0.\end{aligned}$$

Извършваме в последния интеграл субституцията $\xi=\tau\xi_0$ и с използването на формула (4.10) получаваме

$$\begin{aligned}0\le I_k^n&\le c_{n,k}^1(1-\xi_0)^{1-\beta}\int_0^1(\xi_0-\tau\xi_0)^{\beta-1}(1-\tau\xi_0)^{-n-2\beta+2k}\xi_0\,d\tau\\ &\le c_{n,k}^2(1-\xi_0)^{1-\beta}F(1,n+2\beta-2k,1+\beta;\xi_0),\quad c_{n,k}^2=const>0.\end{aligned}$$

След това прилагаме формула (4.11) към $F(1,n+2\beta-2k,1+\beta;\xi_0)$ и получаваме (4.53).

С интеграла I_0 процедираме по аналогичен начин.

$$\begin{aligned}0\le I_0&\le c_{0,1}(1-\xi_0)^{1-\beta}\int_0^{\xi_0}\xi^{-2\beta}(\xi_0-\xi)^{\beta-1}(1-\xi)^{-2\beta}\,d\xi\\ &=c_{0,1}(1-\xi_0)^{1-\beta}\xi_0^{-\beta}\int_0^1\tau^{-2\beta}(1-\tau)^{\beta-1}(1-\tau\xi_0)^{-2\beta}\,d\tau,\quad c_{0,1}=const>0.\end{aligned}$$

Забелязваме, че последният получен интеграл се свежда по формула (4.10) към хипергеометричната функция $F(1-2\beta,2\beta,1-\beta;\xi_0)$, към която прилагаме оценката (4.11) и завършваме доказателството. □

Лема 4.12. *Функцията* $\Phi(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)$, *дефинирана чрез формула* (3.25), *е функция на Риман-Адамар за задача* (3.9), (3.10) *в* $D_\varepsilon^{(1)}$, *т. е. удовлетворява свойствата* (3.31)–(3.36).

Доказателство.

Проверка на диференциалното уравнение (3.31). Ако направим в уравнение (3.31) смяната $\Phi = (\eta-\xi)^\beta V$, ще получим уравнението:

$$V_{\xi\eta} - \frac{\beta(1-\beta)}{(\eta-\xi)^2}V - \frac{n(n+1)}{(2-\xi-\eta)^2}V = 0. \tag{4.55}$$

Затова е достатъчно да проверим, че функцията

$$V(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0) := \frac{(\eta_0-\xi_0)^\beta}{(\eta-\xi)^\beta}\Phi(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0) = \begin{cases} V^+(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0), & \eta > \xi_0, \\ V^-(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0), & \eta < \xi_0 \end{cases}$$

е решение на уравнение (4.55).

Да проверим това първо за $V^+(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0) = F_3(\beta, n+1, 1-\beta, -n, 1; X, Y)$. Поставяме $F_3(\beta, n+1, 1-\beta, -n, 1; X, Y)$ в уравнение (4.55) и получаваме

$$X_\xi X_\eta \frac{\partial^2 F_3}{\partial X^2} + (X_\xi Y_\eta + X_\eta Y_\xi)\frac{\partial^2 F_3}{\partial X \partial Y} + Y_\xi Y_\eta \frac{\partial^2 F_3}{\partial Y^2}$$
$$+ X_{\xi\eta}\frac{\partial F_3}{\partial X} + Y_{\xi\eta}\frac{\partial F_3}{\partial Y} - \frac{\beta(1-\beta)}{(\eta-\xi)^2}F_3 - \frac{n(n+1)}{(2-\xi-\eta)^2}F_3 = 0.$$

За функциите X и Y, дефинирани чрез (3.26)–(3.27), са в сила следните връзки:

$$X_\xi X_\eta = (\eta-\xi)^{-2}X(1-X), \qquad Y_\xi Y_\eta = -(2-\xi-\eta)^{-2}Y(1-Y),$$
$$X_{\xi\eta} = (\eta-\xi)^{-2}(1-2X), \qquad Y_{\xi\eta} = -(2-\xi-\eta)^{-2}(1-2Y),$$
$$X_\xi Y_\eta + X_\eta Y_\xi = Y(\eta-\xi)^{-2} - X(2-\xi-\eta)^{-2}$$

