Софийски Университет “Св. Климент Охридски”
Факултет по Математика и Информатика

Елза Петрова Иванова

Върху някои категории, свързани с категорията на локално компактните хаусдорфови пространства и непрекъснатите изображения

Дисертация за присъждане на
образователната и научна степен “доктор”
в професионално направление 4.5 “Математика”
по научната специалност 01.01.06 “Геометрия и топология”

Научен ръководител: .....

/проф. д.м.н. Георги Д. Димов/

София, 2014

Авторът декларира, че настоящата дисертация е оригинален научен труд. Използването на резултати на други автори е отразено напълно коректно, като съответните източници са цитирани според условията на авторските права на техните автори и/или издатели, и/или други притежатели на конкретните авторски права.

Благодарности

Благодаря на научния си ръководител проф. Георги Димов за това, че ме въведе в тази безкрайно интересна тематика и за търпението, подкрепата и помощта, които ми оказваше през целия период на моята магистратура и докторантура.

Авторът

София, Май 2014 г.

Съдържание

0.0 Въведение 1

0 Предварителни сведения **11**

0.1 Теория на категориите 11

0.2 Булеви алгебри 14

0.3 Обща топология 17

1 Теореми за изоморфизъм между някои категории, възникващи в теорията на локално компактните разширения **21**

1.1 Увод 21

1.2 Предварителни сведения 23

1.3 Теореми за изоморфизъм 30

1.4 Описание на паракомпактните и на локално компактните паракомпактни разширения 45

2 Една нова теорема за дуалност за категорията на локално компактните пространства и непрекъснатите изображения **49**

2.1 Увод 49

2.2 Предварителни сведения 49

2.3 Нова теорема за дуалност за категорията на локално компактните хаусдорфови пространства и непрекъснатите изображения между тях 59

3 Някои теореми за изоморфизъм за MVD-алгебри **77**

3.1 Увод 77

3.2 Предварителни сведения 77

3.3 Теореми за изоморфизъм за MVD-алгебри 79

0.0 Въведение

Основните обекти на изследване в тази дисертация са категорията **HLC** на локално компактните хаусдорфови пространства и непрекъснатите изображения между тях, различни подкатегории на категорията **HLC**, както и категории, възникващи естествено при изучаването на хаусдорфовите локално компактни разширения на тихоновите пространства. Доказани са редица нови теореми за дуалност, еквивалентност и изоморфизъм, отнасящи се до споменатите по-горе категории, като в тези доказателства са използвани и развити методи и резултати от общата топология, теорията на близостите, теорията на категориите, теорията на булевите алгебри и на общата регионна теория на пространството, базирана на идеите на A. N. Whitehead. При получаването на тези резултати са използвани основно трудовете на Leader [42], Roeper [50], de Vries [13], Федорчук [33], Димов-Дойчинов [20], Димов-Вакарелов [25], Vakarelov-Dimov-Duentsch-Bennett [59], Димов [15, 16, 17, 18, 19], Whitehead [61]. Пътеводна нишка в дисертацията е понятието *локално близостно пространство* на Leader [42] и неговия безточков аналог - понятието *локална контактна булева алгебра* [50, 59, 25] , въведено от Roeper [50] под името *region-based topology*.

Преди да опишем по-подробно основните резултати в дисертацията, нека приведем някои кратки исторически бележки относно споменатите по-горе математически дисциплини. Общата топология се ражда в трудовете на създателя на теорията на множествата G. Cantor в края на 19 век, а именно през периода 1879-1884 г. В тези трудове G. Cantor въвежда основни топологични понятия като отворено и затворено множество, околност на точка, затворена обвивка, вътрешност, контур и др. в рамките на подмножествата на евклидовите пространства. През 1914 г., F. Hausdorff [36] въвежда абстрактното понятие *топологично пространство* като описва класа на така наречените сега в негова чест *хаусдорфови топологични пространства*. Съвременното (по-общо) понятие за топологично пространство е въведено от K. Kuratowski [41] през 1922 г. В дефиницията на Hausdorff се описват аксиоматически околностите на точките на едно абстрактно множество, докато чрез своята дефиниция Kuratowski описва аксиоматически затворената обвивка на всяко подмножество на едно абстрактно множество. Ако

считаме, че *една точка е близка до дадено множество* ако тя принадлежи на затворената му обвивка, то виждаме, че чрез понятието топологично пространство се описва близостта между точка и подмножество. През 1908 г., F. Riesz [49] формулира система от аксиоми, чрез която се опитва да опише интуитивното понятие за близост между две подмножества на дадено множество, т.е. да въведе релацията "близост" в множеството от всички подмножества на дадено множество. Целта му е да въведе понятието топологично пространство, но неговата дефиниция е прекалено обща и не се възприема от математическата общност. Идеите на Riesz са изключително интересни и плодотворни, но остават дълго време неразбрани. Едва през 1951 г., В. А. Ефремович [29] дефинира едно ново понятие за близост, което сега се нарича в негова чест "*близост на Ефремович*" или, кратко, *EF-близост*. Резултатите на Ефремович са дълбоки и значими, но теорията на близостните пространства става неразделна и важна част от общата топология едва след фундаменталните работи [53, 54, 55] на Ю. М. Смирнов и особено благодарение на неговата компактификационна теорема, чрез която той разкрива връзката между EF-близостите върху едно тихоново пространство и компактните разширения на това пространство. Тези резултати на московската школа предизвикват бурно развитие на теорията на близостните пространства. Добро въведение в тази теория е книгата [47] на S. A. Naimpally и B. D. Warrack, както и публикуваната сравнително наскоро книга на S. Naimpally [46]. В последно време теорията на близостите навлиза и в теоретичната информатика. Да добавим още, че E. Čech [60] дефинира едно по-общо понятие за близост от това на EF-близостите, което играе важна роля в тази дисертация.

Теорията на категориите е създадена от S. Eilenberg и S. MacLane [30, 31] през 1942-1945 г. Тя се развива извънредно бързо и вече няма математическа дисциплина, която да не е повлияна от идеите и резултатите на тази теория. От особен интерес за нас в тази дисертация са понятията за еквивалентност, дуалност и изоморфизъм между две категории. Теоремите за дуалност (както и тези за еквивалентност и изоморфизъм) между две категории играят изключително важна роля в математиката, тъй като те позволяват да бъдат решени задачи, възникващи в едната от категориите, чрез средствата, резултатите и методите, развити в другата категория. Първата теорема за дуалност е теоремата

на M. Stone [56] за дуалност между категорията на нулмерните компактни хаусдорфови пространства и непрекъснатите изображения между тях и категорията на булевите алгебри и булевите хомоморфизми между тях. Тя е сътворена през периода 1931-1937 г. и, така да се каже, подготвя математическата общност за появяването на новата математическа дисциплина - теорията на категориите.

Създаването на теорията на булевите алгебри е свързано с имената на George Boole [8], E. V. Huntington [37] и H. M. Sheffer [51]. Благодарение на теоремата за дуалност на M. Stone, от 1937 г. насам изследването на булевите алгебри е дело както на алгебристи, така и на тополози. Интересът ни към теорията на булевите алгебри е във връзка със заниманията ни с общата регионна теория на пространството. Последната представлява едно обобщение за произволни категории на регионната теория на пространството, чрез която се осъществяват математически реализации на идеите на A. N. Whitehead [61] и T. de Laguna [12] за евклидовите пространства. За разлика от класическия евклидов подход, основан на първичните понятия *точка, линия* и *равнина*, които са абстрактни понятия, нямащи реални аналози, регионната теория на пространството се базира на по-реалистични първични понятия като *регион* (това е абстрактния аналог на пространствено тяло) и на някои пространствени релации между регионите като "*част-от*" и "*контакт*" (в оригиналната Уайтхедова терминология – "*свързаност*"). Този нов подход към теорията на пространството е възникнал под влиянието на айнщайновата теория на относителността. В своя труд [61], A. N. Whitehead представя програма за изграждане на математическа регионна теория на пространството, в която точките, както и линиите и равнините, се дефинират с помощта на първичните понятия на тази теория, но нито той, нито de Laguna, успяват да построят математически модели на своите философски теории. Това правят по-късно други математици. Обзорни статии на получените резултати по регионната теория на пространството са [5, 34, 48, 58]. В последните 30-ина години голям интерес към Уайтхедовите идеи за пространството проявяват информатиците. Причината е в това, че езикът на регионната теория на пространството позволява да се получи едно по-просто описание на взаимното разположение в пространството на реални обекти. От регионната теория на пространството се интересуват специалистите, работещи в областта на

географските информационни системи, изкуствен интелект, Qualitative Spatial Reasoning (QSR) и много други. Уайтхедовите идеи за пространството стимулираха и появяването на нов дял на математическата логика, наречен "Логики на пространството". Обзори на огромното количество работи в тази област могат да бъдат намерени в [2].

Може да се каже, че се оформят два подхода при реализирането на идеите на Whitehead за пространството във формата на математически теории: аксиоматичен подход и категорен подход. Във фундаменталната работа [57] на A. Tarski е изградена аксиоматично евклидовата геометрия, като в тази аксиоматика кълбетата служат за първични понятия. При категорния подход се осъществява следната обща програма (с нея идеите на Whitehead се разпространяват върху произволни категории; съвокупността от изградените съгласно тази програма математически теории се нарича *обща регионна теория на пространството*; самата програма се появява в явен вид едва в 2009 г. в работата на Г. Димов [17] (вж. и [14]), макар че нейни конкретни реализации са били многократно осъществявани преди това):

- за всяко топологично пространство X, принадлежащо на предварително фиксиран клас $\mathcal{C}$ от топологични пространства, се дефинират в топологични термини:

  (а) фамилия $\mathcal{R}(X)$ от подмножества на X (които служат за модели на Уайтхедовите "региони" и отговарят на интуитивната ни представа за регион) (елементите на $\mathcal{R}(X)$ ще наричаме *региони на* X);

  (б) релация ρ_X в $\mathcal{R}(X)$ (която служи за модел на Уайтхедовата релация "контакт") (ще наричаме ρ_X *контактна релация в* $\mathcal{R}(X)$);

- фиксира се подходяща (алгебрична) структура, която е присъща на избраната фамилия от региони и избраната контактна релация, определят се множествата от морфизми между получените (алгебрични) обекти и по този начин се дефинира една категория $\boldsymbol{A}$;

- търси се подкатегория $\boldsymbol{T}$ на категорията **Top** на топологичните пространства и непрекъснатите изображения между тях, чиито обекти са елементи

на класа $\mathcal{C}$, която е (дуално) еквивалентна (или изоморфна) на категорията $\boldsymbol{A}$, като еквивалентността (дуалната еквивалентност) се осъществява от (контравариантен) функтор, който съпоставя на всеки обект X на категорията $\boldsymbol{T}$ избраната (алгебрична) структура на фамилията от всички региони на X.

Ако всичко това е осъществено, то, в частност, избраната (алгебрична) структура на регионите на всеки обект X на категорията $\boldsymbol{T}$ съдържа цялата информация за обекта X, т.е., чрез нея обекта X се реконструира напълно (с точност до хомеоморфизъм). По този начин се получава една "регионна теория" на обектите и морфизмите на категорията $\boldsymbol{T}$. Може да се каже, че се получава "(алгебрично) кодиране" на топологичните пространства, явяващи се обекти на категорията $\boldsymbol{T}$, както и на морфизмите на $\boldsymbol{T}$.

Разбира се, възможни са и други варианти на тази програма. Например, може да се тръгне от категорията $\boldsymbol{T}$ и да се търси подходящата категория $\boldsymbol{A}$.

Много от известните теореми за дуалност представляват реализация на тази програма: такива са теоремите за дуалност на M. Stone [56], на de Vries [13], на Федорчук [33], такъв е случаят и с *localic duality* (вж, напр., [39, Corollary II.1.7]). Интересното е, че авторите им не са знаели, както по всичко изглежда, за идеите на Whitehead и de Laguna. Това показва, че тези идеи са били многократно преоткривани, въпреки че никой друг освен Whitehead и de Laguna не ги е представил във вид на общи философски възгледи. Това демонстрира, че от тези идеи има естествена необходимост в различни математически области и доказва тяхната сила и значимост.

Нека сега се спрем по-подробно на резултатите, получени в дисертацията.

В Глава 0 са дадени най-необходимите предварителни сведения от областта на теорията на категориите, булевите алгебри и общата топология, свързани с изложението на резултатите от дисертацията.

Глава 1 е посветена на изучаването на въпроси, свързани с локално компактните хаусдорфови разширения, както и с паракомпактните и паракомпактните локално компактни разширения. Параграф 1 от Глава 1 е уводен, а в параграф 2 от Глава 1 са дадени някои необходими за по-нататъшното изложение предварителни сведения.

Понятието *локално компактно пространство* е въведено от П. С. Александров [3] през 1923 г. Класът на локално компактните пространства съдържа евклидовите пространства и играе важна роля в математиката. През 1967 г., S. Leader ([42]) описва нареденото множество от всички (с точност до еквивалентност) локално компактни хаусдорфови разширения на тихоново пространство, обобщавайки по този начин компактификационната теорема на Ю. М. Смирнов ([53]). За целта Leader ([42]) въвежда понятието *отделима локална близост*, чрез което обобщава понятието *близост на Ефремович*. Дефиницията на локалните близости се базира на понятието *близост на Čech* и на така наречената структура на *ограниченост* (boundedness). След тази работа на S. Leader са получени и други описания на локално компактните хаусдорфови разширения на тихоновите пространства. Това са описанията, дадени от В. Захаров ([62, 63]) (с помощта на някои специални векторни решетки от функции), от Г. Димов и Д. Дойчинов ([20]) (на базата на понятието *супертопологично пространство*), от Г. Димов ([15]) (използвайки понятието LC-близост) и от Г. Димов и Д. Вакарелов ([24]) (с помощта на така наречените lc-близости). Във всички тези теории е описан класът от тези непрекъснати функции върху разширяемото тихоново пространство, които имат непрекъснато продължение върху съответното локално компактно разширение. По този начин възникват категории, чиито обекти са съответните структури и чиито морфизми са класовете от току-що споменатите функции. В параграф 3 от Глава 1 на дисертацията е показано, че категориите, възникващи от описанията на локално компактните хаусдорфови разширения на тихонови пространства, дадени от Leader ([42]), Димов и Дойчинов ([20]) и Димов ([15])), са изоморфни. При това доказателството е вътрешно, т.е. самите локално компактни разширения не са използвани в него, а се прави директен преход от една структура към друга. Изненадващ е фактът, че доказателството на получените теореми за изоморфизъм не е лесно. В неговия ход се обобщават някои основни твърдения от теорията на близостите на Ефремович за случая на локално близостните пространства. Да отбележим, че съществуването на изоморфизъм между категориите, възникващи от описанията, дадени от Leader ([42]) и Димов и Вакарелов ([24]), е установено в [24]. Резултатите от параграф 3 от Глава 1 на дисертацията са публикувани в статията [23].

В параграф 4 от Глава 1 на дисертацията е получено, с помощта на специални близости, описание на наредените множества от всички (с точност до еквивалентност) паракомпактни (респективно, локално компактни паракомпактни) разширения на тихоново пространство. Известни са различни описания на паракомпактните разширения и на локално компактните паракомпактни разширения на тихоново пространство, дадени от H. Bentley и H. Herlich [6], В. Зайцев [64], А. Борубаев [9, 10], В. Захаров [62, 63], Д. Дойчинов [27], но всички те не са на езика на близостите, а използването на този език изглежда най-естествено, като се има предвид, че така са описани компактните хаусдорфови разширения на тихоновите пространства в компактификационната теорема на Смирнов ([53]). Описанието, дадено тук от нас, използва езика на *SR-близостите*, въведени от Димов [15]. Резултатите от параграф 4 от Глава 1 на дисертацията са публикувани в статията [22].

В Глава 2 се доказва една нова теорема за дуалност за категорията на локално компактните хаусдорфови пространства и непрекъснатите изображения между тях. Ще опишем по-подробно мотивацията за нейното възникване. През 1962 г., H. de Vries [13] доказва една теорема за дуалност за категорията **HC** на компактните хаусдорфови пространства и непрекъснатите изображения между тях, която представлява първата конкретна пълна реализация на програмата на общата регионна теория на пространството, описана по-горе, макар че, както по всичко личи, de Vries не е знаел за идеите на Whitehead [61] и de Laguna [12]. Да отбележим, че композицията на морфизмите на дуалната на **HC** категория **DHC**, описана от de Vries, не е обичайната теоретико-множествена композиция на изображения. По-късно, през 1997 г., P. Roeper [50], воден от идеите на Whitehead [61], въвежда понятието *region-based topology* (което фактически представлява безточков аналог на понятието *локална близост* на Leader [42] и поради това бе наречено в [59] *локална свързана алгебра*, а в [25] - *локална контактна алгебра*) и доказва, че съществува биективно съответствие между класа на локално компактните хаусдорфови пространства, разглеждани с точност до хомеоморфизъм, и класа на пълните локални контактни алгебри, разглеждани с точност до изоморфизъм. През 2010 г., биективното съответствие, получено от P. Roeper, бе продължено от Г. Димов [18] до дуалност между категорията **HLC**

на локално компактните хаусдорфови пространства и непрекъснатите изображения и категорията **DHLC** на пълните локални контактни алгебри и подходящи морфизми между тях като по този начин бе обобщена теоремата за дуалност на H. de Vries. Композицията на морфизмите на категорията **DHLC** не е обичайната теоретико-множествена композиция на изображения, както и в случая на теоремата за дуалност на H. de Vries. Дуалната категория на категорията **HLC**, получена в Глава 2 на дисертацията, има същите обекти като категорията **DHLC** (т.е., това са пълните локални контактни алгебри), но нови морфизми. Композицията на тези нови морфизми е по-близка до обичайната, но за сметка на това морфизмите са вече многозначни изображения. Резултатите от Глава 2 на дисертацията са публикувани в статията [21].

В Глава 3 се доказват редица теореми за изоморфизъм между категории, описани в работите на Г. Димов [16, 17, 18, 19] (които са дуални на различни подкатегории на категорията **HLC** и чиито обекти са пълните локални контактни алгебри), и категории, чиито обекти са така наречените пълни *MVD-алгебри* (Mormann-Вакарелов-Димов-алгебри), въведени в [59]. В локалните контактни алгебри, освен бинарната релация *контакт* между елементите на алгебрата, се въвежда и понятието *ограниченост* за елементите на алгебрата. През 1998 г., T. Mormann [45] въвежда понятието *enriched Boolean algebra*, в което присъства само една бинарна релация, наречена *interior parthood*. Той иска да покаже, че това понятие е в известен смисъл еквивалентно на понятието *локална контактна алгебра* и че с помощта на релацията *interior parthood* могат да се определят контактната релация и ограничеността. Както е показано в [59], в работата [45] на Mormann има грешка, но добавяйки една нова аксиома към аксиомите, описващи понятието *enriched Boolean algebra*, може да се получи понятие, дефинирано с помощта на само една релация, което да е еквивалентно на понятието *локална контактна алгебра*. Това ново понятие е наречено *MVD-алгебра*. В Глава 3 на дисертацията е показано как трябва да се модифицират дефинициите на категориите, въведени от Димов в [16, 17, 18, 19], за да се получат нови категории, изоморфни на изходните, чиито обекти да са пълни MVD-алгебри вместо пълни локални контактни алгебри и чиито морфизми да са подходящи морфизми между MVD-алгебрите. Резултатите от Глава 3 на дисертацията са изложени в

статията [38], която е представена за публикуване.

Глава 0

Предварителни сведения

0.1 Теория на категориите

Ще припомним някои основни понятия от теорията на категориите.

Дефиниция 0.1.1. *Категория* наричаме всяка четворка $\boldsymbol{A} = (\mathcal{O}, hom, id, \circ)$, състояща се от

(1) клас $\mathcal{O}$, чийто елементи се наричат $\boldsymbol{A}$-*обекти*,

(2) множество $hom(A, B)$, дефинирано за всяка наредена двойка (A, B) от $\boldsymbol{A}$-обекти; елементите на $hom(A, B)$ се наричат $\boldsymbol{A}$-*морфизми от* A *в* B (или, просто, *морфизми*); често, вместо "$f \in hom(A, B)$" се пише "$f : A \longrightarrow B$",

(3) морфизъм $id_A \in hom(A, A)$, дефиниран за всеки $\boldsymbol{A}$-обект A; id_A се нарича $\boldsymbol{A}$-*идентитет на* A,

(4) *закон за композиция*, съпоставящ на всеки два $\boldsymbol{A}$-морфизма $f \in hom(A, B)$ и $g \in hom(B, C)$ един $\boldsymbol{A}$-морфизъм $g \circ f \in hom(A, C)$, наречен *композиция на* f *и* g,

като при това се удовлетворяват следните условия:

(a) композицията е асоциативна,

(b) $\boldsymbol{A}$-идентитетите са идентитети по отношение на композицията,

(c) множествата $hom(A, B)$ са две по две непресичащи се.

За простота, когато $\boldsymbol{A} = (\mathcal{O}, hom, id, \circ)$ е категория, пишем

$$|\boldsymbol{A}|$$

вместо $\mathcal{O}$, и

$$\boldsymbol{A}(A, B)$$

вместо $hom(A, B)$.

Дефиниция 0.1.2. Нека $\boldsymbol{A}$ е категория и $A, B \in |\boldsymbol{A}|$. Един морфизъм $f \in \boldsymbol{A}(A, B)$ се нарича *изоморфизъм*, ако съществува морфизъм $g \in \boldsymbol{A}(B, A)$, такъв че $g \circ f = id_A$ и $f \circ g = id_B$.

Дефиниция 0.1.3. Нека $\boldsymbol{B}$ е категория. Една категория $\boldsymbol{A}$ се нарича *подкатегория* на категорията $\boldsymbol{B}$, ако са изпълнени следните условия:

(i) $|\boldsymbol{A}| \subseteq |\boldsymbol{B}|$,

(ii) за всеки $A, B \in |\boldsymbol{A}|$ е изпълнено, че $\boldsymbol{A}(A, B) \subseteq \boldsymbol{B}(A, B)$,

(iii) за всяко $A \in |\boldsymbol{A}|$, $\boldsymbol{B}$-идентитета на A съвпада с $\boldsymbol{A}$-идентитета на A,

(iv) законът за композиция на $\boldsymbol{A}$-морфизмите е рестрикция на закона за композиция на $\boldsymbol{B}$-морфизмите.

Една категория $\boldsymbol{A}$ се нарича *пълна подкатегория на* $\boldsymbol{B}$, ако тя е подкатегория на $\boldsymbol{B}$ и за всеки $A, B \in |\boldsymbol{A}|$, $\boldsymbol{A}(A, B) = \boldsymbol{B}(A, B)$.

Казваме, че една подкатегория $\boldsymbol{A}$ на категорията $\boldsymbol{B}$ е *ко-пълна подкатегория* на $\boldsymbol{B}$, ако $|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{B}|$.

Дефиниция 0.1.4. Ако $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ са категории, то казваме, че е зададен *ковариантен функтор* (респективно, *контравариантен функтор*) F *от* $\boldsymbol{A}$ *в* $\boldsymbol{B}$ ако на всяко $A \in |\boldsymbol{A}|$ е съпоставен $\boldsymbol{B}$-обект $F(A)$, и на всеки $\boldsymbol{A}$-морфизъм $f \in \boldsymbol{A}(A, B)$ е съпоставен $\boldsymbol{B}$-морфизъм $F(f) \in \boldsymbol{B}(F(A), F(B))$ (респективно, $F(f) \in \boldsymbol{B}(F(B), F(A))$), така че

(1) F запазва идентитетите,

(2) $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$ (респективно, $F(f \circ g) = F(g) \circ F(f)$), когато композицията $f \circ g$ е дефинирана.

Ковариантните и контравариантните функтори F от $\boldsymbol{A}$ в $\boldsymbol{B}$ ще означавме с $F : \boldsymbol{A} \longrightarrow \boldsymbol{B}$. Понякога вместо "ковариантен функтор" ще казваме просто "функтор".

За всяка категория $\boldsymbol{A}$, съществува функтор $Id_{\boldsymbol{A}} : \boldsymbol{A} \longrightarrow \boldsymbol{A}$, дефиниран с $Id_{\boldsymbol{A}}(A) = A$, за всяко $A \in |\boldsymbol{A}|$, и $Id_{\boldsymbol{A}}(f) = f$, за всяко $f \in \boldsymbol{A}(A, B)$.

Ако $F : \boldsymbol{A} \longrightarrow \boldsymbol{B}$ и $G : \boldsymbol{B} \longrightarrow \boldsymbol{C}$ са два (контравариантни) функтора, то функторът $G \circ F : \boldsymbol{A} \longrightarrow \boldsymbol{C}$, дефиниран чрез формулите $(G \circ F)(f) = G(F(f))$, за всеки $\boldsymbol{A}$-морфизъм f, и $(G \circ F)(A) = G(F(A))$, за всеки $\boldsymbol{A}$-обект A, се нарича *композиция на функторите F и G*.

Дефиниция 0.1.5. Нека $F : \boldsymbol{A} \longrightarrow \boldsymbol{B}$ е функтор или контравариантен функтор; тогава:

- F се нарича *faithful* (респективно, *full*), ако рестрикциите на F върху множествата $hom(A, B)$ от $\boldsymbol{A}$-морфизми са инективни (респективно, сюрективни) функции, т.е., $\forall A, B \in |\boldsymbol{A}|$, $F : hom(A, B) \longrightarrow hom(F(A), F(B))$ $(F : hom(A, B) \longrightarrow hom(F(B), F(A)))$ е инекция (респективно, сюрекция),

- F се нарича *isomorphism-dense*, ако за всяко $B \in |\boldsymbol{B}|$ съществува $A \in |\boldsymbol{A}|$, такова че $F(A)$ е изоморфно на B.

Един функтор (респективно, контравариантен функтор) F се нарича *еквивалентност* (респективно, *дуалност*), ако е full, faithful и isomorphism-dense.

Казваме, че две категории $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ са *еквивалентни* (респективно, *дуално еквивалентни*), ако съществува еквивалентност (респективно, дуалност) от $\boldsymbol{A}$ в $\boldsymbol{B}$.

Дефиниция 0.1.6. Нека $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ са категории. Казваме, че $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ са *изоморфни*, ако съществуват два функтора $F : \boldsymbol{A} \longrightarrow \boldsymbol{B}$ и $G : \boldsymbol{B} \longrightarrow \boldsymbol{A}$, такива че $Id_{\boldsymbol{A}} = G \circ F$ и $F \circ G = Id_{\boldsymbol{B}}$.

Дефиниция 0.1.7. Нека $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ са категории и $F, G : \boldsymbol{A} \longrightarrow \boldsymbol{B}$ са функтори. *Естествена трансформация τ от F в G* (ще я означаваме с $\tau : F \longrightarrow G$), наричаме всяка функция, която съпоставя на всеки $\boldsymbol{A}$-обект A един $\boldsymbol{B}$-морфизъм $\tau_A : F(A) \longrightarrow G(A)$, така че да е изпълнено следното *естествено условие*:

$$G(f) \circ \tau_A = \tau_B \circ F(f),$$

за всеки $\boldsymbol{A}$-морфизъм $f : A \longrightarrow B$. Една естествена трансформация $\tau : F \longrightarrow G$, чиито компоненти τ_A са изоморфизми, се нарича *естествен изоморфизъм от F в G* и се означава с $F \cong G$.

Теорема 0.1.8. *Един (контравариантен) функтор* $F : \boldsymbol{A} \longrightarrow \boldsymbol{B}$ *е еквивалентност (респективно, дуалност) тогава и само тогава, когато съществува (контравариантен) функтор* $G : \boldsymbol{B} \longrightarrow \boldsymbol{A}$*, такъв че* $Id_{\boldsymbol{A}} \cong G \circ F$ *и* $F \circ G \cong Id_{\boldsymbol{B}}$.

Всички понятия и означения, които не са дефинирани тук, но се използват в тази дисертация, могат да бъдат намерени в [1, 39].

0.2 Булеви алгебри

Дефиниция 0.2.1. Една бинарна релация “ $\leq$” в едно множество X се нарича *частична наредба* (или просто, *наредба*), ако тя е рефлексивна, транзитивна и антисиметрична; ако “ $\leq$” е наредба в X, то двойката $(X, \leq)$ се нарича *частично наредено множество* (или просто, *наредено множество*). В едно наредено множество $(X, \leq)$, за всеки $a, b \in X$, символът $a \vee b$ означава $\sup\{a, b\}$, т.е., най-малкия елемент $c \in X$ (ако съществува) такъв, че $a \leq c$ и $b \leq c$; той се нарича *обединение (join) на* a и b; аналогично се въвежда означението $a \wedge b$ за $\inf\{a, b\}$; елементът $a \wedge b$ на X се нарича *сечение (meet) на* a и b.

Дефиниция 0.2.2. *Псевдорешетка* наричаме всяко наредено множество, което съдържа всички крайни непразни сечения и обединения на своите елементи; псевдорешетките с най-малък елемент (който се означава с 0) и *най-голям елемент* (който се означава с 1) наричаме *решетки* (допуска се 0 и 1 да съвпадат). *Решетъчен хомоморфизъм* наричаме всяка функция между решетки, която запазва елементите 0 и 1 и операциите $\wedge$ и $\vee$.

Решетка, в която всяко подмножество има обединение (т.е., супремум) и сечение (т.е., инфимум), се нарича *пълна решетка*. Обединението и сечението на едно подмножество E се означават (ако съществуват) респективно с $\bigvee E$ и $\bigwedge E$.

Една решетка се нарича *дистрибутивна*, ако $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ за всеки a, b, c.

Ако един елемент x на една решетка $(A, \leq)$, удовлетворява условията $x \wedge a = 0$ и $x \vee a = 1$, то той се нарича *допълнение на* a. В дистрибутивните решетки допълненията, ако съществуват, са единствени.

Една дистрибутивна решетка, в която всеки елемент има допълнение, се нарича *булева алгебра*. Допълнението на един елемент a ще означаваме с a^*.

Решетъчните хомоморфизми между булеви алгебри се наричат *булеви хомоморфизми.*

Дефиниция 0.2.3. Ако $(A, \leq)$ е наредено множество и $B \subseteq A$, то B се нарича *гъсто подмножество на* A, ако за всяко $a \in A \setminus \{0\}$, съществува $b \in B \setminus \{0\}$, такова че $b \leq a$. Нека $(B, \leq_1)$ е наредено множество и $f : (A, \leq) \longrightarrow (B, \leq_1)$ е изображение; казваме, че f е *гъсто изображение*, ако $f(A)$ е гъсто подмножество на B.

Дефиниция 0.2.4. Едно подмножество F на една решетка B се нарича *филтър в* B, ако удовлетворява следните условия:

(F1) $0 \notin F$,

(F2) от $a, b \in F$ следва, че $a \wedge b \in F$, и

(F3) от $a \leq b$ и $a \in F$ следва, че $b \in F$.

Максималните (по отношение на включването) филтри в B наричаме *ултрафилтри в* B. Множеството от всички ултрафилтри в B ще означаваме с

$$Ult(B).$$

Дефиниция 0.2.5. Едно подмножество I на една решетка A се нарича *идеал в* A, ако са изпълнени следните три условия:

(I1) $0 \in I$,

(I2) ако $x \in I$, $y \in A$ и $y \leq x$, то $y \in I$,

(I3) ако $x \in I$ и $y \in I$, то $x \vee y \in I$.

Твърдение 0.2.6. *Нека F е филтър в една булева алгебра $\boldsymbol{B}$. Тогава следните условия са еквивалентни:*

а) F е ултрафилтър;

б) за всяко $b \in \boldsymbol{B}$, имаме, че $b \in F$ или $b^* \in F$;

в) ако $a \vee b \in F$, то $a \in F$ или $b \in F$.

Следния добре познат вариант на известната "Грил Лема", който може да бъде доказан точно както Лема 5.7 от [47], е валиден за булеви алгебри:

Теорема 0.2.7. *Нека* $(B, 0, 1, \vee, \wedge, ^*)$ *е булева алгебра и* Γ *е подмножество на* B*, такова че* $0 \notin \Gamma$ *и* $a \vee b \in \Gamma$ *тогава и само тогава, когато* $a \in \Gamma$ *или* $b \in \Gamma$*. Ако* $a_0 \in \Gamma$*, то съществува ултрафилтър* σ *в* B*, такъв че* $a_0 \in \sigma$ *и* $\sigma \subseteq \Gamma$*.*

Дефиниция и Твърдение 0.2.8. Ще припомним понятието *lower adjoint* за наредени множества. Нека $\varphi : A \longrightarrow B$ е монотонно изображение между две наредени множества (т.е., φ запазва наредбата). Ако $\varphi_\Lambda : B \longrightarrow A$ е монотонно изображение, което удовлетворява следното условие:

(Λ) за всяко $a \in A$ и всяко $b \in B$, $b \leq \varphi(a)$ тогава и само тогава, когато $\varphi_\Lambda(b) \leq a$,

казваме, че φ_Λ е *lower adjoint* на φ. Лесно се вижда, че условието (Λ) е еквивалентно на следните две условия:

(Λ1) $\forall b \in B$, $\varphi(\varphi_\Lambda(b)) \geq b$;
(Λ2) $\forall a \in A$, $\varphi_\Lambda(\varphi(a)) \leq a$.

Добре известно е, че $\varphi \circ \varphi_\Lambda \circ \varphi = \varphi$, $\varphi_\Lambda \circ \varphi \circ \varphi_\Lambda = \varphi_\Lambda$, и

(1) φ_Λ запазва всички обединения, които съществуват в B.

Дефиниция и Твърдение 0.2.9. Ще припомним, че една пълна решетка L се нарича *фрейм*, ако L удовлетворява безкрайния дистрибутивен закон

$$a \wedge \bigvee S = \bigvee \{a \wedge s \mid s \in S\},$$

за всяко $a \in L$ и всяко $S \subseteq L$.

Ако A е дистрибутивна решетка, то означаваме с

$$Idl(A)$$

фрейма от всички идеали на A; да напомним, че сечението в $Idl(A)$ на произволна фамилия от идеали в A е теоретико-множественото сечение на елементите на тази фамилия, а обединението в $Idl(A)$ на произволна фамилия от идеали в A е идеалът породен от теоретико-множественото обединение на елементите на тази фамилията.

Всички понятия и означения, които не са дефинирани тук, но се използват в тази дисертация, могат да бъдат намерени в [39, 40, 52].

0.3 Обща топология

Под "околност" на точка в едно топологично пространство ще разбираме "околност в смисъл на Bourbaki", т.е. нейната вътрешност съдържа дадената точка.

Означения 0.3.1. Ако X е множество, то с $Exp(X)$ ще означаваме фамилията от всички подмножества на X. Множеството от всички естествени числа ще означаваме с ω или с $\mathbb{N}$, а множеството от всички положителни естествени числа – с $\mathbb{N}^+$. Ако $f : X \longrightarrow Y$ е функция и $\mathcal{G} \subseteq Exp(Y)$, то $f^{-1}(\mathcal{G})$ е означение, както обикновено, за $\{f^{-1}(G) \mid G \in \mathcal{G}\}$.

Ако (X, τ) е топологично пространство и $A \subseteq X$, то с $\mathrm{cl}_X(A)$ (или просто с $\mathrm{cl}(A)$) ще означаваме затворената обвивка на A в X, а с $\mathrm{int}_X(A)$ (или просто с $\mathrm{int}(A)$) ще означаваме вътрешността на A в X. Ако x е точка на X, то с $\mathcal{N}_{(X,\tau)}(x)$ (или просто с $\mathcal{N}_X(x)$, или $\mathcal{N}(x)$) ще означаваме филтъра от околностите на x в (X, τ).

Дефиниция и Твърдение 0.3.2. *Разширение* на едно топологично пространство X наричаме всяка двойка (Y, f), където Y е топологично пространство и $f : X \longrightarrow Y$ е гъсто влагане на X в Y (т.е., $f : X \longrightarrow f(X)$ е хомеоморфизъм и $\mathrm{cl}_Y(f(X)) = Y$).

Две разширения (Y_i, e_i), $i = 1, 2$, на X се наричат *изоморфни* (или *еквивалентни*), ако съществува хомеоморфизъм $\varphi : Y_1 \longrightarrow Y_2$, такъв че $\varphi \circ e_1 = e_2$. Така дефинираната релацията "изоморфизъм" е релация на еквивалентност в класа от всички разширения на X. Класът на еквивалентност на едно разширение (Y, e) на X ще означаваме с $[(Y, e)]$. Пишем

$$(Y_1, e_1) \geq (Y_2, e_2) \text{ (респективно } (Y_1, e_1) \geq_s (Y_2, e_2)),$$

ако съществува непрекъснато изображение (респективно, непрекъсната сюрекция) $\varphi : Y_1 \longrightarrow Y_2$, такова че $\varphi \circ e_1 = e_2$. Тези релации са преднаредби (т.е., те са рефлексивни и транзитивни). Наричаме ги *проективни преднаредби*. Релациите на еквивалентност, асоциирани с тези две преднаредби (т.е. когато $(Y_1, e_1) \leq (Y_2, e_2)$ и $(Y_2, e_2) \leq (Y_1, e_1)$, и аналогично за $\leq_s$), съвпадат с релацията "изоморфизъм" (дефинирана по-горе) в класа на всички хаусдорфови разширения на X

(виж [4]). За всеки две хаусдорфови разширения (Y_i, e_i), $i = 1, 2$, на едно хаусдорфово пространство X полагаме $[(Y_1, e_1)] \leq [(Y_2, e_2)]$ ако $(Y_1, e_1) \leq (Y_2, e_2)$. Тази дефиниция е коректна. Получената релация е вече частична наредба. Аналогично полагане се прави и чрез релацията " $\leq_s$".

Едно разширение (eX, e) на топологично пространство X се нарича *стриктно разширение на* X, ако $\{\mathrm{cl}_{eX}(e(A)) \mid A \subseteq X\}$ е затворена база на eX. Всяко регулярно разширение на едно топологично пространство е стриктно (вж. [4, 56]).

Дефиниции 0.3.3. Ще напомним, че:

- едно непрекъснато изображение се нарича *затворено*, ако образът на всяко затворено множество е затворено множество;

- едно непрекъснато изображение се нарича *отворено*, ако образът на всяко отворено множество е отворено множество;

- едно изображение се нарича *съвършенно*, ако то е компактно (т.е., прообразите на точките са компактни множества) и затворено;

- едно непрекъснато изображение $f : X \longrightarrow Y$ се нарича *квази-отворено* ([43]), ако за всяко непразно отворено подмножество U на X, е изпълнено, че $\mathrm{int}(f(U)) \neq \emptyset$;

- едно изображение $f : X \longrightarrow Y$ се нарича *скелетно* ([44]), ако

  (2) $\quad \mathrm{int}(f^{-1}(\mathrm{cl}(V))) \subseteq \mathrm{cl}(f^{-1}(V))$

  за всяко отворено подмножество V на Y;

- едно непрекъснато изображение $f : X \longrightarrow Y$ се нарича *неприводимо*, ако $f(X) = Y$ и ако за всяко собствено затворено подмножество A на X, е в сила, че $f(A) \neq Y$.

Дефиниция 0.3.4. Да напомним, че едно подмножество F на едно топологично пространство (X, τ) се нарича *регулярно затворено*, ако $F = \mathrm{cl}(\mathrm{int}(F))$. Ясно е, че F е регулярно затворено тогава и само тогава, когато е затворена обвивка на

отворено множество. Фамилията от всички регулярно затворени подмножества на (X, τ) ще означаваме с

$$RC(X, \tau)$$

(често ще пишем просто $RC(X)$).

