С О Ф И Й С К И   У Н И В Е Р С И Т Е Т

"СВ.   К Л И М Е Н Т   О Х Р И Д С К И"

===

Ф А К У Л Т Е Т   П О   М А Т Е М А Т И К А   И   И Н Ф О Р М А Т И К А

==

РИМАНОВИ И СУБ-РИМАНОВИ МНОГООБРАЗИЯ СЪС СТРУКТУРИ

ДИСЕРТАЦИЯ

за получаване на образователната и научна степен "доктор"

по научната специалност 01.01.06 "Геометрия и топология"

на

Александър Владимиров Петков

Научен ръководител

проф. дмн Стефан Петров Иванов

СОФИЯ, 2014

Увод

> Le temps et l'espace... Ce n'est pas la nature qui nous les impose, c'est nous qui les imposons à la nature parce que nous les trouvons commodes.
>
> —Henri Poincaré

Понятието многообразие е централно в съвременната чиста математика и теоретична физика. Достатъчно е да споменем теорията на относителността на Айнщайн, теорията на струните и суперструните, квантовата теория на полето, гравитационните и супергравитационните теории и други, в които то е основен обект. Наличието на допълнителни структури върху едно гладко многообразие, като метрика, тензорни полета с различни свойства, линейни свързаности и т.н. е предпоставка за богатството от възможности, които имат геометриите на различните многообразия за описанието на "формите" на реалния свят. Бурното развитие на съвременната диференциална геометрия (геометрията на многообразията) е обосновано преди всичко от значението, което тя има за теоретичната и математическата физика, благодарение на мощните си методи за изследване.

Особено силна е връзката на физиката през последните 50 години с т. нар. хиперкомплексни многообразия, които са в известен смисъл кватернионен аналог на комплексните многообразия. Връзката е двупосочна. Както чисто диференциално-геометричните изследвания имат влияние върху физиката, така и физически задачи водят до дефинирането на нови типове многообразия и структури върху тях. Пример в това отношение са т. нар. Уравнения на Strominger в Теорията на суперструните. Известно е, че наличието на решение е необходимо и достатъчно условие за времепространствена суперсиметрия. Многообразията, които възникват във връзка с тези уравнения в $2n$-мерния случай са т. нар. КТ-многообразия. В $4n$-мерния случай възникват техните кватернионни аналози, НКТ-многообразията, с които е свързана първата част от настоящата дисертация.

Важен клон на диференциалната геометрия е т. нар. суб-Риманова геометрия. Тя е обобщение на Римановата геометрия, и основна нейна характеристика е наличието на т. нар. хоризонтално разпределение и метрика върху него, които носят цялата съществена информация за многообразието. Пример за суб-Риманово многообразие е групата на Heisenberg (комплексната или кватернионната), която носи естествена суб-Риманова структура и играе важна роля във физиката. С кватернионно-контактната геометрия, която е кватернионен пример за суб-Риманова геометрия, ще е свързана втората част от дисертацията.

Сега да опишем по-конкретно предмета и структурата на настоящата дисертация. Тя е съставена от две части. Първата част (Глава 1) се отнася за т. нар. хипер-Келерови многообразия с торзия (или съкратено НКТ-многообразия). НКТ-многообразията са въведени от Howe и Papadopoulos в [**52**]. Хипер-Келерова структура с торзия (или НКТ-структура) върху едно хипер-Ермитово многообразие наричаме линейна свързаност, която запазва хипер-Ермитовата структура и има антисиметрична (totally skew-symmetric) торзия. Когато торзионната 3-форма е затворена, НКТ-структурата се нарича силна (strong). Когато торзионната 3-форма е безследна (trace-free), говори се за балансирана (balanced) НКТ-структура. В случай на нулева торзия, хипер-Ермитовото многообразие е хипер-Келерово.

Освен че са интересни от чисто математическа гледна точка, НКТ-структурите намират широко приложение в теоретичната и математическата физика, като например супергравитационните теории [**42**, **82**, **86**] и суперсиметричните сигма-модели с Wess-Zumino член [39, 51, 52]. Важно е да подчертаем, че HKT-структурите възникват именно във физиката.