и съответно последното равенство добива вида

$$\frac{X(1-X)}{(\eta-\xi)^2}\frac{\partial^2 F_3}{\partial X^2} + \left[\frac{Y}{(\eta-\xi)^2} - \frac{X}{(2-\xi-\eta)^2}\right]\frac{\partial^2 F_3}{\partial X \partial Y} - \frac{Y(1-Y)}{(2-\xi-\eta)^2}\frac{\partial^2 F_3}{\partial Y^2}$$
$$+ \frac{1-2X}{(\eta-\xi)^2}\frac{\partial F_3}{\partial X} - \frac{1-2Y}{(2-\xi-\eta)^2}\frac{\partial F_3}{\partial Y} - \frac{\beta(1-\beta)}{(\eta-\xi)^2}F_3 - \frac{n(n+1)}{(2-\xi-\eta)^2}F_3 = 0.$$

Но това равенство е изпълнено поради системата (4.23)–(4.24), в която

$$a_1 = \beta, a_2 = n+1, b_1 = 1-\beta, b_2 = -n, c = 1.$$

Следователно $V^+(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)$ е решение на уравнение (4.55).

За $V^-(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)$, използвайки правилата (4.3)–(4.5), след преработка получаваме

$$V^-(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0) = k_1 X^{\beta-1}\sum_{i=0}^{n}\frac{(n+1)_i(-n)_i}{(\beta)_i\, i!}Y^i \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(1-\beta-i)_j(1-\beta)_j}{(2-2\beta)_j\, j!}X^{-j}$$
$$= k_1\frac{(n+1)_n}{(\beta)_n}X^{\beta-1}(-Y)^n \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(1-\beta-n)_{i+j}(-n)_i(1-\beta)_j}{(-2n)_i(2-2\beta)_j\, i!\, j!}X^{-j}Y^{-i}$$
$$= k_1\frac{(n+1)_n}{(\beta)_n}X^{\beta-1}(-Y)^n F_2(1-\beta-n, 1-\beta, -n, 2-2\beta, -2n; X^{-1}, Y^{-1}),$$

където $F_2(a, b_1, b_2, c_1, c_2; X, Y)$ е двойният хипергеометричен ред (4.19). В нашия случай този двоен хипергеометричен ред е дефиниран коректно, въпреки че $c_2 = 2n$ е цяло неположително число, всъщност по индекса i сумата е крайна и редът се прекъсва преди да се получат нули в знаменател. Поставяме така получения израз за $V^-(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)$ в уравнение (4.55) и след това умножаваме уравнението по $\hat{X}^{1-\beta}(-\hat{Y})^{-n}$:

$$\frac{\partial^2 F_2}{\partial\xi\partial\eta} + \left((1-\beta)\frac{\hat{X}_\eta}{\hat{X}} - n\frac{\hat{Y}_\eta}{\hat{Y}}\right)\frac{\partial F_2}{\partial\xi} + \left((1-\beta)\frac{\hat{X}_\xi}{\hat{X}} - n\frac{\hat{Y}_\xi}{\hat{Y}}\right)\frac{\partial F_2}{\partial\eta}$$
$$+\left\{\beta(\beta-1)\frac{\hat{X}_\xi\hat{X}_\eta}{\hat{X}^2} - (1-\beta)n\frac{\hat{X}_\xi\hat{Y}_\eta + \hat{X}_\eta\hat{Y}_\xi}{\hat{X}\hat{Y}} + n(n+1)\frac{\hat{Y}_\xi\hat{Y}_\eta}{\hat{Y}^2} + (1-\beta)\frac{\hat{X}_{\xi\eta}}{\hat{X}} - n\frac{\hat{Y}_{\xi\eta}}{\hat{Y}}\right\}F_2$$
$$-\left(\frac{\beta(1-\beta)}{(\eta-\xi)^2} + \frac{n(n+1)}{(2-\xi-\eta)^2}\right)F_2 = 0. \quad (4.56)$$