Едно подмножество U на едно топологично пространство (X, τ) се нарича *регулярно отворено*, ако $U = \mathrm{int}(\mathrm{cl}(U))$. Множеството от всички регулярно отворени подмножества на (X, τ) ще означаваме с

$$RO(X, \tau)$$

(или просто с $RO(X)$).

Означение 0.3.5. Нека (X, τ) е топологично пространство. Със

$$CR(X, \tau)$$

ще означаваме фамилията от всички компактни регулярно затворени подмножества на (X, τ). Често ще пишем $CR(X)$ вместо $CR(X, \tau)$.

Твърдение 0.3.6. *Ако (X, τ) е топологично пространство и във фамилията $RC(X, \tau)$ въведем следните операции:*

$$1 = X,\ 0 = \emptyset,\ F^* = \mathrm{cl}(X \setminus F),\ F \vee G = F \cup G,\ F \wedge G = \mathrm{cl}(\mathrm{int}(F \cap G)),$$

то $(RC(X, \tau), 0, 1, \wedge, \vee, ^*)$ е пълна булева алгебра. Безкрайните операции се изразяват чрез формулите:

$$\bigvee_{\gamma \in \Gamma} F_\gamma = \mathrm{cl}(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} F_\gamma)(= \mathrm{cl}(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \mathrm{int}(F_\gamma)) = \mathrm{cl}(\mathrm{int}(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} F_\gamma))),$$

и

$$\bigwedge \{F_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\} = \mathrm{cl}(\mathrm{int}(\bigcap \{F_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\})).$$

Също така, ако във фамилията $RO(X, \tau)$ въведем следните операции: $U \vee V = \mathrm{int}(\mathrm{cl}(U \cup V))$, $U \wedge V = U \cap V$, $U^* = \mathrm{int}(X \setminus U)$, $0 = \emptyset$, $1 = X$, то $(RO(X, \tau), 0, 1, \wedge, \vee, ^*)$ е пълна булева алгебра. Безкрайните операции се изразяват чрез формулите:

$$\bigwedge_{i \in I} U_i = \mathrm{int}(\mathrm{cl}(\bigcap_{i \in I} U_i))(= \mathrm{int}(\bigcap_{i \in I} U_i))$$

и

$$\bigvee_{i\in I} U_i = \mathrm{int}(\mathrm{cl}(\bigcup_{i\in I} U_i)).$$

Следното твърдение е добре известно (виж например, [11], стр.271).

Лема 0.3.7. *Нека X е гъсто подпространство на едно топологично пространство Y. Тогава функциите*

$$r : RC(Y) \longrightarrow RC(X), \quad F \mapsto F \cap X,$$

и

$$e : RC(X) \longrightarrow RC(Y), \quad G \mapsto \mathrm{cl}_Y(G),$$

са булеви изоморфизми между булевите алгебри $RC(X)$ и $RC(Y)$, и $e \circ r = id_{RC(Y)}$, $r \circ e = id_{RC(X)}$.

Дефиниция 0.3.8. Ако X е множество, то една фамилия $\mathcal{A} \subseteq Exp(X)$ се нарича *центрирана фамилия*, ако всяка крайна подфамилия на $\mathcal{A}$ има непразно сечение.

Всички понятия и означения, които не са дефинирани тук, но се използват в тази дисертация, могат да бъдат намерени в [32].

Глава 1

Теореми за изоморфизъм между някои категории, възникващи в теорията на локално компактните разширения

1.1 Увод

Както вече бе споменато във Въведението, в тази глава, която е базирана на статиите [22, 23], се прави следното:

(1) показва се, че категориите, възникващи по естествен начин от описанията на локално компактните хаусдорфови разширения на тихонови пространства, дадени от Leader ([42]), Димов и Дойчинов ([20]) и Димов ([15]), са изоморфни, като при това в представените доказателства няма да бъдат използвани описанията на локално компактни разширения получени от споменатите автори, а ще се прави директен преход между съответните структури;

(2) описват се, с помощта на специални близости, наредените множества от всички (с точност до еквивалентност) паракомпактни (респективно, локално компактни паракомпактни) разширения на тихоново пространство.

Главата е организирана както следва. Във втория параграф се съдържат всички необходими за по-нататъшното изложение подготвителни резултати и понятия. Тук дефинираме структурите, чрез които Leader ([42]), Димов и Дойчинов ([20]) и Димов ([15]) са получили своите описания на локално компактните разширения на тихоново пространство, и привеждаме някои твърдения за тези

структури. В трети параграф представяме първо нашите резултати за локално близостни пространства, обобщаващи някои основни теореми от теорията на близостите на Ефремович, а след това доказваме с тяхна помощ нашите основни теореми – Теорема 1.3.8 и Теорема 1.3.9. В Теорема 1.3.8 е показано, че категорията $\mathcal{C}_1$ на LC-близостните пространства и SR-близостно непрекъснатите изображения между тях (т.е. категорията, построена с помощта на структурите и понятията, въведени от Димов в [15], чрез които той описва локално компактните разширения на тихоново пространство) е изоморфна на категорията $\mathcal{C}_2$ на отделимите локално близостни пространства и еквинепрекъснатите изображения между тях (т.е. на категорията, построена с помощта на структурите и понятията, въведени от Leader в [42], чрез които той описва локално компактните разширения на тихоново пространство), а в Теорема 1.3.9 се доказва, че категорията $\mathcal{C}_2$ е изоморфна на категорията на отделимите L-супертопологични пространства и супертопологичните изображения между тях (т.е. на категорията, построена с помощта на структурите и понятията, въведени от Димов и Дойчинов в [20], чрез които те описват локално компактните разширения на тихоново пространство). Резултатите, описани в този параграф, са публикувани в статията ни [22]. В четвърти параграф са описани, с помощта на специални близости, наредените множества от всички (с точност до еквивалентност) паракомпактни (респективно, локално компактни паракомпактни) разширения на тихоново пространство. Това описание е получено с помощта на понятието *SR-близост*, въведено в [15] и използвано там за описание на нареденото множество от всички (с точност до еквивалентност) регулярни разширения на регулярно пространство, както и за описание на наредените множества от други видове разширения. Доколкото ни е известно, първото описание на нареденото множество от всички (с точност до еквивалентност) паракомпактни разширения на тихоново пространство е дадено през 1976 г. от H. Bentley и H. Herlich [6] на езика на специални *nearness structures*. По-късно, през 1981 г., В. Зайцев [64] дава друго описание на това наредено множество, използвайки проекционни спектри. Трето описание на това множество е получено през 1982 г. от А. Борубаев [9], който използва равномерни структури. Описание на нареденото множество от всички (с точност до еквивалентност) локално компактни паракомпактни разширения на тихоново

пространство е получено от В. Захаров [62, 63] (през 1978 г.) с помощта на специални векторни решетки от функции, от Д. Дойчинов [27] (през 1983 г.) – чрез понятието *супертопологично пространство*, и от А. Борубаев [10] (през 1989 г.) – чрез използването на равномерни структури. Както се вижда, нито едно от тези описания не е на езика на близостите, а именно на този език е описано в компактификационната теорема на Ю. М. Смирнов [53] нареденото множество от всички (с точност до еквивалентност) компактни хаусдорфови разширения на тихоново пространство. Затова съвсем естествено възниква задачата за описание на нареденото множество от всички (с точност до еквивалентност) паракомпактни разширения на тихоново пространство и на нареденото множество от всички (с точност до еквивалентност) локално компактни паракомпактни разширения на тихоново пространство чрез езика на специални близости, която и решаваме в този четвърти параграф. Резултатите, описани в този параграф, са публикувани в статията [23].

1.2 Предварителни сведения

1.2.1. ([4]) Нека Σ е фамилия от отворени филтри в едно топологично пространство (X, τ), такива че $\{\mathcal{N}_X(x) \mid x \in X\} \subseteq \Sigma$. Дефинираме топология $\mathcal{T}$ в множеството Σ, като взимаме като отворена база фамилията $\{U^* \mid U \in \tau\}$, където $U^* = \{\mathcal{F} \in \Sigma \mid U \in \mathcal{F}\}$. Полагаме $\sigma(x) = \mathcal{N}_X(x)$, за всяко $x \in X$. Тогава $((\Sigma, \mathcal{T}), \sigma)$ е точно разширение на X. Неговата филтърна следа в X (т.е. фамилията $\{\sigma^{-1}(\mathcal{N}_{(\Sigma,\mathcal{T})}(y)) \mid y \in \Sigma\}$) е точно дадената фамилия Σ. Разширението (Σ, σ) се нарича *точно разширение на X с филтърна следа Σ*.

Означение 1.2.2. Нека (X, τ) е топологично пространство и (eX, e) е разширение на X. Ако $A \subseteq X$, то с $Ex_{eX}(A)$ (или просто с $Ex(A)$) ще означаваме множеството $eX \setminus \mathrm{cl}_{eX}(e(X \setminus A))$. Ще припомним, че ако $U \in \tau$, то $Ex(U)$ е най-голямото отворено подмножество на eX, чийто прообраз чрез e е U.

Ще ни е необходима следната лема:

Лема 1.2.3. ([4]) *Нека (eX, e) е точно разширение на топологично пространство X с филтърна следа Σ. Тогава:*

а) $U^* = Ex_{eX}U$*, за всяко отворено* $U \subseteq X$*.*

б) $U^* \cap V^* = (U \cap V)^*$*, за всеки две отворени подмножества* $U, V \subseteq X$*.*

Дефиниция 1.2.4. ([47]) *Близост на Чех* (или просто *близост*) в едно множество X наричаме всяка симетрична бинарна релация δ в $Exp(X)$, която удовлетворява следните три условия:

(P1) $\emptyset\overline{\delta}A$, за всяко $A \subseteq X$ (където $\overline{\delta}$ е отрицанието на δ);

(P2) $A\delta A$, за всяко $A \neq \emptyset$;

(P3) $A\delta(B \cup C)$ тогава и само тогава, когато $A\delta B$ или $A\delta C$.

Една близост на Чех се нарича *отделима*, ако удовлетворява условието

(P4) от $x\delta y$ следва, че $x = y$.

Ако δ е (отделима) близост в едно множество X, то двойката (X, δ) се нарича *(отделимо) близостно пространство*. Пишем $A \ll_\delta B$ (или просто $A \ll B$), ако $A\overline{\delta}(X \setminus B)$.

Ако $Y \subseteq X$, то ще означаваме с δ_Y рестрикцията на δ в Y.

Една функция $f : (X_1, \delta_1) \longrightarrow (X_2, \delta_2)$ между две близостни пространства (X_i, δ_i), $i = 1, 2$, се нарича *близостно непрекъсната*, ако за всяко $A, B \subseteq X_1$, от $A\delta_1 B$ следва, че $f(A)\delta_2 f(B)$.

Нека (X, δ) е близостно пространство. Тогава операторът cl_δ в $Exp(X)$, дефиниран чрез $cl_\delta(A) = \{x \in X \mid x\delta A\}$, е оператор на Чех за затворена обвивка. Следователно $\tau_\delta = \{X \setminus A \mid A = cl_\delta(A)\}$ е топология в X.

Дефиниция 1.2.5. Нека X е множество. Една отделима близост δ в X се нарича:

а) *R-близост* (а двойката (X, δ) – *R-близостно пространство*) ([35]), ако удовлетворява аксиомата

(R) ако $x \in X$ и $x \ll A$, то съществува $B \subseteq X$, такова че $x \ll B \ll A$;

б) *EF-близост* (или *близост на Ефремович*) (а двойката (X, δ) – *EF-близостно пространство*) ([29]), ако δ удовлетворява аксиомата

(EF) ако $A, B \subseteq X$ и $A \ll B$, то съществува $C \subseteq X$, такова че $A \ll C \ll B$,

в) *близост на Lodato* ([47]), ако δ удовлетворява аксиомата

(LO) за всяко $A, B \subseteq X$, от $cl_\delta(A)\delta cl_\delta(B)$ следва, че $A\delta B$.

Ще отбележим, че ако δ е R-близост в множеството X, то cl_δ е оператор на Kuratowski за затворена обвивка ([35]).

Дефиниция 1.2.6. ([47]) Една непразна фамилия $\mathcal{G}$ от подмножества на едно множество X се нарича *грил* в X, ако удовлетворява следните три условия:
(G1) $\emptyset \notin \mathcal{G}$;
(G2) ако $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{G}$, то $A_1 \in \mathcal{G}$ или $A_2 \in \mathcal{G}$;
(G3) ако $A \in \mathcal{G}$, $B \subseteq X$ и $A \subseteq B$, то $B \in \mathcal{G}$.

Лема 1.2.7. ([47]) *Нека $\mathcal{G}$ е грил в X. Ако $A_0 \in \mathcal{G}$, то съществува ултрафилтър $\mathcal{U}$, такъв че*
(а) $A_0 \in \mathcal{U}$, и
(б) $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{G}$.

Дефиниция 1.2.8. Нека (X, δ) е близостно пространство и $\emptyset \neq \sigma \subseteq Exp(X)$. Фамилията σ се нарича *клъстър* в (X, δ), ако удовлетворява следните три условия:
(CL1) ако $A, B \in \sigma$, то $A\delta B$;
(CL2) ако $A \subseteq X$ и $A\delta B$ за всяко $B \in \sigma$, то $A \in \sigma$;
(CL3) ако $A \cup B \in \sigma$, то или $A \in \sigma$ или $B \in \sigma$.

Очевидно, всеки клъстър в едно близостно пространство (X, δ) е грил в X.

Теорема 1.2.9. ([47]) *Една фамилия σ от подмножества на едно EF-близостно пространство (X, δ) е клъстър тогава и само тогава, когато съществува ултафилтър $\mathcal{U}$ в X, такъв че*

(1.1) $\sigma = \{A \subseteq X \mid A\delta B$ *за всяко* $B \in \mathcal{U}\}$.

Ако σ е клъстър в (X, δ) и $A_0 \in \sigma$, то съществува ултрафилтър $\mathcal{U}$ в X съдържащ A_0 и удовлетворяващ равенството (1.1).

Дефиниция 1.2.10. ([47]) Казваме, че една фамилия $\mathcal{A}$ от подмножества на едно близостно пространство (X, δ) е *δ-система*, ако за всяко $A \in \mathcal{A}$ съществува $B \in \mathcal{A}$, такова че $B \ll A$.

Дефиниция 1.2.11. ([47]) Един филтър $\mathcal{F}$ в едно близостно пространство (X, δ) се нарича *r-филтър*, ако е δ-система. Един r-филтър $\mathcal{F}$ се нарича *e-филтър* в (X, δ), ако удовлетворява следното условие:
(E) от $A \ll B$ следва, че или $(X \setminus A) \in \mathcal{F}$, или $B \in \mathcal{F}$.

Множеството от всички e-филтри в (X, δ) ще означаваме с $\Sigma_{end}(X, \delta)$ или просто с $\Sigma_{end}(\delta)$.

Твърдение 1.2.12. ([47]) *Всяка центрирана δ-система се съдържа в максимален r-филтър.*

Теорема 1.2.13. ([47]) *Нека δ е EF-близост в X. Тогава $\mathcal{F}$ е максимален r-филтър в (X, δ) тогава и само тогава, когато $\mathcal{F}$ е e-филтър в (X, δ).*

Твърдение 1.2.14. ([47]) *Нека δ е EF-близост в X и $A, B \subseteq X$. Тогава $A \ll B$ тогава и само тогава, когато всеки e-филтър в X съдържа или $X \setminus A$, или B.*

Дефиниция 1.2.15. ([15]) Нека (X, δ) е R-близостно пространство и Σ е множество от r-филтри в (X, δ), такова че:
(SR1) $\{\mathcal{N}(x) \mid x \in X\} \subseteq \Sigma$,
(SR2) ако $A, B \subseteq X$, то $A\delta B$ тогава и само тогава, когато $\exists \mathcal{F} \in \Sigma$, такъв че $X \setminus A, X \setminus B \notin \mathcal{F}$.

Тогава двойката $\alpha = (\delta, \Sigma)$ се нарича *SR-близост* в множеството X, а двойката (X, α) – *SR-близостно пространство*. Ако (X, τ) е топологично пространство и $\alpha = (\delta, \Sigma)$ е SR-близост в множеството X, такава че $\tau = \tau_\delta$, то казваме, че α е *SR-близост в пространството X*.

Една функция $f : (X, \alpha_1) \longrightarrow (Y, \alpha_2)$, където $\alpha_i = (\delta_i, \Sigma_i)$, $i = 1, 2$, са SR-близости, се нарича *SR-близостно непрекъсната*, ако за всяко $\mathcal{F} \in \Sigma_1$ съществува $\mathcal{G} \in \Sigma_2$, такова че $\mathcal{G}$ се съдържа във филтъра в Y породен от филтърната база $f(\mathcal{F})$.

Твърдение 1.2.16. ([15]) *Условието ($SR2$) от Дефиниция 1.2.15 е еквивалентно на следното условие:*
(SR2') ако $A, B \subseteq X$, то $A\delta B$ тогава и само тогава, когато съществува елемент $\mathcal{F} \in \Sigma$, такъв че за всяко $F \in \mathcal{F}$ е в сила $A \cap F \neq \emptyset$ и $B \cap F \neq \emptyset$.

Твърдение 1.2.17. ([15]) *Ако* $f : (X, \alpha_1) \longrightarrow (Y, \alpha_2)$, *където* $\alpha_i = (\delta_i, \Sigma_i)$, $i = 1, 2$, *са* SR*-близости, е* SR*-близостно непрекъсната функция, то* $f : (X, \delta_1) \longrightarrow (Y, \delta_2)$ *е близостно непрекъснато изображение.*

Дефиниция 1.2.18. ([15]) Нека X е регулярно пространство и $\alpha_i = (\delta_i, \Sigma_i)$, $i = 1, 2$, са две SR-близости в пространството X. Полагаме $\alpha_1 \leq \alpha_2$, ако всеки елемент на Σ_2 съдържа елемент на Σ_1. Полагаме $\alpha_1 \leq_s \alpha_2$, ако $\alpha_1 \leq \alpha_2$ и, освен това, всеки елемент на Σ_1 се съдържа в някой елемент на Σ_2.

Означение 1.2.19. Нека X е топологично пространство. Множеството от всички регулярни разширения на пространството X ще означаваме с $R(X)$. Множеството от всички SR-близости в пространството X ще означаваме със $SRProx(X)$.

Теорема 1.2.20. ([15]) *Нека* X *е регулярно пространство. Тогава наредените множества* $(R(X), \leq)$ *(респективно,* $(R(X), \leq_s)$*) и* $(SRProx(X), \leq)$ *(респективно,* $(SRProx(X), \leq_s)$*) са изоморфни. Изоморфизмите между тези наредени множества са конструирани както следва: на всяка* SR*-близост* $\alpha = (\delta, \Sigma)$ *в пространството* X *съответства точното разширение на* X *с филтърна следа* Σ *(това разширение ще означаваме с* $(r_\alpha X, r_\alpha)$*); обратно, на всяко регулярно разширение* (eX, e) *на* X *съответства* SR*-близостта* $\alpha_{(eX,e)} = (\delta_{(eX,e)}, \Sigma_{(eX,e)})$*, където, за всяко* $A, B \subseteq X$*,* $A\delta_{(eX,e)}B$ *тогава и само тогава, когато* $\mathrm{cl}_{eX}(A) \cap \mathrm{cl}_{eX}(B) \neq \emptyset$ *и* $\Sigma_{(eX,e)} = \{e^{-1}(\mathcal{N}_{eX}(y)) \mid y \in eX\}$*; следователно, ако* (eX, e) *е регулярно разширение на* X*, то разширението* $(r_{\alpha_{(eX,e)}} X, r_{\alpha_{(eX,e)}})$ *е еквивалентно на* (eX, e)*, и ако* α *е* SR*-близост в пространството* X*, то* $\alpha_{(r_\alpha X, r_\alpha)} = \alpha$*.*

Дефиниция 1.2.21. ([15]) Една SR-близост $\alpha = (\delta, \Sigma)$ в едно множество X се нарича *LC-близост* в множеството X, ако за всяко $\mathcal{F} \in \Sigma$ съществува $U \in \mathcal{F}$ със следните две свойства:

(LC1) рестрикцията δ_U на δ в U е EF-близост;

(LC2) ако $\mathcal{G} \in \Sigma_{end}(\delta)$ и $U \in \mathcal{G}$, то $\mathcal{G} \in \Sigma$.

Двойката (X, α), където α е LC-близост в множеството X, се нарича *LC-близостно пространство.*

Означение 1.2.22. Нека (X, τ) е тихоново пространство. Множеството от всички (с точност до еквивалентност) локално компактни разширения на простран-

ството X ще означаваме с $LC(X)$; с $LCProx(X)$ ще означаваме множеството от всички LC-близости в пространството (X, τ).

Теорема 1.2.23. ([15]) *Нека X е тихоново пространство. Тогава наредените множества $(LC(X), \leq)$ (респективно $(LC(X), \leq_s)$) и $(LCProx(X), \leq)$ (респективно $(LCProx(X), \leq_s)$) са изоморфни и изоморфизмите между тях са конструирани както в Теорема 1.2.20.*

Дефиниция 1.2.24. ([42]) Една непразна фамилия $\mathcal{B}$ от подмножества на едно множество X се нарича *ограниченост* в X, ако удовлетворява следните две условия:

(B1) от $A \in \mathcal{B}$ и $B \subseteq A$ следва, че $B \in \mathcal{B}$, и

(B2) от $A, B \in \mathcal{B}$ следва, че $A \cup B \in \mathcal{B}$.

Елементите на $\mathcal{B}$ се наричат *ограничени множества.*

Дефиниция 1.2.25. ([42]) Всяка тройка $(X, \beta, \mathcal{B})$, където X е множество, β е (отделима) близост в X и $\mathcal{B}$ е ограниченост в X, за която са изпълнени следните аксиоми:

(LP1) ако $A \in \mathcal{B}$, $C \subseteq X$ и $A \ll C$, то съществува $B \in \mathcal{B}$, такова че $A \ll B \ll C$;

(LP2) ако $A, B \subseteq X$ и $A\beta C$, то съществува $B \in \mathcal{B}$, такова че $B \subseteq C$ и $A\beta B$,

се нарича *(отделимо) локално близостно пространство*

Една функция $f : X_1 \longrightarrow X_2$ между две локално близостни пространства $(X_1, \beta_1, \mathcal{B}_1)$ и $(X_2, \beta_2, \mathcal{B}_2)$ се нарича *еквинепрекъснато изображение*, ако за всеки $A, B \subseteq X$ са изпълнени следните две условия:

(EQ1) от $A\beta_1 B$ следва, че $f(A)\beta_2 f(B)$;

(EQ2) от $B \in \mathcal{B}_1$ следва, че $f(B) \in \mathcal{B}_2$.

Един филтър (респективно, клъстър) $\mathcal{F}$ в едно локално близостно пространство $(X, \beta, \mathcal{B})$ се нарича *ограничен*, ако $\mathcal{F} \cap \mathcal{B} \neq \emptyset$.

Твърдение 1.2.26. ([42]) *Нека $(X, \beta, \mathcal{B})$ е локално близостно пространство. Тогава:*

(а) всяко крайно подмножество на X е ограничено;

(б) за всяко $B \in \mathcal{B}$ съществува $D \in \mathcal{B}$ такова, че $B\overline{\beta}(X \setminus D)$;

(в) β е близост на Lodato.

Дефиниция 1.2.27. ([26]) Нека X е множество. Нека е дадено множество $\mathcal{M}$, такова че $\mathcal{J}(X) \subseteq \mathcal{M} \subseteq Exp(X)$, където $\mathcal{J}(X)$ е множеството от всички едноточкови подмножества на X. Тогава $\Sigma = (\mathcal{M}, \mathcal{V})$ се нарича *супертопология* в X (а двойката (X, Σ) – *супертопологично пространство*), ако на всяко $A \in \mathcal{M}$ е съпоставен филтър $\mathcal{V}(A)$ в X, така че да са изпълнени следните две условия:

(ST1) $A \subseteq U$, за всяко $A \in \mathcal{M}$ и всяко $U \in \mathcal{V}(A)$;

(ST2) ако $U \in \mathcal{V}(A)$, то съществува такова $V \in \mathcal{V}(A)$, че $U \in \mathcal{V}(B)$ винаги когато $B \in \mathcal{M}$ и $B \subseteq V$.

Ще отбележим, че всяка супертопология $\Sigma = (\mathcal{M}, \mathcal{V})$ в едно множество X индуцира топология в множеството X, чийто филтри от околности на точките на X са точно филтрите $\{\mathcal{V}(\{x\}) \mid x \in X\}$.

Една супертопология $\Sigma = (\mathcal{M}, \mathcal{V})$ в X се нарича *симетрична*, ако удовлетворява следното допълнително условие:

(STS) ако $A, B \in \mathcal{M}$ и $U \cap B \neq \emptyset$ за всяко $U \in \mathcal{V}(A)$, то $V \cap A \neq \emptyset$ за всяко $V \in \mathcal{V}(B)$.

Дефиниция 1.2.28. ([20]) Една симетрична супертопология $\Sigma = (\mathcal{M}, \mathcal{V})$ в едно множество X наричаме *L-супертопология* (а двойката (X, Σ) – *L-супертопологично пространство*), ако са изпълнени следните условия:

(LST1) ако $A \in \mathcal{M}$ и $B \subseteq A$, то $B \in \mathcal{M}$;

(LST2) ако $A, B \in \mathcal{M}$, то $A \cup B \in \mathcal{M}$;

(LST3) ако $A \in \mathcal{M}$, то съществува $U \in \mathcal{V}(A)$, такова че $U \in \mathcal{M}$.

Нека $(\mathcal{M}_X, \mathcal{V}_X)$ е супертопология в X и $(\mathcal{M}_Y, \mathcal{V}_Y)$ е супертопология в Y. Едно изображение $f : X \longrightarrow Y$ се нарича *супертопологично*, ако удовлетворява следните условия:

(STC1) $f(\mathcal{M}_X) \subseteq \mathcal{M}_Y$;

(STC2) $f^{-1}(\mathcal{V}_Y(f(A))) \subseteq \mathcal{V}_X(A)$, за всяко $A \in \mathcal{M}_X$.

Дефиниция 1.2.29. Една L-супертопология $\Sigma = (\mathcal{M}, \mathcal{V})$ в едно множество X се нарича *отделима*, ако за всеки две различни точки x и y от X съществува $V \in \mathcal{V}(\{x\})$, такова че $y \notin V$.

Всички понятия и означения, които не са дефинирани тук, но се използват в тази дисертация, могат да бъдат намерени в [1, 32, 47].

1.3 Теореми за изоморфизъм

За доказателството на основните резултати в този параграф, а именно Теорема 1.3.8 и Теорема 1.3.9, ще имаме нужда от твърденията 1.3.2–1.3.6 относно локално близостни пространства, които са доказани по-долу и които обобщават някои добре познати резултати от теорията на EF-близостните пространства.

Означение 1.3.1. ([47]) Нека $\mathcal{F}$ е фамилия от подмножества на едно множество X. Полагаме

$$\mathcal{F}^* = \{A \subseteq X \mid X \setminus A \notin \mathcal{F}\}.$$

Ще отбележим, че $\mathcal{F}^{**} = \mathcal{F}$, и ако $\mathcal{F}$ е филтър, то $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}^*$.

Следващото твърдение обобщава Теорема 6.11 от [47].

Твърдение 1.3.2. *Ако $\mathcal{F}$ е ограничен клъстър в едно локално близостно пространство $(X, \delta, \mathcal{B})$, то $\mathcal{F}^*$ е ограничен e-филтър в $(X, \delta, \mathcal{B})$.*

Доказателство. Следвайки доказателството на Теорема 6.11 от [47], получаваме, че $\mathcal{F}^*$ е филтър удовлетворяващ условието (E) (виж Дефиниция 1.2.11).

Ще докажем, че $\mathcal{F}^*$ е ограничен филтър. Имаме, че съществува $E \in \mathcal{F} \cap \mathcal{B}$. От Твърдение 1.2.26 следва, че съществува $E' \in \mathcal{B}$, такова че $E \ll E'$. Тогава или $X \setminus E \in \mathcal{F}^*$, или $E' \in \mathcal{F}^*$. Тъй като $E \in \mathcal{F}$, то $X \setminus E \notin \mathcal{F}^*$. Значи $E' \in \mathcal{F}^*$ и следователно $\mathcal{F}^*$ е ограничен.

Сега ще покажем, че $\mathcal{F}^*$ е δ-система. Нека $B \in \mathcal{F}^*$ и $E \not\ll B$ за всяко $E \in \mathcal{F}$. Тогава $E\delta(X \setminus B)$ за всяко $E \in \mathcal{F}$. Следователно $X \setminus B \in \mathcal{F}$. Това противоречие показва, че за всяко $B \in \mathcal{F}^*$ съществува $E \subseteq X$, такова че $E \ll B$ и $X \setminus E \notin \mathcal{F}^*$. Понататък, знаем, че съществува $E' \in \mathcal{F}^* \cap \mathcal{B}$. Нека $A \in \mathcal{F}^*$. Полагаме $A' = A \cap E'$. Тогава $A' \in \mathcal{F}^* \cap \mathcal{B}$. Следователно съществува $C \subseteq X$, такова че $C \ll A'$ и $X \setminus C \notin \mathcal{F}^*$. От $(LP1)$ (виж Дефиниция 1.2.25) получаваме, че съществува $D \in \mathcal{B}$, такова че $C \ll D \ll A'$. Тъй като $\mathcal{F}^*$ удовлетворява условието (E) и $X \setminus C \notin \mathcal{F}^*$, то $D \in \mathcal{F}^*$. От $D \ll A' \subseteq A$ следва, че $D \ll A$. Тогава $\mathcal{F}^*$ е δ-система. Следователно $\mathcal{F}^*$ е e-филтър. $\square$

Следващатата лема е обобщение на Лема 6.8 от [47].

Лема 1.3.3. *Нека $\mathcal{F}$ е ограничен r-филтър в едно локално близостно пространство $(X, \delta, \mathcal{B})$, $A, B \subseteq X$ и $A \ll B$. Ако $A \cap F \neq \emptyset$ за всяко $F \in \mathcal{F}$, то $\mathcal{F}$ е подмножество на някой ограничен r-филтър, който съдържа B.*

Доказателство. Нека $\mathcal{G} = \{A \cap F \mid F \in \mathcal{F}\}$ и

$$\mathcal{G}^0 = \{E \subseteq X \mid \exists C \in \mathcal{G}, \text{ такова че } C \ll E\}.$$

Ще докажем, че $\mathcal{G}^0$ притежава исканите свойства. Следвайки доказателството на Лема 6.8 от [47], получаваме, че $\mathcal{G}^0$ е филтър, който е по-фин от $\mathcal{F}$ и $B \in \mathcal{G}^0$. Следователно $\mathcal{G}^0$ е ограничен филтър. И така, трябва да покажем само, че $\mathcal{G}^0$ е δ-система. Нека $P \in \mathcal{G}^0$ и $F \cap A \ll P$ за някое $F \in \mathcal{F}$. Тъй като $\mathcal{F}$ е ограничен филтър, то съществува $C \in \mathcal{F} \cap \mathcal{B}$, такова, че $C \subseteq F$. Тогава $A \cap C \ll P$. От условие $(LP1)$ (виж Дефиниция 1.2.25) следва, че съществува $R \in \mathcal{B}$, такова че $A \cap C \ll R \ll P$. Тогава $R \in \mathcal{G}^0$ и $R \ll P$. Следователно $\mathcal{G}^0$ е δ-система. □

Следващото твърдение обобщава Теорема 6.9 от [47] (=Теорема 1.2.13 тук).

Твърдение 1.3.4. *Нека $\mathcal{F}$ е ограничен филтър в едно локално близостно пространство $(X, \delta, \mathcal{B})$. Тогава $\mathcal{F}$ е максимален r-филтър в близостното пространство (X, δ) тогава и само тогава, когато $\mathcal{F}$ е e-филтър в (X, δ).*

Доказателство. Нека $\mathcal{F}$ е максимален r-филтър в близостното пространство (X, δ), $A \ll B$ и $B \notin \mathcal{F}$. От Лема 1.3.3 следва, че съществува $E \in \mathcal{F}$, такова че $E \cap A = \emptyset$. Тогава $E \subseteq (X \setminus A)$. Следователно $X \setminus A \in \mathcal{F}$. Значи $\mathcal{F}$ е e-филтър. Доказателството в обратната посока е същото, като това в Теорема 6.7 от [47]. □

Със следващото твърдение обобщаваме Следствие 5.18 от [47].

Твърдение 1.3.5. *Ако E е ограничено подмножество на едно локално близостно пространство $(X, \delta, \mathcal{B})$, то всеки клъстър σ' в близостното пространство (E, δ_E) се съдържа в единствен клъстър σ в (X, δ), и*

$$\sigma = \{A \subseteq X \mid A\delta B, \text{ за всяко } B \in \sigma'\}.$$

Доказателство. За всяко $G \subseteq X$, такова че $E \subseteq G$, полагаме

$$\sigma_G = \{C \subseteq G \mid C\delta D \text{ за всяко } D \in \sigma'\}.$$

Тогава, очевидно, $\sigma' \subseteq \sigma_G$ и, в частност, $\sigma' \subseteq \sigma$. Ще докажем, че σ е клъстър в (X, δ). Наистина, нека $C_1, C_2 \in \sigma$. От Твърдение 1.2.26 следва, че съществува $E_1 \in \mathcal{B}$, такова че $E \ll E_1$. Нека $D \in \sigma'$. Тогава $D \subseteq E$ и значи $D \ll E_1$, т.е. $D\overline{\delta}(X \setminus E_1)$. Следователно $D\overline{\delta}(C_i \setminus E_1)$, $i = 1, 2$. Тъй като $C_1, C_2 \in \sigma$ и $D \in \sigma'$, то $C_i \delta D$, $i = 1, 2$. Тогава, от $(P3)$ следва, че $D\delta(C_i \cap E_1)$, $i = 1, 2$. Полагаме $C_i' = C_i \cap E_1$, $i = 1, 2$. Тогава $C_i' \in \sigma_{E_1}$, $i = 1, 2$. Тъй като $E_1 \in \mathcal{B}$, то δ_{E_1} е EF-близост. Тогава от Следствие 5.18 от [47] следва, че σ_{E_1} е клъстър в (E_1, δ_{E_1}). Следователно $C_1' \delta C_2'$ и тогава $C_1 \delta C_2$. Нека $F \subseteq X$ и $F \delta C$ за всяко $C \in \sigma$. Тъй като $\sigma' \subseteq \sigma$ то $F \delta C$ за всяко $C \in \sigma'$ и значи $F \in \sigma$. Нека $F_1 \cup F_2 \in \sigma$. Тогава, за всяко $C \in \sigma'$ имаме, че $C\overline{\delta}((F_1 \cup F_2) \setminus E_1)$. Тъй като, $C\delta(F_1 \cup F_2)$ за всяко $C \in \sigma'$, то $C\delta((F_1 \cup F_2) \cap E_1)$ за всяко $C \in \sigma'$. Следователно $(F_1 \cup F_2) \cap E_1 \in \sigma_{E_1}$. Тогава, от Следствие 5.18 от [47] получаваме, че $F_1 \cap E_1 \in \sigma_{E_1}$ или $F_2 \cap E_1 \in \sigma_{E_1}$. Следователно $F_1 \in \sigma$ или $F_2 \in \sigma$. Така, че σ е клъстър. Най-сетне, ако σ_1 е клъстър в (X, δ) съдържащ σ', то очевидно, $\sigma_1 \subseteq \sigma$ и тогава $\sigma_1 = \sigma$. □

Със следващото твърдение обобщаваме Теорема 5.14 от [47].

Твърдение 1.3.6. *Нека $(X, \delta, \mathcal{B})$ е локално близостно пространство, $E \in \mathcal{B}$, $A, B \subseteq E$ и $A\delta B$. Тогава съществува клъстър σ в (X, δ), такъв че $A, B \in \sigma$.*

Доказателство. Имаме, че рестрикцията δ_E на δ в E е EF-близост. Тогава, от Теорема 5.14 от [47] имаме, че съществува клъстър σ_E в (E, δ_E), такъв че $A, B \in \sigma_E$. От Теорема 1.3.5 следва, че съществува клъстър σ в (X, δ), такъв че $\sigma_E \subseteq \sigma$. Тогава $A, B \in \sigma$. □

Означение 1.3.7. Нека $\mathcal{C}_1$ е категорията на LC-близостните пространства и SR-близостно непрекъснатите изображения между тях, $\mathcal{C}_2$ е категорията на отделимите локално близостни пространства и еквинепрекъснатите изображения между тях, и $\mathcal{C}_3$ е категорията на отделимите L-супертопологични пространства и супертопологичните изображения между тях.

Теорема 1.3.8. *Категориите $\mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}_2$ са изоморфни.*

Доказателство. Ще конструираме два ковариантни функтори

$$F : \mathcal{C}_1 \longrightarrow \mathcal{C}_2 \text{ и } G : \mathcal{C}_2 \longrightarrow \mathcal{C}_1,$$

такива че $G \circ F = id_{\mathcal{C}_1}$ и $F \circ G = id_{\mathcal{C}_2}$.

Стъпка 1. Конструкция на функтора $F : \mathcal{C}_1 \longrightarrow \mathcal{C}_2$ върху обектите на категорията $\mathcal{C}_1$.

Нека $(X, \alpha) \in |\mathcal{C}_1|$ и $\alpha = (\delta, \Sigma)$. Полагаме

$$\mathcal{B}' = \{B \subseteq X \mid \exists\, \mathcal{F} \in \Sigma \text{ и } \exists\, U, V, W \in \mathcal{F}, \tag{1.2}$$

такива че $B \subseteq W \ll V \ll U$ и U удовлетворява условията (LC1),(LC2) от Дефиниция 1.2.21$\}$.

Нека сега

$$F(X, \alpha) = (X, \delta, \mathcal{B}),$$

където $\mathcal{B}$ е фамилията от всички крайни обединения на елементите на $\mathcal{B}'$. Ще докажем, че $(X, \delta, \mathcal{B})$ е локално близостно пространство. Очевидно $\mathcal{B}$ е ограниченост и от Дефиниция 1.2.15 имаме, че δ е отделима близост. Ще покажем, че е изпълнено условие (LP1) от Дефиниция 1.2.25. Нека $B \in \mathcal{B}$ и $B \ll D$. Без ограничение на общността, можем да считаме, че $B \in \mathcal{B}'$. Тогава съществуват $\mathcal{F} \in \Sigma$ и $U, V, W \in \mathcal{F}$, такива че $B \subseteq W \ll V \ll U$ и U удовлетворява условията (LC1) и (LC2). Следователно $B \ll V$. Тогава $B \ll (V \cap D)$, т.е. $B\overline{\delta}(X \setminus (V \cap D))$. Сега от равенството $X \setminus (V \cap D) = (X \setminus U) \cup (U \setminus (V \cap D))$ следва, че $B\overline{\delta}(U \setminus (V \cap D))$, т.е. $B \ll_{\delta_U} (V \cap D)$. Тъй като δ_U е EF-близост, то съществува $C \subseteq U$, такова че $B \ll_{\delta_U} C \ll_{\delta_U} (V \cap D)$. Значи $B\overline{\delta}(X \setminus U)$ и $B\overline{\delta}(U \setminus C)$. Тогава $B\overline{\delta}((X \setminus U) \cup (U \setminus C))$, т.е. $B\overline{\delta}(X \setminus C)$. Следователно $B \ll C$. Аналогично се показва, че $C \ll (V \cap D) \subseteq D$. Значи $B \ll C \ll D$. Остава да покажем, че $C \in \mathcal{B}'$. От (LC1) следва, че съществува $W_1 \subseteq U$, такова че $C \ll_{\delta_U} W_1 \ll_{\delta_U} V$. Тогава $C \ll W_1 \ll V$, тъй като $C \ll V \ll U$. Полагаме $W' = W_1 \cup W$. Тогава $W' \in \mathcal{F}$ и $C \subseteq W' \ll V \ll U$. Следователно $C \in \mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$. Така, че условието (LP1) от Дефиниция 1.2.25 е изпълнено. За да проверим условието (LP2) от същата дефиниция, нека $A\delta B$. От Твърдение 1.2.16 имаме, че съществува $\mathcal{F} \in \Sigma$, такова че за всяко $F \in \mathcal{F}$, $A \cap F \neq \emptyset$ и $B \cap F \neq \emptyset$. Тъй като α е LC-близост и $\mathcal{F}$ е r-филтър, то съществува $C \in \mathcal{B} \cap \mathcal{F}$. Значи $C \cap F \in \mathcal{F}$ за всяко $F \in \mathcal{F}$ и следователно $B \cap C \cap F \neq \emptyset$ за всяко $F \in \mathcal{F}$. Тогава $B \cap C \in \mathcal{B}$ и от (SR2') получаваме, че $A\delta(B \cap C)$. Следователно $(X, \delta, \mathcal{B})$ е локално близостно пространство.