Добре известни са някои геометрични и топологични свойства на HKT-многообразията. Например, в [74] е дадено просто необходимо и достатъчно условие за това, едно почти хипер-Ермитово многообразие да бъде HKT-многообразие в термините на каноничната (intrinsic) торзия на една $Sp(n)Sp(1)$-структура върху многообразието. Howe и Papadopoulos въвеждат в [52] понятието HKT-метрика върху хиперкомплексно многообразие, съществуването на която е еквивалентно със съществуването на HKT-структура върху съответното хипер-Ермитово многообразие. В работата [43] Grantcharov и Poon дефинират понятието HKT-потенциал. В [6, 75] се доказва, подобно на хипер-Келеровия случай, че локално всяка HKT-метрика допуска HKT-потенциал. Една версия на Теорията на Hodge е дадена в [90], където се разкрива забележителната аналогия между комплекса на de Rham на Келерово многообразие и комплекса на Dolbeault на HKT-многообразие.

Важен клас HKT-многообразия са тези с холоморфно тривиално канонично разслоение по отношение на всяка комплексна структура от хиперкомплексната фамилия на многообразието. HKT-многообразията с холоморфна форма на обема (volume form) се явяват решения на гравитино- и дилатино-Килинговите спинорни уравнения в размерност $4n$ с повече от две запазващи се суперсиметрии, вж. [86]. В своята статия [91] Verbitsky намира едно необходимо и достатъчно условие за това, компактните HKT-многообразия да притежават холоморфно тривиално канонично разслоение в термините на свързаността на Obata, която е единствената свързаност върху едно хиперкомплексно многообразие, запазваща хиперкомплексната структура и имаща торзия нула, вж. [78]. Именно, компактно HKT-многообразие притежава холоморфно тривиално канонично разслоение точно тогава, когато групата на холономия на свързаността на Obata е подгрупа на специалната кватернионна линейна група $SL(n, \mathbb{H})$.

Групата $SL(n, \mathbb{H})$ фигурира в списъка на Merkulov-Schwachhöfer за възможните групи на холономия на линейните свързаности с торзия нула, вж. [75]. Хиперкомплексните многообразия, за които групата на холономия на свързаността на Obata е подгрупа на $SL(n,\mathbb{H})$, се наричат $SL(n,\mathbb{H})$-многообразия. Последните са разглеждани в [3, 92], където се показва, че кватернионният комплекс на Dolbeault може да бъде определен с част от комплекса на de Rham. За хиперкомплексно многообразие с холоморфно тривиално канонично разслоение, допускащо HKT-метрика, версията на Теорията на Hodge, конструирана в [90], ни дава резултата, установен в [91], именно, че компактно хиперкомплексно многообразие с холоморфно тривиално канонично разслоение, допускащо HKT-метрика, е $SL(n,\mathbb{H})$-многообразие. Swann в [88] е дал примери за компактни, просто свързани $SL(n,\mathbb{H})$-многообразия, за които не съществува HKT-метрика. С други думи, това са примери за компактни хиперкомплексни многообразия с холоморфно тривиално канонично разслоение, които не допускат HKT-метрика.

Особено внимание заслужават балансираните HKT-метрики. В [89] е показано, че балансираните HKT-многообразия са $SL(n,\mathbb{H})$-многообразия. Балансираните HKT-метрики се явяват кватернионни аналози на Calabi-Yau метриките в кватернионното уравнение на Monge-Ampère, както е показано в [3, 89]. В тези работи е разгледан кватернионен аналог на известния проблем на Calabi-Yau, по-точно, изказана е хипотезата, че върху компактно HKT-многообразие с група на холономия на свързаността на Obata, съдържаща се в $SL(n,\mathbb{H})$, съществува балансирана HKT-метрика. При това, доказана е единственост на тази метрика в нейния кохомологичен клас.