За функциите $\hat{X} := X^{-1}$ и $\hat{Y} := Y^{-1}$ са в сила следните връзки:

$$\hat{X}_\xi\hat{X}_\eta = -(\eta-\xi)^{-2}\hat{X}^2(1-\hat{X}), \qquad \hat{Y}_\xi\hat{Y}_\eta = (2-\xi-\eta)^{-2}\hat{Y}^2(1-\hat{Y}),$$
$$\hat{X}_{\xi\eta} = (\eta-\xi)^{-2}\hat{X}^2, \qquad \hat{Y}_{\xi\eta} = -(2-\xi-\eta)^{-2}\hat{Y}^2,$$
$$\hat{X}_\xi\hat{Y}_\eta + \hat{X}_\eta\hat{Y}_\xi = \hat{X}^2\hat{Y}(\eta-\xi)^{-2} - \hat{X}\hat{Y}^2(2-\xi-\eta)^{-2}.$$

Използвайки тези връзки, от равенството (4.56) след преработка стигаме до

$$\frac{-\hat{X}}{(\eta-\xi)^2}\left\{\hat{X}(1-\hat{X})\frac{\partial^2 F_2}{\partial\hat{X}^2} - \hat{X}\hat{Y}\frac{\partial^2 F_2}{\partial\hat{X}\partial\hat{Y}} + [2-2\beta-(3-2\beta-n)\hat{X}]\frac{\partial F_2}{\partial\hat{X}}\right.$$
$$\left. -(1-\beta)\hat{Y}\frac{\partial F_2}{\partial\hat{Y}} - (1-\beta)(1-\beta-n)F_2\right\}$$
$$+\frac{\hat{Y}}{(2-\xi-\eta)^2}\left\{\hat{Y}(1-\hat{Y})\frac{\partial^2 F_2}{\partial\hat{Y}^2} - \hat{X}\hat{Y}\frac{\partial^2 F_2}{\partial\hat{X}\partial\hat{Y}} + [-2n-(2-\beta-2n)\hat{Y}]\frac{\partial F_2}{\partial\hat{Y}}\right.$$
$$\left. +n\hat{X}\frac{\partial F_2}{\partial\hat{X}} + n(1-\beta-n)F_2\right\} = 0.$$

И накрая, от системата (4.20)–(4.21) с

$$a = 1-\beta-n, \quad b_1 = 1-\beta, \quad b_2 = -n, \quad c_1 = 2-2\beta, \quad c_2 = -2n,$$

следва, че $V^-(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)$ е решение на уравнение (4.55).

Проверка на граничните условия (3.32)–(3.34). Тъй като при $\eta = \eta_0$ и $\xi = \xi_0$ имаме $X = Y = 0$, граничните условия (3.32)–(3.34) очевидно са изпълнени.

Проверка на условието (3.35). Предвид, че функцията $\Phi^-(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)$ може да се запише във вида (3.40), това свойство също е очевидно.

Проверка на условието (3.36). Да разгледаме границата на $\Phi(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)$ при $\eta \to \xi_0$. Първо разделяме сумирането по i по следния начин

$$\sum_{i=0}^{n} = \sum_{i=0}^{0} + \sum_{i=1}^{n}$$

и след преработка получаваме:

$$\Phi^+(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0) = \left(\frac{\eta-\xi}{\eta_0-\xi_0}\right)^\beta F(\beta,1-\beta,1;X)$$
$$+\left(\frac{\eta-\xi}{\eta_0-\xi_0}\right)^\beta \sum_{i=1}^n \frac{(n+1)_i(-n)_i}{i!\,i!} Y^i F(\beta,1-\beta,i+1;X),$$

$$\Phi^-(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0) = k_1\left(\frac{\eta-\xi}{\eta_0-\xi_0}\right)^\beta X^{\beta-1}F(1-\beta,1-\beta,2-2\beta;X^{-1})$$
$$+k_1\left(\frac{\eta-\xi}{\eta_0-\xi_0}\right)^\beta X^{\beta-1}\sum_{i=1}^n \frac{(n+1)_i(-n)_i}{(\beta)_i\,i!} Y^i F(1-\beta-i,1-\beta,2-2\beta;X^{-1}).$$