Стъпка 2. Конструкция на функтора $G : \mathcal{C}_2 \longrightarrow \mathcal{C}_1$.

Нека $(X, \delta, \mathcal{B}) \in |\mathcal{C}_2|$. Полагаме

$$G(X, \delta, \mathcal{B}) = (X, \alpha), \text{ където} \tag{1.3}$$

$\alpha = (\delta, \Sigma)$ и $\Sigma = \{\mathcal{F} \in \Sigma_{end} \mid \ \mathcal{B} \cap \mathcal{F} \neq \emptyset\}$.

Ще докажем, че α е LC-близост. Нека $x \in X$ и $x \ll A$. От Твърдение 1.2.26(а) имаме, че $\{x\} \in \mathcal{B}$. Тогава от (LP1) следва, че съществува $B \in \mathcal{B}$, такова че $\{x\} \ll B \ll A$. Следователно δ е R-близост. Ще докажем, че α е SR-близост. Използвайки Твърдение 1.2.26(в), лесно се показва, че условието (SR1) (вж. Дефиниция 1.2.15) е изпълнено. Ще докажем, че е изпълнено условието (SR2') (вж. Твърдение 1.2.16); от това ще следва, съгласно Твърдение 1.2.16, че е изпълнено условието (SR2) от Дефиниция 1.2.15. Нека $A, B \subseteq X$ и съществува $\mathcal{F} \in \Sigma$, такова че $F \cap A \neq \emptyset$ и $F \cap B \neq \emptyset$ за всяко $F \in \mathcal{F}$. Да допуснем, че $A\overline{\delta}B$, т.е., че $A \ll (X \setminus B)$. От това, че филтъра $\mathcal{F}$ е e-филтър получаваме, че или $X \setminus A \in \mathcal{F}$, или $X \setminus B \in \mathcal{F}$, а това води до противоречие. Следователно $A\delta B$. Обратно, нека $A\delta B$. Ще покажем, че съществува $\mathcal{F} \in \Sigma$, такова че за всяко $F \in \mathcal{F}$ е изпълнено, че $F \cap A \neq \emptyset$ и $F \cap B \neq \emptyset$. От условие (LP2) (вж. Дефиниция 1.2.25) имаме, че съществуват $C, D \in \mathcal{B}$, такива че $(A \cap C)\delta(B \cap D)$. Полагаме $E = C \cup D$, $A' = A \cap E$ и $B' = B \cap E$. Тогава $E \in \mathcal{B}$ и от Твърдение 1.2.26(б) следва, че съществува $E_1 \in \mathcal{B}$, такова че $E \ll E_1$. Сега, от условие (LP1) (вж. Дефиниция 1.2.25) следва, че съществува $P \in \mathcal{B}$, такова че $E \ll P \ll E_1$. Тъй като рестрикцията δ_{E_1} на δ в E_1 е близост на Ефремович, то от Теорема 1.2.14 следва, че съществува e-филтър $\mathcal{F}_{E_1}$ в (E_1, δ_{E_1}), такъв че $A' \cap F \neq \emptyset$ и $B' \cap F \neq \emptyset$, за всяко $F \in \mathcal{F}_{E_1}$. Очевидно, от $A' \ll_\delta P$ следва, че $A' \ll_{\delta_{E_1}} P$ и значи или $E_1 \setminus A' \in \mathcal{F}_{E_1}$, или $P \in \mathcal{F}_{E_1}$. От $A' \cap (E_1 \setminus A') = \emptyset$ получаваме, че $P \in \mathcal{F}_{E_1}$. Полагаме $\mathcal{F}_P = \{P \cap F \mid F \in \mathcal{F}_{E_1}\}$. Очевидно, $\mathcal{F}_P$ е филтърна база на $\mathcal{F}_{E_1}$. Ще докажем, че $\mathcal{F}_P$ е филтърна база на r-филтър в (X, δ). Нека $F \in \mathcal{F}_P \subseteq \mathcal{F}_{E_1}$. Съществува $G \in \mathcal{F}_{E_1}$, такова че $G \ll_{\delta_{E_1}} F$, т.е. $G\overline{\delta}(E_1 \setminus F)$. Имаме, че $G \subseteq F \subseteq P \ll_\delta E_1$. Следователно $G\overline{\delta}(X \setminus E_1)$. Тогава $G\overline{\delta}((X \setminus E_1) \cup (E_1 \setminus F))$, т.е. $G \ll F$. Следователно $\mathcal{F}_P$ е филтърна база на r-филтър $\mathcal{F}$ в (X, δ) и $\mathcal{F}_{E_1} \subseteq \mathcal{F}$. Ще докажем, че $\mathcal{F}$ е e-филтър. Нека $A_1, B_1 \subseteq X$ и $A_1 \ll B_1$, т.е. $A_1\overline{\delta}(X \setminus B_1)$. Тогава $(A_1 \cap E_1)\overline{\delta}((X \setminus B_1) \cap E_1)$. Възможни са следните три случая:

1. $A_1 \cap E_1 = \emptyset$. Тогава $E_1 \subseteq (X \setminus A_1)$. Следователно $(X \setminus A_1) \in \mathcal{F}$.

2. $(X \setminus B_1) \cap E_1 = \emptyset$. Тогава $E_1 \subseteq B_1$, така че $B_1 \in \mathcal{F}$.

3. $A_1 \cap E_1 \neq \emptyset$ и $(X \setminus B_1) \cap E_1 \neq \emptyset$. Очевидно, $(A_1 \cap E_1)\overline{\delta}(E_1 \setminus B_1)$ е еквивалентно на $(A_1 \cap E_1) \ll_{\delta_{E_1}} (B_1 \cap E_1)$. Тогава $E_1 \setminus A_1 \in \mathcal{F}_{E_1}$ или $(B_1 \cap E_1) \in \mathcal{F}_{E_1}$. Следователно $(X \setminus A_1) \in \mathcal{F}$ или $B_1 \in \mathcal{F}$.

Във всички случаи получаваме, че $X \setminus A_1 \in \mathcal{F}$ или $B \in \mathcal{F}$. Значи $\mathcal{F}$ е e-филтър в (X, δ). От $E_1 \in \mathcal{F} \cap \mathcal{B}_1$ следва, че $\mathcal{F} \in \Sigma$. Тъй като $\mathcal{F}_P$ е филтърна база за $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}_P \subseteq \mathcal{F}_{E_1}$, то за всяко $F \in \mathcal{F}$ е изпълнено, че $A' \cap F \neq \emptyset$ и $B' \cap F \neq \emptyset$, и следователно $A \cap F \neq \emptyset$ и $B \cap F \neq \emptyset$. Така, че условието (SR2') е изпълнено. Следователно (X, α) е SR-близостно пространство.

Сега ще докажем, че α е LC-близост. Нека $\mathcal{F} \in \Sigma$. Тогава съществува $U \in \mathcal{F} \cap \mathcal{B}$. Очевидно, рестрикцията δ_U на δ в U е близост на Ефремович. От това и от дефиницията на Σ следва, че $\alpha = (\delta, \Sigma)$ е LC-близост.

Нека $(X_1, \beta_1, \mathcal{B}_1), (X_2, \beta_2, \mathcal{B}_2) \in |\mathcal{C}_2|$, и $f \in \mathcal{C}_2((X_1, \beta_1, \mathcal{B}_1), (X_2, \beta_2, \mathcal{B}_2))$. Ще докажем, че $f \in \mathcal{C}_1(G(X_1, \beta_1, \mathcal{B}_1), G(X_2, \beta_2, \mathcal{B}_2))$. За простота, вместо " $\ll_{\beta_i}$" ще пишем " $\ll_i$", за $i = 1, 2$.

Нека $\mathcal{F}_1$ е ограничен e-филтър в $(X_1, \beta_1, \mathcal{B}_1)$. Полагаме

$$(1.4)\quad \mathcal{F}_2 = \{A \subseteq X_2 \mid \exists\, V \in \mathcal{B}_2, \text{ такова че } V \ll_2 A \text{ и } \forall\, F \in \mathcal{F}_1,\ V \cap f(F) \neq \emptyset\}.$$

Ще докажем, че $\mathcal{F}_2 \in \Sigma_2$ и $\mathcal{F}_2$ се съдържа във филтъра породен от филтърната база $f(\mathcal{F}_1)$. Наистина, съществува $C \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{B}_1$; тогава $f(C) \in \mathcal{B}_2$ и $f(C) \cap f(F) \neq \emptyset$ за всяко $F \in \mathcal{F}_1$. От $f(C) \ll_2 X_2$ следва, че $X_2 \in \mathcal{F}_2$. Така, че $\mathcal{F}_2 \neq \emptyset$. Очевидно е, че $\emptyset \notin \mathcal{F}_2$ и, че ако $A \in \mathcal{F}_2$ и $A \subseteq A_1$, то и $A_1 \in \mathcal{F}_2$. Нека $A_1, A_2 \in \mathcal{F}_2$. Тогава, от (1.4) имаме, че съществуват $V_1, V_2 \in \mathcal{B}_2$, такива че $V_i \ll_2 A_i$ и $V_i \cap f(F) \neq \emptyset$ за всяко $F \in \mathcal{F}_1$, $i = 1, 2$. Сега, от условие (LP1) (вж. Дефиниция 1.2.25) следва, че съществуват $W_1, W_2 \in \mathcal{B}_2$, такива че $V_i \ll_2 W_i \ll_2 A_i$, $i = 1, 2$. Тогава $W_1 \cap W_2 \ll_2 A_1 \cap A_2$ и $W_i \cap f(F) \neq \emptyset$ за всяко $F \in \mathcal{F}_1$, $i = 1, 2$. Да допуснем, че съществува $F_0 \in \mathcal{F}_1$, такова че $(W_1 \cap W_2) \cap f(F_0) = \emptyset$. Тогава $f(F_0) \subseteq X_2 \setminus (W_1 \cap W_2)$. Следователно $(X_2 \setminus (W_1 \cap W_2)) \cap f(F) \neq \emptyset$ за всяко $F \in \mathcal{F}_1$, т.е. $((X_2 \setminus W_1) \cup (X_2 \setminus W_2)) \cap f(F) \neq \emptyset$, за всяко $F \in \mathcal{F}_1$. От това получаваме, че или $(X_2 \setminus W_1) \cap f(F) \neq \emptyset$, за всяко $F \in \mathcal{F}_1$, или $(X_2 \setminus W_2) \cap f(F) \neq \emptyset$, за всяко $F \in \mathcal{F}_1$. Наистина, да допуснем, че съществуват $F_1, F_2 \in \mathcal{F}_1$, такива че $(X_2 \setminus W_1) \cap f(F_1) = \emptyset$ и $(X_2 \setminus W_2) \cap f(F_2) = \emptyset$; тогава

$F = F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}_1$ и $((X_2 \setminus W_1) \cup (X_2 \setminus W_2)) \cap f(F) = \emptyset$ – получаваме противоречие. Без ограничение на общността, можем да считаме, че $(X_2 \setminus W_1) \cap f(F) \neq \emptyset$, за всяко $F \in \mathcal{F}_1$, т.е. $f(F) \setminus W_1 \neq \emptyset$, за всяко $F \in \mathcal{F}_1$. Имаме, че $V_1 \ll_2 W_1$. Следователно, от (EQ1) (вж. Дефиниция 1.2.25) получаваме, че $f^{-1}(V_1) \ll_1 f^{-1}(W_1)$. Тъй като $\mathcal{F}_1$ е e-филтър, то или $X_1 \setminus f^{-1}(V_1) \in \mathcal{F}_1$, или $f^{-1}(W_1) \in \mathcal{F}_1$. Ако $F_1 = f^{-1}(W_1) \in \mathcal{F}_1$, то $f(F_1) \subseteq W_1$ и $f(F_1) \setminus W_1 = \emptyset$, така че $f^{-1}(W_1) \notin \mathcal{F}_1$. Следователно $F_2 = X_1 \setminus f^{-1}(V_1) \in \mathcal{F}_1$. Тогава $f(F_2) = f(X_1) \setminus V_1 \subseteq X_2 \setminus V_1$ и значи $f(F_2) \cap V_1 = \emptyset$ – получаваме противоречие. Следователно, $W_1 \cap W_2 \cap f(F) \neq \emptyset$, за всяко $F \in \mathcal{F}_1$. Тогава $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{F}_2$. Значи $\mathcal{F}_2$ е филтър.

Ще докажем, че $\mathcal{F}_2$ е ограничен r-филтър. Наистина, нека $U \in \mathcal{F}_2$. Тогава съществува $V \in \mathcal{B}_2$, такова че $V \ll_2 U$ и $V \cap f(F) \neq \emptyset$, за всяко $F \in \mathcal{F}_1$. От условие (LP1) от Дефиниция 1.2.25 следва, че съществува $W \in \mathcal{B}_2$, такова че $V \ll_2 W \ll_2 U$. Тогава $W \in \mathcal{F}_2 \cap \mathcal{B}_2$ и $W \ll_2 U$. Следователно $\mathcal{F}_2$ е ограничен r-филтър.

Ще докажем, че $\mathcal{F}_2$ се съдържа във филтъра с филтърна база $f(\mathcal{F}_1)$. Нека $U \in \mathcal{F}_2$. Тогава съществува $V \in \mathcal{B}_2$, такова че $V \ll_2 U$ и $V \cap f(F) \neq \emptyset$, за всяко $F \in \mathcal{F}_1$. Следователно $f^{-1}(V) \ll_1 f^{-1}(U)$. От това следва, че или $X_1 \setminus f^{-1}(V) \in \mathcal{F}_1$, или $f^{-1}(U) \in \mathcal{F}_1$. Допускайки, че $F_1 = X_1 \setminus f^{-1}(V) \in \mathcal{F}_1$, получаваме, че $f(F_1) \cap V = \emptyset$. Това противоречие показва, че $f^{-1}(U) \in \mathcal{F}_1$. Тогава $f(f^{-1}(U)) \in f(\mathcal{F}_1)$ и $f(f^{-1}(U)) \subseteq U$. Следователно $\mathcal{F}_2$ се съдържа във филтъра, породен от филтърната база $f(\mathcal{F}_1)$.

Сега ще докажем, че $\mathcal{F}_2$ е e-филтър. Нека $A, B \subseteq X_2$ и $A \ll_2 B$. Възможни са следните два случая:

1. $A \in \mathcal{B}_2$. Тогава съществува $C \in \mathcal{B}_2$, такова че $A \ll_2 C \ll_2 B$. Да допуснем, че $B \notin \mathcal{F}_2$. Тогава съществува $F_0 \in \mathcal{F}_1$, такова че $C \cap f(F_0) = \emptyset$. Следователно $f(F_0) \subseteq X_2 \setminus C$. Без ограничение на общността можем да считаме, че $f(F_0) \in \mathcal{B}_2$. От $X_2 \setminus C \ll_2 X_2 \setminus A$ получаваме, че $f(F_0) \ll_2 X_2 \setminus A$. Очевидно, $f(F_0) \cap f(F) \neq \emptyset$ за всяко $F \in \mathcal{F}_1$. Следователно $X_2 \setminus A \in \mathcal{F}_2$. Значи, или $B \in \mathcal{F}_2$, или $X_2 \setminus A \in \mathcal{F}_2$.

2. $A \notin \mathcal{B}_2$. Съществува $C \in \mathcal{F}_2 \cap \mathcal{B}_2$. Очевидно, $C \cap A \ll_2 B$ и $C \cap A \in \mathcal{B}_2$. Тогава, от предния случай, получаваме че или $B \in \mathcal{F}_2$, или $(X_2 \setminus (C \cap A)) \in \mathcal{F}_2$. Нека $(X_2 \setminus (C \cap A)) \in \mathcal{F}_2$. Тогава $(X_2 \setminus (C \cap A)) \cap C = C \setminus A \in \mathcal{F}_2$. От $C \setminus A \subseteq X_2 \setminus A$ следва, че $X_2 \setminus A \in \mathcal{F}_2$. Значи, или $B \in \mathcal{F}_2$, или $X_2 \setminus A \in \mathcal{F}_2$.

Следователно $\mathcal{F}_2$ е ограничен e-филтър в $(X_2, \beta_2, \mathcal{B}_2)$, съдържащ се във филтъра породен от филтърната база $f(\mathcal{F}_1)$. Така, че f е SR-близостно непрекъснато изображение. Полагаме $G(f) = f$.

Стъпка 3. Доказателство на равенството $G \circ F = id_{\mathcal{C}_1}$ върху обектите на категорията $\mathcal{C}_1$.

Нека $(X, \alpha) \in |\mathcal{C}_1|$, където $\alpha = (\delta, \Sigma)$. Тогава $G(F(X, \alpha)) = G(X, \delta, \mathcal{B}) = (X, \alpha_1)$, където $\alpha_1 = (\delta, \Sigma_1)$.

Ще докажем, че $\Sigma = \Sigma_1$. Нека $\mathcal{F} \in \Sigma$. Тъй като α е LC-близост, то съществува $U \in \mathcal{F}$, такова че рестрикцията δ_U на δ в U е близост на Ефремович и, освен това, ако $\mathcal{G} \in \Sigma_{end}(\delta)$ и $U \in \mathcal{G}$, то $\mathcal{G} \in \Sigma$. Тъй като $\mathcal{F}$ е r-филтър, то съществуват $V, W \in \mathcal{F}$, такива че $W \ll V \ll U$. Тогава, очевидно, $W \in \mathcal{B} \cap \mathcal{F}$. Следователно $\mathcal{F} \in \Sigma_1$. И така, $\Sigma \subseteq \Sigma_1$.

Обратно, нека $\mathcal{G} \in \Sigma_1$. Тогава $\mathcal{G}$ е e-филтър и съществува $B \in \mathcal{G} \cap \mathcal{B}$. Имаме, че $B = \bigcup\{B_i \in \mathcal{B}' \mid i = 1, \ldots, n\}$ за някое $n \in \omega,\ n \geq 1$ (вж. (1.2) за $\mathcal{B}'$). За всяко $i = 1, \ldots, n$, съществуват $\mathcal{F}_i \in \Sigma$ и $W_i, V_i, U_i \in \mathcal{F}_i$, такива че $B_i \subseteq W_i \ll V_i \ll U_i$ и U_i удовлетворява условията (LC1) и (LC2) от Дефиниция 1.2.21. Ако съществува $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$, такова че $B_{i_0} \in \mathcal{G}$, то $U_{i_0} \in \mathcal{G}$ и следователно $\mathcal{G} \in \Sigma$. Нека сега $B_i \notin \mathcal{G}$ за всяко $i = 1, \ldots, n$. Тогава съществува $j_0 \in \{1, \ldots, n\}$, такова че $X \setminus B_{j_0} \notin \mathcal{G}$. (Наистина, да допуснем, че $X \setminus B_i \in \mathcal{G}$ за всяко $i \in \{1, \ldots, n\}$. Тогава $\bigcap\limits_{i=1}^{n}(X \setminus B_i) = X \setminus (\bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i) = X \setminus B \in \mathcal{G}$. Тъй като $B \in \mathcal{G}$, то получаваме противоречие.) Филтърът $\mathcal{G}$ е e-филтър и $B_{j_0} \ll U_{j_0}$. Следователно, или $X \setminus B_{j_0} \in \mathcal{G}$, или $U_{j_0} \in \mathcal{G}$. Тогава $U_{j_0} \in \mathcal{G}$ и значи $\mathcal{G} \in \Sigma$. И така, $\Sigma_1 \subseteq \Sigma$. Доказахме, че $\Sigma = \Sigma_1$.

Стъпка 4. Доказателство на равенството $F \circ G = id_{\mathcal{C}_2}$ върху обектите на категорията $\mathcal{C}_2$.

Нека $(X, \delta, \mathcal{B}) \in |\mathcal{C}_2|$. Тогава $G(X, \delta, \mathcal{B}) = (X, \alpha)$, където $\alpha = (\delta, \Sigma)$, и $F(X, \alpha) = (X, \delta, \mathcal{B}_1)$. Трябва да докажем, че $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1$. Нека $B \in \mathcal{B}$ и $B \neq \emptyset$. От Твърдение 1.2.26(б) имаме, че съществува $B_1 \in \mathcal{B}$, такова че $B \ll B_1$. Използвайки (LP1) (вж. Дефиниция 1.2.25), конструираме по индукция фамилия $\{A_n \mid n \in \omega,\ n \geq 1\}$ от подмножества на X, такива че $B \ll \cdots \ll A_n \ll A_{n-1} \ll \cdots \ll A_1 \ll B_1$. Очевидно, $\{A_n\}$ е центрирана δ-система. Тогава от

Твърдение 1.2.12 следва, че съществува максимален r-филтър $\mathcal{F}$ в (X, δ), такъв че $\{A_n \mid n \in \omega,\ n \geq 1\} \subseteq \mathcal{F}$. Следователно $B_1 \in \mathcal{F}$, т.е. $\mathcal{F}$ е ограничен максимален r-филтър в (X, δ). Тогава, от Теорема 1.3.4 следва, че $\mathcal{F}$ е ограничен e-филтър в (X, δ). Следователно $\mathcal{F} \in \Sigma$. От $A_1 \subseteq B_1$ получаваме, че $A_1 \in \mathcal{B}$ и следователно рестрикцията δ_{A_1} на δ в A_1 е близост на Ефремович. Тогава A_1 удовлетворява условията (LC1) и (LC2) от Дефиниция 1.2.21. Най-сетне, от $B \subseteq A_3 \ll A_2 \ll A_1$ получаваме, че $B \in \mathcal{B}_1$. Следователно $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}_1$.

Обратно, нека $C \in \mathcal{B}_1$. Без ограничение на общността можем да считаме, че C има следното свойство: съществуват $\mathcal{F} \in \Sigma$ и $V_1, U_1 \in \mathcal{F}$ такива, че $C \ll V_1 \ll U_1$, $C \in \mathcal{F}$ и U_1 удовлетворява условията (LC1), (LC2) от Дефиниция 1.2.21. От (LP1) имаме, че съществуват $V, U \in \mathcal{B}_1$, такива че $C \ll V \ll U \ll V_1$. Тъй като $C \in \mathcal{F}$, то $V, U \in \mathcal{F}$. От $U \subseteq U_1$ следва, че U удовлетворява условията (LC1), (LC2) от Дефиниция 1.2.21. Да допуснем, че $C \notin \mathcal{B}$. Тогава $C \in \mathcal{B}_1 \setminus \mathcal{B}$. Полагаме $\mathcal{G} = \{B \subseteq U \mid B \in \mathcal{B}_1 \setminus \mathcal{B}\}$ и $\mathcal{G}' = \{A \subseteq U \mid \exists B \in \mathcal{G}$, такова че $B \subseteq A\}$. Ще докажем, че $\mathcal{G}'$ е грил в U. Очевидно е, че $C \in \mathcal{G}'$, $\mathcal{G}' \cap \mathcal{B} = \emptyset$ и $\emptyset \notin \mathcal{G}'$. Нека $A = A_1 \cup A_2 \in \mathcal{G}'$. Тогава съществува $B \in \mathcal{G}$, такова че $B \subseteq A_1 \cup A_2$. Полагаме $B_i = A_i \cap B$, $i = 1, 2$. Тогава $B_i \in \mathcal{B}_1$, $i = 1, 2$. Да допуснем, че $B_i \notin \mathcal{G}$ за $i = 1, 2$. Тогава $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ и значи $B_1 \cup B_2 = B \in \mathcal{B}$. Това противоречие показва, че или $B_1 \in \mathcal{G}$, или $B_2 \in \mathcal{G}$. Тогава или $A_1 \in \mathcal{G}'$, или $A_2 \in \mathcal{G}'$. Следователно $\mathcal{G}'$ е грил в U. Тогава от Лема 1.2.7 следва, че съществува ултрафилтър $\mathcal{L}$ в U, такъв че $C \in \mathcal{L}$ и $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{G}'$. Полагаме $\sigma = \{A \subseteq U \mid A\delta B$, за всяко $B \in \mathcal{L}\}$. Тогава от Теорема 1.2.9 следва, че σ е клъстър в (U, δ_U), $\mathcal{L} \subseteq \sigma$ и $C \in \sigma$. Полагаме $\sigma' = \{A \subseteq X \mid A\delta B$, за всяко $B \in \sigma\}$. Тогава от Твърдение 1.3.5 следва, че σ' е клъстър в (X, δ). От $C \in \sigma' \cap \mathcal{B}_1$ получаваме, че σ' е ограничен клъстър в $(X, \delta, \mathcal{B}_1)$. Тогава от Теорема 1.3.2 имаме, че $\mathcal{F}' = (\sigma')^* = \{E \subseteq X \mid X \setminus E \notin \sigma'\}$ е ограничен e-филтър в $(X, \delta, \mathcal{B}_1)$. Нека $(X, \alpha_1) = G(X, \delta, \mathcal{B}_1)$. Тогава $(X, \alpha_1) = G(F(X, \alpha))$. Следователно, от Стъпка 3, $\alpha = \alpha_1$. Така, че $\alpha_1 = (\delta, \Sigma)$. Следователно един e-филтър в (X, δ) е ограничен по отношение на $\mathcal{B}_1$ тогава и само тогава, когато той е ограничен по отношение на $\mathcal{B}$. Значи $\mathcal{F}'$ е ограничен e-филтър в $(X, \delta, \mathcal{B})$. От $\mathcal{F}' \subseteq (\mathcal{F}')^* = \sigma'$ получаваме, че σ' е ограничен клъстър в $(X, \delta, \mathcal{B})$, т.е. съществува $B_0 \in \sigma' \cap \mathcal{B}$. Ще покажем, че $\mathcal{L} \cap \mathcal{G}$ е филтърна база на $\mathcal{L}$. Наистина, ако $L \in \mathcal{L}$, то $L \cap C \in \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{L}$ и $L \cap C \notin \mathcal{B}$. Следователно $L \cap C \in \mathcal{G}$. От $L \cap C \subseteq L$ следва,

че $\mathcal{L} \cap \mathcal{G}$ е филтърна база на $\mathcal{L}$. Имаме, че $B_1 \setminus B \neq \emptyset$ за всяко $B_1 \in \mathcal{G}$ и за всяко $B \subseteq U$, такова че $B \in \mathcal{B}$, т.е. $B_1 \cap (X \setminus B) \neq \emptyset$ за всяко $B \in \mathcal{B}_U$, където $\mathcal{B}_U = \{B \in \mathcal{B} \mid B \subseteq U\}$. Тогава $(U \setminus B) \cap L \neq \emptyset$ за всяко $B \in \mathcal{B}_U$ и за всяко $L \in \mathcal{L} \cap \mathcal{G}$. Тъй като $\mathcal{L} \cap \mathcal{G}$ е филтърна база на $\mathcal{L}$, то $U \setminus B \in \mathcal{L}$ за всяко $B \in \mathcal{B}_U$. Сега, от $C \in \mathcal{L}$ следва, че $(U \setminus B) \cap C \in \mathcal{L}$ за всяко $B \in \mathcal{B}_U$. Тъй като $B_0 \in \sigma' \cap \mathcal{B}$ и $\mathcal{L} \subseteq \sigma \subseteq \sigma'$, то $B_0 \delta((U \setminus B) \cap C)$, за всяко $B \in \mathcal{B}_U$. Имаме, че $C \overline{\delta}(X \setminus V)$. Следователно $(B_0 \cap V)\delta((U \setminus B) \cap C)$, за всяко $B \in \mathcal{B}_U$. Тогава $(B_0 \cap V)\delta(U \setminus B)$, за всяко $B \in \mathcal{B}_U$, т.е.

(1.5) $B_0 \cap V \not\ll_{\delta_U} B$, за всяко $B \in \mathcal{B}_U$.

От $(B_0 \cap V) \subseteq V \ll U$ и $B_0 \cap V \in \mathcal{B}$ следва, че съществува $M \in \mathcal{B}_U$, такова че $(B_0 \cap V) \ll M \ll U$, и тогава $B_0 \cap V \ll_{\delta_U} M$. Това противоречи с (1.5). Следователно $C \in \mathcal{B}$. Значи $\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{B}$. Следователно $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1$.

Стъпка 5. Дефиниция на функтора F върху морфизмите на категорията $\mathcal{C}_1$.

Нека $(X_i, \alpha_i) \in |\mathcal{C}_1|$, $\alpha_i = (\delta_i, \Sigma_i)$, $i = 1, 2$, и $f \in \mathcal{C}_1((X_1, \alpha_1), (X_2, \alpha_2))$.

Ще докажем, че $f \in \mathcal{C}_2(F(X_1, \alpha_1), F(X_2, \alpha_2))$. Нека $F(X_i, \alpha_i) = (X_i, \delta_i, \mathcal{B}_i)$, $i = 1, 2$. От Твърдение 1.2.17 имаме, че $f : (X_1, \delta_1) \longrightarrow (X_2, \delta_2)$ е близостно непрекъснато изображение.

Остава да покажем, че ако $B \in \mathcal{B}_1$, то $f(B) \in \mathcal{B}_2$. Нека $W \in \mathcal{B}_1$. Да допуснем, че $f(W) \notin \mathcal{B}_2$.

Както следва от доказателството на Стъпка 3, Σ_i съвпада с множеството от всички ограничени e-филтри в локално близостното пространство $(X_i, \delta_i, \mathcal{B}_i)$, за $i = 1, 2$.

От Твърдение 1.2.26(б) следва, че съществува $V \in \mathcal{B}_1$, такова че $W \ll_1 V$. Полагаме

$$(1.6)\ \Omega = \{E \in \mathcal{B}_2 \mid (\exists \mathcal{F} \in \Sigma_1)(\exists B \in \mathcal{B}_2)((B \ll_2 E) \wedge \wedge((\forall\, H \in \mathcal{F})((H \cap V \neq \emptyset) \wedge (B \cap f(H) \neq \emptyset))))\}.$$

Ще отбележим, че:

1) ако $E \in \Omega$ и $E' \in \mathcal{B}_2$, то $E \cup E' \in \Omega$; и

2) ако $E \in \Omega$, то съществува $E' \in \Omega$, такова че $E \ll_2 E'$.

От $f(W) \notin \mathcal{B}_2$ следва, че $f(W)$ не е подмножество на никой елемент на Ω. Тогава, за всяко $E \in \Omega$, $f(W) \setminus E \neq \emptyset$. Следователно

(1.7) $W \cap (X_1 \setminus f^{-1}(E)) \neq \emptyset$, за всяко $E \in \Omega$.

Полагаме $\mathcal{D}' = \{X_1 \setminus f^{-1}(E) \mid E \in \Omega\}$. Тогава
(1) $D \neq \emptyset$, за всяко $D \in \mathcal{D}'$;
(2) ако $D_1, D_2 \in \mathcal{D}'$, то $D_1 \cap D_2 \in \mathcal{D}'$;
(3) $\mathcal{D}'$ е δ_1-система (наистина, нека $D \in \mathcal{D}'$; тогава съществува $E \in \Omega$, такова че $D = X_1 \setminus f^{-1}(E)$; съществува $E' \in \Omega$, такова че $E \ll_2 E'$; тогава $f^{-1}(E) \ll_1 f^{-1}(E')$; следователно $X_1 \setminus f^{-1}(E') \ll_1 X_1 \setminus f^{-1}(E)$ и $D' = X_1 \setminus f^{-1}(E') \in \mathcal{D}'$).

От $W \in \mathcal{B}_1$ и $W \ll_1 V$ следва, че за всяко $n \in \omega$, $n \geq 1$, съществува $W_n \in \mathcal{B}_1$, такова че $W \ll_1 \cdots \ll_1 W_n \ll_1 W_{n-1} \ll_1 \cdots \ll_1 W_1 \ll_1 V$. Полагаме $\mathcal{D}'' = \{W_n \mid n = 1, 2, \dots\}$ и $\mathcal{D} = \{D' \cap D'' \mid D' \in \mathcal{D}' \cup \{X_1\},\ D'' \in \mathcal{D}'' \cup \{X_1\}\}$. Тогава, очевидно, $\mathcal{D}' \cup \mathcal{D}'' \subseteq \mathcal{D}$, $\mathcal{D}$ е δ_1-система, нейните елементи са непразни множества и е затворена относно крайни сечения. Следователно $\mathcal{D}$ е филтърна база. Нека $\mathcal{F}'$ е филтъра породен от филтърната база $\mathcal{D}$. Тогава $\mathcal{F}'$ е ограничен r-филтър в $(X_1, \delta_1, \mathcal{B}_1)$. Съществува максимален ограничен r-филтър $\mathcal{F}$ съдържащ $\mathcal{F}'$. Тогава от Твърдение 1.3.4 следва, че $\mathcal{F}$ е ограничен e-филтър в $(X_1, \delta_1, \mathcal{B}_1)$. Следователно $\mathcal{F} \in \Sigma_1$. Имаме, че $\mathcal{D}'' \subseteq \mathcal{F}$ и следователно $W_1 \in \mathcal{F}$; тогава $V \in \mathcal{F}$. Значи $V \cap H \neq \emptyset$, за всяко $H \in \mathcal{F}$. Тъй като f е SR-близостно непрекъсната функция, то съществува $\mathcal{G} \in \Sigma_2$, съдържащ се във филтъра породен от филтърната база $f(\mathcal{F})$. Филтърът $\mathcal{G}$ е ограничен e-филтър в $(X_2, \delta_2, \mathcal{B}_2)$. Следователно съществуват $E \in \mathcal{G} \cap \mathcal{B}_2$ и $B \in \mathcal{G}$, такива че $B \ll_2 E$. Съществува $H_0 \in \mathcal{F}$, такова че $f(H_0) \subseteq B$; следователно $B \cap f(H) \neq \emptyset$, за всяко $H \in \mathcal{F}$. Тогава $E \in \Omega$ и $H_0 \subseteq f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(E)$. Значи $f^{-1}(E) \in \mathcal{F}$. От $\mathcal{D}' \subseteq \mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ следва, че $X_1 \setminus f^{-1}(E) \in \mathcal{F}$. Това противоречие показва, че $f(W) \in \mathcal{B}_2$.

Следователно f е еквинепрекъснато изображение. Полагаме $F(f) = f$.

Стъпка 6. Доказателство на равенствата $F \circ G = id_{\mathcal{C}_2}$ и $G \circ F = id_{\mathcal{C}_1}$ върху морфизмите на категориите $\mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}_2$.

Това следва тривиално от дефинициите на F и G върху морфизмите.

Следователно категориите $\mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}_2$ са изоморфни. □

Теорема 1.3.9. *Категориите $\mathcal{C}_2$ и $\mathcal{C}_3$ са изоморфни.*

Доказателство. *Стъпка 1. Конструкция на функтора* $F : \mathcal{C}_3 \longrightarrow \mathcal{C}_2$.

Нека $(X, \Sigma) \in |\mathcal{C}_3|$ и $\Sigma = (\mathcal{M}, \mathcal{V})$. Полагаме

$$F(X, \Sigma) = (X, \delta, \mathcal{M}),$$

където δ е близост в X, дефинирана както следва: ако $A, B \subseteq X$, то

(1.8) $A\delta B \Leftrightarrow \exists A', B' \in \mathcal{M},$ такива че $A' \subseteq A,\ B' \subseteq B$
и $A' \cap V \neq \emptyset,$ за всяко $V \in \mathcal{V}(B')$.

Ще отбележим, че ако $B \in \mathcal{M}$, то

(1.9) $A\delta B \Leftrightarrow \exists A' \in \mathcal{M},$ такова че $A' \subseteq A$
и $V \cap A' \neq \emptyset,$ за всяко $V \in \mathcal{V}(B)$.

Наистина, очевидно е, че дясната страна на (1.9) влече лявата. Обратно, ако $A\delta B$ и $V \in \mathcal{V}(B)$, то съществува такова $W \in \mathcal{V}(B)$, че $V \in \mathcal{V}(C)$ при условие, че $C \in \mathcal{M}$ и $C \subseteq W$. Съществуват $A' \subseteq A$, $B' \subseteq B$, такива че $A', B' \in \mathcal{M}$ и $V' \cap A' \neq \emptyset$, за всяко $V' \in \mathcal{V}(B')$. От $B' \in \mathcal{M}$ и $B' \subseteq B \subseteq W$ получаваме, че $V \in \mathcal{V}(B')$. Следователно $V \cap A' \neq \emptyset$. С това (1.9) е доказано.

Ще покажем, че $(X, \delta, \mathcal{M})$ е локално близостно пространство. Очевидно, от условия (LST1) и (LST2) (вж. Дефиниция 1.2.28) следва, че $\mathcal{M}$ е ограниченост. Ще докажем, че δ е близост на Чех. Както следва от условие (STS) (вж. Дефиниция 1.2.27), δ е симетрична релация. Очевидно е, че $\emptyset\bar{\delta}A$, за всяко $A \subseteq X$, и $A\delta A$, за всяко непразно $A \subseteq X$ (наистина, ако $A \neq \emptyset$, то полагаме $A' = \{x\}$, където x е някоя точка от A). Нека $A, B, C \subseteq X$ и $A\delta(B \cup C)$. Тогава съществуват $A', D \in \mathcal{M}$, такива че $A' \subseteq A$, $D \subseteq (B \cup C)$ и $V \cap D \neq \emptyset$, за всяко $V \in \mathcal{V}(A')$. Нека $D_1 = D \cap B$ и $D_2 = D \cap C$. Очевидно, $D_1, D_2 \in \mathcal{M}$. Да допуснем, че $A\bar{\delta}B$ и $A\bar{\delta}C$. Тогава съществуват $V_1, V_2 \in \mathcal{V}(A')$, такива че $V_1 \cap D_1 = \emptyset$ и $V_2 \cap D_2 = \emptyset$. Следователно имаме, че $V = V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}(A')$ и $V \cap D = \emptyset$. Това противоречие показва, че $A\delta B$ или $A\delta C$. Обратно, нека $A, B, C \subseteq X$ и ($A\delta B$ или $A\delta C$). Нека, например, $A\delta B$. Тогава съществуват $A', B' \in \mathcal{M}$, такива че $A' \subseteq A$, $B' \subseteq B$ и $B' \cap V \neq \emptyset$ за всяко $V \in \mathcal{V}(A')$. От $B' \subseteq B \cup C$ получаваме, че $A\delta(B \cup C)$. Следователно, $A\delta(B \cup C)$ тогава и само тогава, когато $A\delta B$ или $A\delta C$. Така, че δ е близост на Чех.