Основната цел на първата част на дисертацията е да намерим едно просто необходимо и достатъчно условие за това, едно HKT-многообразие да има група на холономия на свързаността на Obata, съдържаща се в $SL(n,\mathbb{H})$, т.е. да бъде $SL(n,\mathbb{H})$-многообразие. Именно, Теорема 1.5.1 гласи, че едно HKT-многообразие има $SL(n,\mathbb{H})$-холономия на свързаността на Obata точно тогава, когато една определена следа на торзионната 3-форма, наречена форма на Lee, е точна 1-форма. Примери за компактни HKT-многообразия, които са $SL(n,\mathbb{H})$-многообразия, са нилпотентните многообразия (nilmanifolds) с Абелева хиперкомплексна структура, понеже те са балансирани HKT-многообразия [8]. Други компактни примери за HKT-многообразия с $SL(n,\mathbb{H})$-холономия на свързаността на Obata, които не са нилпотентни, са посочени в [7], и също са балансирани. Известни са примери на компактни, просто свързани HKT-многообразия с холоморфно тривиално канонично разслоение, конструирани от Swann в [88] чрез туисторна (twist) конструкция. Като следствие от Теорема 1.5.1 е даден критерий (достатъчно условие) за несъществуване на HKT-метрика върху хиперкомплексно многообразие чрез тензорите от тип на Ricci на свързаността на Obata. В Раздел 1.8 е дадено едно достатъчно условие за това, едно HKT-многообразие с точна форма на Lee да е хипер-Келерово, в термините на т. нар. *-скаларна кривина и една определена следа на външната производна на тензора на торзията на HKT-свързаността.

Втората част на дисертацията (Глава 2) е свързана с т. нар. кватернионно-контактни многообразия (QC-многообразия). Основна част от резултатите в нея са мотивирани от класическите теореми на Lichnerowicz [73] и Obata [79]. Теоремата на Lichnerowicz дава точна долна оценка на първата собствена стойност на Лапласиана върху компактно Риманово многообразие при условие, че е изпълнено едно априорно неравенство, свързано с тензора на Ricci. По-точно, в [73] е доказано, че ако M е компактно Риманово многообразие от размерност n, за което тензорът на Ricci е по-голям или равен на тензора на Ricci на n-мерната единична сфера $S^n(1)$ с кръгова метрика, т.е.

$$Ric(X,Y) \geq (n-1)g(X,Y),$$

тогава първата положителна собствена стойност λ_1 на (положителния) Лапласиан върху M е по-голяма или равна на първата собствена стойност за сферата, т.е.

$$\lambda_1 \geq n.$$

Впоследствие, Obata характеризира случая на равенство. По-конкретно, в [79] е доказано, че долната граница за първата собствена стойност се достига точно тогава, когато Римановото многообразие е изометрично със сферата $S^n(1)$. Lichnerowicz доказва своя резултат, използвайки класическата Bochner-Weitzenböck формула. Obata пък е показал, че в случая на равенство, при положение, че е изпълнено априорното неравенство от теоремата на Lichnerowicz, собствената функция ϕ удовлетворява системата $\nabla^2\phi = -\phi g$, след което той дефинира изометрия, използвайки анализ, основан на геодезичните линии и сравнение на Хесиана (Hessian comparison) на функцията-разстояние (distance function) от точка. По-късно, Gallot в работата [36] обобщава тези резултати като доказва теореми, засягащи собствени стойности от по-висок ред и съответните собствени функции на оператора на Laplace.

Естествен е въпросът дали има суб-Риманова версия на горните резултати. Greenleaf дава в [45] една версия на резултата на Lichnerowicz върху компактно силно псевдо-изпъкнало (strongly pseudo-convex) CR-многообразие (съкратено от Коши-Риманово многообразие). Именно, нека M е $(2n+1)$-мерно компактно силно псевдо-изпъкнало CR-многообразие, $n \geq 3$. Ако

$$Ric(X,X) + 4A(X,JX) \geq (n+1)g(X,X)$$

за всички хоризонтални векторни полета X, където Ric и A са съответно тензорът на Ricci и тензорът на торзията на свързаността на Tanaka-Webster (съгласно означенията от [59, 61]), тогава първата положителна собствена стойност λ_1 на суб-Лапласиана удовлеворява неравенството $\lambda_1 \geq n$. Тази оценка е точна в смисъл, че относно стандартната CR-структура върху сферата, неравенството става на равенство. По-късно, редица резултати в CR-случая са получени в работите [72, 24, 21], [19, 20, 9] и [22], даващи съответна оценка в случаите $n = 1, 2$, или характеризиращи случая на равенство в оценката при нулева торзия (Сасакиевия случай).