Тъй като $X\to 1$ при $\eta\to\xi_0$, с отчитане на формула (4.13) пресмятаме

$$\lim_{\eta\to\xi_0}\Phi^+(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0) = \left(\frac{\xi_0-\xi}{\eta_0-\xi_0}\right)^\beta \lim_{\eta\to\xi_0} F(\beta,1-\beta,1;X)$$
$$+\left(\frac{\xi_0-\xi}{\eta_0-\xi_0}\right)^\beta \sum_{i=1}^n \frac{(n+1)_i(-n)_i}{i\,\Gamma(i+1-\beta)\Gamma(i+\beta)} Y^i(\xi,\xi_0;\xi_0,\eta_0),$$

$$\lim_{\eta\to\xi_0}\Phi^-(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0) = k_1\left(\frac{\xi_0-\xi}{\eta_0-\xi_0}\right)^\beta \lim_{\eta\to\xi_0} F(1-\beta,1-\beta,2-2\beta;X^{-1})$$
$$+\left(\frac{\xi_0-\xi}{\eta_0-\xi_0}\right)^\beta \sum_{i=1}^n \frac{(n+1)_i(-n)_i}{i\,\Gamma(i+1-\beta)\Gamma(i+\beta)} Y^i(\xi,\xi_0;\xi_0,\eta_0).$$

и съответно

$$[[\Phi]] = [[v]],$$

където $v(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)$ е функцията (4.30). Предвид (4.31), проверката на условие (3.36) е завършена. $\square$

Основни научни приноси

1. Изследвана е тримерната задача на Протър $P_{0,\alpha}$ за хиперболично уравнение с младши членове и трето гранично условие върху нехарактеристичната част Σ_0 и са получени по-точни от досега известните априорни оценки за обобщеното решение на задачата. По-точно, показано е, че младшите членове на уравнението не повишават възможния ред на изолираната сингулярност в началото $O(0,0,0)$, която обобщеното решение на Задача $P_{0,\alpha}$ допуска.

2. Намерен е по-широк клас от десни страни на уравнението, за които съответните особени обобщени решения на Задача $P_{0,\alpha}$ достигат максимално възможния ред на сингулярност.

3. Изследвана е четиримерната задача на Протър $P1_m$ за слабо хиперболично уравнение със степенно израждане върху равнината $t = 0$. Доказано е съществуване и единственост на обобщено решение с възможна особеност в точката O от характеристичната повърхнина $\Sigma_{m,2}$.

4. Намерени са нетривиални класически решения на съответната хомогенна спрегната Задача $P1_m^*$.

5. Изследвано е по метода на Риман-Адамар точното асимптотично поведение на особеностите на обобщеното решение на Задача $P1_m$. Изведена е формула, от която се вижда зависимостта на реда на степенната особеност от дясната страна на разглежданото уравнение.

Декларация за оригиналност на резултатите

Декларирам, че настоящата дисертация съдържа оригинални резултати, получени от проведените от мен научни изследвания (с подкрепата и съдействието на научния ми ръководител). Резултатите, които са получени, описани и/или публикувани от други учени, са надлежно и подробно цитирани в библиографията.

Настоящата дисертация не е прилагана за придобиване на научна степен в друго висше училище, университет или научен институт.

Подпис: ....