Ще докажем един факт, който ще бъде използван по-нататък:

(1.10) ако $B \in \mathcal{M}$, то $V \in \mathcal{V}(B)$ тогава и само тогава, когато $B \ll V$.

Наистина, нека $V \in \mathcal{V}(B)$. Да допуснем, че $B\delta(X \setminus V)$. Тогава, от (1.9) имаме, че съществува $U \subseteq X \setminus V$, такова че $U \in \mathcal{M}$ и $U \cap V' \neq \emptyset$, за всяко $V' \in \mathcal{V}(B)$. Тогава, в частност $U \cap V \neq \emptyset$ – получаваме противоречие. Следователно $B \ll V$. Обратно, нека $B \in \mathcal{M}$ и $B \ll V$. Ако $V = X$, то е ясно, че $V \in \mathcal{V}(B)$. И така, нека $V \neq X$. Тогава $X \setminus V \neq \emptyset$. Съществува $V' \in \mathcal{M}$, такова че $V' \subseteq X \setminus V$. Сега, $B\overline{\delta}(X \setminus V)$ и от (1.9) следва, че съществува $U' \in \mathcal{V}(B)$, такова че $U' \cap V' = \emptyset$. От (LST1) и (LST3) (вж. Дефиниция 1.2.28) следва, че без ограничение на общността можем да считаме, че $U' \in \mathcal{M}$. Възможни са следните два случая:
1. $U' \cap (X \setminus V) = \emptyset$. Тогава $U' \subseteq V$. Тъй като $\mathcal{V}(B)$ е филтър, то $V \in \mathcal{V}(B)$.
2. $U' \cap (X \setminus V) \neq \emptyset$. Полагаме $D = U' \cap (X \setminus V)$. Имаме, че $D \in \mathcal{M}$ и $D \subseteq (X \setminus V)$. Тъй като $B \ll V$, то съществува $U'' \in \mathcal{V}(B)$, такова че $D \cap U'' = \emptyset$ (съгласно (1.9)). Тогава $U = U' \cap U'' \in \mathcal{V}(B)$ и $U \cap (X \setminus V) = \emptyset$. Значи $U \subseteq V$ и следователно $V \in \mathcal{V}(B)$.

И така, (1.10) е доказано.

Тъй като Σ е отделима L-супертопология, то δ е отделима близост. Остава да покажем, че $(X, \delta, \mathcal{M})$ удовлетворява условията (LP1) и (LP2) от Дефиниция 1.2.25. Условието (LP2) е очевидно изпълнено. Ще докажем, че е изпълнено и условието (LP1). Нека $B \ll D$ и $B \in \mathcal{B}$. Тогава, от (1.10) имаме, че $D \in \mathcal{V}(B)$. Следователно, полагайки

$$\mathcal{V}_D(B) = \{V \cap D \mid V \in \mathcal{V}(B)\},$$

получаваме, че $\mathcal{V}_D(B) \subseteq \mathcal{V}(B)$. От (LST3) следва, че съществува $U_0 \in \mathcal{V}_D(B) \cap \mathcal{M}$. От (ST2) (вж. Дефиниция 1.2.27) следва, че съществува $V \in \mathcal{V}(B)$, такова че $U_0 \in \mathcal{V}(A)$ при условие, че $A \subseteq V$ и $A \in \mathcal{M}$. От (LST3) следва, че можем да считаме, че $V \in \mathcal{M}$. Тогава $U_0 \in \mathcal{V}(V)$. Тъй като $V \in \mathcal{V}(B)$, то от (1.10) следва, че $B \ll V$. Да допуснем, че $V\delta(X \setminus D)$. Тогава, от (1.9) следва, че съществува $D' \subseteq (X \setminus D)$, такова че $D' \in \mathcal{M}$ и $D' \cap U_0 \neq \emptyset$. От $U_0 \in \mathcal{V}_D(B)$ следва, че $U_0 = A \cap D$ за някое $A \in \mathcal{V}(B)$. Следователно $D' \cap (A \cap D) \neq \emptyset$, т.е. $D' \cap D \neq \emptyset$. Това противоречие показва, че $V \ll D$. Значи $B \ll V \ll D$. Следователно $(X, \delta, \mathcal{M})$ е локално близостно пространство.

Нека $f : (X_1, (\mathcal{M}_1, \mathcal{V}_1)) \longrightarrow (X_2, (\mathcal{M}_2, \mathcal{V}_2))$ е супертопологично изображение. Ще докажем, че $f : F(X_1, (\mathcal{M}_1, \mathcal{V}_1)) \longrightarrow F(X_2, (\mathcal{M}_2, \mathcal{V}_2))$ е еквинепрекъснато изображение. Нека $F(X_i, (\mathcal{M}_i, \mathcal{V}_i)) = (X_i, \beta_i, \mathcal{M}_i)$, $i = 1, 2$. Очевидно, условието (EQ2) от Дефиниция 1.2.25 следва от условието (STC1) от Дефиниция 1.2.27. Нека $A, B \subseteq X_1$ и $A\beta_1 B$. Тогава съществуват $C, D \in \mathcal{M}_1$, такива че $(A \cap C)\beta_1(B \cap D)$; сега, от (1.9) получаваме, че

(1.11) $U \cap (B \cap D) \neq \emptyset$, за всяко $U \in \mathcal{V}_1(A \cap C)$.

Да допуснем, че $f(A)\overline{\beta_2}f(B)$. Тогава $f(A \cap C)\overline{\beta_2}f(B \cap D)$. Следователно, съгласно (1.9), съществува $V \in \mathcal{V}_2(f(A \cap C))$, такова че $V \cap f(B \cap D) = \emptyset$. Тогава $f^{-1}(V) \cap (B \cap D) = \emptyset$. Тъй като f е супертопологично, то $f^{-1}(V) \in \mathcal{V}_1(A \cap C)$. Това противоречи на (1.11). Следователно $f(A)\beta_2 f(B)$. И така, $f : F(X_1, (\mathcal{M}_1, \mathcal{V}_1)) \longrightarrow F(X_2, (\mathcal{M}_2, \mathcal{V}_2))$ е еквинепрекъснато изображение. Полагаме $F(f) = f$.

Стъпка 2. Конструкция на функтора $G : \mathcal{C}_2 \longrightarrow \mathcal{C}_3$.

Нека $(X, \delta, \mathcal{B}) \in |\mathcal{C}_2|$. Полагаме

$$G(X, \delta, \mathcal{B}) = (X, (\mathcal{M}, \mathcal{V})),$$

където

(1.12) $\mathcal{M} = \mathcal{B}$ и $\mathcal{V} = \{\mathcal{V}(A) = \{B \subseteq X \mid A \ll B\} \mid A \in \mathcal{M}\}$.

Ще докажем, че $G(X, \delta, \mathcal{B}) \in |\mathcal{C}_3|$. Очевидно, условието (ST1) от Дефиниция 1.2.27 е изпълнено. Ще покажем, че е изпълнено и условието (ST2). Нека $A \in \mathcal{M}$ и $U \in \mathcal{V}(A)$, т.е. $A \ll U$. Тогава от условие (LP1) (вж. Дефиниция 1.2.25) следва, че съществува $C \in \mathcal{B}$, такова че $A \ll C \ll U$. Тогава $C \in \mathcal{V}(A)$. Нека $B \subseteq C$. Тогава $B \in \mathcal{M}$ и $B \ll U$. Следователно $U \in \mathcal{V}(B)$, за всяко $B \subseteq C$. И така, $\Sigma = (\mathcal{M}, \mathcal{V})$ е супертопология.

Сега ще докажем, че $\Sigma = (\mathcal{M}, \mathcal{V})$ е симетрична супертопология. Нека $A, B \in \mathcal{M}$ и $U \cap A \neq \emptyset$, за всяко $U \in \mathcal{V}(B)$. Да допуснем, че съществува $V \in \mathcal{V}(A)$, такова че $V \cap B = \emptyset$. Тогава $A\overline{\delta}(X \setminus V)$ и $B \subseteq (X \setminus V)$. Следователно $A\overline{\delta}B$, т.е. $(X \setminus A) \in \mathcal{V}(B)$. Това противоречие показва, че $B \cap V \neq \emptyset$, за всяко $V \in \mathcal{V}(A)$. И така, $\Sigma = (\mathcal{M}, \mathcal{V})$ е симетрична супертопология.

По-нататък, условията (LST1) и (LST2) (вж. Дефиниция 1.2.28) очевидно са изпълнени. Ще докажем, че е изпълнено също и условието (LST3). Нека $A \in \mathcal{M}$

и $V \in \mathcal{V}(A)$, т.е. $A \ll V$. Тогава от условие (LP1) (вж. Дефиниция 1.2.25) следва, че съществува $C \in \mathcal{M}$, ткова че $A \ll C \ll V$. Значи $C \in \mathcal{V}(A) \cap \mathcal{M}$. Следователно, $\Sigma = (\mathcal{B}, \mathcal{V})$ е L-супертопология. Очевидно тя е отделима.

Нека $f \in \mathcal{C}_2((X_1, \beta_1, \mathcal{B}_1), (X_2, \beta_2, \mathcal{B}_2))$. Ще докажем, че

$$f \in \mathcal{C}_3(G(X_1, \beta_1, \mathcal{B}_1), G(X_2, \beta_2, \mathcal{B}_2)).$$

Нека $B \in \mathcal{M}_1 = \mathcal{B}_1$. Тогава $f(B) \in \mathcal{B}_2 = \mathcal{M}_2$. Следователно $f(\mathcal{M}_1) \subseteq \mathcal{M}_2$. Нека $A \in \mathcal{M}_1$ и $V \in f^{-1}(\mathcal{V}_2(f(A)))$. Съществува $U \in \mathcal{V}_2(f(A))$, такова че $V = f^{-1}(U)$. От $f(A) \ll_2 U$ следва, че $f^{-1}(f(A)) \ll_1 f^{-1}(U)$. Тогава $A \ll_1 V$, т.е. $V \in \mathcal{V}_1(A)$. Следователно $f^{-1}(\mathcal{V}_2(f(A))) \subseteq \mathcal{V}_1(A)$. Значи f е супертопологично изображение. Полагаме $G(f) = f$.

Стъпка 3. Доказателство на равенството $G \circ F = id_{\mathcal{C}_3}$.

Нека $(X, \Sigma) \in |\mathcal{C}_3|$, където $\Sigma = (\mathcal{M}, \mathcal{V})$. Тогава $G(F(X, \Sigma)) = G(X, \delta, \mathcal{M}) = (X, \Sigma_1)$, където $\Sigma_1 = (\mathcal{M}, \mathcal{V}_1)$. Трябва да докажем, че $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1$. Нека $A \in \mathcal{M}$ и $V \in \mathcal{V}(A)$. Тогава, от (1.10) следва, че $A \ll V$ и следователно $V \in \mathcal{V}_1(A)$. Обратно, нека $V \in \mathcal{V}_1(A)$. Тогава $A \ll V$. От (1.10) получаваме, че $V \in \mathcal{V}(A)$. Следователно $\mathcal{V}(A) = \mathcal{V}_1(A)$, за всяко $A \in \mathcal{M}$. И така, $G(F(X, \Sigma)) = (X, \Sigma)$.

Стъпка 4. Доказателство на равенството $F \circ G = id_{\mathcal{C}_2}$.

Нека $(X, \delta, \mathcal{B}) \in |\mathcal{C}_2|$. Тогава $F(G(X, \delta, \mathcal{B})) = F(X, \Sigma) = (X, \delta_1, \mathcal{B})$, където $\Sigma = (\mathcal{B}, \mathcal{V})$. Трябва да докажем, че $\delta = \delta_1$. Нека $A \ll_\delta B$, т.е. $A\overline{\delta}(X \setminus B)$. Тогава имаме, че $C\overline{\delta}(X \setminus B)$ за всяко $C \subseteq A$. Следователно $B \in \mathcal{V}(C)$, за всяко $C \in \mathcal{M}$, такова че $C \subseteq A$. Да допуснем, че $A\delta_1(X \setminus B)$. Тогава съществуват $C_1 \subseteq A$ и $B_1 \subseteq (X \setminus B)$, такива че $B_1, C_1 \in \mathcal{M}$ и $C' \cap B_1 \neq \emptyset$, за всяко $C' \in \mathcal{V}(C_1)$. Имаме, че $B \in \mathcal{V}(C_1)$. Следователно $B \cap B_1 \neq \emptyset$. Това противоречие показва, че $A \ll_{\delta_1} B$. Обратно, нека $A \ll_{\delta_1} B$. Тогава, от (1.10) следва, че $B \in \mathcal{V}(A)$. Това означава, че $A \ll_\delta B$. Следователно $(X, \delta, \mathcal{B}) = (X, \delta_1, \mathcal{B})$.

Следователно категориите $\mathcal{C}_2$ и $\mathcal{C}_3$ са изоморфни. □

Следствие 1.3.10. *За всяка (отделима) L-супертопология $\Sigma = (\mathcal{M}, \mathcal{V})$ в множеството X, индуцираната топология $\mathcal{T}$ в X е (хаусдорфова) напълно регулярна топология.*

Доказателство. От Теорема 1.3.9 следва, че съществува $(X, \delta, \mathcal{B}) \in |\mathcal{C}_2|$, такова че $(X, \Sigma) = G(X, \delta, \mathcal{B})$. Следователно, съгласно (1.12), за всяко $x \in X$, $\mathcal{V}(x) =$

$\{C \subseteq X \mid \{x\} \ll C\}$. Очевидно, за всяко $A \subseteq X$, $\mathrm{int}_{(X,\tau_\delta)}(A) = \{x \in X \mid \{x\} \ll A\}$. Значи $\tau_\delta = \mathcal{T}$. Сега, всичко следва от [42, 2.1]. □

1.4 Описание на паракомпактните и на локално компактните паракомпактни разширения

В този параграф, под "топологично пространство" ще разбираме "хаусдорфово топологично пространство".

Означение 1.4.1. Множеството от всички (с точност до еквивалентност) паракомпактни разширения на едно тихоново пространство X ще означаваме с $Par(X)$.

Дефиниция 1.4.2. Една фамилия Ω от подмножества на едно SR-близостно пространство (X, α), където $\alpha = (\delta, \Sigma)$, се нарича Σ-*локално крайна фамилия*, ако за всяко $\mathcal{F} \in \Sigma$ съществува $U \in \mathcal{F}$, което пресича само краен брой елементи на Ω.

Факт 1.4.3. *Всяка Σ-локално крайна фамилия Ω в едно SR-близостно пространство (X, α), където $\alpha = (\delta, \Sigma)$, е локално крайна фамилия в топологичното пространство (X, τ_δ).*

Доказателство. От $\{\mathcal{N}_{(X,\tau_\delta)}(x) \mid x \in X\} \subseteq \Sigma$ получаваме, че за всяко $x \in X$ съществува околност U на x, такава че U пресича само краен брой елементи на фамилията Ω. □

Твърдение 1.4.4. *Ако Ω е Σ-локално крайна фамилия в едно SR-близостно пространство (X, α), където $\alpha = (\delta, \Sigma)$, и Ω се състои от отворени в (X, τ_δ) множества, то $\Omega^* = \{U^* \mid U \in \Omega\}$ е отворена локално крайна фамилия в регулярното разширение $(r_\alpha X, r_\alpha)$ на (X, τ_δ) (вж. Теорема 1.2.20 и 1.2.1 за означенията).*

Доказателство. Нека $\mathcal{F} \in \Sigma$. Съществува $U \in \mathcal{F}$, такова че U пресича само краен брой елементи $V_1, ..., V_k$ на Ω. Тогава, ако $V \in \Omega$ и $V \neq V_i$, $i = 1, \ldots, k$, то $U \cap V = \emptyset$; следователно, съгласно 1.2.3(б), $U^* \cap V^* = (U \cap V)^* = \emptyset^* = \emptyset$. Тъй като $\mathcal{F} \in U^*$, то получаваме, че Ω^* е локално крайна фамилия в $r_\alpha X$. □

Дефиниция 1.4.5. Нека (X, α), където $\alpha = (\delta, \Sigma)$, е SR-близостно пространство. Едно покритие Ω на X се нарича:

(а) Σ-*покритие*, ако за всяко $\mathcal{F} \in \Sigma$ съществува $U \in \Omega \cap \mathcal{F}$;

(б) *отворено покритие на* (X, α), ако всички негови елементи са отворени подмножества на топологичното пространство (X, τ_δ).

Ако Ω е Σ-покритие на (X, α) и Ω е вписано в друго покритие Ω' на X, то ще казваме, че Ω е Σ-*покритие вписано в* Ω'.

Твърдение 1.4.6. *Нека Ω е отворено Σ-покритие на едно SR-близостно пространство (X, α), където $\alpha = (\delta, \Sigma)$. Тогава $\Omega^* = \{U^* \mid U \in \Omega\}$ е отворено покритие на $(r_\alpha X, r_\alpha)$.*

Доказателство. Нека $\mathcal{F} \in \Sigma$ $(= r_\alpha X)$. Тогава съществува $U \in \Omega$, такова че $U \in \mathcal{F}$. Значи $\mathcal{F} \in U^*$. Следователно Ω^* е покритие на $r_\alpha X$. Очевидно, Ω^* е отворена фамилия в $r_\alpha X$. $\square$

Дефиниция 1.4.7. Една SR-близост $\alpha = (\delta, \Sigma)$ в едно множество X се нарича P-*близост*, ако във всяко отворено Σ-покритие на (X, α) може да се впише отворено Σ-локално крайно Σ-покритие. Фамилията от всички P-близости (δ, Σ) в едно топологично пространство (X, τ) (т.е. $\tau = \tau_\delta$) ще означаваме с $PProx(X)$.

Теорема 1.4.8. *Ако (X, τ) е тихоново пространство, то наредените множества $(Par(X), \leq_s)$ (респективно $(Par(X), \leq)$) и $(PProx(X), \leq_s)$ (респективно $(PProx(X), \leq)$) са изоморфни.*

Доказателство. Нека (eX, e) е паракомпактно разширение на тихоновото пространство (X, τ). Тогава (eX, e) е регулярно разширение на (X, τ). Нека $\alpha_{(eX,e)} = (\delta_{(eX,e)}, \Sigma_{(eX,e)})$ е SR-близостта в (X, τ), индуцирана от eX (вж. Теорема 1.2.20). За краткост, в този параграф ще пропускаме индекса (eX, e) на α, δ и Σ. Сега от Теорема 1.2.20 следва, че разширенията (eX, e) и $(r_\alpha X, r_\alpha)$ са еквивалентни. Следователно, можем да считаме, че $eX = \Sigma$, $e = r_\alpha$ и $\{U^* \mid U \in \tau\}$ е база на eX. Ще покажем, че α е P-близост в пространството (X, τ). Нека Ω е отворено Σ-покритие на (X, α). Тогава от Твърдение 1.4.6, имаме, че $\Omega^* = \{U^* \mid U \in \Omega\}$ е отворено покритие на eX. Нека Ω_1' е отворено локално крайно покритие на eX, вписано в Ω^*. Нека $\Omega_1 = \{e^{-1}(V') \mid V' \in \Omega_1'\}$. Тогава Ω_1 е отворено покритие на

(X, α), вписано в Ω. Нека $\mathcal{F} \in \Sigma$. Тогава съществува $V' \in \Omega_1'$, такова че $\mathcal{F} \in V'$. Полагайки $V = e^{-1}(V')$, получаваме, че $V' \subseteq V^*$ (вж. 1.2.3(a) и 1.2.2); следователно $\mathcal{F} \in V^*$; тогава $V \in \mathcal{F} \cap \Omega_1$. Значи Ω_1 е Σ-покритие на (X, α). Остава да покажем само, че Ω_1 е Σ-локално крайна фамилия. Нека $\mathcal{F} \in \Sigma$. Тогава съществува отворено подмножество U на X, такова че $\mathcal{F} \in U^*$ и U^* пресича само краен брой елементи $V_1', ..., V_k'$ на Ω_1'. Следователно, за всяко $V' \in \Omega_1'$, такова че $V' \neq V_i'$, $i = 1, ..., k$, имаме, че $U^* \cap V' = \emptyset$, и следователно $U \cap e^{-1}(V') = e^{-1}(U^* \cap V') = \emptyset$. Доказахме, че $U \cap V = \emptyset$ за всяко $V \in \Omega_1$, такова че $V \neq e^{-1}(V_i')$, $i = 1, ..., k$. Тъй като $U \in \mathcal{F}$, то заключаваме, че Ω_1 е отворено Σ-локално крайно покритие на X. Следователно $\alpha = (\delta, \Sigma)$ е P-близост в пространството (X, τ).

Обратно, нека $\alpha = (\delta, \Sigma)$ е P-близост в пространството (X, τ) и $(eX, e) = (r_\alpha X, r_\alpha)$ (вж. Теорема 1.2.20 за означението $(r_\alpha X, r_\alpha)$). Тогава от Теорема 1.2.20 имаме, че $eX = \Sigma$ е регулярно пространство; следователно фамилията от всички регулярно отворени подмножества на eX е отворена база на eX. Нека Ω' е покритие на eX състоящо се от регулярно отворени подмножества на eX и $\Omega = \{e^{-1}(U') \mid U' \in \Omega'\}$. Тогава Ω е отворено Σ-покритие на X. [Наистина, за всяко $\mathcal{F} \in \Sigma$ съществува $U' \in \Omega'$, такова че $\mathcal{F} \in U'$; тогава $\mathcal{F} \in (e^{-1}(U'))^*$; следователно $e^{-1}(U') \in \mathcal{F} \cap \Omega$.] Значи съществува отворено Σ-локално крайно Σ-покритие Ω_1 на X вписано в Ω. Тогава, съгласно 1.4.4 и 1.4.6, $\Omega_1^* = \{V^* \mid V \in \Omega_1\}$ е отворено локално крайно покритие на eX. Ще покажем, че Ω_1^* е вписано в Ω'. Нека $V \in \Omega_1$. Тогава съществува $U' \in \Omega'$, такова че $V \subseteq e^{-1}(U')$. От 1.2.3(a) имаме, че $V^* = Ex_{eX}V \subseteq Ex_{eX}(e^{-1}(U'))$ и следователно $\mathrm{cl}_{eX}(V^*) \subseteq \mathrm{cl}_{eX}(Ex_{eX}(e^{-1}(U'))) = \mathrm{cl}_{eX}(U')$. Тъй като U' е регулярно отворено множество, то $V^* \subseteq \mathrm{int}_{eX}(\mathrm{cl}_{eX}(U')) = U'$. Следователно Ω_1^* е покритие на eX, вписано в Ω'. Значи eX е паракомпакт.

□

Дефиниция 1.4.9. Една LC-близост $\alpha = (\delta, \Sigma)$ се нарича *PLC-близост*, ако е P-близост. Фамилията от всички PLC-близости в едно топологично пространство X ще означаваме с $PLCProx(X)$. Множеството от всички (с точност до еквивалентност) локално компактни паракомпактни разширения на едно тихоново пространство X ще означаваме с $PLC(X)$.

От Теорема 1.4.8 и Теорема 1.2.23 получаваме следния резултат:

Теорема 1.4.10. *Нека X е тихоново пространство. Тогава наредените множества $(PLC(X),\ \leq_s)$ (респективно $(PLC(X), \leq)$) и $(PLCProx(X), \leq_s)$ (респективно $(PLCProx(X), \leq)$) са изоморфни.*

Глава 2

Една нова теорема за дуалност за категорията на локално компактните пространства и непрекъснатите изображения

2.1 Увод

В тази глава се доказва една нова теорема за дуалност за категорията на локално компактните хаусдорфови пространства и непрекъснатите изображения между тях. Във Въведението бе описана подробно мотивацията за нейното създаване.

Главата е организирана както следва: във втория параграф се съдържат всички необходими за по-нататъшното изложение подготвителни резултати и понятия, а в третия параграф е въведена нова категория, за която се доказва, че е дуална на категорията **HLC** на локално компактните хаусдорфови пространства и непрекъснатите изображения между тях.

Резултатите, изложени в тази глава, са публикувани в работата [21].

2.2 Предварителни сведения

Дефиниция 2.2.1. Една алгебрична структура $(B, 0, 1, \vee, \wedge, ^*, C)$ се нарича *контактна булева алгебра* или, просто, *контактна алгебра* (съкратено, CA или *C-алгебра*) ([25]), ако структурата $(B, 0, 1, \vee, \wedge, ^*)$ е булева алгебра и C е бинарна релация в B, удовлетворяваща следните аксиоми:

(C1) ако $a \neq 0$, то aCa;

(C2) ако aCb, то $a \neq 0$ и $b \neq 0$;

(C3) от aCb следва bCa;

(C4) $aC(b \vee c)$ тогава и само тогава, когато aCb или aCc.

Когато това не води до недоразумение, вместо $(B, 0, 1, \vee, \wedge, ^*, C)$ ще пишем просто (B, C). Релацията C се нарича *контактна релация*. Когато B е пълна булева алгебра, то (B, C) се нарича *пълна контактна булева алгебра* или, просто, *пълна контактна алгебра* (съкратено, CCA или *CC-алгебра*).

Казваме, че две C-алгебри (B_1, C_1) и (B_2, C_2) са *CA-изоморфни*, когато съществува булев изоморфизъм $\varphi : B_1 \longrightarrow B_2$, такъв, че за всеки $a, b \in B_1$, aC_1b тогава и само тогава, когато $\varphi(a)C_2\varphi(b)$. Тук под "булев изоморфизъм" ще разбираме изоморфизъм в категорията **Bool** на булевите алгебри и булевите хомоморфизми.

Една контактна алгебра (B, C) се нарича *свързана*, ако удовлетворява следната аксиома:

(CON) ако $a \neq 0, 1$, то aCa^*.

Една контактна алгебра (B, C) се нарича *нормална контактна булева алгебра* или, просто, *нормална контактна алгебра* (съкратено, NCA или *NC-алгебра*) ([13],[33]), ако тя удовлетворява следните аксиоми (под "$-C$" ще разбираме "не C"):

(C5) ако $a(-C)b$, то $a(-C)c$ и $b(-C)c^*$ за някое $c \in B$;

(C6) ако $a \neq 1$, то съществува $b \neq 0$, такова че $b(-C)a$.

Да отбележим, че аксиомите за NC-алгебрите са почти идентичнни с аксиомите на Ефремович за близостни пространства [29].

Една нормална CA се нарича *пълна нормална контактна булева алгебра* (съкратено, CNCA или *CNC-алгебра*), ако тя е CCA. Понятието "нормалната контактна алгебра" е въведено от Федорчук [33] под името "*булева δ-алгебра*". То е еквивалентно на понятието "компинджентна булева алгебра" на de Vries [13] (неговата дефиниция е дадена по-долу). Ние наричаме тези алгебри "нормални контактни алгебри", защото те формират подклас на класа на контактните алгебри и естествено възникват в класа на нормалните хаусдорфови пространства.

Ще отбележим,че ако $0 \neq 1$, то аксиомата (C2) следва от аксиомите (C6) и

(C4).

За всяка CA (B, C) дефинираме бинарна релация " $\ll_C$" в B (наречена *дълбоко включване*), полагайки " $a \ll_C b \leftrightarrow a(-C)b^*$ ". Понякога вместо " $\ll_C$" ще пишем просто " $\ll$".

Нормалните контактни алгебри могат еквивалентно да бъдат дефинирани (и точно по този начин те са въведени под името "*компинджентни булеви алгебри*" от de Vries в [13]) като двойка от булева алгебра $B = (B, 0, 1, \vee, \wedge, ^*)$ и бинарна релация $\ll$ в B, удовлетворяваща следните аксиоми:

($\ll$1) ако $a \ll b$, то $a \leq b$;

($\ll$2) $0 \ll 0$;

($\ll$3) ако $a \leq b \ll c \leq t$, то $a \ll t$;

($\ll$4) ако $a \ll c$ и $b \ll c$, то $a \vee b \ll c$;

($\ll$5) ако $a \ll c$, то $a \ll b \ll c$ за някое $b \in B$;

($\ll$6) ако $a \neq 0$, то съществува $b \neq 0$, такова че $b \ll a$;

($\ll$7) ако $a \ll b$, то $b^* \ll a^*$.

Ако $0 \neq 1$ то аксиомата ($\ll$2) следва от аксиомите ($\ll$3), ($\ll$4), ($\ll$6) и ($\ll$7).

Контактните алгебри могат да бъдат дефинирани и като двойка от булева алгебра B и бинарна релация $\ll_B$ удовлетворяваща аксиомите ($\ll$1)-($\ll$4) и ($\ll$7).

Лесно се вижда, че аксиомата (C5) (респ., (C6)) може да бъде изказана и във вида ($\ll$5) (респ., ($\ll$6)).

Пример 2.2.2. Нека (X, τ) е топологично пространство и $(RC(X, \tau), 0, 1, \wedge, \vee, ^*)$ е булевата алгебра дефинирана в Твърдение 0.3.6. Лесно се вижда, че можем да дефинираме контактна релация $\rho_{(X,\tau)}$ в $RC(X, \tau)$, полагайки $F\rho_{(X,\tau)}G$ тогава и само тогава, когато $F \cap G \neq \emptyset$; тази релация се нарича *стандартна контактна релация*. Двойката $(RC(X, \tau), \rho_{(X,\tau)})$ е CCA (нарича се *стандартна контактна алгебра*). Често ще пишем ρ_X вместо $\rho_{(X,\tau)}$. Ще отбележим, че за $F, G \in RC(X)$, $F \ll_{\rho_X} G$ тогава и само тогава, когато $F \subseteq \mathrm{int}_X(G)$.

Ясно е, че ако (X, τ) е нормално хаусдорфово пространство, то стандартната контактна алгебра $(RC(X, \tau), \rho_{(X,\tau)})$ е пълна NCA.

Дефиниция 2.2.3. Нека (B, C) е CA. Едно непразно подмножество σ на B се нарича *клъстър* в (B, C), ако са изпълнени следните условия:

$(K1)$ ако $a, b \in \sigma$, то aCb;

$(K2)$ ако $a \vee b \in \sigma$, то $a \in \sigma$ или $b \in \sigma$;

$(K3)$ ако aCb за всяко $b \in \sigma$, то $a \in \sigma$.

Множеството от всички клъстъри в (B, C) ще означаваме с $\mathrm{Clust}(B, C)$.

Твърдение 2.2.4. ([17], [50]) *Нека (B, C) е нормална контактна алгебра, σ е клъстър в (B, C), $a \in B$ и $a \notin \sigma$. Тогава съществува $b \in B$, такова че $b \notin \sigma$ и $a \ll b$.*

Следващото понятие е решетъчно-теоретичен аналог на понятието *локална близост*, въведено от Leader ([42]) (виж 1.2.25):

Дефиниция 2.2.5. ([50]) Една алгебрична структура

$$\underline{B}_l = (B, 0, 1, \vee, \wedge, ^*, \rho, \mathbb{B})$$

се нарича *локална контактна булева алгебра*, или, просто, *локална контактна алгебра* (съкратено, LCA или *LC-алгебра*), ако $(B, 0, 1, \vee, \wedge, ^*)$ е булева алгебра, ρ е бинарна релация в B, такава че (B, ρ) е CA, и $\mathbb{B}$ е идеал (допуска се да е и несобствен) в B, и се удовлетворяват следните аксиоми:

(BC1) ако $a \in \mathbb{B}$, $c \in B$ и $a \ll_\rho c$, то $a \ll_\rho b \ll_\rho c$ за някое $b \in \mathbb{B}$;

(BC2) ако $a\rho b$, то съществува елемент c от $\mathbb{B}$, такъв че $a\rho(c \wedge b)$;

(BC3) ако $a \neq 0$, то съществува $b \in \mathbb{B} \setminus \{0\}$, такова че $b \ll_\rho a$.

Когато това не води до недоразумение, ще означаваме локалните контактни алгебри просто с $(B, \rho, \mathbb{B})$. Елементите на $\mathbb{B}$ наричаме *ограничени*, а елементите на $B \setminus \mathbb{B}$ – *неограничени*. Когато B е пълна булева алгебра, то LC-алгебрата $(B, \rho, \mathbb{B})$ се нарича *пълна локална контактна булева алгебра* или, просто, *пълна локална контактна алгебра* (съкратено, CLCA или *CLC-алгебра*).

Казваме, че две локални контактни алгебри $(B, \rho, \mathbb{B})$ и $(B_1, \rho_1, \mathbb{B}_1)$ са *LCA-изоморфни*, ако съществува булев изоморфизъм $\varphi : B \longrightarrow B_1$, такъв че за $a, b \in B$, $a\rho b$ тогава и само тогава, когато $\varphi(a)\rho_1\varphi(b)$, и $\varphi(a) \in \mathbb{B}_1$ тогава и само тогава, когато $a \in \mathbb{B}$.

Една локална контактна алгебра $(B, \rho, \mathbb{B})$ се нарича *свързана*, ако е свързана контактната алгебра (B, ρ).

Забележка 2.2.6. Ще отбележим, че ако $(B, \rho, \mathbb{B})$ е локална контактна алгебра и $1 \in \mathbb{B}$, то (B, ρ) е нормална контактна алгебра. Обратно, всяка нормална контактна алгебра може да бъде представена като локална контактна алгебра от вида (B, C, B).

Факт 2.2.7. ([50]) *Нека (X, τ) е локално компактно хаусдорфово пространство. Тогава тройката*

$$(RC(X, \tau), \rho_{(X,\tau)}, CR(X, \tau))$$

е пълна локална контактна алгебра; тя се нарича стандартна локална контактна алгебра.

Дефиниция 2.2.8. ([59]) Нека $(B, \rho, \mathbb{B})$ е локална контактна алгебра. Дефинираме бинарна релация "C_ρ" в B чрез

(2.1) $aC_\rho b \iff (a\rho b$ или $a, b \notin \mathbb{B})$.

Релацията C_ρ се нарича *александровско разширение на ρ по отношение на LC-алгебрата* $(B, \rho, \mathbb{B})$ (или, ако няма двусмислие, просто *александровско разширение на ρ*).

Лема 2.2.9. ([59]) *Нека $(B, \rho, \mathbb{B})$ е локална контактна алгебра. Тогава (B, C_ρ), където C_ρ е александровското разширение на ρ, е нормална контактна алгебра.*

Дефиниция 2.2.10. Нека $(B, \rho, \mathbb{B})$ е локална контактна алгебра. Казваме, че σ е *клъстър в* $(B, \rho, \mathbb{B})$ ако σ е клъстър в NC-алгебрата (B, C_ρ) (виж Дефиниция 2.2.8 и Лема 2.2.9). Един клъстър σ в $(B, \rho, \mathbb{B})$ (респективно, ултрафилтър u в B) се нарича *ограничен*, ако $\sigma \cap \mathbb{B} \neq \emptyset$ (респективно, $u \cap \mathbb{B} \neq \emptyset$). Множеството от всички ограничени клъстъри в $(B, \rho, \mathbb{B})$ означаваме с $\mathrm{BClust}(B, \rho, \mathbb{B})$.

Лема 2.2.11. [59] *Нека $(B, \rho, \mathbb{B})$ е локална контактна алгебра и нека $1 \notin \mathbb{B}$. Тогава $\sigma_\infty^{(B,\rho,\mathbb{B})} = \{b \in B \mid b \notin \mathbb{B}\}$ е клъстър в $(B, \rho, \mathbb{B})$. (Понякога ще пишем просто σ_∞ вместо $\sigma_\infty^{(B,\rho,\mathbb{B})}$.)*

Означение 2.2.12. Нека (X, τ) е локално компактно хаусдорфово пространство. Ако $x \in X$, то полагаме:

(2.2) $\sigma_x = \{F \in RC(X) \mid x \in F\}$.

За всяко $x \in X$, σ_x е ограничен клъстър в стандартната локална контактна алгебра $(RC(X,\tau), \rho_{(X,\tau)}, CR(X,\tau))$.

Следващата теорема е доказана от Roeper [50] (но частния случай, отнасящ се до компактните хаусдорфови пространства и NC-алгебрите, е доказан от de Vries [13]).

Теорема 2.2.13. (P. Roeper [50] за локално компактни пространства и de Vries [13] за компактни пространства) *Съществува биективно съответствие Ψ^t между класа от всички (с точност до хомеоморфизъм) локално компактни хаусдорфови пространства и класа от всички (с точност до изоморфизъм) CLC-алгебри; рестрикцията на Ψ^t върху класа от всички (с точност до хомеоморфизъм) компактни хаусдорфови пространства представлява биективно съответствие между горния клас и класа от всички (с точност до изоморфизъм) CNC-алгебри.*

Ще напомним (следвайки [59]) дефиницията на съответствието Ψ^t (споменато в горната теорема), както и някои други факти и понятия, които ще използваме по-късно.

Нека (X,τ) е локално компактно хаусдорфово пространство. Полагаме

(2.3) $\Psi^t(X,\tau) = (RC(X,\tau), \rho_{(X,\tau)}, CR(X,\tau))$.

Нека $\underline{B}_l = (B, \rho, \mathbb{B})$ е пълна локална контактна алгебра. Нека $C = C_\rho$ е александровското разширение на ρ (вж. Дефиниция 2.2.8). Тогава (B,C) е пълна нормална контактна алгебра (вж. Лема 2.2.9). Полагаме $X = \mathrm{Clust}(B,C)$ и нека $\mathcal{T}$ е топологията в X, за която фамилията $\{\lambda_{(B,C)}(a) \mid a \in B\}$ се явява затворена база (където за всяко $a \in B$, $\lambda_{(B,C)}(a) = \{\sigma \in X \mid a \in \sigma\}$). Понякога ще пишем просто λ_B вместо $\lambda_{(B,C)}$. Да отбележим, че $X \setminus \lambda_B(a) = \mathrm{int}(\lambda_B(a^*))$, че фамилията $\{\mathrm{int}(\lambda_B(a)) \mid a \in B\}$ е отворена база на $(X,\mathcal{T})$, и че за всяко $a \in B$, $\lambda_B(a) \in RC(X,\mathcal{T})$. Доказва се, че $\lambda_B : (B,C) \longrightarrow (RC(X), \rho_X)$ е CA-изоморфизъм и че $(X,\mathcal{T})$ е компактно хаусдорфово пространство.

Нека $1 \in \mathbb{B}$. Тогава $C = \rho$ и $\mathbb{B} = B$. Следователно $(B,\rho,\mathbb{B}) = (B,C,B) = (B,C)$ е пълна нормална контактна алгебра. Полагаме

(2.4) $\Psi^a(B,\rho,\mathbb{B}) = \Psi^a(B,C,B) = \Psi^a(B,C) = (X,\mathcal{T})$.

Нека $1 \notin \mathbb{B}$. Тогава множеството $\sigma_\infty = \{b \in B \mid b \notin \mathbb{B}\}$ е клъстър в (B, C) и следователно $\sigma_\infty \in X$. Нека $L = X \setminus \{\sigma_\infty\}$. Тогава $L = \mathrm{BClust}(B, \rho, \mathbb{B})$, т.е. L е множеството от всички ограничени клъстъри в (B, C_ρ) (понякога ще пишем $L_{\underline{B}_l}$ или L_B вместо L); нека $\tau (= \tau_{\underline{B}_l})$ е топологията в L индуцирана от топологията $\mathcal{T}$ в X, т.е. $\tau = \mathcal{T}|_L$ и (L, τ) е подпространство на $(X, \mathcal{T})$. Тогава (L, τ) е локално компактно хаусдорфово пространство. Полагаме

(2.5) $\Psi^a(B, \rho, \mathbb{B}) = (L, \tau)$.