Първият основен кръг от проблеми, разгледани в тази глава от дисертацията, е свързан с изследването на тези въпроси в кватернионно-контактната (QC-) геометрия, която е в известен смисъл кватернионният аналог на CR-геометрията. Резултатът от тип на Lichnerowicz, който получаваме, се съдържа в Теорема 2.2.1 и ни дава точна долна оценка на първата собствена стойност на суб-Лапласиана върху компактно QC-многообразие от размерност, по-голяма от седем, при условие, че е изпълнено априорното неравенство 2.2.3. Основен инструмент за намирането на тази оценка е формулата от тип на Bochner (2.3.1) за суб-Лапласиана.

Следващата естествена стъпка е да изследваме случая на равенство в Теорема 2.2.1. Ние ограничаваме нашите разглеждания в ситуацията, когато тензорът на торзията на свързаността на Biquard е нула, $T^0 = U = 0$. В този случай, както е известно от [66], QC-многообразието е QC-Айнщайново, $Ric = k.g$, с константна QC-скаларна кривина, когато $n > 1$. Всъщност, QC-Айнщайново многообразие с константна положителна скаларна кривина е локално QC-еквивалентно на 3-Сасакиево пространство. Основен пример за 3-Сасакиево пространство е $(4n + 3)$-мерната сфера в кватернионното пространство от (кватернионна) размерност $n + 1$, снабдена с т. нар. стандартна 3-Сасакиева структура. Съответните резултати в случая на отрицателна скаларна кривина могат да бъдат видяни в статиите [59, 60]. Теорема 2.2.2 характеризира случая на равенство от Теорема 2.2.1, когато QC-структурата е QC-Айнщайнова. По-точно, тя ни дава, че ако многообразието е компактно QC-Айнщайново, равенството в оценката от Теорема 2.2.1 се достига точно тогава, когато многообразието е QC-еквивалентно на 3-Сасакиевата сфера.

Да отбележим, че в [67] е дадена експлицитна формула за собствените функции на първата собствена стойност на суб-Лапласиана, вж. също [5].

Друг резултат, който получаваме, е Теорема 2.2.3, която дава едно интегрално неравенство, включващо Лапласиана и Хесиана на дадена функция с компактен носител върху QC-многообразие и тензорите на кривината и на торзията на свързаността на Biquard. За неговото доказателство използваме формулата от тип на Bochner. Интегрални неравенства от този тип са били получени и използвани по-рано в [37] във връзка с групите на Carnot. Подобен метод, основан върху формула на Greenleaf, е използван в [23]. Като следствие е намерено едно априорно неравенство от тип на Cordes [25] между (хоризонталния) Хесиан и суб-Лапласиана на една функция. За групата на Heisenberg една точна оценка е намерена в [27]. Имайки на разположение нашата оценка, прецизираме резултата от [26] за кватернионната група на Heisenberg. Основното приложение на получената оценка е установяването на $\mathcal{C}^{1,\alpha}$ регулярност (regularity) на p-суб-Лапласиана за p близко до 2. Точният интервал за p около 2 е определен с константа, която ние намираме.

Структурата на дисертацията е както следва.

Глава 1 съдържа първата част на дисертацията, свързана с HKT-многообразията. Тя е разделена на няколко раздела.

В раздел 1.1 даваме някои необходими предварителни понятия, свързани с хиперкомплексните многообразия.

В раздел 1.2 дефинираме HKT-многообразие и даваме някои факти, свързани с това понятие.