Апробация на получените резултати

Резултатите представени в дисертацията и други свързани с тях резултати са докладвани на следните математически конференции, семинари и симпозиуми:

1. Международный Российско-Болгарский Симпозиум "Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики Нальчик - Россия, 25-30 июня, 2010;

2. 41-вата Пролетна Конференция на СМБ, Боровец, 9-12 април 2012;

3. 38-та международна конференция "Applications of Mathematics in Engineering and Economics Созопол, 8-13 юни 2012;

4. International Conference on Differential Equations, Difference Equations and Special Functions, Patras - Greece, 3-7 September, 2012;

5. Втората Международна Конференция на младите учени "Математическое моделирование фрактальных процессов, родственные проблемы анализа и информатики", Налчик - Русия, 28 ноември - 1 декември 2012;

6. International Conference "Differential Equations and their Applications", Belgorod, Russia, 26 - 31 May 2013;

7. 39-та международна конференция "Applications of Mathematics in Engineering and Economics Созопол, 8-13 юни 2013;

8. Научноизследователския семинар на Научноизследователския Институт по Приложна математика и Автоматизация на Кабардино-Балкарския Научен Център на Руската Академия на Науките, Налчик - Русия, 18 декември 2013;

9. 40-та международна конференция "Applications of Mathematics in Engineering and Economics Созопол, 8-13 юни 2014;

10. ICNPAA Congress: Mathematical Problems in Engineering, Aerospace and Sciences, Narvik - Norway, 15 - 18 July 2014;

11. Научен семинар "Уравнения на математическата физика и приложения", ФМИ, София, 4 март 2015.

12. Пролетна научна сесия на ФМИ, София, 28 март 2015.

Литература

[1] S. A. Aldashev, *On a Darboux problem for the multidimensional wave equation*, Differ. Equations, **19** (1983), 1-6.

[2] S. A. Aldashev, *Correctness of multidimensional Darboux problems for the wave equation*, Ukrainian Math. J., **45** (1993), 1456-1464.

[3] S. A. Aldashev, *Multidimensional Darboux problems for the degenerate hyperbolic equation*, Differ. Equations, **29** (1993), 1829–1834.

[4] S. A. Aldashev, *Well-posednesss of many-dimensional Darboux problems for degenerating hyperbolic equations*, Ukrainian Math. J., **46** (1994), No 10, 1434-1443.

[5] S. A. Aldashev, *On the multidimensional Dirichlet and Tricomi problems for a class of hyperbolic-elliptic equations*, Ukrainian Math. J., **49** (1997), No 12, 1783-1790.

[6] S. A. Aldashev, *On Darboux problems for a class of multidimensional hyperbolic equations*, Differ. Equations, **34** (1998), 65–69.

[7] S. A. Aldashev, *Special Darboux-Protter problems for a class of multidimensional hyperbolic equations*, Ukrainian Math. J., **55** (2003), No 1, 126-135.

[8] S. A. Aldashev, *A criterion for the existence of eigenfunctions of the Darboux-Protter spectral problem for degenerating multidimensional hyperbolic equations*, Differ. Equations, **41** (2005), No 6, 833-839.

[9] S. A. Aldashev, *Darboux–Protter problems for degenerate multidimensional hyperbolic equations,* Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat., **9** (2006), 3–9.

[10] S. A. Aldashev, *Existence of eigenfunctions of the Tricomi spectral problem for some classes of multidimensional mixed hyperbolic–parabolic equations,* Ukrainian Math. J., **62** (2010), 835-846.

[11] S. A. Aldashev, *Eigenvalues and eigenfunctions of the Gellerstedt problem for the multidimensional Lavrent'ev–Bitsadze equation,* Ukrainian Math. J., **63** (2011), 962-968.

[12] A. K. Aziz, M. Schneider, *Frankl-Morawetz problems in* R^3, SIAM J. Math. Anal., **10** (1979), 913-921.

[13] H. Bateman, A. Erdélyi, *Higher Transcendental Functions, Vol. I,* McGraw-Hill, New York, 1953.

[14] Ar. B. Bazarbekov, Ak. B. Bazarbekov, *Goursat and Darboux problems for the two-dimensional wave equation. I*, Differ. Equations, **30** (1994), 741-748.

[15] Ar. B. Bazarbekov, Ak. B. Bazarbekov, *Goursat and Darboux problems for the two-dimensional wave equation. II*, Differ. Equations, **30** (1994), 1000-1002.