Нека за всяко $a \in B$, $\lambda^l_{\underline{B}_l}(a) = \lambda_{(B,C_\rho)}(a) \cap L$. Ще пишем просто λ^l_B (или дори $\lambda_{(A,\rho,\mathbb{B})}$, когато $\mathbb{B} \neq A$) вместо $\lambda^l_{\underline{B}_l}$, когато това не води до двусмислие. Доказва се, че:

(I) L е гъсто подмножество на X;

(II) λ^l_B е булев изоморфизъм на булевата алгебра B върху булевата алгебра $RC(L, \tau)$;

(III) $b \in \mathbb{B}$ тогава и само тогава, когато $\lambda^l_B(b) \in CR(L)$;

(IV) $a \rho b$ тогава и само тогава, когато $\lambda^l_B(a) \cap \lambda^l_B(b) \neq \emptyset$.

Следователно, $X = \alpha L$ и $\lambda^l_B : (B, \rho, \mathbb{B}) \longrightarrow (RC(L), \rho_L, CR(L))$ е LCA-изоморфизъм. Ще отбележим също, че за всяко $b \in B$, $\mathrm{int}_{L_B}(\lambda^l_B(b)) = L_B \cap \mathrm{int}_X(\lambda_B(b))$.

За всяка CLCA $(B, \rho, \mathbb{B})$ и всяко $a \in B$, полагаме

(2.6) $\lambda^g_{\underline{B}_l}(a) = \lambda_{(B,C_\rho)}(a) \cap \Psi^a(B, \rho, \mathbb{B})$.

Ще пишем просто λ^g_B вместо $\lambda^g_{\underline{B}_l}$, когато това не води до недоразумение. Следователно, когато $1 \in \mathbb{B}$ имаме, че $\lambda^g_B = \lambda_B$, а когато $1 \notin \mathbb{B}$, то $\lambda^g_B = \lambda^l_B$. Получаваме, че

(2.7) $\lambda^g_B : (B, \rho, \mathbb{B}) \longrightarrow (\Psi^t \circ \Psi^a)(B, \rho, \mathbb{B})$

е LCA-изоморфизъм.

Да отбележим, че фамилията

(2.8) $\{\mathrm{int}_{\Psi^a(B,\rho,\mathbb{B})}(\lambda^g_B(a)) \mid a \in \mathbb{B}\}$

е отворена база на $\Psi^a(B, \rho, \mathbb{B})$.

Нека (L,τ) е локално компактно хаусдорфово пространство, $B = RC(L,\tau)$, $\mathbb{B} = CR(L,\tau)$ и $\rho = \rho_L$. Тогава $(B,\rho,\mathbb{B}) = \Psi^t(L,\tau)$. Доказва се, че изображението

(2.9) $t_{(L,\tau)} : (L,\tau) \longrightarrow \Psi^a(\Psi^t(L,\tau))$,

дефинирано чрез $t_{(L,\tau)}(x) = \{F \in RC(L,\tau) \mid x \in F\}(= \sigma_x)$, за всяко $x \in L$, е хомеоморфизъм.

Следователно $\Psi^a(\Psi^t(L,\tau))$ е хомеоморфно на (L,τ) и $\Psi^t(\Psi^a(B,\rho,\mathbb{B}))$ е LCA-изоморфна на $(B,\rho,\mathbb{B})$.

Ще отбележим, че ако $(A,\rho,\mathbb{B})$ е LC- алгебра, $X = \Psi^a(A,\rho,\mathbb{B})$ и $(B,\eta,\mathbb{B}') = \lambda^g_B(A,\rho,\mathbb{B})$, то за всяко $a \in RC(X)$ имаме, че $a = \bigvee\{b \in \mathbb{B}' \mid b \ll_{\rho_X} a\}$. Следователно, за всяко $a \in A$,

(2.10) $a = \bigvee\{b \in \mathbb{B} \mid b \ll_\rho a\}$.

Дефиниция 2.2.14. ([18]) Нека $(A,\rho,\mathbb{B})$ е LCA. Един идеал I в A се нарича *δ-идеал*, ако $I \subseteq \mathbb{B}$ и за всяко $a \in I$ съществува $b \in I$, такова че $a \ll_\rho b$. Ако I_1 и I_2 са два δ-идеала в $(A,\rho,\mathbb{B})$, то полагаме $I_1 \leq I_2$ тогава и само тогава, когато $I_1 \subseteq I_2$. Означаваме с $(I(A,\rho,\mathbb{B}),\leq)$ частично нареденото множество от всички δ-идеали в $(A,\rho,\mathbb{B})$.

Факт 2.2.15. ([18]) *Нека $(A,\rho,\mathbb{B})$ е LCA. Тогава, за всяко $a \in A$, множеството $I_a = \{b \in \mathbb{B} \mid b \ll_\rho a\}$ е δ-идеал. Тези δ-идеали ще наричаме* главни δ-идеали.

Ще напомним, че една пълна решетка L се нарича *фрейм*, ако тя удовлетворява безкрайния дистрибутивен закон $a \wedge \bigvee S = \bigvee\{a \wedge s \mid s \in S\}$, за всяко $a \in L$ и всяко $S \subseteq L$.

Факт 2.2.16. ([18]) *Нека $(A,\rho,\mathbb{B})$ е LCA. Тогава частично нареденото множество $(I(A,\rho,\mathbb{B}),\leq)$ от всички δ-идеали в $(A,\rho,\mathbb{B})$ е фрейм. Крайните сечения и произволните обединения в $I(A,\rho,\mathbb{B})$ съвпадат със съответните операции във фрейма $Idl(A)$ от всички идеали в A.*

Често ще ползваме следния елементарен факт: ако A е дистрибутивна решетка, Γ е множество и $\forall\gamma \in \Gamma$, J_γ е идеал в A, то обединението (т.е., супремума) $\bigvee\{J_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ на идеалите J_γ, $\gamma \in \Gamma$, във фрейма $Idl(A)$ е идеалът $J = \{\bigvee\{x_\gamma \mid \gamma \in \Gamma_1\} \mid \Gamma_1 \subseteq \Gamma, \Gamma_1$ е крайно, $x_\gamma \in J_\gamma$ за всяко $\gamma \in \Gamma_1\}$ в A (вж., напр., [28]).

Твърдение 2.2.17. ([18]) *Нека* $\sigma_1, \sigma_2 \in \Psi^a(A, \rho, \mathbb{B})$, *където* $(A, \rho, \mathbb{B})$ *е CLCA, и* $\sigma_1 \cap \mathbb{B} = \sigma_2 \cap \mathbb{B}$. *Тогава* $\sigma_1 = \sigma_2$.

Ще припомним, че ако A е дистрибутивна решетка, то един елемент $p \in A \setminus \{1\}$ се нарича *прост елемент на* A, ако за всеки $a, b \in A$, $a \wedge b = p$ следва, че $a = p$ или $b = p$.

Твърдение 2.2.18. ([18]) *Нека* $(A, \rho, \mathbb{B})$ *е CLCA. Ако* $\sigma \in \Psi^a(A, \rho, \mathbb{B})$, *то* $\mathbb{B} \setminus \sigma = J_\sigma$ *е прост елемент на* $I(A, \rho, \mathbb{B})$. *Ако* J *е прост елемент на* $I(A, \rho, \mathbb{B})$, *то съществува единствен* $\sigma \in \Psi^a(A, \rho, \mathbb{B})$, *такъв че* $\sigma \cap \mathbb{B} = \mathbb{B} \setminus J$.

Теорема 2.2.19. ([18]) *Нека* $(A, \rho, \mathbb{B})$ *е CLCA,* $X = \Psi^a(A, \rho, \mathbb{B})$ *и* $\mathcal{O}(X)$ *е фрейма от всички отворени подмножества на* X. *Тогава съществува фреймов изоморфизъм*

$$\iota : (I(A, \rho, \mathbb{B}), \leq) \longrightarrow (\mathcal{O}(X), \subseteq), \quad I \mapsto \bigcup \{\lambda_A^g(a) \mid a \in I\},$$

където $(I(A, \rho, \mathbb{B}), \leq)$ *е фрейма от всички* δ*-идеали в* $(A, \rho, \mathbb{B})$.

Означение 2.2.20. Ще означаваме с **HLC** категорията от всички локално компактни хаусдорфови пространства и всички непрекъснати изображения между тях.

Дефиниция 2.2.21. ([18]) Нека **DHLC** е категорията, чиито обекти са всички CLC-алгебри и чиито морфизми са всички функции $\psi : (A, \rho, \mathbb{B}) \longrightarrow (B, \eta, \mathbb{B}')$ между обектите на **DHLC**, удовлетворяващи условията

(DLC1) $\psi(0) = 0$.

(DLC2) $\psi(a \wedge b) = \psi(a) \wedge \psi(b)$ за всички $a, b \in A$.

(DLC3) ако $a \in \mathbb{B}, b \in A$ и $a \ll_\rho b$, то $(\psi(a^*))^* \ll_\eta \psi(b)$.

(DLC4) за всяко $b \in \mathbb{B}'$ съществува $a \in \mathbb{B}$, такова, че $b \leq \psi(a)$.

(DLC5) $\psi(a) = \bigvee \{\psi(b) \mid b \in \mathbb{B}, b \ll_\rho a\}$, за всяко $a \in A$.

Композицията "$\odot$" на два морфизма $\psi_1 : (A_1, \rho_1, \mathbb{B}_1) \longrightarrow (A_2, \rho_2, \mathbb{B}_2)$ и $\psi_2 : (A_2, \rho_2, \mathbb{B}_2) \longrightarrow (A_3, \rho_3, \mathbb{B}_3)$ от **DHLC** е дефинирана с формулата

(2.11) $\psi_2 \odot \psi_1 = (\psi_2 \circ \psi_1)^\vee$,

където за всяка функция $\psi : (A, \rho, \mathbb{B}) \longrightarrow (B, \eta, \mathbb{B}')$ между два обекта на **DHLC**, $\psi^\vee : (A, \rho, \mathbb{B}) \longrightarrow (B, \eta, \mathbb{B}')$ е дефинирана както следва:

(2.12) $\psi^\vee(a) = \bigvee\{\psi(b) \mid b \in \mathbb{B}, b \ll_\rho a\}$,

за всяко $a \in A$.

Теорема 2.2.22. ([18]) *Категориите* **HLC** *и* **DHLC** *са дуално еквивалентни.*

Ще припомним дефинициите на контравариантните функтори

$$\Lambda^t : \mathbf{HLC} \longrightarrow \mathbf{DHLC} \text{ и } \Lambda^a : \mathbf{DHLC} \longrightarrow \mathbf{HLC},$$

построени в [18], които осъществяват дуалната еквивалентност между категориите **HLC** и **DHLC**. Техните дефиниции върху обектите на съответните категории са следните:

$$\Lambda^t(X) = \Psi^t(X)$$

за всяко $X \in |\mathbf{HLC}|$, и

$$\Lambda^a(A, \rho, \mathbb{B}) = \Psi^a(A, \rho, \mathbb{B}),$$

за всяко $(A, \rho, \mathbb{B}) \in |\mathbf{DHLC}|$ (виж (2.3), (2.4) и (2.5) за Ψ^t и Ψ^a). Дефиницията на ковариантния функтор Λ^t върху морфизмите е следната:

$$\Lambda^t(f)(G) = \mathrm{cl}(f^{-1}(\mathrm{int}(G))),$$

за всяко $f \in \mathbf{HLC}(X, Y)$ и всяко $G \in RC(Y)$.

За да дадем дефиницията на ковариантния функтор Λ^a върху морфизмите на категорията **DHLC**, първо ще напомним две твърдения от [18], които ще ползваме и по-нататък:

Лема 2.2.23. ([18]) *Нека $(A, \rho, \mathbb{B})$ и $(B, \eta, \mathbb{B}')$ са LC-алгебри и $\psi : A \longrightarrow B$ е функция. За всяко $a \in A$ полагаме,*

$$D_\psi(a) = \bigcup\{I_{\psi(b)} \mid b \in \mathbb{B}, b \ll_\rho a\}$$

(виж Факт 2.2.15 за I_c). Тогава $D_\psi(a) = \bigvee\{I_{\psi(b)} \mid b \in \mathbb{B}, b \ll_\rho a\}$, където супремума е взет във фрейма $I(B, \eta, \mathbb{B}')$. Следователно, за всяко $a \in A$, $D_\psi(a)$ е δ-идеал.

Лема 2.2.24. ([18]) *Нека* $(A, \rho, \mathbb{B})$ *и* $(B, \eta, \mathbb{B}')$ *са LC-алгебри,* $\psi : A \longrightarrow B$ *е функция, удовлетворяваща условията (DLC1)-(DLC4),* $X = \Psi^a(A, \rho, \mathbb{B})$ *и* $Y = \Psi^a(B, \eta, \mathbb{B}')$ *(виж Теорема 2.2.13 за* Ψ^a*). За всяко* $\sigma' \in Y$*, полагаме* $f_\psi(\sigma') = \sigma$*, където* σ *е единственият ограничен клъстър в* $(A, \rho, \mathbb{B})$*, такъв че* $\sigma \cap \mathbb{B} = \{a \in \mathbb{B} \mid (\forall b \in A)[(a \ll_\rho b) \to (\psi(b) \in \sigma')]\}$*. Тогава* $f_\psi : Y \longrightarrow X$ *е непрекъснатата функция и*

$$f_\psi^{-1}(\mathrm{int}(\lambda_A^g(a)) = \iota_B(D_\psi(a)),\ \forall a \in \mathbb{B}, \tag{2.13}$$

(вж. Теорема 2.2.19 за ι_B*).*

Сега полагаме

$$\Lambda^a(\psi) = f_\psi,$$

за всяко $\psi \in \mathbf{DHLC}((A, \rho, \mathbb{B}), (B, \eta, \mathbb{B}'))$ (където f_ψ е от Лема 2.2.24).

Ще имаме нужда и от следната лема от [18]:

Лема 2.2.25. ([18]) *Нека* $\psi \in \mathbf{DHLC}((A, \rho, \mathbb{B}), (B, \eta, \mathbb{B}'))$ *и* $a, b \in A$*. Тогава от* $a \ll_\rho b$ *следва, че* $\psi(a) \ll_\eta \psi(b)$*.*

2.3 Нова теорема за дуалност за категорията на локално компактните хаусдорфови пространства и непрекъснатите изображения между тях

Дефиниция 2.3.1. Нека **MDHLC** е категорията, чиито обекти са всички CLC-алгебри и чиито морфизми $\varphi : (A, \rho, \mathbb{B}) \longrightarrow (B, \eta, \mathbb{B}')$ са всички многозначни изображения, които удовлетворяват следните условия:

(M1) за всяко $a \in A$, $\varphi(a) \in I(B, \eta, \mathbb{B}')$;

(M2) $\varphi(a \wedge b) = \varphi(a) \wedge \varphi(b)$, за всеки $a, b \in A$;

(M3) $\varphi(a) = \bigvee\{\varphi(b) \mid b \in \mathbb{B}, b \ll a\}$, за всяко $a \in A$;

(M4) $\varphi(0) = \{0\}$;

(M5) ако $a_i, b_i \in \mathbb{B}$, $a_i \ll b_i$, където $i = 1, 2$, то $\varphi(a_1 \vee a_2) \subseteq \varphi(b_1) \vee \varphi(b_2)$;

(M6) за всяко $b \in \mathbb{B}'$ съществува $a \in \mathbb{B}$, такова че $b \in \varphi(a)$.

Композицията $\diamond$ между два морфизма $\varphi : (A_1, \rho_1, \mathbb{B}_1) \longrightarrow (A_2, \rho_2, \mathbb{B}_2)$ и $\psi : (A_2, \rho_2, \mathbb{B}_2) \longrightarrow (A_3, \rho_3, \mathbb{B}_3)$ е дефинирана чрез $(\psi \diamond \varphi)(a) = \bigvee\{\psi(b) \mid b \in \varphi(a)\}$.

Идентитета $i_A : (A, \rho, \mathbb{B}) \longrightarrow (A, \rho, \mathbb{B})$ е дефиниран чрез $i_A(a) = I_a$ (вж. 2.2.15 за I_a).

(Да отбележим, че в десните страни на формулите в тази дефиниция знаците "$\wedge, \vee, \bigvee$" означават сечения и обединения в съответния фрейм от δ-идеали (вж. Факт 2.2.16).)

Забележка 2.3.2. Лесно се вижда, че в аксиомата (M2) изразът "$\varphi(a) \wedge \varphi(b)$" може да бъде заменен с "$\varphi(a) \cap \varphi(b)$". Също и в (M3), "$\bigvee$" може да бъде заменено с "$\bigcup$". Наистина, очевидно е, че $\bigcup\{\varphi(b) \mid b \in \mathbb{B}, b \ll a\} \subseteq \bigvee\{\varphi(b) \mid b \in \mathbb{B}, b \ll a\}$. Нека $c \in \bigvee\{\varphi(b) \mid b \in \mathbb{B}, b \ll a\}$; тогава съществуват $n \in \mathbb{N}^+$, $b_i \in \mathbb{B}$, $b_i \ll a$ и $c_i \in \varphi(b_i)$, за $i = 1, \ldots, n$, такива че $c = c_1 \vee \cdots \vee c_n$. Полагаме $b = b_1 \vee \cdots \vee b_n$. Тогава $b \in \mathbb{B}$ и $b \ll a$. Ясно е, че $c_i \in \varphi(b)$ за всяко $i = 1, \ldots, n$. Следователно $c \in \varphi(b)$, т.е. $c \in \bigcup\{\varphi(b) \mid b \in \mathbb{B}, b \ll a\}$.

Ще отбележим, че изразът "$\bigvee\{\psi(b) \mid b \in \varphi(a)\}$" може да бъде написан във вида "$\bigvee \psi(\varphi(a))$" и следователно $(\psi \diamond \varphi)(a) = \bigvee \psi(\varphi(a))$, т.е. нашата дефиниция на композицията на два морфизма в категорията **MDHLC** е съвсем естествена.

Твърдение 2.3.3. **MDHLC** *е категория.*

Доказателство. Ще докажем първо, че за всяко $(A, \rho, \mathbb{B})$, i_A е **MDHLC**-морфизъм. Наистина, очевидно i_A удовлетворява аксиомите (M1), (M2) и (M4). Ще докажем (M3), т.е. че $I_a = \bigvee\{I_b \mid b \in I_a\}$. Ясно е, че $\bigcup\{I_b \mid b \in I_a\} \subseteq I_a$. Нека $c \in I_a$. Тогава $c \in \mathbb{B}$ и $c \ll a$. Съществува $b \in \mathbb{B}$, такова че $c \ll b \ll a$. Следователно $c \in I_b$ и $b \in I_a$, т.е. $c \in \bigcup\{I_b \mid b \in I_a\}$. И така, $I_a = \bigcup\{I_b \mid b \in I_a\}$ и нашето твърдение следва от Забележка 2.3.2. Ще покажем, че i_A удовлетворява аксиомата (M5). Нека $a_i, b_i \in \mathbb{B}$, $a_i \ll b_i$, $i = 1, 2$. Трябва да покажем, че $I_{a_1 \vee a_2} \subseteq I_{b_1} \vee I_{b_2}$. Нека $c \ll a_1 \vee a_2$. Тогава $c = (c \wedge a_1) \vee (c \wedge a_2)$. Тъй като $c \wedge a_1 \leq a_1 \ll b_1$ и $c \wedge a_2 \leq a_2 \ll b_2$, то $c \wedge a_1 \in I_{b_1}$ и $c \wedge a_2 \in I_{b_2}$. Следователно $c = (c \wedge a_1) \vee (c \wedge a_2) \in I_{b_1} \vee I_{b_2}$. Значи $I_{a_1 \vee a_2} \subseteq I_{b_1} \vee I_{b_2}$. За да проверим (M6), нека $b \in \mathbb{B}$; тогава от (BC1) следва, че съществува $a \in \mathbb{B}$, такова че $b \ll a$; следователно $b \in I_a = i_A(a)$. И така, получихме, че i_A е **MDHLC**-морфизъм.

Нека $\varphi_1 : (A_1, \rho_1, \mathbb{B}_1) \longrightarrow (A_2, \rho_2, \mathbb{B}_2)$ и $\varphi_2 : (A_2, \rho_2, \mathbb{B}_2) \longrightarrow (A_3, \rho_3, \mathbb{B}_3)$ са **MDHLC**-морфизми. Ще докажем, че $\varphi = \varphi_2 \diamond \varphi_1$ е **MDHLC**-морфизъм. Имаме, че $\varphi(a) = \bigvee\{\varphi_2(b) \mid b \in \varphi_1(a)\}$. Очевидно, φ удовлетворява аксиомата (M1).

После, за всеки $a_1, a_2 \in A_1$,

$$\varphi(a_1 \wedge a_2) = \bigvee\{\varphi_2(b) \mid b \in \varphi_1(a_1 \wedge a_2)\} = \bigvee\{\varphi_2(b) \mid b \in \varphi_1(a_1) \cap \varphi_1(a_2)\}$$

и

$$\begin{aligned}\varphi(a_1) \wedge \varphi(a_2) &= \bigvee\{\varphi_2(b_1) \mid b_1 \in \varphi_1(a_1)\} \wedge \bigvee\{\varphi_2(b_2) \mid b_2 \in \varphi_1(a_2)\} \\ &= \bigvee\{\varphi_2(b_2) \wedge \bigvee\{\varphi_2(b_1) \mid b_1 \in \varphi_1(a_1)\} \mid b_2 \in \varphi_1(a_2)\} \\ &= \bigvee\{\bigvee\{\varphi_2(b_1) \wedge \varphi_2(b_2) \mid b_1 \in \varphi_1(a_1)\} \mid b_2 \in \varphi_1(a_2)\} \\ &= \bigvee\{\varphi_2(b_1 \wedge b_2) \mid b_1 \in \varphi_1(a_1), b_2 \in \varphi_1(a_2)\}.\end{aligned}$$

Ако за $i = 1, 2$, $b_i \in \varphi_1(a_i)$, то $b_1 \wedge b_2 = b \in \varphi_1(a_1) \cap \varphi_1(a_2)$. Така, че $\varphi(a_1) \wedge \varphi(a_2) \subseteq \varphi(a_1 \wedge a_2)$. Обратно, от $b \in \varphi_1(a_1) \cap \varphi_1(a_2)$ и $b = b \wedge b$ получаваме, че $\varphi(a_1 \wedge a_2) \subseteq \varphi(a_1) \wedge \varphi(a_2)$. Следователно φ удовлетворява условието (M2).

Ще докажем, че $\varphi(a) = \bigvee\{\varphi(b) \mid b \in \mathbb{B}, b \ll a\}$ за всяко $a \in A$, т.е., че $\bigvee\{\varphi_2(c) \mid c \in \varphi_1(a)\} = \bigvee\{\varphi_2(d) \mid d \in \varphi_1(b), b \in \mathbb{B}, b \ll a\}$. Нека $c \in \varphi_1(a)$. Тогава от (M3) и Забележка 2.3.2 следва, че съществува $b \in \mathbb{B}$, такова че $b \ll a$ и $c \in \varphi_1(b)$. Обратно, нека $d \in \varphi_1(b)$, $b \in \mathbb{B}$, $b \ll a$. Тогава $d \in \varphi_1(a)$. Следователно φ удовлетворява аксиомата (M3).

Тъй като $\varphi(0) = \bigvee\{\varphi_2(b) \mid b \in \varphi_1(0)\} = \bigvee\{\varphi_2(b) \mid b \in \{0\}\} = \varphi_2(0) = \{0\}$, то φ удовлетворява и условието (M4).

Нека $a_i, b_i \in \mathbb{B}$, $a_i \ll b_i$, $i = 1, 2$. Ще докажем, че $\varphi(a_1 \vee a_2) \subseteq \varphi(b_1) \vee \varphi(b_2)$, т.е., че

$$\bigvee\{\varphi_2(c) \mid c \in \varphi_1(a_1 \vee a_2)\} \subseteq \bigvee\{\varphi_2(d) \mid d \in \varphi_1(b_1)\} \vee \bigvee\{\varphi_2(e) \mid e \in \varphi_1(b_2)\}.$$

Нека $c \in \varphi_1(a_1 \vee a_2)$. Тогава $c \in \varphi_1(b_1) \vee \varphi_1(b_2)$, т.е., съществуват $d_1 \in \varphi_1(b_1)$ и $e_1 \in \varphi_1(b_2)$, такива че $c = d_1 \vee e_1$. Съществува $d \in \varphi_1(b_1)$, такова че $d_1 \ll d$ и съществува $e \in \varphi_1(b_2)$, такова че $e_1 \ll e$. Тогава $\varphi_2(c) = \varphi_2(d_1 \vee e_1) \subseteq \varphi_2(d) \vee \varphi_2(e)$. Следователно φ удовлетворява аксиомата (M5).

Нека $c \in \mathbb{B}_3$. Тогава съществува $b \in \mathbb{B}_2$, такова че $c \in \varphi_2(b)$. Съществува $a \in \mathbb{B}_1$, такова че $b \in \varphi_1(a)$. Следователно $c \in \varphi(a)$. Значи φ удовлетворява също и условието (M6).

Следователно $\varphi_2 \diamond \varphi_1$ е **MDHLC**-морфизъм.

Сега ще покажем, че композицията на **MDHLC**-морфизми е асоциативна. Нека $\chi : (A_1, \rho_1, \mathbb{B}_1) \longrightarrow (A_2, \rho_2, \mathbb{B}_2)$, $\psi : (A_2, \rho_2, \mathbb{B}_2) \longrightarrow (A_3, \rho_3, \mathbb{B}_3)$ и $\varphi : (A_3, \rho_3, \mathbb{B}_3) \longrightarrow (A_4, \rho_4, \mathbb{B}_4)$ са **MDHLC**-морфизми. Имаме, че за всяко $a \in A_1$,

$$\begin{aligned}(\varphi \diamond (\psi \diamond \chi))(a) &= \bigvee\{\varphi(b) \mid b \in (\psi \diamond \chi)(a)\} \\ &= \bigvee\{\varphi(b) \mid b \in \bigvee\{\psi(c) \mid c \in \chi(a)\}\},\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}((\varphi \diamond \psi) \diamond \chi)(a) &= \bigvee\{(\varphi \diamond \psi)(c) \mid c \in \chi(a)\} \\ &= \bigvee\{\bigvee\{\varphi(b) \mid b \in \psi(c)\} \mid c \in \chi(a)\} \\ &= \bigvee\{\varphi(b) \mid b \in \bigcup\{\psi(c) \mid c \in \chi(a)\}\}.\end{aligned}$$

Нека $b \in \bigvee\{\psi(c) \mid c \in \chi(a)\}$. Тогава $b = \bigvee\{b_i \mid i \in \{1, \ldots, n\}\}$, за някое $n \in \mathbb{N}^+$, където за всяко $i \in \{1, \ldots, n\}$, $b_i \in \psi(c_i)$ и $c_i \in \chi(a)$. Полагайки $c = \bigvee\{c_i \mid i \in \{1, \ldots, n\}\}$, получаваме, че $c \in \chi(a)$ и, че $\bigvee\{\psi(c_i) \mid i \in \{1, \ldots, n\}\} \subseteq \psi(c)$ (вж. (M1) и (M2)). Следователно $b \in \psi(c)$. Получихме, че $\bigvee\{\psi(c) \mid c \in \chi(a)\} = \bigcup\{\psi(c) \mid c \in \chi(a)\}$. Значи композицията "$\diamond$" е асоциативна.

Най-сетне, ако $\varphi : (A, \rho, \mathbb{B}) \longrightarrow (B, \eta, \mathbb{B}')$ е **MDHLC**-морфизъм, то за всяко $a \in A$ имаме, че $(\varphi \diamond i_A)(a) = \bigvee\{\varphi(b) \mid b \in I_a\} = \bigvee\{\varphi(b) \mid b \in \mathbb{B}, b \ll a\} = \varphi(a)$ (тъй като φ удовлетворява условието (M3)) и $(i_B \diamond \varphi)(a) = \bigvee\{I_b \mid b \in \varphi(a)\} = \varphi(a)$. Следователно $\varphi \diamond i_A = \varphi$ и $i_B \diamond \varphi = \varphi$.

С това показахме, че **MDHLC** е категория. □

Твърдение 2.3.4. *Нека $f : X \longrightarrow Y$ е* **HLC**-*морфизъм. Да дефинираме едно изображение $\varphi_f : \Psi^t(Y) \longrightarrow \Psi^t(X)$, полагайки*

(2.14) $\varphi_f(G) = \{F \in CR(X) \mid F \subseteq f^{-1}(\mathrm{int}(G))\}$, *за всяко $G \in RC(Y)$.*

Тогава φ_f е **MDHLC**-*морфизъм.*

Доказателство. Трябва да докажем, че φ_f удовлетворява условията (M1)-(M6) от Дефиниция 2.3.1. Ще започнем с това, че за всяко $G \in RC(Y)$, $\varphi_f(G)$ е δ-идеал. Очевидно, $\varphi_f(G)$ е ляво множество (т.е., ако $F \in \varphi_f(G)$, $H \in RC(X)$ и $H \subseteq F$, то $H \in \varphi_f(G)$). Освен това, ако $F_1, F_2 \in \varphi_f(G)$, то $F_1 \vee F_2 = F_1 \cup F_2 \in \varphi_f(G)$. Значи $\varphi_f(G)$ е идеал. Ако $F \in \varphi_f(G)$, то F е компактно и $F \subseteq f^{-1}(\mathrm{int}(G))$. Следователно съществува отворено $U \subseteq X$, такова че $\mathrm{cl}(U)$ е компактно и $F \subseteq U \subseteq \mathrm{cl}(U) \subseteq f^{-1}(\mathrm{int}(G))$. Тогава $\mathrm{cl}(U) \in CR(X)$ и следователно $\mathrm{cl}(U) \in \varphi_f(G)$. Така, че $\varphi_f(G)$ е δ-идеал. Следователно φ_f удовлетворява условието (M1).

Нека $G, H \in RC(Y)$. Тогава

$$\varphi_f(G \wedge H) = \{F \in CR(X) \mid F \subseteq f^{-1}(\mathrm{int}(G \wedge H))\}$$

и

$$\begin{aligned}\varphi_f(G) \cap \varphi_f(H) &= \{F \in CR(X) \mid F \subseteq f^{-1}(\mathrm{int}(G)),\ F \subseteq f^{-1}(\mathrm{int}(H))\} \\ &= \{F \in CR(X) \mid F \subseteq f^{-1}(\mathrm{int}(G \cap H))\}.\end{aligned}$$

Тъй като $\mathrm{int}(G \cap H)$ е регулярно отворено множество, то $\mathrm{int}(G \wedge H) = \mathrm{int}(\mathrm{cl}(\mathrm{int}(G \cap H))) = \mathrm{int}(G \cap H)$. Така, че $\varphi_f(G \wedge H) = \varphi_f(G) \cap \varphi_f(H)$. Следователно φ_f удовлетворява аксиомата (M2).

За да установим, че условието (M3) е изпълнено, трябва да докажем, че $\{F \in CR(X) \mid F \subseteq f^{-1}(\mathrm{int}(G))\} = \bigvee\{\{F' \in CR(X) \mid F' \subseteq f^{-1}(\mathrm{int}(H))\} \mid H \in CR(Y),\ H \subseteq \mathrm{int}(G)\}$. Очевидно е, че дясната част се съдържа в лявата. За да докажем обратното включване, нека $F \in CR(X)$ и $F \subseteq f^{-1}(\mathrm{int}(G))$. Тогава $f(F) \subseteq \mathrm{int}(G)$ и $f(F)$ е компактно. Нека $\Omega = \{\mathrm{int}(H) \mid H \in CR(Y),\ H \subseteq \mathrm{int}(G)\}$. Тогава $\bigcup \Omega = \mathrm{int}(G)$. Следователно Ω е покритие на $f(F)$. Тогава съществуват $H_1, \ldots, H_n$, такива че $\mathrm{int}(H_1), \ldots, \mathrm{int}(H_n) \in \Omega$ и $f(F) \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} \mathrm{int}(H_i) \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} H_i \subseteq \mathrm{int}(G)$. Полагаме $H = \bigcup\limits_{i=1}^{n} H_i$. Тогава $H \in CR(Y)$ и $H \subseteq \mathrm{int}(G)$. Тъй като $\bigcup\limits_{i=1}^{n} \mathrm{int}(H_i) \subseteq \mathrm{int}(\bigcup\limits_{i=1}^{n} H_i)$, то $f(F) \subseteq \mathrm{int}(H)$, т.е. $F \subseteq f^{-1}(\mathrm{int}(H))$. Следователно условието (M3) е изпълнено.

Тъй като $0 = \emptyset$, то $\varphi_f(\emptyset) = \{F \in CR(X) \mid F \subseteq f^{-1}\{\emptyset\}\} = \{\emptyset\} = I_\emptyset$. Следователно φ_f удовлетворява условието (M4).

За да покажем, че (M5) е изпълнено, трябва да докажем, че за всеки $G_i, H_i \in CR(Y)$, такива че $G_i \subseteq \mathrm{int}(H_i)$, където $i = 1, 2$, е изпълнено следното включване:

$$\{F \in CR(X) \mid F \subseteq f^{-1}(\mathrm{int}(G_1 \cup G_2))\} \subseteq$$

$$\{F' \in CR(X) \mid F' \subseteq f^{-1}(\mathrm{int}(H_1))\} \vee \{F'' \in CR(X) \mid F'' \subseteq f^{-1}(\mathrm{int}(H_2))\}.$$

Нека $F \in CR(X)$ и $F \subseteq f^{-1}(\mathrm{int}(G_1 \cup G_2))$. Тогава

$$F \subseteq f^{-1}(G_1 \cup G_2) = f^{-1}(G_1) \cup f^{-1}(G_2) \subseteq f^{-1}(\mathrm{int}(H_1)) \cup f^{-1}(\mathrm{int}(H_2)).$$

Очевидно е, че за всяко $i = 1, 2$, $\Omega_i = \{\mathrm{int}(K) \mid K \in CR(X),\ K \subseteq f^{-1}(\mathrm{int}(H_i))\}$ е покритие на $f^{-1}(\mathrm{int}(H_i))$. Тогава $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ е покритие на $f^{-1}(\mathrm{int}(H_1)) \cup f^{-1}(\mathrm{int}(H_2))$ и следователно $F \subseteq \bigcup \Omega$. Тъй като F е компактно, то съществуват $\mathrm{int}(K_1), \ldots, \mathrm{int}(K_m) \in \Omega_1$ и $\mathrm{int}(K'_1), \ldots, \mathrm{int}(K'_n) \in \Omega_2$, такива че $F \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{m} \mathrm{int}(K_i) \cup \bigcup\limits_{j=1}^{n} \mathrm{int}(K'_j)$. Полагаме $F_1 = \bigcup\limits_{i=1}^{m} K_i$ и $F_2 = \bigcup\limits_{j=1}^{n} K'_j$. Тогава $F_i \in CR(X)$ и $F_i \subseteq$

$f^{-1}(\mathrm{int}(H_i))$, където $i = 1, 2$. Следователно $F \subseteq F_1 \cup F_2$ и $F_1 \cup F_2 \in \varphi_f(H_1) \vee \varphi_f(H_2)$. Значи $F \in \varphi_f(H_1) \vee \varphi_f(H_2)$.

Накрая ще покажем, че φ_f удовлетворява също и аксиомата (M6). Нека $F \in CR(X)$. За всяко $y \in f(F)$ съществува околност O_y на y, такава че $\mathrm{cl}(O_y)$ е компактно. Тъй като $f(F)$ е компактно, то съществуват $y_1, \ldots, y_n \in f(F)$, такива че $f(F) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} O_{y_i}$. Нека $G = \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{cl}(O_{y_i})$. Тогава $G \in CR(Y)$ и $f(F) \subseteq \mathrm{int}(G)$. Следователно $F \subseteq f^{-1}(\mathrm{int}(G))$, т.е. $F \in \varphi_f(G)$. $\square$

Твърдение 2.3.5. *За всяко $X \in |\mathbf{HLC}|$, полагаме $\Delta^t(X) = \Psi^t(X)$ (вж. Теорема 2.2.13 за дефиницията на Ψ^t) и за всяко $f \in \mathbf{HLC}(X, Y)$, полагаме $\Delta^t(f) = \varphi_f$ (вж. Твърдение 2.3.4 за дефиницията на φ_f). Тогава $\Delta^t : \mathbf{HLC} \longrightarrow \mathbf{MDHLC}$ е контравариантен функтор.*

Доказателство. Нека $X \in |\mathbf{HLC}|$ и $(A, \rho, \mathbb{B}) = \Delta^t(X)$. Ще покажем, че

$$\Delta^t(id_X) = i_A.$$

Наистина, нека $\varphi = \Delta^t(id_X)$. Тогава използвайки (2.14), получаваме че

$$\varphi(G) = \{F \in CR(X) \mid F \subseteq \mathrm{int}(G)\} = \{a \in \mathbb{B} \mid a \ll G\} = I_G = i_A(G),$$

за всяко $G \in RC(X)$ $(= A)$. Следователно $\Delta^t(id_X) = i_A$.

Нека сега $f_1 \in \mathbf{HLC}(X_1, X_2)$, $f_2 \in \mathbf{HLC}(X_2, X_3)$ и $f = f_2 \circ f_1$. Ще покажем, че $\Delta^t(f) = \Delta^t(f_1) \diamond \Delta^t(f_2)$. Полагаме, за краткост, $\varphi = \Delta^t(f)$, $\varphi_1 = \Delta^t(f_1)$ и $\varphi_2 = \Delta^t(f_2)$. Тогава, за всяко $G_3 \in RC(X_3)$, имаме, че $\varphi_2(G_3) = \{F_2 \in CR(X_2) \mid f_2(F_2) \subseteq \mathrm{int}(G_3)\}$,

$$\varphi(G_3) = \{F_1 \in CR(X_1) \mid F_1 \subseteq f_1^{-1}(f_2^{-1}(\mathrm{int}(G_3)))\} \tag{2.15}$$

и

$$
\begin{aligned}
(2.16)\ (\varphi_1 \diamond \varphi_2)(G_3) &= \bigvee\{\varphi_1(F_2) \mid F_2 \in \varphi_2(G_3)\} \\
&= \bigvee\{\{F_1 \in CR(X_1) \mid f_1(F_1) \subseteq \mathrm{int}(F_2)\} \mid \\
&\qquad F_2 \in CR(X_2), f_2(F_2) \subseteq \mathrm{int}(G_3)\} \\
&= \{\bigcup\{F_1^i \mid i = 1, \ldots, k\} \mid k \in \mathbb{N}^+, (\forall i = 1, \ldots, k) \\
&\qquad [(F_1^i \in CR(X_1)) \text{ и } ((\exists F_2^i \in CR(X_2)) \\
&\qquad (f_1(F_1^i) \subseteq \mathrm{int}(F_2^i) \subseteq F_2^i \subseteq f_2^{-1}(\mathrm{int}(G_3))))]\} \\
&= \{F_1 \in CR(X_1) \mid (\exists F_2 \in CR(X_2)) \\
&\qquad (f_1(F_1) \subseteq \mathrm{int}(F_2) \subseteq F_2 \subseteq f_2^{-1}(\mathrm{int}(G_3)))\}.
\end{aligned}
$$

Трябва да покажем, че $\varphi(G_3) = (\varphi_1 \diamond \varphi_2)(G_3)$, т.е. че съответните десни страни R и $R_{1,2}$ на (2.15) и на (2.16) са равни. Нека $F_1 \in R$. Тогава $F_1 \in CR(X_1)$ и $f_1(F_1) \subseteq f_2^{-1}(\mathrm{int}(G_3))$. Тъй като $f_1(F_1)$ е компактно подмножество на X_2, то съществува $F_2 \in CR(X_2)$, такова че $f_1(F_1) \subseteq \mathrm{int}(F_2) \subseteq F_2 \subseteq f_2^{-1}(\mathrm{int}(G_3))$. Следователно $F_1 \in R_{1,2}$. Обратно, ако $F_1 \in R_{1,2}$, то $F_1 \in CR(X_1)$ и съществува $F_2 \in CR(X_2)$, такова че $f_1(F_1) \subseteq \mathrm{int}(F_2) \subseteq F_2 \subseteq f_2^{-1}(\mathrm{int}(G_3))$. Тогава $F_1 \subseteq f_1^{-1}(F_2) \subseteq f_1^{-1}(f_2^{-1}(\mathrm{int}(G_3)))$. Следователно $F_1 \in R$. С това доказахме, че $\Delta^t(f) = \Delta^t(f_1) \diamond \Delta^t(f_2)$. Всичко това показва, че Δ^t е контравариантен функтор. □

Твърдение 2.3.6. *Нека $\varphi : (A, \rho, \mathbb{B}) \longrightarrow (B, \rho', \mathbb{B}')$ е* **MDHLC**-*морфизъм. Дефинираме изображение $f_\varphi : \Psi^a(B, \rho', \mathbb{B}') \longrightarrow \Psi^a(A, \rho, \mathbb{B})$, полагайки*

$$
(2.17) \qquad f_\varphi(\sigma') \cap \mathbb{B} = \{a \in \mathbb{B} \mid (\forall b \in A)((a \ll_\rho b) \to (\varphi(b) \cap \sigma' \neq \emptyset))\},
$$

за всяко $\sigma' \in \Psi^a(B, \rho', \mathbb{B}')$. Тогава f_φ е коректно дефинирано и f_φ е **HLC**-*морфизъм.*

Доказателство. Нека $\sigma' \in \Psi^a(B, \rho', \mathbb{B}')$. Полагаме $J = \mathbb{B} \setminus (f_\varphi(\sigma') \cap \mathbb{B})$. Ще докажем първо, че J е прост елемент на $I(A, \rho, \mathbb{B})$. Да отбележим, че $J = \{a \in \mathbb{B} \mid \exists b \in \mathbb{B},$ такова че $a \ll_\rho b$ и $\varphi(b) \cap \sigma' = \emptyset\}$.