В раздел 1.3 показваме връзката на HKT-многообразията с физиката, и по-специално, с нейните клонове, от които възниква това понятие.

В раздел 1.4 дефинираме групите $GL(n,\mathbb{H})$ и $SL(n,\mathbb{H})$, както и свързаността на Obata, и даваме информация за нейната група на холономия. Също излагаме необходими факти и свойства, които са тясно свързани с целите на дисертацията. Даваме дефиниция на $SL(n,\mathbb{H})$-многообразие.

В раздел 1.5 въвеждаме понятието форма на Lee върху HKT-многообразие и формулираме основния резултат на първа глава.

В раздел 1.6 даваме доказателство на основния резултат.

В раздел 1.7 излагаме връзката, която съществува между тензора и формите от тип на Ricci на свързаността на Obata и формата на Lee върху HKT-многообразие, и някои следствия, като например достатъчно условие за несъществуване на HKT-метрика върху хиперкомплексно многообразие.

В раздел 1.8 намираме едно достатъчно условие за това, дадено компактно HKT-многообразие с точна форма на Lee да е хипер-Келерово.

Глава 2 съдържа втората част на дисертацията, която е свързана с кватернионно-контактните многообразия. Нейната структура по раздели е следната.

В раздел 2.1 излагаме базисни понятия и факти, свързани с кватернионно-контактната геометрия.

В раздел 2.2 формулираме основните резултати на тази глава от дисертацията.

В раздел 2.3 доказваме формулата от тип на Bochner за суб-Лапласиана върху QC-многообразие, както и някои помощни твърдения, необходими ни за доказателството на основните резултати.

В раздел 2.4 доказваме Теорема 2.2.1.

В раздел 2.5 доказваме Теорема 2.2.2.

В раздел 2.6 доказваме Теорема 2.2.3.

Предполага се, че читателят е запознат с основните диференциално-геометрични понятия, като главни и векторни разслоения, линейни свързаности, с елементи от геометрията на комплексните многообразия и др. Освен това, счели сме за целесъобразно да даваме в скоби оригиналния термин на понятията, за които не сме сигурни дали има съответен утвърден български превод. Имената на цитираните автори ги даваме в оригинал.

Благодарности

Приятен дълг ми е да изкажа дълбоката си благодарност към моя научен ръководител проф. Стефан Иванов, с когото имах късмета да се запозная и удоволствието да работя през последните няколко години. Искрено съм благодарен и на проф. Димитър Василев, съвместната работа с когото също неизмеримо много допринесе за моето математическо развитие. Примерът на техния заразяващ ентусиазъм и приятелското отношение към мен бяха основни стимули в преодоляване на трудностите.

София,
Януари, 2014г. Авторът

Съдържание

Глава 1

HKT-многообразия с група на холономия в $SL(n, \mathbb{H})$

В тази глава се съдържа първата част на настоящата дисертация. Резултатите са публикувани в нашата статия [56].

1.1. Предварителни понятия

Почти хиперкомплексна структура върху $4n$-мерно[1] гладко многообразие M наричаме тройка $H = (J_s), s = 1, 2, 3$, от почти комплексни структури $J_s : TM \longrightarrow TM$, удовлетворяващи кватернионните тъждества

$$J_s^2 = -id_{|TM}, \quad J_1 J_2 = -J_2 J_1 = J_3.$$

Когато трите почти комплексни структури J_s са интегруеми (комплексни), говори се за *хиперкомплексна структура* върху M. Многообразие M, снабдено с (почти) хиперкомплексна структура $H = (J_s), s = 1, 2, 3$, се нарича *(почти) хиперкомплексно многообразие* и се означава с (M, H). Да отбележим, че всеки ендоморфизъм

$$\mathcal{L} : TM \longrightarrow TM$$

от вида

$$\mathcal{L} = aJ_1 + bJ_2 + cJ_3, \text{ където } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ и } a^2 + b^2 + c^2 = 1,$$

е също (почти) комплексна структура за M. Така получаваме *2-сферично разслоение* (2-sphere bundle) от (почти) комплексни структури върху M, породено от J_1, J_2, J_3.