[16] Ar. B. Bazarbekov, Ak. B. Bazarbekov, *Goursat and Darboux problems for the three-dimensional wave equation*, Differ. Equations, **38** (2002), 695-701.

[17] A. V. Bitsadze, *Some classes of partial differential equations*, Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1988.

[18] J. B. Choi, *On Darboux-Protter problems for the hyperbolic equations with Bessel operators*, Far East J. Appl. Math., **5** (2001), No 1, 75-85.

[19] J. B. Choi, J. Y. Park, *On the conjugate Darboux-Protter problems for the two-dimensional wave equations in the special case*, J. Korean Math. Soc., **39** (2002), No 5, 681-692.

[20] L. Dechevski, N. Popivanov, T. Popov, *Exact asymptotic expansion of singular solutions for the (2+1)-D Protter problem*, Abstract and Applied Analysis, Annual Issue “Well-Posed and Ill-Posed Boundary Value Problems for PDE”, **2012** (2012), Article ID 278542, 33 pages.

[21] V. P. Didenko, *On boundary value problems for multi-dimensional hyperbolic equation with a degeneration*, Soviet Math. Dokl., **13** (1972), 998-1002.

[22] D. E. Edmunds, N. I. Popivanov; *A nonlocal regularization of some over-determined boundary value problems I*, SIAM J. Math. Anal., **29** (1998), No1, 85-105.

[23] P. R. Garabedian, *Partial differential equations with more than two variables in the complex domain*, J. Math. Mech., **9** (1960), 241-271.

[24] S. Gellerstedt, *Sur un probleme aux limites pour une equation lineaire aux derivees partielle du second ordre de type mixte,* Arkiv for Math. Astr. Fys. B., **25A** (1937), No 29, 1-23.

[25] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*, Moskow, 1963 [Russian].

[26] M. K. Grammatikopoulos, T. D. Hristov, N. Popivanov, *Singular solutions to Protter's problem for the 3-D wave equation involving lower order terms*, Electron. J. Diff. Eqns., **2003** (2003), No 03, 31p.