Очевидно, J е ляво множество. От (M4) получаваме, че $0 \in J$ (тъй като $0 \ll_\rho 0$). Нека $a, b \in J$. Тогава съществуват $a', b' \in \mathbb{B}$, такива че $a \ll_\rho a'$, $b \ll_\rho b'$ и

$\varphi(a') \cap \sigma' = \emptyset$, $\varphi(b') \cap \sigma' = \emptyset$. Съществуват $a'', b'' \in \mathbb{B}$, такива че $a \ll_\rho a'' \ll_\rho a'$ и $b \ll_\rho b'' \ll_\rho b'$. Тогава от (M5) следва, че $\varphi(a'' \vee b'') \subseteq \varphi(a') \vee \varphi(b')$. От Твърдение 2.2.18 получаваме, че $\mathbb{B}' \setminus \sigma'$ е δ-идеал и $\varphi(a') \cup \varphi(b') \subseteq \mathbb{B}' \setminus \sigma'$. Значи $\varphi(a') \vee \varphi(b') \subseteq \mathbb{B}' \setminus \sigma'$. Следователно $\varphi(a'' \vee b'') \cap \sigma' = \emptyset$. Тъй като $a \vee b \ll_\rho a'' \vee b''$, то $a \vee b \in J$. Следователно J е идеал.

Нека $a \in J$. Тогава съществува $b \in \mathbb{B}$, такова че $a \ll_\rho b$ и $\varphi(b) \cap \sigma' = \emptyset$. Съществува $c \in \mathbb{B}$, такова че $a \ll_\rho c \ll_\rho b$. Тогава, очевидно, $c \in J$ и $a \ll_\rho c$. Следователно J е δ-идеал.

Нека $I_1, I_2 \in I(A, \rho, \mathbb{B})$ и $I_1 \cap I_2 = J$. Да допуснем, че $J \neq I_i$, за всяко $i = 1, 2$. Следователно, за $i = 1, 2$, съществуват $a_i \in I_i \setminus J$. Тогава, за всяко $b \in \mathbb{B}$, такова че $a_1 \ll b$ или $a_2 \ll b$ имаме, че $\varphi(b) \cap \sigma' \neq \emptyset$. Съществуват $b_i \in I_i$, такива че $a_i \ll b_i$, за $i = 1, 2$. Тогава $b_i \notin J$, за всяко $i = 1, 2$. Нека $b = b_1 \wedge b_2$. Тогава $b \in I_1 \cap I_2 = J$ и следователно $\varphi(b) \cap \sigma' = \emptyset$. Използвайки (M2) получаваме, че $\varphi(b_1) \cap \varphi(b_2) \cap \sigma' = \emptyset$. Съществуват $d_i \in \varphi(b_i) \cap \sigma'$, за $i = 1, 2$. Тъй като $\varphi(b_i)$ е δ-идеал, то съществува $l_i \in \varphi(b_i)$, такова че $d_i \ll l_i$, за $i = 1, 2$. Тогава $l_i \in \sigma'$, но $l_i^* \notin \sigma'$ (тъй като $d_i(-C_\rho)l_i^*$), където $i = 1, 2$. Следователно $l_1^* \vee l_2^* \notin \sigma'$. Тогава $l_1 \wedge l_2 \in \sigma'$. Нещо повече, $l_1 \wedge l_2 \in \varphi(b_1) \cap \varphi(b_2) \cap \sigma'$, а това е противоречие.

Следователно J е прост елемент на $I(A, \rho, \mathbb{B}$. Очевидно, $\mathbb{B} \setminus J = f_\varphi(\sigma') \cap \mathbb{B}$. Сега от Твърдение 2.2.18 получаваме, че съществува единствен ограничен клъстър σ в $(A, \rho, \mathbb{B})$, чието сечение с $\mathbb{B}$ е точно $\mathbb{B} \setminus J$. Следователно $f_\varphi(\sigma') = \sigma$. Всичко това показва, че f_φ е коректно дефинирано.

Сега ще докажем, че f_φ е непрекъсната функция. Нека $F \in CR(X)$, където $X = \Psi^a(A, \rho, \mathbb{B})$. Тогава съществува $a \in \mathbb{B}$, такова че $F = \lambda_A^g(a)$. Полагаме $U = \mathrm{int}(F)$. Тогава $U = \mathrm{int}(\lambda_A^g(a)) = X \setminus \lambda_A^g(a^*)$. Ще покажем, че $f_\varphi^{-1}(U) = \iota_B(\varphi(a))$ $(= \bigcup\{\lambda_B^g(b) \mid b \in \varphi(a)\})$. Наистина, нека $\sigma' \in f_\varphi^{-1}(U)$. Тогава $f_\varphi(\sigma') = \sigma \in U = X \setminus \lambda_A^g(a^*)$. Следователно $a^* \notin \sigma$ и $a \in \sigma$. Имаме, че

$$\sigma \cap \mathbb{B} = \{c \in \mathbb{B} \mid \forall d \in \mathbb{B}, \text{ такова че } c \ll d,\ \varphi(d) \cap \sigma' \neq \emptyset\}. \tag{2.18}$$

Ще докажем, че $\varphi(a) \cap \sigma' \neq \emptyset$. Наистина, от $a^* \notin \sigma$ и Твърдение 2.2.4 следва, че съществува $a_1 \in A$, такова че $a^* \ll_{C_\rho} a_1^*$ и $a_1^* \notin \sigma$. Тогава $a_1 \ll_{C_\rho} a$ и $a_1 \in \sigma$. Тъй като $a \in \mathbb{B}$, то и $a_1 \in \mathbb{B}$. Следователно $a_1 \ll_\rho a$ и $a_1 \in \mathbb{B} \cap \sigma$. Тогава от (2.18) следва, че $\varphi(a) \cap \sigma' \neq \emptyset$. Значи $\sigma' \in \iota_B(\varphi(a))$. Следователно $f_\varphi^{-1}(U) \subseteq \iota_B(\varphi(a)) = V$.

Да отбележим, че от Теорема 2.2.19 следва, че V е отворено подмножество на $\Psi^a(B, \rho', \mathbb{B}')$.

Обратно, нека $\sigma' \in \iota_B(\varphi(a))$ и $\sigma = f_\varphi(\sigma')$. Тогава $\varphi(a) \cap \sigma' \neq \emptyset$. Ще докажем, че $a^* \notin \sigma$. Да допуснем първо, че за всяко $e \ll a$, $\varphi(e) \cap \sigma' = \emptyset$. От (M3) следва, че $\varphi(a) = \bigvee\{\varphi(e) \mid e \ll a\}$. Освен това, от Твърдение 2.2.18 имаме, че $J_{\sigma'} = \mathbb{B}' \setminus \sigma'$ е δ-идеал. Тъй като $\bigcup\limits_{e \ll a} \varphi(e) \subseteq J_{\sigma'}$, то $\varphi(a) \subseteq J_{\sigma'}$, т.е. $\varphi(a) \cap \sigma' = \emptyset$, което е противоречие. Следователно, съществува $e \ll a$, такова че $\varphi(e) \cap \sigma' \neq \emptyset$. Тогава $e \in \mathbb{B}$ (тъй като $a \in \mathbb{B}$) и от (2.18) получаваме, че $e \in \sigma \cap \mathbb{B}$. От $e \ll_\rho a$ следва, че $e(-\rho)a^*$. Използвайки факта, че $e \in \mathbb{B}$, получаваме, че $e(-C_\rho)a^*$. Следователно $a^* \notin \sigma$. Значи $\sigma \in \mathrm{int}(\lambda^g_A(a)) = U$. Следователно $\sigma' \in f_\varphi^{-1}(U)$. Така доказахме, че

$$f_\varphi^{-1}(\mathrm{int}(\lambda^g_A(a))) = \iota_B(\varphi(a)),\ \forall a \in \mathbb{B}. \tag{2.19}$$

Сега от (2.8) получаваме, че f_φ е непрекъсната функция. □

Твърдение 2.3.7. *За всеки обект $(A, \rho, \mathbb{B})$ на категорията* **MDHLC**, *полагаме $\Delta^a(A, \rho, \mathbb{B}) = \Psi^a(A, \rho, \mathbb{B})$ (вж. (2.4) и (2.5) за дефиницията на Ψ^a) и за всеки* **MDHLC**-*морфизъм $\varphi : (A, \rho, \mathbb{B}) \longrightarrow (B, \rho', \mathbb{B}')$, полагаме $\Delta^a(\varphi) = f_\varphi$ (вж. Твърдение 2.3.6 за дефиницията на f_φ). Тогава $\Delta^a :$* **MDHLC** $\longrightarrow$ **HLC** *е контравариантен функтор.*

Доказателство. Нека $(A, \rho, \mathbb{B})$ е CLCA, $X = \Delta^a(A, \rho, \mathbb{B})$ и $f = \Delta^a(i_A)$. Ще покажем, че $f = id_X$. Наистина, от (2.17) получаваме, че ако $\sigma \in X$, то $f(\sigma) \cap \mathbb{B} = \{a \in \mathbb{B} \mid (\forall b \in A)[(a \ll_\rho b) \to (I_b \cap \sigma \neq \emptyset)]\}$. От Твърдение 2.2.17 следва, че е достатъчно да докажем, че $f(\sigma) \cap \mathbb{B} = \sigma \cap \mathbb{B}$. Нека $a \in f(\sigma) \cap \mathbb{B}$. Да допуснем, че $a \notin \sigma$. Тогава съществува $b \in \sigma$, такова че $a(-C_\rho)b$. Следователно $a \ll_\rho b^*$, а тогава $I_{b^*} \cap \sigma \neq \emptyset$. Нека $c \in I_{b^*} \cap \sigma$. Тогава $c \in \mathbb{B}$ and $c \ll_\rho b^*$. Следователно $c(-C_\rho)b$. Тъй като $b, c \in \sigma$, то получаваме противоречие. Значи $f(\sigma) \cap \mathbb{B} \subseteq \sigma \cap \mathbb{B}$. Обратно, нека $a \in \sigma \cap \mathbb{B}$. Нека $b \in A$ и $a \ll_\rho b$. Тогава $a \in I_b \cap \sigma$, т.е. $I_b \cap \sigma \neq \emptyset$. Значи $a \in f(\sigma) \cap \mathbb{B}$. Следователно $f(\sigma) \cap \mathbb{B} = \sigma \cap \mathbb{B}$. И така, доказахме, че $\Delta^a(i_A) = id_X$.

Нека сега $\varphi_i \in$ **MDHLC**$((A_i, \rho_i, \mathbb{B}_i), (A_{i+1}, \rho_{i+1}, \mathbb{B}_{i+1}))$, където $i = 1, 2$, и $\varphi = \varphi_2 \diamond \varphi_1$. Полагаме $f_i = \Delta^a(\varphi_i)$, за $i = 1, 2$, и нека $f = \Delta^a(\varphi)$. Ще покажем, че $f = f_1 \circ f_2$. Полагаме $X_i = \Delta^a(A_i, \rho_i, \mathbb{B}_i)$ и $\ll_i = \ll_{\rho_i}$, за $i = 1, 2, 3$. Нека $\sigma_3 \in X_3$ и $\sigma'_1 = f(\sigma_3)$. Имаме, че

$$\begin{aligned}
\sigma_1' \cap \mathbb{B}_1 &= \{a_1 \in \mathbb{B}_1 \mid (\forall b_1 \in A_1)[(a_1 \ll_1 b_1) \to \\
&\quad (\sigma_3 \cap \bigvee\{\varphi_2(b_2) \mid b_2 \in \varphi_1(b_1)\} \neq \emptyset)]\} \\
&= \{a_1 \in \mathbb{B}_1 \mid (\forall b_1 \in A_1)[(a_1 \ll_1 b_1) \to \\
&\quad (\exists k \in \mathbb{N}^+ \text{ и } \exists c_1, \ldots, c_k \in \varphi_1(b_1) \text{ и} \\
&\quad \exists d_i \in \varphi_2(c_i), \text{ където } i = 1, \ldots, k, \text{ такива че} \\
&\quad \bigvee\{d_i \mid i = 1, \ldots, k\} \in \sigma_3)]\} \\
&= \{a_1 \in \mathbb{B}_1 \mid (\forall b_1 \in A_1)[(a_1 \ll_1 b_1) \to \\
&\quad (\exists c \in \varphi_1(b_1), \text{ такова че } \varphi_2(c) \cap \sigma_3 \neq \emptyset)]\} = R.
\end{aligned}$$

Нека положим $\sigma_2' = f_2(\sigma_3)$. Тогава имаме, че $\sigma_2' \cap \mathbb{B}_2 = \{a_2 \in \mathbb{B}_2 \mid (\forall b_2 \in A_2)[(a_2 \ll_2 b_2) \to (\exists c_1 \in \varphi_2(b_2) \cap \sigma_3)]\}$. Сега,

$$\begin{aligned}
f_1(\sigma_2') \cap \mathbb{B}_1 &= \{a_1 \in \mathbb{B}_1 \mid (\forall b_1 \in A_1)[(a_1 \ll_1 b_1) \to (\exists c_2 \in \varphi_1(b_1) \cap \sigma_2')]\} \\
&= \{a_1 \in \mathbb{B}_1 \mid (\forall b_1 \in A_1)[(a_1 \ll_1 b_1) \to (\exists c_2 \in \varphi_1(b_1), \text{ такова че} \\
&\quad (\forall d_2 \in A_2)((c_2 \ll_2 d_2) \to (\varphi_2(d_2) \cap \sigma_3 \neq \emptyset)))]\} = R_{1,2}.
\end{aligned}$$

От Твърдение 2.2.17 следва, че е достатъчно да покажем, че $R = R_{1,2}$. Нека $a_1 \in R$, $b_1 \in A_1$ и $a_1 \ll_1 b_1$. Тогава съществува $c_2 \in \varphi_1(b_1)$, такова че $\varphi_2(c_2) \cap \sigma_3 \neq \emptyset$. Нека $d_2 \in A_2$ и $c_2 \ll_2 d_2$. Тогава $\varphi_2(d_2) \cap \sigma_3 \neq \emptyset$. Наистина, това следва от факта, че $\varphi_2(c_2) \subseteq \varphi_2(d_2)$ и $\varphi_2(c_2) \cap \sigma_3 \neq \emptyset$. Значи $a_1 \in R_{1,2}$. Обратно, нека $a_1 \in R_{1,2}$, $b_1 \in A_1$ и $a_1 \ll_1 b_1$. Тогава съществува $c_2 \in \varphi_1(b_1)$, такова че $(\forall d_2 \in A_2)[(c_2 \ll_2 d_2) \to (\varphi_2(d_2) \cap \sigma_3 \neq \emptyset)]$. Тъй като $\varphi_1(b_1)$ е δ-идеал, то съществува $c_2' \in \varphi_1(b_1)$, такова че $c_2 \ll_2 c_2'$. Тогава $\varphi_2(c_2') \cap \sigma_3 \neq \emptyset$. Следователно $a_1 \in R$. Така доказахме, че $f = f_1 \circ f_2$. Това показва, че Δ^a е контравариантен функтор. $\square$

Твърдение 2.3.8. *Нека $\varphi : (A, \rho, \mathbb{B}) \longrightarrow (B, \eta, \mathbb{B}')$ е* **LCA**-*изоморфизъм. Тогава многозначното изображение $\widetilde{\varphi} : (A, \rho, \mathbb{B}) \longrightarrow (B, \eta, \mathbb{B}')$, където $\widetilde{\varphi}(a) = I_{\varphi(a)}$, е* **MDHLC**-*изоморфизъм.*

Доказателство. Очевидно е, че $\widetilde{\varphi}$ удовлетворява условията (M1) и (M4). После, имаме, че $\widetilde{\varphi}(a \wedge b) = I_{\varphi(a \wedge b)} = I_{\varphi(a) \wedge \varphi(b)} = I_{\varphi(a)} \cap I_{\varphi(b)} = \widetilde{\varphi}(a) \wedge \widetilde{\varphi}(b)$, т.е. $\widetilde{\varphi}$ удовлетворява условието (M2).

Ще докажем, че за всяко $a \in A$ е изпълнено, че $\widetilde{\varphi}(a) = \bigvee\{\widetilde{\varphi}(b) \mid b \in \mathbb{B},\ b \ll a\}$, т.е., че

$$I_{\varphi(a)} = \bigvee\{I_{\varphi(b)} \mid b \in \mathbb{B},\ b \ll a\}.$$

Наистина, нека $b \in \mathbb{B}$ и $b \ll a$. Тогава $\varphi(b) \ll \varphi(a)$. Значи $I_{\varphi(b)} \subseteq I_{\varphi(a)}$. Следователно $\bigvee\{I_{\varphi(b)} \mid b \in \mathbb{B},\ b \ll a\} \subseteq I_{\varphi(a)}$. Обратно, нека $c' \in I_{\varphi(a)}$. Тогава $c' \in \mathbb{B}'$ и $c' \ll \varphi(a)$. Съществува $c'' \in \mathbb{B}'$, такова че $c' \ll c'' \ll \varphi(a)$. Съществува $c \in \mathbb{B}$,

такова че $c'' = \varphi(c)$. Тогава $\varphi(c) \ll \varphi(a)$; значи $c \ll a$ и $\varphi(c) = c'' \gg c'$. Следователно $c' \in I_{\varphi(c)}$, където $c \in \mathbb{B}$ и $c \ll a$. Значи, $I_{\varphi(a)} \subseteq \bigcup\{I_{\varphi(b)} \mid b \in \mathbb{B},\ b \ll a\} \subseteq \bigvee\{I_{\varphi(b)} \mid b \in \mathbb{B},\ b \ll a\}$. Получихме, че $\widetilde{\varphi}$ удовлетворява условието (M3).

Сега ще покажем, че $\widetilde{\varphi}$ удовлетворява условието (M5). Нека $a_i, b_i \in \mathbb{B}$ и $a_i \ll b_i$, където $i = 1, 2$. Ще докажем, че $\widetilde{\varphi}(a_1 \vee a_2) \subseteq \widetilde{\varphi}(b_1) \vee \widetilde{\varphi}(b_2)$, т.е., че $I_{\varphi(a_1 \vee a_2)} \subseteq I_{\varphi(b_1)} \vee I_{\varphi(b_2)}$. Наистина, нека $c \in \mathbb{B}$ и $c \ll \varphi(a_1 \vee a_2)$. Тогава $c \ll \varphi(a_1) \vee \varphi(a_2)$. Имаме, че $c \wedge \varphi(a_1) \leq \varphi(a_1) \ll \varphi(b_1)$, $c \wedge \varphi(a_2) \leq \varphi(a_2) \ll \varphi(b_2)$ и $c = (c \wedge \varphi(a_1)) \vee (c \wedge \varphi(a_2))$. Полагаме $d_i = c \wedge \varphi(a_i)$, за $i = 1, 2$. Тогава $d_i \ll \varphi(b_i)$, т.е. $d_i \in I_{\varphi(b_i)}$, за $i = 1, 2$, и $c = d_1 \vee d_2$. Следователно $c \in I_{\varphi(b_1)} \vee I_{\varphi(b_2)}$. Значи $I_{\varphi(a_1 \vee a_2)} \subseteq I_{\varphi(b_1)} \vee I_{\varphi(b_2)}$, т.е., $\widetilde{\varphi}(a_1 \vee a_2) \subseteq \widetilde{\varphi}(b_1) \vee \widetilde{\varphi}(b_2)$.

Ще покажем, че $\widetilde{\varphi}$ удовлетворява също и условието (M6), т.е., че е изпълнено равенството $\bigcup\{\widetilde{\varphi}(a) \mid a \in \mathbb{B}\} = \mathbb{B}'$. Наистина, нека $b' \in \mathbb{B}'$. Тогава съществува $b'' \in \mathbb{B}'$, такова че $b' \ll b''$. Съществува $a \in \mathbb{B}$, такова че $b'' = \varphi(a)$. Тогава $b' \in I_{\varphi(a)} = \widetilde{\varphi}(a)$.

Следователно $\widetilde{\varphi}$ е **MDHLC**-морфизъм. Аналогично получаваме, че $\widetilde{\varphi^{-1}}$ е **MDHLC**-морфизъм.

Ще докажем, че $\widetilde{\varphi} \diamond \widetilde{\varphi^{-1}} = i_B$ и $\widetilde{\varphi^{-1}} \diamond \widetilde{\varphi} = i_A$. Наистина, $(\widetilde{\varphi^{-1}} \diamond \widetilde{\varphi})(a) = \bigvee\{\widetilde{\varphi^{-1}}(b) \mid b \in \widetilde{\varphi}(a)\} = \bigvee\{I_{\varphi^{-1}(b)} \mid b \in I_{\varphi(a)}\}$ и $i_A(a) = I_a$ за всяко $a \in A$. Значи трябва да докажем, че $I_a = \bigvee\{I_{\varphi^{-1}(b)} \mid b \in I_{\varphi(a)}\}$. Нека $c \in I_a$. Тогава $c \in \mathbb{B}$ и $c \ll a$. Следователно съществува $d \in \mathbb{B}$, такова че $c \ll d \ll a$. Полагаме $b = \varphi(d)$. Тогава $b \ll \varphi(a)$, т.е. $b \in I_{\varphi(a)}$. Освен това, $c \ll d = \varphi^{-1}(\varphi(d)) = \varphi^{-1}(b)$, т.е. $c \in I_{\varphi^{-1}(b)}$. Следователно $I_a \subseteq \bigcup\{I_{\varphi^{-1}(b)} \mid b \in I_{\varphi(a)}\}$. Обратно, нека $c \in I_{\varphi^{-1}(b)}$, където $b \in I_{\varphi(a)}$. Тогава $c \ll \varphi^{-1}(b)$ и $b \ll \varphi(a)$. Тъй като $\varphi^{-1}(b) \ll \varphi^{-1}\varphi(a) = a$, то $c \ll a$, т.е. $c \in I_a$. Значи, $\bigcup\{I_{\varphi^{-1}(b)} \mid b \in I_{\varphi(a)}\} \subseteq I_a$. Получихме, че $I_a = \bigcup\{I_{\varphi^{-1}(b)} \mid b \in I_{\varphi(a)}\}$. Тогава $I_a = \bigvee\{I_{\varphi^{-1}(b)} \mid b \in I_{\varphi(a)}\}$. Значи $\widetilde{\varphi^{-1}} \diamond \widetilde{\varphi} = i_A$. Аналогично получаваме, че $\widetilde{\varphi} \diamond \widetilde{\varphi^{-1}} = i_B$.

Следователно $\widetilde{\varphi}$ е **MDHLC**-изоморфизъм. □

Твърдение 2.3.9. *Функторът $Id_{\mathbf{MDHLC}}$ и функторът $\Delta^t \circ \Delta^a$ са естествено изоморфни.*

Доказателство. Нека $\varphi \in \mathbf{MDHLC}((A, \rho, \mathbb{B}), (B, \eta, \mathbb{B}'))$. Трябва да покажем, че $\widetilde{\lambda^g_B} \diamond \varphi = \Delta^t(\Delta^a(\varphi)) \diamond \widetilde{\lambda^g_A}$, където $\widetilde{\lambda^g_A}(a) = I_{\lambda^g_A(a)}$ (вж. Твърдение 2.3.8). (Да

отбележим, че от (2.7) следва, че λ_A^g и λ_B^g са LCA-изоморфизми и значи, съгласно Твърдение 2.3.8, $\widetilde{\lambda_A^g}$ и $\widetilde{\lambda_B^g}$ са **MDHLC**-изоморфизми.)

Полагаме $X = \Delta^a(A, \rho, \mathbb{B})$, $Y = \Delta^a(B, \eta, \mathbb{B}')$ и $\varphi' = \Delta^t(\Delta^a(\varphi))$ $(= \Delta^t(f_\varphi))$. Следователно $\varphi' : (RC(X), \rho_X, CR(X)) \longrightarrow (RC(Y), \rho_Y, CR(Y))$. Тогава, за всяко $F \in RC(X)$ имаме, че $\varphi'(F) = \{G \in CR(Y) \mid G \subseteq f_\varphi^{-1}(\mathrm{int}(F))\}$. Следователно, за всяко $a \in A$ имаме, че

$$\begin{aligned}
(\varphi' \diamond \widetilde{\lambda_A^g})(a) &= \bigvee\{\varphi'(b) \mid b \in \widetilde{\lambda_A^g}(a)\} = \bigvee\{\varphi'(b) \mid b \in I_{\lambda_A^g(a)}\} \\
&= \bigvee\{\varphi'(G) \mid G \in CR(X),\ G \ll \lambda_A^g(a)\} \\
&= \bigvee\{\varphi'(G) \mid G \in CR(X),\ G \subseteq \mathrm{int}(\lambda_A^g(a))\} \\
&= \bigvee\{\{H \in CR(Y) \mid H \subseteq f_\varphi^{-1}(\mathrm{int}G)\} \mid G \in CR(X),\ G \subseteq \mathrm{int}\lambda_A^g(a)\} \\
&= \bigvee\{\{\lambda_B^g(b') \mid b' \in \mathbb{B}',\ \lambda_B^g(b') \subseteq f_\varphi^{-1}(\mathrm{int}(\lambda_A^g(c)))\} \mid c \in \mathbb{B},\ c \ll_\rho a\}.
\end{aligned}$$

От (2.19) имаме, че $f_\varphi^{-1}(\mathrm{int}(\lambda_A^g(a))) = \iota_B(\varphi(a))$ и тогава

$$\begin{aligned}
(\varphi' \diamond \widetilde{\lambda_A^g})(a) &= \bigvee\{\{\lambda_B^g(b') \mid b' \in \mathbb{B}',\ \lambda_B^g(b') \subseteq \iota_B(\varphi(c))\} \mid c \in \mathbb{B},\ c \ll_\rho a\} \\
&= \bigvee\{\{\lambda_B^g(b') \mid b' \in \varphi(c)\} \mid c \in \mathbb{B},\ c \ll_\rho a\}.
\end{aligned}$$

Последното равенство следва от факта, че за всяко $b' \in \mathbb{B}'$, $\lambda_B^g(b')$ е компактно и следователно съществуват $b'_1, \ldots, b'_n \in \varphi(c)$, такива че $\lambda_B^g(b') \leq \bigvee\{\lambda_B^g(b'_i) \mid i = 1, \ldots, n\}$; обратно, за всяко $b' \in \varphi(c)$, $\lambda_B^g(b') \subseteq \iota_B(\varphi(c))$.

После,

$$\begin{aligned}
(\widetilde{\lambda_B^g} \diamond \varphi)(a) &= \bigvee\{\widetilde{\lambda_B^g}(b) \mid b \in \varphi(a)\} \\
&= \bigvee\{I_{\lambda_B^g(b)} \mid b \in \varphi(a)\} \\
&= \bigvee\{\{\lambda_B^g(b') \mid b' \in \mathbb{B},\ b' \ll_\eta b\} \mid b \in \varphi(a)\}.
\end{aligned}$$

Следователно

$$\begin{aligned}
(\varphi' \diamond \widetilde{\lambda_A^g})(a) &= \{\lambda_B^g(b'_1 \vee \ldots \vee b'_k) \mid b'_i \in \varphi(c_i), c_i \in \mathbb{B}, c_i \ll_\rho a, k \in \mathbb{N}^+, i = 1, \div, k\} \\
&= \{\lambda_B^g(b') \mid b' \in \varphi(c), c \in \mathbb{B}, c \ll_\rho a\}
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
(\widetilde{\lambda_B^g} \diamond \varphi)(a) &= \{\lambda_B^g(b'_1 \vee \cdots \vee b'_k) \mid b'_i \ll_\eta b_i,\ b_i \in \varphi(a),\ k \in \mathbb{N}^+,\ i = 1, \ldots, k\} \\
&= \{\lambda_B^g(b') \mid b' \in \varphi(a)\} = \lambda_B^g(\varphi(a)).
\end{aligned}$$

Нека b' е такова, че $\lambda_B^g(b') \in (\varphi' \diamond \widetilde{\lambda_A^g})(a)$, т.е. $b' \in \varphi(c)$, където $c \in \mathbb{B}$, $c \ll_\rho a$. Тъй като $\varphi(c) \subseteq \varphi(a)$, то $\lambda_B^g(b') \in (\widetilde{\lambda_B^g} \diamond \varphi)(a)$.

Обратно, нека b' е такова, че $\lambda_B^g(b') \in (\widetilde{\lambda_B^g} \diamond \varphi)(a)$, т.е. $b' \in \varphi(a)$. От (M3) получаваме, че $\varphi(a) = \bigvee\{\varphi(c) \mid c \in \mathbb{B},\ c \ll_\rho a\} = \{d_1 \vee \cdots \vee d_k \mid k \in \mathbb{N}^+,\ d_i \in$

$\varphi(c_i)$, $c_i \ll_\rho a$, $c_i \in \mathbb{B}, i = 1, \ldots, k\}$. Следователно $b' = d_1 \vee \cdots \vee d_k$, където $d_i \in \varphi(c_i)$, $c_i \in \mathbb{B}$, $c_i \ll_\rho a$, за всяко $i = 1, \ldots, k$. Полагаме $c = \bigvee\{c_i \mid i = 1, \ldots, k\}$. Тогава $c \ll_\rho a$, $c \in \mathbb{B}$ и $d_i \in \varphi(c)$, за всяко $i = 1, \ldots, k$. Следователно $b' \in \varphi(c)$. Значи $\lambda_B^g(b') \in (\varphi' \diamond \widetilde{\lambda_A^g})(a)$.

Следователно $\widetilde{\lambda_B^g} \diamond \varphi = \Delta^t(\Delta^a(\varphi)) \diamond \widetilde{\lambda_A^g}$. □

Твърдение 2.3.10. *Функторът $Id_{\mathbf{HLC}}$ и функторът $\Delta^a \circ \Delta^t$ са естествено изоморфни.*

Доказателство. Нека $f \in \mathbf{HLC}(X, Y)$. Трябва да покажем, че

$$t_Y \circ f = \Delta^a(\Delta^t(f)) \circ t_X,$$

където $t_X(x) = \sigma_x$ за всяко $x \in X$. (Да напомним, че от (2.9) следва, че t_X и t_Y са хомеоморфизми.) Полагаме $f' = \Delta^a(\Delta^t(f))$ $(= \Delta^a(\varphi_f))$. Тогава, за всяко $\sigma \in \Delta^a(\Delta^t(X))$ имаме, че $f'(\sigma) = \sigma'$, където

$$f'(\sigma) \cap CR(Y) = \{G \in CR(Y) \mid (\forall H \in RC(Y))((G \subseteq \mathrm{int}(H)) \to (\varphi_f(H) \cap \sigma \neq \emptyset))\}.$$

За всяко $x \in X$ имаме, че $(f' \circ t_X)(x) = f'(\sigma_x) = \sigma'$, където

$$\sigma' \cap CR(Y) = \{G \in CR(Y) \mid (\forall H \in RC(Y))((G \subseteq \mathrm{int}(H)) \to$$

$$(\exists F \in RC(X), \text{ такова че } x \in F \text{ and } F \in \varphi_f(H)))\}.$$

Следователно

$$\sigma' \cap CR(Y) = \{G \in CR(Y) \mid (\forall H \in RC(Y))((G \subseteq \mathrm{int}(H)) \to$$

$$(\exists F \in RC(X), \text{ такова че } x \in F \subseteq f^{-1}(\mathrm{int}(H))))\}.$$

После, $(t_Y \circ f)(x) = \sigma_{f(x)}$, където $\sigma_{f(x)} \cap CR(Y) = \{G \in CR(Y) \mid f(x) \in G\}$.

Нека $G \in \sigma_{f(x)} \cap CR(Y)$. Тогава $f(x) \in G$. Ще докажем, че $G \in \sigma'$. Нека $H \in RC(Y)$ и $G \subseteq \mathrm{int}(H)$. Ще докажем, че съществува $F \in RC(X)$, такова че $x \in F \subseteq f^{-1}(\mathrm{int}(H))$. Наистина, $f(x) \in G \subseteq \mathrm{int}(H)$. Тъй като f е непрекъснато, то съществува отворено $U \subseteq X$, такова че $x \in U$ и $f(U) \subseteq \mathrm{int}(H)$. Тъй като X е локално компактно T_2-пространство, то съществува $F \in CR(X)$, такова че $x \in F \subseteq U$. Тогава $f(F) \subseteq f(U) \subseteq \mathrm{int}(H)$, т.е. $F \subseteq f^{-1}(\mathrm{int}(H))$. Така, че $G \in \sigma' \cap CR(Y)$. Следователно $\sigma_{f(x)} \cap CR(Y) \subseteq \sigma' \cap CR(Y)$.

Обратно, нека $G \in CR(Y) \cap \sigma'$. Ще докажем, че $f(x) \in G$. Наистина, да допуснем, че $f(x) \notin G$. Тогава съществува $H \in CR(Y)$, такова че $G \subseteq \mathrm{int}(H) \subseteq Y \setminus \{f(x)\}$. Имаме, че съществува $F \in CR(X)$, такова че $x \in F \subseteq f^{-1}(\mathrm{int}(H))$. Тогава $f(x) \in \mathrm{int}(H)$, което е противоречие. Значи $f(x) \in G$. Следователно $\sigma_{f(x)} \cap CR(Y) \supseteq \sigma' \cap CR(Y)$.

Получихме, че $\sigma_{f(x)} \cap CR(Y) = \sigma' \cap CR(Y)$. Тогава, от Твърдение 2.2.17 следва, че $\sigma_{f(x)} \equiv \sigma'$. Така, че $t_Y \circ f = \Delta^a(\Delta^t(f)) \circ t_X$. □

Следващата теорема, която е основния резултат в тази глава, е следствие от Теорема 2.2.13 и Твърденията 2.3.5, 2.3.7, 2.3.9, 2.3.10.

Теорема 2.3.11. *Категориите* **HLC** *и* **MDHLC** *са дуално еквивалентни.*

Следствие 2.3.12. *Категориите* **DHLC** *и* **MDHLC** *са еквивалентни.*

Доказателство. Следва от Теорема 2.2.22 и Теорема 2.3.11 □

Забележка 2.3.13. Естествено е да опитаме да докажем Теорема 2.3.11 като първо покажем, че категориите **DHLC** и **MDHLC** са еквивалентни. За съжаление, не успяхме да направим това. Сега ще покажем кое е препятствието, което не можахме да преодолеем. Ще започнем с описанието на функторите, които осъществяват еквивалентноста между категориите **DHLC** и **MDHLC**, получена в доказателството на Следствие 2.3.12.