[1]Условието размерността на многообразието да е кратна на 4 е необходимо за съществуването на горните почти комплексни структури. Освен това, навсякъде в тази глава, ако не е указано друго, когато се използва числото n се предполага, че многообразието, което се засяга (хиперкомплексно, хипер-Ермитово и т.н.), е с размерност $4n$, $n \in \mathbb{N}$.

Базисен пример за хиперкомплексно многообразие е $\mathbb{H}^n$, където $\mathbb{H} = span_{\mathbb{R}}\{1, i, j, k\}$ е тялото на кватернионите. Хиперкомплексната структура върху него се поражда от ляво умножение с кватернионите i, j, k.

Други интересни примери са т. нар. *многообразия на Hopf* и в частност–*повърхнините на Hopf.* Повърхнина на Hopf X може да се дефинира като факторизация на множеството на ненулевите кватерниони $\mathbb{H} - 0$ по цикличната група $< q >$, породена от кватернион $q \in \mathbb{H}$ с $|q| > 1$, т.е.

$$X = (\mathbb{H} - 0)/ < q >,$$

където $< q >$ действа върху $(\mathbb{H} - 0)$ чрез дясно умножение. Понеже дясното умножение с q комутира с лявото умножение с кватернионите i, j, k, то хиперкомплексната структура, породена от i, j, k върху $\mathbb{H}$, се пренася и върху X.

Други важни примери са ляво инвариантните хиперкомплексни структури върху компактни групи на Lie, вж. [68].

Хипер-Ермитова метрика върху едно (почти) хиперкомплексно многообразие (M, H) наричаме Риманова метрика g, която е Ермитово съгласувана с всяка от почти комплексните структури J_s, т.е.

$$g(J_s\cdot, J_s\cdot) = g(\cdot, \cdot), s = 1, 2, 3.$$

Трябва да отбележим, че хипер-Ермитова метрика винаги съществува върху (почти) хиперкомплексно многообразие–конструира се по стандартен начин чрез произволна Риманова метрика върху многообразието. (Почти) хиперкомплексно многообразие (M, H), снабдено с хипер-Ермитова метрика g, се нарича *(почти) хипер-Ермитово* и се означава с (M, H, g). *Фундаментални* 2*-форми* върху (почти) хипер-Ермитовото многообразие (M, H, g) наричаме 2-формите F_s, дефинирани чрез

$$F_s(\cdot, \cdot) := g(\cdot, J_s\cdot), \quad s = 1, 2, 3.$$

Когато трите фундаментални 2-форми на (почти) хипер-Ермитовото многообразие (M, H, g) са затворени, т.е. $dF_s = 0, s = 1, 2, 3$, то се нарича *хипер-Келерово,* а съответната метрика–*хипер-Келерова.*

Тривиален пример за хипер-Келерово многообразие е $\mathbb{H}^n$, хипер-Келеровата метрика за което е стандартната Евклидова метрика. Важен компактен пример са $K3$-*повърхнините*, които са комплексни повърхнини с първо число на Betti $b_1 = 0$ и първи клас на Chern $c_1 = 0$. За хубав обзор на хипер-Келеровата геометрия препращаме читателя към [87] и съответните референции там.

От полза е да отбележим, че в 4-мерния компактен случай е направена пълна класификация на хиперкомплексните многообразия от Boyer [14], който доказва, че компактна хиперкомплексна повърхнина е или K3-повърхнина, или тор, или повърхнина на Hopf. От този списък единствено повърхнините на Hopf не допускат хипер-Келерова метрика.