[27] M. K. Grammatikopoulos, N. Popivanov, T. Popov, *New singular solutions of Protter's problem for the 3-D wave equation*, Abstract and Applied Analysis, **2004** (2004), No 4, 315-335.
[28] L. Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators III*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo, 1985.
[29] T. Hristov, N. Popivanov, M. Schneider, *Estimates of singular solutions of Protter's problem for the 3-D hyperbolic equations*, Commun. Appl. Anal. **10** (2006), No 2, 97-125.
[30] T. Hristov, N. Popivanov, *Singular solutions to Protter's problem for a class of 3-D weakly hyperbolic equations*, Compt. rend. Acad. bulg. Sci., **60** (2007), No 7, 719-724.
[31] T. Hristov, N. Popivanov, M. Schneider, *On the uniqueness of generalized and quasi-regular solutions for equations of mixed type in* R^3, Sib. Adv. Math., **4** (2011), No 4, 262-273.
[32] T. Hristov, N. Popivanov, M. Schneider, *Quasi-regular solutions to a class of 3D degenerating hyperbolic equations,* AIP Conf. Proc., **1497** (2012), 205-212.
[33] T. Hristov, N. Popivanov, M. Schneider, *On uniqueness of quasi-regular solutions to Protter problem for Keldish type equations,* AIP Conf. Proc., **1570** (2013), 321-326.
[34] J. D. Jeon, K. C. Khe, J. H. Park, Y. H. Jeon, J. B. Choi, *Protter's conjugate boundary value problems for the two dimensional wave equation,* J. Korean Math. Soc., **33** (1996), No 4, 857–863.
[35] M. N. Jones, *Spherical Harmonics and Tensors for Classical Field Theory*, Research Studies Press, Letchworth 1986.
[36] G. D. Karatoprakliev, *Uniqueness of solutions of certain boundary-value problems for equations of mixed type and hyperbolic equations in space,* Differ. Equations, **18** (1982), 49–53.
[37] B. Keyfitz, A. Tesdall, K. Payne, N. Popivanov, *The Sonic Line as a free Boundary,* Quart. Appl. Math., **71** (2013), 119-133.
[38] S. Kharibegashvili, *On the solvability of a spatial problem of Darboux type for the wave equation*, Georgian Math. J., **2** (1995), 385-394.
[39] S. Kharibegashvili, B. Midodashvili, *On the solvability of one boundary value problem for one class of semilinear second order hyperbolic systems,* J. Math. Anal. Appl., **400** (2013), No 2, 345–362.
[40] Khe Kan Cher, *Nonuniqueness of solutions of the Darboux problem*, Siberian Math. J., **26** (1985), 286-288.
[41] Khe Kan Cher, *On nontrivial solutions of some homogeneous boundary value problems for the multidimensional hyperbolic Euler-Poisson-Darboux equation in an unbounded domain*, Differ. Equations, **34** (1998), 139-142.
[42] Khe Kan Cher, *On the conjugate Darboux-Protter problem for the two-dimensional wave equation in the special case,* Nonclassical equations in mathematical physics [Russian] (Novosibirsk, 1998), 17-25, Izdat. Ross. Akad. Nauk Sib. Otd. Inst. Mat., Novosibirsk, 1998.
[43] D. Lupo, K. R. Payne, *Critical exponents for semilinear equations of mixed elliptic-hyperbolic and degenerate types*, Comm. Pure Appl. Math., **56** (2003), 403-424.
[44] D. Lupo, K. R. Payne, *Conservation laws for equations of mixed elliptic-hyperbolic type*, Duke Math. J., **127** (2005), 251-290.
[45] D. Lupo, K. R. Payne, N. Popivanov, *Nonexistence of nontrivial solutions for supercritical equations of mixed elliptic-hyperbolic type*, In: Progress in Non-Linear Differential Equations and Their Applications, Birkhauser, Basel, **66** (2006), 371-390.
[46] D. Lupo, K. R. Payne, N. Popivanov, *On the degenerate hyperbolic Goursat problem for linear and nonlinear equations of Tricomi type,* Nonlinear Anal., **108** (2014), 29-56.
[47] C. S. Morawetz, *Mixed equations and transonic flow*, J. Hyperbolic Differ. Equ., **1** (2004), No 1, 1-26.
[48] A. M. Nakhushev, *Criteria for continuity of the gradient of the solution to the Darboux problem for the Gellerstedt equation*, Differ. Equations, **28** (1992), 1445-1457.
[49] N. I. Popivanov, M. Schneider, *The Darboux problem in* R^3 *for a class of degenerated hyperbolic equations*, Comptes Rend. de l'Acad. Bulg. Sci., **41** (1988), No 11, 7-9.
[50] N. Popivanov, M. Schneider, *The Darboux problems in* R^3 *for a class of degenerated hyperbolic equations*, J. Math. Anal. Appl., **175** (1993), 537-579.
[51] N. Popivanov, M. Schneider, *On M. H. Protter problems for the wave equation in* R^3, J. Math. Anal. Appl., **194** (1995), No 1, 50-77.

[52] N. Popivanov, T. Popov, *Exact behavior of the singularities for the 3-D Protter's problem for the wave equation*, Inclusion Methods for Nonlinear Problems with Applications in Engineering, Economics and Physics, Computing, (ed. J. Herzberger), [Suppl] **16** (2002), 213-236.

[53] N. Popivanov, T. Popov, *Singular solutions of Protter's problem for the (3+1)-D wave equation*, Integral Transforms and Special Functions, **15** (2004), No 1, 73-91.

[54] N. Popivanov, T. Popov, R. Scherer, *Asymptotic expansion of the singular solutions of Protter's problem for the (3+1)-D wave equation*, J. Math. Anal. Appl., **331** (2007), 1093-1112.

[55] N. Popivanov, T. Popov, *Behaviour of singular solutions to 3-D Protter problem for a degenerate hyperbolic equation*, Compt. rend. Acad. bulg. Sci., **63** (2010), No 6, 829-834.