Полагаме $\Xi^s = \Delta^t \circ \Lambda^a$ и $\Xi^m = \Lambda^t \circ \Delta^a$. Тогава $\Xi^s : \mathbf{DHLC} \longrightarrow \mathbf{MDHLC}$ и $\Xi^m : \mathbf{MDHLC} \longrightarrow \mathbf{DHLC}$. Нека намерим директното описание на функторите Ξ^s и Ξ^m. За всяко $(A, \rho, \mathbb{B}) \in |\mathbf{DHLC}|$, имаме че

$$\Xi^s(A, \rho, \mathbb{B}) = \Delta^t(\Lambda^a(A, \rho, \mathbb{B})) = \Psi^t(\Psi^a(A, \rho, \mathbb{B})) = \lambda^g_A(A, \rho, \mathbb{B}),$$

и за всяко $(A, \rho, \mathbb{B}) \in |\mathbf{MDHLC}|$, имаме че

$$\Xi^m(A, \rho, \mathbb{B}) = \Lambda^t(\Delta^a(A, \rho, \mathbb{B})) = \Psi^t(\Psi^a(A, \rho, \mathbb{B})) = \lambda^g_A(A, \rho, \mathbb{B}).$$

Нека $\psi : (A, \rho, \mathbb{B}) \longrightarrow (B, \eta, \mathbb{B}')$ е **DHLC**-морфизъм. Полагаме $f_\psi = \Lambda^a(\psi)$. Тога-

ва, $\forall a \in \mathbb{B}$,

$$\begin{aligned}
\Xi^s(\psi)(\lambda_A^g(a)) &= \Delta^t(\Lambda^a(\psi))(\lambda_A^g(a)) = \{\lambda_B^g(b) \mid b \in \mathbb{B}', \lambda_B^g(b) \subseteq f_\psi^{-1}(\mathrm{int}(\lambda_A^g(a)))\} \\
&= \{\lambda_B^g(b) \mid b \in \mathbb{B}', \lambda_B^g(b) \subseteq \iota_B(D_\psi(a))\} \\
&= \{\lambda_B^g(b) \mid b \in \mathbb{B}', \lambda_B^g(b) \subseteq \iota_B(\bigvee\{I_{\psi(d)} \mid d \ll_\rho a\})\} \\
&= \{\lambda_B^g(b) \mid b \in \mathbb{B}', \lambda_B^g(b) \subseteq \bigcup\{\iota_B(I_{\psi(d)}) \mid d \ll_\rho a\}\} \\
&= \{\lambda_B^g(b) \mid b \in \mathbb{B}', \lambda_B^g(b) \subseteq \bigcup\{\bigcup\{\lambda_B^g(c) \mid c \in I_{\psi(d)}\} \mid d \ll_\rho a\}\} \\
&= \{\lambda_B^g(b) \mid b \in \mathbb{B}', \lambda_B^g(b) \subseteq \bigcup\{\lambda_B^g(c) \mid c \in I_{\psi(d)}, d \ll_\rho a\}\}.
\end{aligned}$$

За всяко $d \ll_\rho a$ и всяко $c \in I_{\psi(d)}$ съществува $c' \in I_{\psi(d)}$, такова че $c \ll_\eta c'$. Тогава $\lambda_B^g(c) \subseteq \mathrm{int}(\lambda_B^g(c')) \subseteq \lambda_B^g(c')$. Следователно

$$\Xi^s(\psi)(\lambda_A^g(a)) = \{\lambda_B^g(b) \mid b \in \mathbb{B}', \lambda_B^g(b) \subseteq \bigcup\{\mathrm{int}(\lambda_B^g(c)) \mid c \in I_{\psi(d)}, d \ll_\rho a\}\}.$$

Тъй като $\lambda_B^g(b)$, където $b \in \mathbb{B}'$, е компактно, то съществува $k \in \mathbb{N}^+$, такова че за всяко $i \in \{1, \ldots, k\}$ съществува $d_i \in A$, за което е изпълнено, че $d_i \ll_\rho a$, и съществува $c_i \in \mathbb{B}'$, за което имаме, че $c_i \ll_\eta \psi(d_i)$, които са избрани така, че $\lambda_B^g(b) \subseteq \bigcup\{\lambda_B^g(c_i) \mid i = 1, \ldots, k\} = \lambda_B^g(c_1 \vee \ldots \vee c_k)$. Съществуват $d_1', \ldots, d_k' \in \mathbb{B}$, такива че $d_i \ll_\rho d_i' \ll_\rho a$, за всяко $i \in \{1, \ldots, k\}$. Тогава, използвайки Лема 2.2.25, получаваме, че

$$c = c_1 \vee \ldots \vee c_k \ll_\eta \psi(d_1) \vee \ldots \vee \psi(d_k) \ll_\eta \psi(d_1' \vee \ldots \vee d_k')$$

и $d' = d_1' \vee \ldots \vee d_k' \ll_\rho a$. Значи $\lambda_B^g(b) \subseteq \lambda_B^g(c)$, където $c \in I_{\psi(d')}$ и $d' \ll_\rho a$. Следователно

$$\begin{aligned}
\Xi^s(\psi)(\lambda_A^g(a)) &= \{\lambda_B^g(b) \mid b \in \mathbb{B}', \lambda_B^g(b) \subseteq \lambda_B^g(c), c \in I_{\psi(d)}, d \ll_\rho a\}\} \\
&= \{\lambda_B^g(b) \mid b \in \mathbb{B}', b \leq c, c \in I_{\psi(d)}, d \ll_\rho a\}\} \\
&= \{\lambda_B^g(b) \mid b \in I_{\psi(d)}, d \ll_\rho a\}\} \\
&= \lambda_B^g(\bigcup\{I_{\psi(d)} \mid d \ll_\rho a\} \\
&= \lambda_B^g(D_\psi(a)).
\end{aligned}$$

Сега, с помощта на Лема 2.2.23 и аксиома (M3), получаваме, че

$$\begin{aligned}
\Xi^s(\psi)(\lambda_A^g(a)) &= \bigvee\{\Xi^s(\psi)(\lambda_A^g(b)) \mid b \in \mathbb{B}, b \ll_\rho a\} \\
&= \bigvee\{\lambda_B^g(D_\psi(b)) \mid b \in \mathbb{B}, b \ll_\rho a\} \\
&= \lambda_B^g(\bigvee\{D_\psi(b) \mid b \in \mathbb{B}, b \ll_\rho a\}) \\
&= \lambda_B^g(\bigvee\{\bigvee\{I_{\psi(c)} \mid c \in \mathbb{B}, c \ll_\rho b\} \mid b \in \mathbb{B}, b \ll_\rho a\}) \\
&= \lambda_B^g(\bigvee\{I_{\psi(d)} \mid d \in \mathbb{B}, d \ll_\rho a\}) \\
&= \lambda_B^g(D_\psi(a))
\end{aligned}$$

за всяко $a \in A$. Следователно

(2.20) $\Xi^s(\psi) \circ \lambda_A^g = \lambda_B^g \circ D_\psi$,

за всяко $\psi \in \mathbf{DHLC}((A,\rho,\mathbb{B}),(B,\eta,\mathbb{B}'))$.

Нека сега $\varphi : (A,\rho,\mathbb{B}) \longrightarrow (B,\eta,\mathbb{B}')$ е **MDHLC**-морфизъм. Полагаме $g_\varphi = \Delta^a(\varphi)$. Тогава, използвайки (2.19), получаваме, че $\forall a \in \mathbb{B}$,

$$\begin{aligned}
\Xi^m(\varphi)(\lambda_A^g(a)) &= \Lambda^t(\Delta^a(\varphi))(\lambda_A^g(a)) \\
&= \mathrm{cl}(g_\varphi^{-1}(\mathrm{int}(\lambda_A^g(a)))) \\
&= \mathrm{cl}(\bigcup\{\lambda_B^g(b) \mid b \in \varphi(a)\}) \\
&= \bigvee\{\lambda_B^g(b) \mid b \in \varphi(a)\} \\
&= \lambda_B^g(\bigvee\{b \mid b \in \varphi(a)\}) \\
&= \lambda_B^g(\bigvee \varphi(a)).
\end{aligned}$$

Сега, използвайки Забележка 2.3.2 и аксиомите (DLC5) и (M3), получаваме, че

$$\begin{aligned}
\Xi^m(\varphi)(\lambda_A^g(a)) &= \bigvee\{\Xi^m(\varphi)(\lambda_A^g(b)) \mid b \in \mathbb{B}, b \ll_\rho a\} \\
&= \bigvee\{\lambda_B^g(\bigvee \varphi(b)) \mid b \in \mathbb{B}, b \ll_\rho a\} \\
&= \lambda_B^g(\bigvee\{\bigvee \varphi(b) \mid b \in \mathbb{B}, b \ll_\rho a\}) \\
&= \lambda_B^g(\bigvee\{c \mid c \in \varphi(b), b \in \mathbb{B}, b \ll_\rho a\}) \\
&= \lambda_B^g(\bigvee\{\bigcup\{\varphi(b) \mid b \in \mathbb{B}, b \ll_\rho a\}\}) \\
&= \lambda_B^g(\bigvee \varphi(a)),
\end{aligned}$$

за всяко $a \in A$. Следователно, полагайки

$$E_\varphi(a) = \bigvee \varphi(a),$$

за всяко $\varphi \in \mathbf{MDHLC}((A,\rho,\mathbb{B}),(B,\eta,\mathbb{B}'))$, получаваме, че

(2.21) $\Xi^m(\varphi) \circ \lambda_A^g = \lambda_B^g \circ E_\varphi$.

Използвайки (2.20) и (2.21), можем да дефинираме два функтора

$$D : \mathbf{DHLC} \longrightarrow \mathbf{MDHLC}$$

и

$$E : \mathbf{MDHLC} \longrightarrow \mathbf{DHLC}$$

чрез

$$D(A,\rho,\mathbb{B}) = (A,\rho,\mathbb{B}), \text{ за всеки } \mathbf{DHLC}\text{-обект } (A,\rho,\mathbb{B}),$$

и

$$E(A,\rho,\mathbb{B}) = (A,\rho,\mathbb{B}), \text{ за всеки } \mathbf{MDHLC}\text{-обект } (A,\rho,\mathbb{B}),$$

и чрез $D(\psi) = D_\psi$ и $E(\varphi) = E_\varphi$ върху съответните морфизми. Тогава, използвайки още веднъж (2.20) и (2.21), ще докажем, че са в сила равенствата

$\Xi^m(\varphi) \odot \lambda_A^g = \lambda_B^g \odot E_\varphi$ и $\Xi^s(\psi) \diamond \widetilde{\lambda_A^g} = \widetilde{\lambda_B^g} \diamond D_\psi$, където $\widetilde{\lambda_A^g}$ и $\widetilde{\lambda_B^g}$ са дефинирани както в Твърдение 2.3.8. Имаме, че

$$\begin{aligned}
(\Xi^s(\psi) \diamond \widetilde{\lambda_A^g})(a) &= \bigvee\{\Xi^s(\psi)(b) \mid b \in \widetilde{\lambda_A^g}(a)\} \\
&= \bigvee\{\Xi^s(\psi)(b) \mid b \in \lambda_A^g(\mathbb{B}), b \ll_\rho \lambda_A^g(a)\} \\
&= \bigvee\{\Xi^s(\psi)(\lambda_A^g(c)) \mid c \in \mathbb{B}, c \ll_\rho a\} \\
&= \bigvee\{\lambda_B^g(D_\psi(c) \mid c \in \mathbb{B}, c \ll_\rho a\} \\
&= \bigvee\{\lambda_B^g(\bigcup\{I_{\psi(d)} \mid d \in \mathbb{B}, d \ll_\rho c\}) \mid c \in \mathbb{B}, c \ll_\rho a\} \\
&= \bigvee\{\bigcup\{\lambda_B^g(I_{\psi(d)}) \mid d \in \mathbb{B}, d \ll_\rho c\}) \mid c \in \mathbb{B}, c \ll_\rho a\} \\
&= \bigvee\{\bigcup\{\{\lambda_B^g(e) \mid e \in \mathbb{B}', e \ll_\eta \psi(d)\} \mid d \in \mathbb{B}, d \ll_\rho c\}) \mid c \in \mathbb{B}, c \ll_\rho a\} \\
&= \bigvee\{\{\lambda_B^g(e) \mid e \in \mathbb{B}', e \ll_\eta \psi(d)\} \mid d \in \mathbb{B}, d \ll_\rho a\}.
\end{aligned}$$

От друга страна

$$\begin{aligned}
(\widetilde{\lambda_B^g} \diamond D_\psi)(a) &= \bigvee\{\widetilde{\lambda_B^g}(b) \mid b \in D_\psi(a)\} \\
&= \bigvee\{I_{\lambda_B^g(b)} \mid b \in \bigcup\{I_{\psi(d)} \mid d \in \mathbb{B}, d \ll_\rho a\}\} \\
&= \bigvee\{\{\lambda_B^g(c) \mid c \in \mathbb{B}', c \ll_\eta b\} \mid b \in \bigcup\{I_{\psi(d)} \mid d \in \mathbb{B}, d \ll_\rho a\}\} \\
&= \bigvee\{\{\lambda_B^g(c) \mid c \in \mathbb{B}', c \ll_\eta b\} \mid b \in \mathbb{B}', b \ll_\eta \psi(d), d \in \mathbb{B}, d \ll_\rho a\} \\
&= \bigvee\{\{\lambda_B^g(c) \mid c \in \mathbb{B}', c \ll_\eta \psi(d)\} \mid d \in \mathbb{B}, d \ll_\rho a\}.
\end{aligned}$$

Това означава, че функторите D и E са естествено изоморфни, респективно, на функторите Ξ^s и Ξ^m.

И така, ако искаме да покажем директно, че категориите **DHLC** и **MDHLC** са еквивалентни, то трябва да покажем, че функторите Ξ^s и Ξ^m (или, еквивалентно, функторите D и E) реализират тази еквивалентност. Както бе споменато по-горе, не сме в състояние да направим това. Единствената пречка е, че нямаме директно доказателство на факта, че ако φ е **MDHLC**-морфизъм, то $\Xi^m(\varphi)$ (или, еквивалентно, $E(\varphi)(= E_\varphi)$) удовлетворява аксиомата (DLC3).

Глава 3

Някои теореми за изоморфизъм за MVD-алгебри

3.1 Увод

В тази глава се доказват редица теореми за изоморфизъм между категориите **DSkeLC**, **DSkePerLC**, **DOpLC**, **DOpPerLC** и **DHLC**, описани в работите на Г. Димов [16, 17, 18, 19] (които са дуални на различни подкатегории на категорията **HLC** и чиито обекти са пълните локални контактни алгебри), и категории, чиито обекти са така наречените пълни *MVD-алгебри* (Mormann-Вакарелов-Димов-алгебри), въведени в [59]. Мотивацията за тези разглеждания бе изложена във Въведението.

Организацията на главата е следната: във втория параграф се съдържат всички необходими за по-нататъшното изложение подготвителни резултати и понятия, а в третия параграф са въведени категориите **MVDSkeLC**, **MVDOpLC**, **MVDSkePerLC**, **MVDOpPerLC** и **MVDHLC**, чиито обекти са всички пълни MVD-алгебри и чиито морфизми са подходящи функции между тях и е доказано, че тези категории са изоморфни респективно на категориите **DSkeLC**, **DOpLC**, **DSkePerLC**, **DOpPerLC** и **DHLC**.

Резултатите от тази глава са изложени в работата [38], която е представена за публикуване.

3.2 Предварителни сведения

Факт 3.2.1. ([17]) *Ако A и B са булеви алгебри, $\varphi : A \longrightarrow B$ е булев хомо-*

морфизъм, A съдържа всички сечения и φ ги запазва, то $\forall a \in A$ и $\forall b \in B$, $\varphi_\Lambda(\varphi(a) \wedge b) = a \wedge \varphi_\Lambda(b)$.

В [59] е въведено следното понятие:

Дефиниция 3.2.2. ([59]) Една тройка $(B, \leq, \ll)$ се нарича *MVD-алгебра*, ако $(B, \leq)$ е булева алгебра и са изпълнени аксиомите ($\ll$1)-($\ll$6) (вж. 2.2.1), както и следните две аксиоми:

($\ll 4^*$) от $a \ll b$ и $a \ll c$ следва, че $a \ll b \wedge c$, и

(V) ако $a \ll 1$ и $b^* \ll a^*$, то $a \ll b$.

Ще казваме, че $(B, \leq, \ll)$ е *пълна MVD-алгебра*, ако $(B, \leq)$ е пълна булева алгебра.

Непосредствено от съответните дефиниции следва, че нормалните контактни алгебри съвпадат с MVD-алгебрите удовлетворяващи аксиомата

($\ll 2'$) $1 \ll 1$.

Твърдение 3.2.3. ([59]) *Нека L е локално компактно хаусдорфово пространство. Тогава*

$$(RC(L), \subseteq, \ll_L),$$

където, за всеки $F, G \in RC(L)$, $F \ll_L G$ тогава и само тогава, когато F е компактно и $F \subseteq \mathrm{int}(G)$, е MVD-алгебра. Всички такива MVD-алгебри ще наричаме стандартни MVD-алгебри.

Теорема 3.2.4. ([59]) *Понятията "локална контактна алгебра" и "MVD-алгебра" са еквивалентни. По-подробно: нека κ е съответствието, което съпоставя на всяка LC-алгебра $(B, \rho, \mathbb{B})$ една MVD-алгебра $\kappa(B, \rho, \mathbb{B}) = (B, \leq_l, \ll_l)$, където $a \leq_l b$ тогава и само тогава, когато $a \wedge b = a$, и*

(3.1) *$a \ll_l b$ тогава и само тогава, когато $a \in \mathbb{B}$ и $a \ll_\rho b$*

(вж. 2.2.1 за "$\ll_\rho$"); нека θ е съответствието, което съпоставя на всяка MVD-алгебра $(B, \leq, \ll)$ една LC-алгебра $\theta(B, \leq, \ll) = (B, \rho_m, \mathbb{B}_m)$, където

(3.2) $\mathbb{B}_m = \{a \in B \mid a \ll 1\}$

и за $a, b \in B$,

(3.3) $a \ll_{\rho_m} b \leftrightarrow (\forall c \ll 1)[(c \wedge a) \ll (c^* \vee b)]$

(или, еквивалентно, $a\rho_m b$ *тогава и само тогава, когато съществува* $c \ll 1$*, такова че* $(c \wedge a) \not\ll (c \wedge b)^*$*). Тогава* κ *и* θ *са биективни съответствия между класа от всички LC-алгебри и класа от всички MVD-алгебри, и* $\kappa = \theta^{-1}$*.*

Следния очевиден факт е отбелязан в [7].

Факт 3.2.5. ([7]) *Нека* (X, τ) *е топологично пространство. Тогава стандартната контактна алгебра* $(RC(X, \tau), \rho_{(X,\tau)})$ *е свързана тогава и само тогава, когато пространството* (X, τ) *е свързано.*

Твърдение 3.2.6. *(а) Всяко квази-отворено изображение е скелетно.*
(б) ([17]) *Нека* X *е регулярно пространство и* $f : X \longrightarrow Y$ *е затворено изображение. Тогава* f *е квази-отворено тогава и само тогава, когато* f *е скелетно.*

Означение 3.2.7. Ако **K** е категория, то с **InK** (респективно, **SuK**) ще означаваме категорията, имаща същите обекти като категорията **K**, и чиито морфизми са само инективните (респективно, сюрективните) морфизми на **K**.

Означение 3.2.8. Ако **K** е категория, чиито обекти са подклас на класа от всички топологични пространства (респективно, контактни алгебри), тогава с **KCon** ще означаваме пълната подкатегория на **K**, чиито обекти са всички "свързани" **K**-обекти, където "свързани" се разбира в обичайния смисъл, когато обектите на **K** са топологични пространства, и в смисъла от 2.2.1 (вж. условие (CON) там), когато обектите на **K** са контактни алгебри.

3.3 Теореми за изоморфизъм за MVD-алгебри

В [17] е въведена категорията **DSkeLC**, чиито обекти са всички пълни локални контактни алгебри и чиито морфизми $\varphi : (A, \rho, \mathbb{B}) \longrightarrow (B, \eta, \mathbb{B}')$ са всички пълни булеви хомоморфизми $\varphi : A \longrightarrow B$, удовлетворяващи следните условия:

(L1) $\forall a, b \in A$, от $\varphi(a)\eta\varphi(b)$ следва, че $a\rho b$;
(L2) от $b \in \mathbb{B}'$ следва, че $\varphi_\Lambda(b) \in \mathbb{B}$ (вж. 0.2.8 за φ_Λ).

Както е доказано в [17], категорията **DSkeLC** е дуално еквивалентна на категорията **SkeLC** на всички локално компактни хаусдорфови пространства и всички непрекъснати скелетни изображения между тях.

Ще отбележим, че (L1) е еквивалентно на следното условие:

(L1') $\forall a, b \in A$, от $a \ll_\rho b$ следва, че $\varphi(a) \ll_\eta \varphi(b)$.

Дефиниция 3.3.1. Ще дефинираме една нова категория, която ще означаваме с **MVDSkeLC**. Нейните обекти са всички пълни MVD-алгебри (вж. 3.2.2). Ако $(B, \leq, \ll)$ и $(B', \leq', \ll')$ са две пълни MVD-алгебри, то ще казваме, че една функция $\varphi : (B, \leq, \ll) \longrightarrow (B', \leq', \ll')$ е **MVDSkeLC**-морфизъм, ако $\varphi : (B, \leq) \longrightarrow (B', \leq')$ е пълен булев хомоморфизъм, удовлетворяващ следните аксиоми:

(S1) за всеки $a, b \in B$, от $[(\forall c \in B$, такова че $c \ll 1)$ $(c \wedge a \ll c^* \vee b)]$ следва, че $[(\forall d \in B'$, такова че $d \ll' 1)$ $(d \wedge \varphi(a) \ll' d^* \vee \varphi(b))]$;

(S2) за всяко $b \in B'$, от $b \ll' 1$ следва, че $\varphi_\Lambda(b) \ll 1$.

Нека композицията на два **MVDSkeLC**-морфизми е обичайната композиция на функции.

Лесно се вижда, че по този начин наистина се дефинира категория.

Теорема 3.3.2. *Категориите* **DSkeLC** *и* **MVDSkeLC** *са изоморфни; следователно категориите* **SkeLC** *и* **MVDSkeLC** *са дуално еквивалентни.*

Доказателство. Ще дефинираме два ковариантни функтора $K : \mathbf{DSkeLC} \longrightarrow \mathbf{MVDSkeLC}$ и $\Theta : \mathbf{MVDSkeLC} \longrightarrow \mathbf{DSkeLC}$.

За всяко $(B, \rho, \mathbb{B}) \in |\mathbf{DSkeLC}|$, полагаме $K(B, \rho, \mathbb{B}) = \kappa(B, \rho, \mathbb{B})$ (вж. 3.2.4 за κ). Тогава от Теорема 3.2.4 следва, че дефиницията на K върху обектите на категорията **DSkeLC** е коректна.

Нека $\varphi \in \mathbf{DSkeLC}((B, \rho, \mathbb{B}), (B', \rho', \mathbb{B}'))$. Ще докажем, че същата функция $\varphi : B \longrightarrow B'$ е **MVDSkeLC**-морфизъм между $K(B, \rho, \mathbb{B})$ и $K(B', \rho', \mathbb{B}')$. Тъй като φ е пълен булев хомоморфизъм между булевите алгебри B и B', то трябва само да проверим, че φ удовлетворява аксиомите $(S1)$ и $(S2)$. Това лесно може да се направи, използвайки 3.2.4 и (L1'). И така, можем да дефинираме:

$$K(\varphi) = \varphi.$$

Тогава, очевидно, $K : \mathbf{DSkeLC} \longrightarrow \mathbf{MVDSkeLC}$ е (ковариантен) функтор.

Нека $(B, \leq, \ll) \in |\mathbf{MVDSkeLC}|$. Полагаме $\Theta(B, \leq, \ll) = \theta(B, \leq, \ll)$ (вж. 3.2.4 за θ). Тогава от 3.2.4 следва, че дефиницията на Θ върху обектите на категорията **MVDSkeLC** е коректна.

Нека $\varphi \in \mathbf{MVDSkeLC}((B, \leq, \ll), (B', \leq', \ll'))$. Ще покажем, че функцията $\varphi : B \longrightarrow B'$ е и **DSkeLC**-морфизъм между $\Theta(B, \leq, \ll)$ и $\Theta(B', \leq', \ll')$. За целта е достатъчно да докажем, че φ удовлетворява условията (L1) и (L2). Това може лесно да се направи, използвайки 3.2.4 и (L1'). И така, можем да дефинираме:

$$\Theta(\varphi) = \varphi.$$

Тогава, очевидно, $\Theta : \mathbf{MVDSkeLC} \longrightarrow \mathbf{DSkeLC}$ е (ковариантен) функтор.

От дефиницията на функторите K и Θ и равенствата $\kappa \circ \theta = id, \theta \circ \kappa = id$ (вж. 3.2.4), заключаваме, че $K \circ \Theta = Id_{\mathbf{MVDSkeLC}}$ и $\Theta \circ K = Id_{\mathbf{DSkeLC}}$. Следователно категориите **DSkeLC** и **MVDSkeLC** са изоморфни. □

В [17] е въведена категорията **DSkePerLC**, чиито обекти са всички пълни локални контактни алгебри (виж 2.2.5) и чиито морфизми са всички **DSkeLC**-морфизми $\varphi : (A, \rho, \mathbb{B}) \longrightarrow (B, \eta, \mathbb{B}')$, удовлетворяващи следното условие:
(L3) ако $a \in \mathbb{B}$, то $\varphi(a) \in \mathbb{B}'$.

Очевидно, **DSkePerLC** е подкатегория на категорията **DSkeLC**.

В [17] е доказано, че категорията **DSkePerLC** е дуално еквивалентна на категорията **SkePerLC** на всички локално компактни хаусдорфови пространства и всички скелетни съвършени изображения между тях.

Да отбележим, че от Твърдение 3.2.6(б) следва, че морфизмите на категорията **SkePerLC** са точно квази-отворените съвършени изображения (защото съвършените изображения са затворени изображения).

Дефиниция 3.3.3. Нека сега дефинираме категория, която ще означаваме с **MVDSkePerLC**. Нейните обекти са всички пълни MVD-алгебри (вж. 3.2.2). Ако $(B, \leq, \ll)$ и $(B', \leq', \ll')$ са две пълни MVD-алгебри, то ще казваме, че една функция $\varphi : (B, \leq, \ll) \longrightarrow (B', \leq', \ll')$ е **MVDSkePerLC**-морфизъм, ако $\varphi : (B, \leq) \longrightarrow (B', \leq')$ е пълен булев хомоморфизъм, удовлетворяващ аксиомата (S2) от 3.3.1 и следните две аксиоми:

(ES1) за всеки $a, b \in B$, от $a \ll b$ следва, че $\varphi(a) \ll' \varphi(b)$;
(S3) за всяко $a \in B$, от $a \ll 1$ следва, че $\varphi(a) \ll' 1$.

Нека композицията на два **MVDSkePerLC**-морфизма е обичайната композиция на функции.

Лесно се вижда, че по този начин наистина е дефинирана подкатегория на категорията **MVDSkeLC**.

Теорема 3.3.4. *Категориите* **DSkePerLC** *и* **MVDSkePerLC** *са изоморфни; следователно категориите* **SkePerLC** *и* **MVDSkePerLC** *са дуално еквивалентни.*

Доказателство. Ще покажем, че рестрикциите

$$K_p : \mathbf{DSkePerLC} \longrightarrow \mathbf{MVDSkePerLC}$$

и

$$\Theta_p : \mathbf{MVDSkePerLC} \longrightarrow \mathbf{DSkePerLC}$$

на функторите $K : \mathbf{DSkeLC} \longrightarrow \mathbf{MVDSkeLC}$ и $\Theta : \mathbf{MVDSkeLC} \longrightarrow \mathbf{DSkeLC}$, дефинирани в доказателството на Теорема 3.3.2, са търсените функтори на изоморфизъм.

Нека $\varphi \in \mathbf{DSkePerLC}((B, \rho, \mathbb{B}), (B', \rho', \mathbb{B}'))$. Тогава, както е показано в доказателството на 3.3.2, същата функция $\varphi : B \longrightarrow B'$ е **MVDSkeLC**-морфизъм между MVD-алгебрите $K(B, \rho, \mathbb{B})$ и $K(B', \rho', \mathbb{B}')$. И така, трябва да проверим само, че φ удовлетворява аксиомите $(ES1)$ и $(S3)$.

Полагаме $K_p(B, \rho, \mathbb{B}) = (B, \leq, \ll)$ и $K_p(B', \rho', \mathbb{B}') = (B', \leq', \ll')$. Тогава, от 3.2.4 следва, че $a \ll b$ тогава и само тогава, когато $a \in \mathbb{B}$ и $a \ll_\rho b$; също така, $a \ll' b$ тогава и само тогава, когато $a \in \mathbb{B}'$ и $a \ll_{\rho'} b$. Използвайки (L3), лесно получаваме, че (S3) е изпълнено. Ще покажем, че (ES1) също е изпълнено. Нека $a, b \in B$ и $a \ll b$. Тогава $a \ll_\rho b$ и $a \in \mathbb{B}$. От (L1') следва, че $\varphi(a) \ll_{\rho'} \varphi(b)$. Тъй като, съгласно (L3), $\varphi(a) \in \mathbb{B}'$, то получаваме, че $\varphi(a) \ll' \varphi(b)$. Значи $\varphi \in \mathbf{MVDSkePerLC}(K_p(B, \rho, \mathbb{B}), K_p(B', \rho', \mathbb{B}'))$.

Нека $\varphi \in \mathbf{MVDSkePerLC}((B, \leq, \ll), (B', \leq', \ll'))$. Ще покажем, че φ удовлетворява условието (S1). Нека $a, b \in B$ и нека за всяко $c \in B$, за което $c \ll 1$, е в сила $c \wedge a \ll c^* \vee b$. Нека $d \in B'$ е такова, че $d \ll' 1$. Тогава от (S2) следва, че $c = \varphi_\Lambda(d) \ll 1$. Следователно $c \wedge a \ll c^* \vee b$. Използвайки (ES1), получаваме, че $\varphi(c) \wedge \varphi(a) \ll' (\varphi(c))^* \vee \varphi(b)$. Тогава от $(\Lambda 1)$ и $(\ll 3)$ следва, че $d \wedge \varphi(a) \ll' d^* \vee \varphi(b)$.

Следователно (S1) е изпълнено. Сега, както беше показано в доказателството на 3.3.2, същата функция $\varphi : B \longrightarrow B'$ е **DSkeLC**-морфизъм между $\Theta(B, \leq, \ll)$ и $\Theta(B', \leq', \ll')$. И така, остава да докажем само, че φ удовлетворява условието (L3). Това може да бъде направено лесно, използвайки (S3). Останалото следва от Теорема 3.3.2. $\square$

В [17] е въведена категорията **DOpLC**, чиито обекти са всички пълни локални контактни алгебри и чиито морфизми са всички **DSkeLC**-морфизми $\varphi : (A, \rho, \mathbb{B}) \longrightarrow (B, \eta, \mathbb{B}')$, удовлетворяващи следното условие:

(LO) $\forall a \in A$ и $\forall b \in \mathbb{B}'$, от $\varphi_\Lambda(b)\rho a$ следва $b\eta\varphi(a)$.

Очевидно, **DOpLC** е подкатегория на категорията **DSkeLC**.

Както е доказано в [17], категорията **DOpLC** е дуално еквивалентна на категорията **OpLC** на всички локално компактни хаусдорфови пространства и всички отворени изображения между тях.

Дефиниция 3.3.5. Нека сега да дефинираме категория, която ще означаваме с **MVDOpLC**. Нека нейните обекти са всички пълни MVD-алгебри. Ако $(B, \leq, \ll)$ и $(B', \leq', \ll')$ са две пълни MVD-алгебри, то ще казваме, че една функция $\varphi : (B, \leq, \ll) \longrightarrow (B', \leq', \ll')$ е **MVDOpLC**-морфизъм, ако φ е **MVDSkeLC**-морфизъм (вж. 3.3.1), който удовлетворява следната аксиома:

(SO) За всеки $a \in B$ и $b \in B'$, от $b \ll' \varphi(a)$ следва, че $\varphi_\Lambda(b) \ll a$ (вж. 0.2.8 за φ_Λ).

Нека композицията на два **MVDOpLC**-морфизма е обичайната композиция на функции.

Лесно се вижда, че по този начин наистина е дефинирана категория.

Теорема 3.3.6. *Категориите* **DOpLC** *и* **MVDOpLC** *са изоморфни; следователно категориите* **OpLC** *и* **MVDOpLC** *са дуално еквивалентни.*

Доказателство. Ще покажем, че рестрикциите $K_o : \mathbf{DOpLC} \longrightarrow \mathbf{MVDOpLC}$ и $\Theta_o : \mathbf{MVDOpLC} \longrightarrow \mathbf{DOpLC}$ на функторите K и Θ, дефинирани в доказателството на Теорема 3.3.2, са търсените функтори на изоморфизъм.

Нека $\varphi \in \mathbf{DOpLC}((B, \rho, \mathbb{B}), (B', \rho', \mathbb{B}'))$. Ще докажем, че същата функция $\varphi : B \longrightarrow B'$ е **MVDOpLC**-морфизъм между $K_o(B, \rho, \mathbb{B})$ и $K_o(B', \rho', \mathbb{B}')$. Тъй

като φ е **MVDSkeLC**-морфиъм (вж. доказателството на Теорема 3.3.2), трябва само да проверим, че φ удовлетворява аксиомата (SO).

Нека $K(B, \rho, \mathbb{B}) = (B, \leq, \ll)$ и $K(B', \rho', \mathbb{B}') = (B', \leq', \ll')$. Тогава, от 3.2.4 следва, че $a \ll b$ тогава и само тогава, когато $a \in \mathbb{B}$ и $a \ll_\rho b$; също така, $a \ll' b$ тогава и само тогава, когато $a \in \mathbb{B}'$ и $a \ll_{\rho'} b$.

За проверката на (SO) ще отбележим първо, че условието (LO) може да бъде еквивалентно формулирано по следния начин:

(3.4) $\forall a \in A$ и $\forall b \in \mathbb{B}'$, от $b \ll_{\rho'} \varphi(a)$ следва, че $\varphi_\Lambda(b) \ll_\rho a$.

Нека сега $a \in B$, $b \in B'$ и $b \ll' \varphi(a)$. Тогава $b \ll_{\rho'} \varphi(a)$ и $b \in \mathbb{B}'$. От (LO) получаваме, че $\varphi_\Lambda(b) \ll_\rho a$. Тъй като, от (L2) имаме, че $\varphi_\Lambda(b) \in \mathbb{B}$, то $\varphi_\Lambda(b) \ll a$.

Следователно, функторът K_o е дефиниран коректно.

Нека $\varphi \in \mathbf{MVDOpLC}((B, \leq, \ll), (B', \leq', \ll'))$. Ще покажем, че функцията $\varphi : B \longrightarrow B'$ е **DOpLC**-морфизъм между $\Theta_o(B, \leq, \ll)$ и $\Theta_o(B', \leq', \ll')$. Тъй като, от доказателството на Теорема 3.3.2 имаме, че φ е **DSkeLC**-морфизъм, то е достатъчно да покажем, че φ удовлетворява условието (LO).

Полагаме $\Theta(B, \leq, \ll) = (B, \rho, \mathbb{B})$ и $\Theta(B', \leq', \ll') = (B', \rho', \mathbb{B}')$.

Нека $a \in B$, $b \in \mathbb{B}'$ и $b \ll_{\rho'} \varphi(a)$. Тогава, от Теорема 3.2.4 имаме, че $b \ll' \varphi(a)$. От (SO) следва, че $\varphi_\Lambda(b) \ll a$. Следователно $\varphi_\Lambda(b) \ll_\rho a$. Значи φ удовлетворява условието (LO). И така, функторът Θ_o е дефиниран коректно.

Останалото следва от Теорема 3.3.2. □

В [17] е въведена категорията **DOpPerLC**, чиито обекти са всички пълни локални контактни алгебри (вж. Дефиниция 2.2.5) и чиито морфизми са всички **DSkePerLC**-морфизми, удовлетворяващи условието (LO).

Очевидно, **DOpPerLC** е подкатегория на категорията **DSkePerLC**.

Както е доказано в [17], категорията **OpPerLC** от всички локално компактни хаусдорфови пространства и всички отворени съвършени изображения между тях е дуално еквивалентна на категорията **DOpPerLC**.

Дефиниция 3.3.7. Нека дефинираме подкатегория **MVDOpPerLC** на категорията **MVDSkePerLC**. Нека нейните обекти са всички пълни MVD-алгебри. Ако $(B, \leq, \ll)$ и $(B', \leq', \ll')$ са две пълни MVD-алгебри, то ще казваме, че един

MVDSkePerLC-морфизъм $\varphi : (B, \leq, \ll) \longrightarrow (B', \leq', \ll')$ е **MVDOpPerLC**-морфизъм, ако удовлетворява аксиомата (SO) (вж. 3.3.5).
Лесно се вижда, че по този начин наистина е дефинирана категория.

Теорема 3.3.8. *Категориите* **DOpPerLC** *и* **MVDOpPerLC** *са изоморфни; следователно категориите* **OpPerLC** *и* **MVDOpPerLC** *са дуално еквивалентни.*

Доказателство. Следва от доказателствата на Теорема 3.3.4 и Теорема 3.3.6.

□

В [19] е въведена категорията **DInSkeLC**, чиито обекти обекти са всички пълни локални контактни алгебри (вж. 2.2.5) и за всеки две CLC- алгебри $(A, \rho, \mathbb{B})$ и $(B, \eta, \mathbb{B}')$, $\varphi : (A, \rho, \mathbb{B}) \longrightarrow (B, \eta, \mathbb{B}')$ е **DInSkeLC**-*морфизъм*, ако φ е **DSkeLC**-морфизъм, който удовлетворява следното условие:

(LS) $\forall a, b \in \mathbb{B}'$, от $\varphi_\Lambda(a) \rho \varphi_\Lambda(b)$ следва, че $a \eta b$ (вж. 0.2.8 за φ_Λ).

Както е показано в [19], категориите **InSkeLC** и **DInSkeLC** са дуално еквивалентни.

Ще отбележим, че условието (LS) е еквивалентно на следното условие:

(LS') $\forall a, b \in \mathbb{B}'$, от $a \ll_\eta b$ следва $\varphi_\Lambda(a) \ll_\rho (\varphi_\Lambda(b^*))^*$.

Дефиниция 3.3.9. Нека **MVDInSkeLC** е категорията, чиито обекти са всички пълни MVD-алгебри и чиито морфизми са дефинирани така: ако $(B, \leq, \ll)$ и $(B', \leq', \ll')$ са две пълни MVD-алгебри, то една функция

$$\varphi : (B, \leq, \ll) \longrightarrow (B', \leq', \ll')$$

е **MVDInSkeLC**-морфизъм, ако φ е **MVDSkeLC**-морфизъм (вж. 3.3.1), който удовлетворява следното условие:

(LS") за всеки $a, b \in B'$, такива че $a, b \ll' 1$, от $a \ll' b^*$ следва, че $\varphi_\Lambda(a) \ll (\varphi_\Lambda(b^*))^*$.

Теорема 3.3.10. *Категориите* **DInSkeLC** *и* **MVDInSkeLC** *са изоморфни; следователно категориите* **InSkeLC** *и* **MVDInSkeLC** *са дуално еквивалентни.*

Доказателство. Ще покажем, че рестрикциите

$$K_r : \mathbf{DInSkeLC} \longrightarrow \mathbf{MVDInSkeLC}$$

и

$$\Theta_r : \mathbf{MVDInSkeLC} \longrightarrow \mathbf{DInSkeLC}$$

на функторите $K : \mathbf{DSkeLC} \longrightarrow \mathbf{MVDSkeLC}$ и $\Theta : \mathbf{MVDSkeLC} \longrightarrow \mathbf{DSkeLC}$, дефинирани в доказателството на Теорема 3.3.2, са търсените функтори на изоморфизъм.

Нека $\varphi \in \mathbf{DInSkeLC}((B, \rho, \mathbb{B}), (B', \rho', \mathbb{B}'))$. Ще покажем, че същата функция $\varphi : B \longrightarrow B'$ е **MVDInSkeLC**-морфизъм между MVD-алгебрите $K(B, \rho, \mathbb{B}) = (B, \leq, \ll)$ и $K(B', \rho', \mathbb{B}') = (B', \leq', \ll')$. Трябва да проверим само, че φ удовлетворява аксиомата (LS"). Нека $a, b \in B'$, $a, b \ll' 1$ и $a \ll' b$. Тогава от 3.2.4 имаме, че $a, b \in \mathbb{B}'$ и $a \ll_\rho b$. Тъй като φ удовлетворява условието (LS') то, $\varphi_\Lambda(a) \ll_\rho (\varphi_\Lambda(b^*))^*$. От (S2) следва, че $\varphi_\Lambda(a) \ll 1$. Значи $\varphi_\Lambda(a) \ll (\varphi_\Lambda(b^*))^*$. Следователно φ е **MVDInSkeLC**-морфизъм.

Нека $\varphi \in \mathbf{MVDInSkeLC}((B, \leq, \ll), (B', \leq', \ll'))$. Ще покажем, че същата функция $\varphi : B \longrightarrow B'$ е **DInSkeLC**-морфизъм между $\Theta(B, \leq, \ll) = (B, \rho, \mathbb{B})$ и $\Theta(B', \leq', \ll') = (B', \rho', \mathbb{B}')$. От 3.3.2 имаме, че φ е **DSkeLC**-морфизъм. Значи трябва да проверим само, че φ удовлетворява условието (LS'). Нека $a, b \in \mathbb{B}'$ и $a \ll_\eta b$. От 3.2.4 имаме, че $a, b \ll' 1$ и $a \ll' b$. Тъй като φ удовлетворява условието (LS"), то $\varphi_\Lambda(a) \ll' (\varphi_\Lambda(b^*))^*$, т.е., $\varphi_\Lambda(a) \in \mathbb{B}$ и $\varphi_\Lambda(a) \ll_\rho (\varphi_\Lambda(b^*))^*$. Значи φ удовлетворява (LS'). Следователно, φ е **DInSkeLC**-морфизъм. □

В [19] е въведена категорията **DSuSkeLC**, чиито обекти са всички пълни локални контактни алгебри (вж. 2.2.5), и чиито морфизми са дефинирани по следния начин: за всеки две CLC-алгебри $(A, \rho, \mathbb{B})$ и $(B, \eta, \mathbb{B}')$, $\varphi : (A, \rho, \mathbb{B}) \longrightarrow (B, \eta, \mathbb{B}')$ е **DSuSkeLC**-*морфизъм*, ако φ е **DSkeLC**-морфизъм, който удовлетворява следното условие:

(IS) за всеки ограничен ултрафилтър u в $(A, \rho, \mathbb{B})$, съществува ограничен ултрафилтър v в $(B, \eta, \mathbb{B}')$, такъв че $\varphi_\Lambda(v) \rho u$ (вж. 2.2.10, 0.2.8 и 2.2.1 за означенията).