Забележка 1.1.1. *Съгласно един известен резултат на Hitchin, вж.* [49]*, ако фундаменталните 2-форми на дадено почти хипер-Ермитово многообразие са затворени, тогава почти комплексните структури са интегруеми. Ето защо е безсмислено да се въвежда понятието "почти хипер-Келерово многообразие".*

Забележка 1.1.2. *Съгласно* [70, Vol. 2, p. 148, Theorem 4.3], *върху едно почти Ермитово многообразие почти комплексната структура е паралелна по отношение на свързаността на Levi-Civita точно тогава, когато фундаменталната 2-форма е затворена и почти комплексната структура е интегруема. Това твърдение се пренася и в "хипер" случая и можем да дефинираме хипер-Келерово многообразие като почти хипер-Ермитово многообразие, за което почти комплексните структури са паралелни по отношение на свързаността на Levi-Civita.*

1.2. НКТ-многообразия

Хипер-Келерова структура с торзия (или кратко *HKT-структура*) върху едно хипер-Ермитово многообразие (M, H, g) наричаме линейна свързаност ∇, запазваща хипер-Ермитовата структура и имаща антисиметрична (totally skew-symmetric) торзия[2], т.е. ако

[2] Навсякъде в тази глава с ∇ ще означаваме само тази свързаност.

са изпълнени равенствата

$$\nabla J_1 = \nabla J_2 = \nabla J_3 = \nabla g = 0, \quad T(X,Y,Z) = -T(X,Z,Y), \tag{1.2.1}$$

където $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$, а $T(X,Y,Z) := g(T(X,Y),Z)$ е тензорът на торзията от тип $(0,3)$, съответстващ на *тензора на торзията* от тип $(1,2)$, дефиниран чрез равенството

$$T(X,Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y].$$

НКТ-структурата се нарича още *НКТ-свързаност*. В [**52**] Howe и Papadopoulos доказват, че условието да съществува линейна свързаност върху едно хипер-Ермитово многообразие (M, g, H), удовлетворяваща (1.2.1), е еквивалентно на условието:

$$\begin{aligned} J_1 dF_1 = J_2 dF_2 = J_3 dF_3, \quad \text{където} \\ J_s dF_s(X,Y,Z) = -dF_s(J_sX, J_sY, J_sZ), \quad s = 1,2,3. \end{aligned} \tag{1.2.2}$$

В случай, че е изпълнено (1.2.2), метриката g се нарича *НКТ-метрика*, и резултатът на Howe и Papadopoulos може да бъде изказан и така: Върху хиперкомплексното многообразие (M, H) съществува НКТ-метрика g точно тогава, когато съществува НКТ-структура върху (M, H, g). Хипер-Ермитово многообразие, снабдено с НКТ-структура, се нарича *Хипер-Келерово многообразие с торзия* (или съкратено *НКТ-многообразие*). Ще го означаваме с (M, g, H, ∇). Трябва да отбележим, че НКТ-многообразията не са хипер-Келерови в общия случай, както може да подведе името им. Те са такива само ако фундаменталните 2-форми F_s са затворени. Така, хипер-Келеровите многообразия са подклас на НКТ-многообразията. Освен това е очевидно, че когато НКТ-многообразието е хипер-Келерово, НКТ-свързаността не е нищо друго, а точно свързаността на Levi-Civita.

Всяка от фундаменталните 2-форми F_s е $(1,1)$-форма по отношение на комплексната структура J_s. Освен това, можем да дефинираме комплексната 2-форма $\Omega_i := F_j + \sqrt{-1}F_k$, където (i,j,k) е циклична пермутация на наредената тройка $(1,2,3)$. Лесно се проверява, че формата Ω_i е неизродена и е от тип $(2,0)$ по отношение на комплексната структура J_i. В термините на Ω_i, условието многообразието да е хипер-Келерово е $d\Omega_i = 0$, а условието за съществуване на НКТ-структура е по-слабото $\partial_{J_i}\Omega_i = 0$, където операторът ∂_{J_i} действа върху формите от n-ти ред чрез равенството $\partial_{J_i} := \frac{1}{2}(d + (-1)^n\sqrt{-1}J_i d J_i)$, вж. [43].

Най-разпространените примери за НКТ-многообразия дължим на Joyce [68] и Spindel и др. [84], които конструират ляво инвариантни хиперкомплексни структури върху произведението на определени компактни групи на Lie с n-мерния тор (n зависи от конкретната група). По-късно, в работите [43] и [80] е доказано, че тези хиперкомплексни многообразия допускат НКТ-метрика.