[56] N. Popivanov, T. Popov, R. Scherer, *Protter–Morawetz multidimensional problems,* Proc. Steklov Inst. Math., **278** (2012), 179–198.

[57] N. Popivanov, T. Popov, R. Scherer, *Singular solutions with exponential growth to Protter's problems,* Sib. Adv. Math., **23** (2013), No 3, 219-226.

[58] N. Popivanov, T. Popov, A. Tesdall, *Semi-Fredholm solvability in the framework of singular solutions for the (3+1)-D Protter-Morawetz problem,* Abstr. Appl. Anal., **2014** (2014), Article ID 260287, 19 pages.

[59] M. H. Protter, *A boundary value problem for the wave equation and mean value problems*, Annals of Math. Studies, **33** (1954), 247-257.

[60] M. H. Protter, *New boundary value problem for the wave equation and equations of mixed type*, J. Rat. Mech. Anal., **3** (1954), 435-446.

[61] J. M. Rassias, *Tricomi-Protter problem of nD mixed type equations*, Int. J. Appl. Math. Stat., **8** (2007), No M07, 76-86.

[62] J. M. Rassias, *Mixed type partial differential equations with initial and boundary values in fluid mechanics*, Int. J. Appl. Math. Stat., **13** (2008), No J08, 77-107.

[63] L. J. Slater, *Generalized hypergeometric functions*, Cambribde University Press, 1966.

[64] N. G. Sorokina, *Generalized solvability of a boundary-value problem for the wave equation*, Diff. Equations, **14** (1978), 397-400.

[65] N. G. Sorokina, *Uniqueness of the weak solution*, Ukrainian Math. J., **33** (1981), 213-216.

[66] Tong Kwang-Chang, *On a boundary value problem for the wave equation*, Science Record, New Series, **1** (1957), 1-3.

[67] F. Tricomi, *Lezioni sulle equazioni a derivate parziali*, Editrice Gheroni Torino, 1954.

[68] S. V. Zubarev, *The incorrectness of the multidimensional analogue of Darboux's problem for a hyperbolic equations with degeneracy*, Differ. Equations, **11** (1975), 149-151.

[69] В. Ф. Волкодавов, В. Н. Захаров, *Таблицы функции Римана и Римана-Адамара для некоторых дифференциальных уравнений в n-мерных евклидовых пространствах*, Самара: Изд-во Самарского пед. ун-та, 1994.

[70] М. М. Смирнов, *Вырождающиеся гиперболические уравнения*, Минск, 1977.

[71] М. М. Смирнов, *Уравнения смешаного типа*, Москва, 1985.

Публикации по дисертацията

[72] A. Nikolov, N. Popivanov, *Exact behavior of singular solutions to Protter's problem with lower order terms*, Electron. J. Diff. Equ., **2012** (2012), No 149, 1-20.

[73] A. Nikolov, N. Popivanov, *Singular solutions to Protter's problem for (3+1)-D degenerate wave equation*, AIP Conf. Proc., Applications of Mathematics in Engineering and Economics (AMEE'12), **1497** (2012), 233-238.

[74] A. Nikolov, N. Popivanov, *Asymptotic expansion of singular solutions to Protter problem for (2+1)-D degenerate wave equation*, AIP Conf. Proc., Applications of Mathematics in Engineering and Economics (AMEE'13), **1570** (2013), 249-256.

[75] A. Nikolov, N. Popivanov, *Riemann-Hadamard function for Darboux-Goursat problem and its multidimensional application*, AIP Conf. Proc., Applications of Mathematics in Engineering and Economics (AMEE'14), **1631** (2014), 175-180.

[76] A. Nikolov, *Integral representation of singular solutions to BVP for the wave equation*, AIP Conf. Proc., 10th International Conference on Mathematical Problems in Engineering, Aerospace and Sciences, **1637** (2014), 1249-1253.

[77] N. Popivanov, A. Nikolov, *Singular solutions of Protter's problem for a class of 3-D hyperbolic equations*, Math. and Education in Math., **41** (2012), 191-196.