Както е доказано в [19], категориите **SuSkeLC** и **DSuSkeLC** са дуално еквивалентни.

Дефиниция 3.3.11. Нека $(B, \leq, \ll)$ е MVD-алгебра. Ще казваме, че един филтър F в $(B, \leq, \ll)$ е *ограничен*, ако съществува $a \in F$, такова че $a \ll 1$.

Дефиниция 3.3.12. Нека **MVDSuSkeLC** е категорията, чиито обекти са всички пълни MVD-алгебри, и чиито морфизми са дефинирани по следния начин: ако $(B, \leq, \ll)$ и $(B', \leq', \ll')$ са две пълни MVD-алгебри, то

$$\varphi : (B, \leq, \ll) \longrightarrow (B', \leq', \ll')$$

е **MVDSuSkeLC**-морфизъм, ако φ е **MVDSkeLC**-морфизъм (вж. 3.3.1), който удовлетворява следната аксиома:

(IS') за всеки ограничен ултрафилтър u в $(B, \leq, \ll)$, съществува ограничен ултрафилтър v в $(B', \leq', \ll')$, такъв че за всяко $a \in u$ и за всяко $b \in v$ съществува $c'' \in B$, за което е изпълнено, че $c'' \ll 1$ и $\varphi_\Lambda(b) \wedge c'' \not\ll (a \wedge c'')^*$.

Теорема 3.3.13. *Категориите* **DSuSkeLC** *и* **MVDSuSkeLC** *са изоморфни; следователно категориите* **SuSkeLC** *и* **MVDSuSkeLC** *са дуално еквивалентни.*

Доказателство. Ще покажем, че рестрикциите

$$K_q : \mathbf{DSuSkeLC} \longrightarrow \mathbf{MVDSuSkeLC}$$

и

$$\Theta_q : \mathbf{MVDSuSkeLC} \longrightarrow \mathbf{DSuSkeLC}$$

на функторите $K : \mathbf{DSkeLC} \longrightarrow \mathbf{MVDSkeLC}$ и $\Theta : \mathbf{MVDSkeLC} \longrightarrow \mathbf{DSkeLC}$, дефинирани в доказателството на Теорема 3.3.2, са търсените функтори на изоморфизъм.

Нека $\varphi \in \mathbf{DSuSkeLC}((B, \rho, \mathbb{B}), (B', \rho', \mathbb{B}'))$. Тъй като същата функция φ е **MVDSkeLC**-морфизъм (вж. доказателството на 3.3.2) между $K(B, \rho, \mathbb{B}) = (B, \leq, \ll)$ и $K(B', \rho', \mathbb{B}) = (B', \leq', \ll')$, то трябва само да проверим, че φ удовлетворява аксиомата (IS'). Нека u е ултрафилтър в $(B, \leq, \ll)$, такъв че $\exists c \in u$, за което е изпълнено, че $c \ll 1$. Тогава, от 3.2.4 имаме, че $c \in \mathbb{B}$ и следователно u е ограничен ултрафилтър в $(B, \rho, \mathbb{B})$. Тъй като φ удовлетворява (IS), то съществува ограничен ултрафилтър v в $(B', \rho', \mathbb{B}')$, такъв че $\varphi_\Lambda(v)\rho u$, т.е. $\exists c' \in v$,

такова че $c' \ll' 1$ и $\forall a \in u$ и $\forall b \in v$ съществува $c''_{ab} \in B$, такова че $c''_{ab} \ll 1$ и $\varphi_\Lambda(b) \wedge c''_{ab} \not\ll (a \wedge c''_{ab})^*$. Следователно, φ е **MVDSuSkeLC**-морфизъм.

Нека $\varphi \in$ **MVDSuSkeLC**$((B, \leq, \ll), (B', \leq', \ll'))$. Ще покажем, че същата функция $\varphi : B \longrightarrow B'$ е и **DSuSkeLC**-морфизъм между $\Theta_q(B, \leq, \ll) = (B, \rho, \mathbb{B})$ и $\Theta_q(B', \leq', \ll') = (B', \rho', \mathbb{B}')$. От 3.3.2 имаме, че φ е **DSkeLC**-морфизъм. Остава да проверим само, че φ удовлетворява условието (IS). Нека u е ограничен ултрафилтър в $(B, \rho, \mathbb{B})$. Тогава, от 3.2.4 имаме, че $\exists c \in u$, такова че $c \ll 1$. Тъй като φ удовлетворява (IS'), то съществува ограничен ултрафилтър v в $(B', \leq', \ll')$, такъв че $\forall a \in u$ и $\forall b \in v$ съществува $c''_{ab} \in B$, за което е изпълнено, че $c''_{ab} \ll 1$ и $\varphi_\Lambda(b) \wedge c''_{ab} \not\ll (a \wedge c''_{ab})^*$. Тогава v е ограничен ултрафилтър в $(B', \rho', \mathbb{B}')$ и $\varphi_\Lambda(v) \rho u$. Следователно φ е **DSuSkeLC**-морфизъм. □

В [19] е въведена категорията **DSuSkePerLC**, чиито обекти са всички пълни локални контактни алгебри, и чиито морфизми са всички инективни пълни булеви хомоморфизми между тях, удовлетворяващи аксиомите (L1)-(L3). Също в [19] е въведена категорията **DInSkePerLC**, чиито обекти са всички пълни локални контактни алгебри (вж. 2.2.5), и чиито морфизми са всички **DSkePerLC**-морфизми, които удовлетворяват условието (LS).

В [19] е доказано, че категориите **SuSkePerLC** и **DSuSkePerLC** са дуално еквивалентни, както и че категориите **InSkePerLC** и **DInSkePerLC** са дуално еквивалентни.

Дефиниция 3.3.14. Нека **MVDInSkePerLC** е категорията, чиито обекти са всички пълни MVD-алгебри, и чиито морфизми са дефинирани по следния начин: ако $(B, \leq, \ll)$ и $(B', \leq', \ll')$ са две пълни MVD-алгебри, то $\varphi : (B, \leq, \ll) \longrightarrow (B', \leq', \ll')$ е **MVDInSkePerLC**-морфизъм ако φ е **MVDSkePerLC**-морфизъм (вж. 3.3.3), който удовлетворява следната аксиома:

(CS) $\forall a, b \in B'$, от $a \ll' b$ следва, че $\varphi_\Lambda(a) \ll (\varphi_\Lambda(b^*))^*$.

Дефиниция 3.3.15. Означаваме с **MVDSuSkePerLC** категорията на всички пълни MVD-алгебри и всички инективни пълни булеви хомоморфизми между тях, удовлетворяващи аксиомите (ES1), (S2) и (S3) (вж. 3.3.1 и 3.3.3).

Теорема 3.3.16. *(i) Категориите* **DSuSkePerLC** *и* **MVDSuSkePerLC** *са изоморфни; следователно категориите* **SuSkePerLC** *и* **MVDSuSkePerLC** *са ду-*

ално еквивалентни.

(ii) Категориите **DInSkePerLC** *и* **MVDInSkePerLC** *са изоморфни; следователно категориите* **InSkePerLC** *и* **MVDInSkePerLC** *са дуално еквивалентни.*

Доказателство. (i) Следва непосредствено от Теорема 3.3.4.

(ii) Нека $\varphi \in \mathbf{DInSkePerLC}((B, \rho, \mathbb{B}), (B', \rho', \mathbb{B}'))$. Ще докажем, че същата функция $\varphi : B \longrightarrow B'$ е **MVDInSkePerLC**-морфизъм между $K(B, \rho, \mathbb{B})$ и $K(B', \rho', \mathbb{B}')$ (вж. доказателството на 3.3.2 за K). В 3.3.4 доказахме, че φ е **MVDSkePerLC**-морфизъм. Следователно, остава да покажем само, че φ удовлетворява условието (CS) от 3.3.14. Полагаме $K(B, \rho, \mathbb{B}) = (B, \leq, \ll)$ и $K(B', \rho', \mathbb{B}') = (B', \leq', \ll')$ (вж. 3.3.4 и 3.2.4 за съответните дефиниции). Нека $a, b \in B'$ и $a \ll' b$. Тогава, от (3.1) следва, че $a(-\rho')b^*$. От (LS) имаме, че $\varphi_\Lambda(a)(-\rho)\varphi_\Lambda(b^*)$, т.е $\varphi_\Lambda(a) \ll_\rho (\varphi_\Lambda(b^*))^*$. Тъй като, съгласно (S2), $\varphi_\Lambda(a) \ll 1$ (защото $a \ll' 1$), то получаваме, използвайки отново (3.1), че $\varphi_\Lambda(a) \in \mathbb{B}$ и $\varphi_\Lambda(a) \ll (\varphi_\Lambda(b^*))^*$. И така, φ е **MVDInSkePerLC**-морфизъм.

Нека $\varphi \in \mathbf{MVDInSkePerLC}((B, \leq, \ll), (B', \leq', \ll'))$. Ще покажем, че същата функция $\varphi : B \longrightarrow B'$ е **DInSkePerLC**-морфизъм между $\Theta(B, \leq, \ll)$ и $\Theta(B', \leq', \ll')$ (вж. доказателството на 3.3.2 за Θ). За целта е достатъчно (съгласно Теорема 3.3.4) да докажем, че φ удовлетворява условие (LS). Ще покажем, че φ удовлетворява условието (LS'), което, както знаем, е еквивалентно на условието (LS).

Полагаме $\Theta(B, \leq, \ll) = (B, \rho, \mathbb{B})$ и $\Theta(B', \leq', \ll') = (B', \rho', \mathbb{B}')$.

Нека $a, b \in B'$ и $a \ll_{\rho'} b$. Тогава, използвайки 3.2.4, (S3), 3.2.1 и (CS), получаваме, че $(a \ll_{\rho'} b) \to (\forall c \in B$, такова че $c \ll 1, \varphi(c) \wedge a \ll' \varphi(c^*) \vee b) \to (\forall c \in B$, такова че $c \ll 1, \varphi_\Lambda(\varphi(c) \wedge a) \ll (\varphi_\Lambda((\varphi(c^*) \vee b)^*))^*) \leftrightarrow (\forall c \in B$, такова че $c \ll 1, c \wedge \varphi_\Lambda(a) \ll (\varphi_\Lambda(\varphi(c) \wedge b^*))^*) \leftrightarrow (\forall c \in B$, такова че $c \ll 1, c \wedge \varphi_\Lambda(a) \ll (c \wedge \varphi_\Lambda(b^*))^*) \leftrightarrow (\forall c \in B$, такова че $c \ll 1, c \wedge \varphi_\Lambda(a) \ll c^* \vee (\varphi_\Lambda(b^*))^*) \leftrightarrow (\varphi_\Lambda(a) \ll_\rho (\varphi_\Lambda(b^*))^*)$.

Следователно φ удовлетворява условието (LS). Останалото следва от Теорема 3.3.4. □

В [19] е дефинирана категорията **DSuOpPerLC** на всички CLC-алгебри и всички инективни пълни булеви хомоморфизми между тях, удовлетворява-

щи аксиомите (L1)-(L3) и (LO). Също така в [19] е дефинирана категорията **DInOpPerLC** на всички CLC-алгебри и всички сюрективни пълни булеви хомоморфизми между тях, удовлетворяващи аксиомите (L1)-(L3) и (LO).

Както е доказано в [19], категориите **DSuOpPerLC** и **DInOpPerLC** са дуално еквивалентни, съответно, на категориите **SuOpPerLC** и **InOpPerLC**.

Означения 3.3.17. Означаваме с:

• **MVDSuOpPerLC** категорията от всички пълни MVD-алгебри и всички инективни пълни булеви хомоморфизми между тях, които удовлетворяват аксиомите (ES1), (S2), (S3) и (SO) (вж. 3.3.1, 3.3.3 и 3.3.5).

• **MVDInOpPerLC** категорията от всички пълни MVD-алгебри и всички сюрективни пълни булеви хомоморфизми между тях, удовлетворяващи аксиомите $(ES1)$, $(S2)$, $(S3)$ и (SO) (вж. 3.3.1, 3.3.3 и 3.3.5).

Теорема 3.3.18. *(i) Категориите* **DSuOpPerLC** *и* **MVDSuOpPerLC** *са изоморфни; следователно категориите* **SuOpPerLC** *и* **MVDSuOpPerLC** *са дуално еквивалентни.*

(ii) Категориите **DInOpPerLC** *и* **MVDInOpPerLC** *са изоморфни; следователно категориите* **InOpPerLC** *и* **MVDInOpPerLC** *са дуално еквивалентни.*

Доказателство. Следва непосредствено от Теорема 3.3.8 и Теорема 3.3.16. □

В [19] е дефинирана категорията **DSuOpLC** на всички CLC-алгебри и всички пълни булеви хомоморфизми между тях, удовлетворяващи аксиомите (L1), (L2), (IS) и (LO); Също така, в [19] е дефинирана категорията **DInOpLC** на всички CLC-алгебри и всички сюрективни пълни булеви хомоморфизми между тях, удовлетворяващи аксиомите (L1), (L2) и (LO).

Както е доказано в [19], категориите **InOpLC** и **SuOpLC** са дуално еквивалентни, съответно, на категориите **DInOpLC** и **DSuOpLC**.

Означения 3.3.19. Означаваме с:

• **MVDSuOpLC** категорията на всички пълни MVD-алгебри и всички пълни булеви хомоморфизми между тях, удовлетвояващи аксиомите (S1), (S2), (IS') и (SO) (вж. 3.3.1, 3.3.12 и 3.3.5).

• **MVDInOpLC** категорията на всички пълни MVD-алгебри и всички пълни сюрективни булеви хомоморфизми между тях, удовлетвояващи аксиомите (S1), (S2) и (SO) (вж. 3.3.1 и 3.3.5).

Следващата теорема следва непосредствено от Теорема 3.3.2, Теорема 3.3.6 и Теорема 3.3.13:

Теорема 3.3.20. *Категориите* **DSuOpLC** *и* **MVDSuOpLC** *са изоморфни; следователно категориите* **SuOpLC** *и* **MVDSuOpLC** *са дуално еквивалентни.*

Следващата теорема следва непосредствено от Теорема 3.3.2 и Теорема 3.3.6:

Теорема 3.3.21. *Категориите* **DInOpLC** *и* **MVDInOpLC** *са изоморфни; следователно категориите* **InOpLC** *и* **MVDInOpLC** *са дуално еквивалентни*

Дефиниция 3.3.22. Една MVD-алгебра $(B, \leq, \ll)$ се нарича *свързана*, ако удовлетворява следната аксиома:

(CONA) ако $a \neq 0, 1$, то съществува $c \ll 1$, такова че $c \wedge a \not\ll a \vee c^*$.

Факт 3.3.23. *Нека (L, τ) е локално компактно хаусдорфово пространство. Тогава стандартната MVD-алгебра $(RC(L), \subseteq, \ll_L)$ е свързана тогава и само тогава, когато пространството (L, τ) е свързано.*

Доказателство. Ще отбележим, че $\forall F, G \in RC(L)$, $F \ll_L G$ тогава и само тогава, когато $F \in CR(L)$ и $F \ll_{\rho_L} G$. Следователно $k(RC(L), \rho_L, CR(L)) = (RC(L), \subseteq, \ll_L)$. Нека (L, τ) е свързано. Тогава от 3.2.5 следва, че $(RC(L), \rho_L)$ е свързана. Нека $a \in RC(L)$, $a \neq 0, 1$. Тогава от (CON) следва, че $a \rho_L a^*$. От 3.2.4 пък получаваме, че съществува $c \ll_L 1$, такова че $c \wedge a \not\ll_L a \vee c^*$, т.е. $(RC(L), \subseteq, \ll_L)$ е свързана.

Нека сега $(RC(L), \subseteq, \ll_L)$ е свързана. Тогава, за всяко $a \in RC(L)$, такова че $a \neq 0, 1$, съществува $c \ll_L 1$, за което $c \wedge a \not\ll_L a \vee c^*$. От 3.2.4 следва, че $a \rho_L a^*$. Следователно $(RC(L), \rho_L)$ е свързана. Тогава, от 3.2.5 получаваме, че (L, τ) е свързано. □

Означения 3.3.24. Означаваме с:

• **MVDSkePerLCCon** категорията от всички свързани пълни MVD-алгебри и всички пълни булеви хомоморфизми между тях, удовлетворяващи аксиомите (ES1), (S2), (S3) (вж. 3.3.3).

• **MVDOpPerLCCon** категорията от всички свързани пълни MVD-алгебри и всички пълни булеви хомоморфизми между тях, удовлетворяващи аксиомите (ES1), (S2), (S3) и (SO) (вж. 3.3.1, 3.3.3 и 3.3.5).

Следващата теорема следва непосредствено от 3.2.5, 3.3.23 и 3.3.4:

Теорема 3.3.25. *Категориите* **DSkePerLCCon** *и* **MVDSkePerLCCon** *са изоморфни; следователно категориите* **SkePerLCCon** *и* **MVDSkePerLCCon** *са дуално еквивалентни.*

Следващата теорема следва непосредствено от 3.2.5, 3.3.23 и 3.3.8:

Теорема 3.3.26. *Категориите* **DOpPerLCCon** *и* **MVDOpPerLCCon** *са изоморфни; следователно категориите* **OpPerLCCon** *и* **MVDOpPerLCCon** *са дуално еквивалентни.*

Аналогично можем да формулираме и докажем свързаните версии на Теореми 3.3.2 и 3.3.6.

Дефиниция 3.3.27. Нека **MVDHLC** е категорията, чиито обекти са всички пълни MVD-алгебри и чиито морфизми са всички функции $\psi : (A, \leq, \ll) \longrightarrow (B, \leq', \ll')$ между обектите на **MVDHLC**, удовлетворяващи условията:

(MVDLC1) $\psi(0) = 0$,

(MVDLC2) $\psi(a \wedge b) = \psi(a) \wedge \psi(b)$, за всеки $a, b \in A$,

(MVDLC3) ако $a, b \in A$ и $a \ll b$, то $\forall c \in B$, такова че $c \ll' 1$, е изпълнено, че $(\psi(a^*))^* \wedge c \ll' \psi(b) \vee c^*$,

(MVDLC4) за всяко $b \in B$, такова че $b \ll' 1$, съществува $a \in A$, за което е изпълнено, че $a \ll 1$ и $b \leq \psi(a)$,

(MVDLC5) $\psi(a) = \bigvee\{\psi(b) \mid b \ll a\}$, за всяко $a \in A$.

Нека композицията "$\circledcirc$" на два морфизма $\psi_1 : (A_1, \leq_1, \ll_1) \longrightarrow (A_2, \leq_2, \ll_2)$ и $\psi_2 : (A_2, \leq_2, \ll_2) \longrightarrow (A_3, \leq_3, \ll_3)$ на **MVDHLC** е дефинирана с формулата:

(3.5) $\psi_2 \circledcirc \psi_1(a) = \bigvee\{\psi_2 \circ \psi_1(b) \mid b \ll_1 a\}, \ \forall a \in A_1.$

Теорема 3.3.28. *Категориите* **DHLC** *и* **MVDHLC** *са изоморфни; следователно категориите* **MVDHLC** *и* **HLC** *са дуално еквивалентни.*

Доказателство. Ще дефинираме два ковариантни функтори $P : \mathbf{DHLC} \longrightarrow \mathbf{MVDHLC}$ и $Q : \mathbf{MVDHLC} \longrightarrow \mathbf{DHLC}$.

За всяко $(B, \rho, \mathbb{B}) \in |\mathbf{DHLC}|$, полагаме $P(B, \rho, \mathbb{B}) = k(B, \rho, \mathbb{B})$ (вж. 3.2.4 за κ). Тогава от Теорема 3.2.4 следва, че дефиницията на P върху обектите на категорията **DHLC** е коректна.

Нека $\psi \in \mathbf{DHLC}((B, \rho, \mathbb{B}), (B', \rho', \mathbb{B}'))$. Ще докажем, че ψ е **MVDHLC**-морфизъм между $P(B, \rho, \mathbb{B}) = (B, \leq, \ll)$ и $P(B', \rho', \mathbb{B}') = (B', \leq', \ll')$. Очевидно ψ удовлетворява аксиомите (MVDLC1) и (MVDLC2). Нека $a \ll b$. Тогава $a \in \mathbb{B}$ и $a \ll_\rho b$. От (DLC3) следва, че $(\psi(a^*))^* \ll_{\rho'} \psi(b)$. Тогава, от 3.2.4 получаваме, че $\forall c \ll' 1$, $(\psi(a^*))^* \wedge c \ll' \psi(b) \vee c^*$. Следователно ψ удовлетворява (MVDLC3).

Нека $b \ll' 1$. От (DLC4) следва, че съществува $a \in \mathbb{B}$, такова че $b \leq \psi(a)$. Следователно $a \ll 1$ и $b \leq \psi(a)$, т.е. ψ удовлетворява (MVDLC4).

Нека $a \in B$. Тогава $\psi(a) = \bigvee\{\psi(b) \mid b \in \mathbb{B}, b \ll_\rho a\} = \bigvee\{\psi(b) \mid b \ll a\}$. Следователно ψ удовлетворява аксиомата (MVDLC5). Значи

$$\psi \in \mathbf{MVDHLC}((B, \leq, \ll), (B', \leq', \ll')).$$

И така, полагайки $P(\psi) = \psi$, дефинираме коректно P върху морфизмите на категорията **DHLC**.

Нека $\psi_i \in \mathbf{DHLC}((B_i, \rho_i, \mathbb{B}_i), (B_{i+1}, \rho_{i+1}, \mathbb{B}_{i+1}))$, $P(B_i, \rho_i, \mathbb{B}_i) = (B_i, \leq_i, \ll_i)$ и $P(\psi_i) = \varphi_i$, $i = 1, 2$. Имаме, че $\forall a \in B_1$, $(\varphi_2 \circledcirc \varphi_1)(a) = \bigvee\{(\varphi_2 \circ \varphi_1)(b) \mid b \ll_1 a\} = \bigvee\{(\psi_2 \circ \psi_1)(b) \mid b \in \mathbb{B}_1, b \ll_{\rho_1} a\} = (\psi_2 \odot \psi_1)(a) = (P(\psi_2 \odot \psi_1))(a)$. Тъй като, очевидно, P запазва идентитетите, то получаваме, че $P : \mathbf{DHLC} \longrightarrow \mathbf{MVDHLC}$ е (ковариантен) функтор.

Нека $(B, \leq, \ll) \in |\mathbf{MVDHLC}|$. Полагаме $Q(B, \leq, \ll) = \theta(B, \leq, \ll)$ (вж. 3.2.4 за θ). Тогава от Теорема 3.2.4 следва, че дефиницията на Q върху обектите на категорията **MVDHLC** е коректна.

Нека $\psi \in \mathbf{MVDHLC}((B, \leq, \ll), (B', \leq', \ll'))$. Ще докажем, че ψ е **DHLC**-морфизъм между $Q(B, \leq, \ll) = (B, \rho, \mathbb{B})$ и $Q(B', \leq', \ll') = (B', \rho', \mathbb{B}')$. Очевидно ψ удовлетворява аксиомите (DLC1) и (DLC2).

Нека $a \in \mathbb{B}$, $b \in B$ и $a \ll_\rho b$. Следователно $a \ll b$. От (MVDLC3) следва, че $\forall c \ll' 1$, $(\psi(a^*))^* \wedge c \ll' \psi(b) \vee c^*$. От 3.2.4 получаваме, че $(\psi(a^*))^* \ll_{\rho'} \psi(b)$. Значи ψ удовлетворява (DLC3).

Нека $b \in \mathbb{B}'$. Тогава $b \ll' 1$. От (MVDLC4) следва, че $\exists a \ll 1$, такова че $b \leq' \psi(a)$. Следователно $a \in \mathbb{B}$ и $b \leq' \psi(a)$. Значи ψ удовлетворява (DLC4).

Нека $a \in B$. Тогава от (MVDLC5) получаваме, че $\psi(a) = \bigvee\{\psi(b) \mid b \ll a\} = \bigvee\{\psi(b) \mid b \in \mathbb{B}, b \ll_\rho a\}$. Следователно $\psi \in \mathbf{DHLC}((B, \rho, \mathbb{B}), (B', \rho', \mathbb{B}'))$. И така, полагайки $Q(\psi) = \psi$, дефинираме коректно Q върху морфизмите на категорията **MVDHLC**.

Нека $\varphi_i \in \mathbf{MVDHLC}((B_i, \leq_i, \ll_i), (B_{i+1}, \leq_{i+1}, \ll_{i+1}))$, нека $Q(B_i, \leq_i, \ll_i) = (B_i, \rho_i, \mathbb{B}_i)$ и $Q(\varphi_i) = \psi_i$, $i = 1, 2$. Имаме, че $\forall a \in B_1$,

$$(\psi_2 \odot \psi_1)(a) = \bigvee\{(\psi_2 \circ \psi_1)(b) \mid b \in \mathbb{B}_1, b \ll_{\rho_1} a\} = \bigvee\{(\varphi_2 \circ \varphi_1)(b) \mid b \ll_1 a\} =$$

$$(\varphi_2 \circledcirc \varphi_1)(a) = Q(\varphi_2 \circledcirc \varphi_1)(a).$$

Тъй като, очевидно, Q запазва идентитетите, то получаваме, че

$$Q : \mathbf{MVDHLC} \longrightarrow \mathbf{DHLC}$$

е (ковариантен) функтор.

От дефинициите на функторите P и Q и равенствата $\kappa \circ \theta = id$, $\theta \circ \kappa = id$ (вж. 3.2.4), заключаваме, че $P \circ Q = Id_{\mathbf{MVDHLC}}$ и $Q \circ P = Id_{\mathbf{DHLC}}$. Следователно категориите **DHLC** и **MVDHLC** са изоморфни. $\square$

Библиография

[1] J. Adámek, H. Herrlich, and G. Strecker. *Abstract and Concrete Categories.* Wiley Interscience, 1990.

[2] M. Aiello, I. Pratt-Hartmann, and J. (Eds.) van Benthem. *Handbook of spatial logics.* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2007.

[3] P. S. Alexandroff. Sur les propriétés locales des ensembles et la notion de compacité. *Bull. Intern. Acad. Pol. Sci. Sér. A*, pages 9–12.

[4] B. Banaschewski. Extensions of topological spaces. *Canad. Math. Bull.*, 7:1–22, 1965.

[5] B. Bennett and I. Düntsch. Axioms, Algebras and Topology. In M. Aiello, I. Pratt-Hartmann, and J. van Benthem, editors, *Handbook of Spatial Logics.* Springer-Verlag (Berlin Heidelberg), 2007.

[6] H. Bentley and H. Herrlih. Extensions of topological spaces. *Topology, Lect. Notes in Pure and Appl. Math.*, 24:129–184.

[7] L. Biacino and G. Gerla. Connection structures: Grzegorczyk's and Whitehead's definition of point. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 37:431–439, 1996.

[8] G. Boole. *An Investigation of the Laws of Thought.* Cambridge, 1854.

[9] A. Borubaev. Uniform structures and extensions of topological spaces. *Uspehi Math. Nauk.*, 37:165–166.

[10] A. Borubaev. Completion of uniform spaces and extensions of topological spaces. *Serdica Math. J.*, 15:63–73, 1989.

[11] W. Comfort and S. Negrepontis. *Chain Conditions in Topology.* Cambridge University Press, 1982.

[12] T. de Laguna. Point, line and surface as sets of solids. *The Journal of Philosophy*, 19:449–461, 1922.

[13] H. de Vries. *Compact spaces and compactifications.* Van Gorcum, 1962.

[14] G. Dimov. A Whiteheadian-type description of Euclidean spaces, spheres, tori and Tychonoff cubes. *Rend. Ist. Matem. Univ. Trieste*, 44:1–30.

[15] G. Dimov. Regular and other kinds of extensions of topological spaces. *Serdica Math. J.*, 24:99–126, 1998.

[16] G. Dimov. A generalization of de Vries' duality theorem. *Applied Categorical Structures*, 17:501–516, 2009.

[17] G. Dimov. Some generalizations of the Fedorchuk duality theorem - I. *Topology Appl.*, 156:728–746, 2009.

[18] G. Dimov. A de Vries-type duality theorem for the category of locally compact spaces and continuous maps - I. *Acta Math. Hungarica*, 129:314–349, 2010.

[19] G. Dimov. A de Vries-type duality theorem for the category of locally compact spaces and continuous maps - II. *Acta Math. Hungarica*, 130:50–77, 2011.

[20] G. Dimov and D. Doitchinov. Supertopological spaces and locally compact extensions of topological spaces. *Mitteilungen Math. Gesellschaft DDR*, 4:41–44, 1980.

[21] G. Dimov and E. Ivanova. Yet another duality theorem for locally compact spaces. *Houston J. Math. (to appear).*

[22] G. Dimov and E. Ivanova. On paracompact and locally compact paracompact extensions. *Questions and Answers in General Topology*, 25:115–123, 2007.

[23] G. Dimov and E. Ivanova. On some categories arising in the theory of locally compact extensions. *Mathematica Pannonica*, 19:219–239, 2008.

[24] G. Dimov and D. Vakarelov. Construction of all locally compact Hausdorff extensions of Tychonoff spaces by means of non-symmetric proximities. *Questions and Answers in General Topology*, 22:43–56.

[25] G. Dimov and D. Vakarelov. Contact algebras and region-based theory of space: a proximity approach – I. *Fund. Informaticae*, 74:209–249.

[26] D. Doitchinov. A unified theory of topological spaces, proximity spaces and uniform spaces. *DAN SSSR*, 156:21–24, 1964.

[27] D. Doitchinov. Supertopological spaces and extensions of topological spaces. *Pliska*, 6:105–120, 1983.

[28] Ph. Dwinger. *Introduction to Boolean Algebras.* Physica Verlag, Würzburg, 1961.

[29] V. Efremovič. Infinitesimal spaces. *DAN SSSR*, 76:341–343, 1951.

[30] S. Eilenberg and S. Mac Lane. Natural isomorphisms in group theory. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 28:537–543, 1942.

[31] S. Eilenberg and S. Mac Lane. General theory of natural equivalences. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 58:231–294, 1945.

[32] R. Engelking. *General Topology.* PWN, 1977.

[33] V. V. Fedorchuk. Boolean δ-algebras and quasi-open mappings. *Siberian Math. J.*, 14:759–767, 1973.

[34] G. Gerla. Pointless geometries. In F. Buekenhout, editor, *Handbook of Incidence Geometry*, pages 1015–1031. Elsevier Science B.V., 1995.

[35] D. Harris. Regular-closed spaces and proximities. *Pacific J. Math.*, 34:675–686, 1970.

[36] F. Hausdorff. *Grundzüge der Mengenlehre.* Leipzig (Veit), 1914.

[37] E. V. Huntington. Sets of independent postulates for the algebra of logic. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 5:288–309, 1904.

[38] E. Ivanova. Some isomorphism theorems for MVD-algebras (submitted).

[39] P. T. Johnstone. *Stone Spaces.* Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1982.

[40] S. Koppelberg. *Handbook on Boolean Algebras, vol. 1: General Theory of Boolean Algebras.* North Holland, 1989.

[41] K. Kuratowski. Une methode d'elimination des nombres transfinis des raisonnements mathematiques. *Fund. Math.*, 3:76–108, 1922.

[42] S. Leader. Local proximity spaces. *Math. Annalen*, 169:275–281, 1967.

[43] S. Mardešic and P. Papic. Continuous images of ordered compacta, the Suslin property and dyadic compacta. *Glasnik mat.-fis. i astronom.*, 17:3–25, 1962.

[44] J. Mioduszewski and L. Rudolf. H-closed and extremally disconected Hausdorff spaces. *Dissert. Math. (Rozpr. Mat.)*, 66:1–52, 1969.

[45] T. Mormann. Continuous lattices and Whiteheadian theory of space. *Logic and Logical Philosophy*, 6:35–54, 1998.

[46] S. A. Naimpally. *Proximity Approach to Problems in Topology and Analysis.* Oldenbourg Verlag München, 2009.

[47] S. A. Naimpally and B. D. Warrack. *Proximity Spaces.* Cambridge University Press, 1970.

[48] I. Pratt-Hartmann. First-Order Mereotopology. In M. Aiello, Pratt-Hartmann I., and J. van Benthem, editors, *Handbook of Spatial Logics.* Springer-Verlag (Berlin Heidelberg), 2007.

[49] F. Riesz. Stetigkeitsbegrief und abstrakte Mengenlehre. In *Atti del IV Congresso Internazionale dei Matematici, Roma 1908.* Roma, 1909.

[50] P. Roeper. Region-based topology. *Journal of Philosophical Logic*, 26:251–309, 1997.

[51] H. M. Sheffer. A set of five independent postulates for boolean algebras with application to logical constants. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 14:481–488, 1913.

[52] R. Sikorski. *Boolean Algebras.* Springer-Verlag, 1964.

[53] J. M. Smirnov. On proximity spaces (In Russian). *Mat. Sb.*, 31:543–574, 1952.

[54] Ju. M. Smirnov. On the completeness of proximity spaces (In Russian). *Trudy Mosk. Mat. Obst.*, 3:271–306, 1954.

[55] Ju. M. Smirnov. On the dimension of proximity spaces (In Russian). *Mat. Sb.*, 38:283–302, 1956.

[56] M. H. Stone. Applications of the theory of Boolean rings to general topology. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 41:375–481, 1937.

[57] A. Tarski. Les fondements de la gèomètrie des corps. First Polish Mathematical Congress, Lwø'w,1927, English translation in Woodger, J. H. (Ed.), Logic, Semantics, Metamathematics, Clarendon Press, 1956.

[58] D. Vakarelov. Region-based theory of space: Algebras of regions, representation theory and logics. In Dov Gabbay et al., editor, *Mathematical Problems from Applied Logics. New Logics for the XXIst Century. II.* Springer-Verlag (Berlin Heidelberg), 2007.

[59] D. Vakarelov, G. Dimov, I. Düntsch, and B. Bennett. A proximity approach to some region-based theories of space. *J. Applied Non-Classical Logics*, 12:527–559, 2002.

[60] E. Čech. *Topological Spaces.* Interscience, 1966.

[61] A. N. Whitehead. *Process and reality.* MacMillan, 1929.

[62] V. Zaharov. Construction of all locally compact and all locally compact paracompact extensions. *Uspehi Mat. Nauk*, 33:209, 1978.

[63] V. Zaharov. The construction of all locally compact extensions. *Topology Appl.*, 12:221–228, 1981.

[64] V. Zaicev. Projection spectra and extensions of topological spaces. *Uspehi Mat. Nauk.*, 36:197–202.

Авторска справка

По мнение на автора основните резултати и приноси на дисертацията са следните:

• показано е, че категориите, възникващи по естествен начин от описанията на локално компактните хаусдорфови разширения на тихонови пространства, дадени от Leader ([42]), Димов и Дойчинов ([20]) и Димов ([15]), са изоморфни, като при това в предложените доказателства не са използвани описанията на локално компактни разширения получени от споменатите автори, а е направен директен преход между съответните структури;

• описани са, с помощта на специални близости, наредените множества от всички (с точност до еквивалентност) паракомпактни (респективно, локално компактни паракомпактни) разширения на тихоново пространство;

• доказана е една нова теорема за дуалност за категорията на локално компактните хаусдорфови пространства и непрекъснатите изображения между тях;

• доказани са редица теореми за изоморфизъм между категориите **DSkeLC**, **DSkePerLC**, **DOpLC**, **DOpPerLC** и **DHLC**, описани в работите на Г. Димов [16, 17, 18, 19] (които са дуални на различни подкатегории на категорията **HLC** и чиито обекти са пълните локални контактни алгебри), и категории, чиито обекти са така наречените пълни *MVD-алгебри* (Mormann-Вакарелов-Димов-алгебри), въведени в [59].

Апробация на резултатите, включени в дисертацията

Резултатите от дисертацията са докладвани на следните международни математически конференции:

1. Елза Иванова, *Some Isomorphism Theorems for MVD-algebras*, Analysis, Topology and Applications 2014 (ATA2014) , Vrnjacka Banja, Serbia, May 25-29, 2014
2. Елза Иванова, *Some isomorphism theorems for MVD-algebras*, Second workshop on logics of space and time, Sofia, FMI, 14-16 February 2014
3. Елза Иванова, *Yet another generalization of De Vries' Duality Theorem*, Международна работна среща "Логики за пространството и времето", Гюлечица, България, 23- 26 юни 2011
4. Елза Иванова, *A new duality theorem for locally compact spaces*, 2010 International Conference on Topology and its Applications, Nafpaktos, Greece, June 26-30 2010
5. Елза Иванова, *A new duality theorem for locally compact spaces*, ATA2010 Analysis, Topology and Applications 2010, Vrnjacka Banja, Serbia, June 20-25 2010
6. Елза Иванова, *On some Categories Arising in the Theory of Locally Compact Extensions*, MASSEE International Congress on Mathematics MICOM 2009, Ohrid, Republic of Macedonia, September 16 Ц 20 2009
7. Елза Иванова, *On some categories arizing in the theory of locally compact extensions*, 24th Summer Conference on Topology and Its Applications, Brno, Czech Republic, July 14-17 2009
8. Елза Иванова, *On Paracompact and Locally Compact Paracompact Extensions*, ITES2007 - Sixth Italian-Spanish Conference on GENERAL TOPOLOGY AND APPLICATIONS, Bressanone, Italy, 26-29 June 2007
9. Елза Иванова, *Construction of all paracompact and all paracompact locally compact extensions of a Tychonoff space*, International Conferense PIONEERS OF BULGARIAN MATHEMATICS, Sofia, July 8 - 10 2006
10. Елза Иванова, *Construction of all paracompact and all paracompact locally compact extensions of a Tychonoff space*, International Congress MASSEE 2003, Borovets, Bulgaria, September 15-21 2003

Резултатите от дисертацията са докладвани на следните национални математически конференции:

1. Елза Иванова, Някои теореми за изоморфизъм за MVD-алгебри, Пролетна научна сесия на ФМИ, 29 Март 2014
2. Елза Иванова, Още едно обобщение на дуалността на Де Врис, Годишна научна сесия на ФМИ, София, 26 март 2011
3. Елза Иванова, Върху някои категории, възникващи в теорията на локално компактните разширения, Научна сесия по случай 120 години ФМИ, София, 24 октомври 2009
4. Елза Иванова, Върху някои категории, възникващи в теорията на локално компактните разширения, Научна сесия на ФМИ, София, 29.03 2008

Списък на научните публикации на дисертанта, включени в дисертацията

1. G. Dimov and E. Ivanova. Yet another duality theorem for locally compact spaces. Houston J. Math. (to appear). **IF 0,357 (2012)**

2. G. Dimov and E. Ivanova. On some categories arising in the theory of locally compact extensions. Mathematica Pannonica, 19:219-239, 2008.

3. G. Dimov and E. Ivanova. On paracompact and locally compact paracompact extensions. Questions and Answers in General Topology, 25:115-123, 2007.