Забележка 1.2.1. *В работата [74] е показано, че условието (1.2.2) влече интегруемост на почти хиперкомплексната структура на съответното почти хипер-Ермитово многообразие. Ето защо, НКТ-многообразие може да се дефинира като почти хипер-Ермитово многообразие, за което е в сила (1.2.2).*

1.3. НКТ-многообразията и физиката

Понятието НКТ-многообразие е дефинирано във физиката от Howe и Papadopoulos във връзка с $(4, 0)$ суперсиметрични сигма модели с неанулиращ се Wess-Zumino член, вж. [52]. От тогава много работи във физиката са свързани с това понятие. За хубав обзор, от математическа гледна точка, препращаме читателя към работата [43]. Ще споменем, че НКТ-многообразията се явяват като модули на бранни солитони (brane solitons) в супергравитационната теория (supergravity) и М-теорията [48, 81]. Тези многообразия възникват също като модулни пространства (moduli spaces) в някои специални черни дупки в $N = 2$ супергравитационната теория [42, 47]. Ние ще се спрем малко по-подробно на връзката на НКТ-многообразията със суперсиметричните струнни теории, вж. [86].

Бозонните полета (bosonic fields) в десет-мерната супергравитационна теория, които възникват като ниско енергийна ефективна теория (low-energy effective theory) на хетеротичната (heterotic) струна са време-пространствената (spacetime) метрика g, NS 3-формата на силово поле H, дилатонната функция (dilaton) ϕ и гейдж (gauge) свързаността A с кривина F^A. Разглежда се свързаността $\nabla = \nabla^g + \frac{1}{2}H$, където ∇^g е свързаността на Levi-Civita, съответстваща на Римановата метрика g. Свързаността ∇ запазва метриката, т.е. $\nabla g = 0$, и има антисиметрична торзия $T = H$.

Хетеротичната геометрия запазва суперсиметрията точно тогава, когато съществува поне един Majorana-Weyl спинор ϵ, такъв, че суперсиметричните вариции (supersymmetry variations) на фермионните (fermionic) полета се анулират, т.е. изпълнени са следните Killing-спинорни уравнения (вж. [86]):

$$\delta_\lambda = \nabla\epsilon = 0; \quad \delta_\Psi = (d\phi - \frac{1}{2}H) \cdot \epsilon = 0; \quad \delta_\xi = F^A \cdot \epsilon = 0, \tag{1.3.1}$$

където λ, Ψ, ξ са гравитино (gravitino), дилатино (dilatino) и гейджино (gaugino) полетата съответно, а $\cdot$ означава Clifford-овото действие на формите върху спинорите. Съвкупността от уравненията (1.3.1), заедно с едно допълнително уравнение, наречено уравнение за анулиране на аномалията (anomaly cancellation), се нарича *Система на Strominger*, вж. [86]. Уравнението за анулиране на аномалията изразява dH чрез първата форма на Pontryagin на свързаността A и определена свързаност върху допирателното разслоение (която е от инстантонен (instanton) тип, вж. [55]). Трябва да отбележим, че първите компактни решения на системата на Strominger в размерност 6 с нетривиални полета и неконстантен дилатон са конструирани в [71] (вж. също [10, 34, 35]), а първите компактни решения при константен дилатон са намерени в [29].

Сега ще направим кратко описание на геометрията, породена от първите две уравнения на (1.3.1), в четна размерност $2n$. Strominger разглежда 10-мерно пространство, което е изкривено произведение (warped product) на максимално симетрично 4-мерно време-пространство M и т. нар. вътрешно (internal) пространство X. Първото уравнение на (1.3.1) показва съществуването на почти комплексна структура J върху вътрешното пространство X, Ермитово съгласувана с метриката g, и неанулираща се комплексна (по отношение на J) форма на обема (volume form), които се запазват от метричната свързаност с антисиметрична торзия ∇. Фактът, че почти Ермитовата структура (g, J) се запазва от свързаността

∇ ни дава, че групата на холономия на ∇ е подгрупа на унитарната група $U(n)$, $Hol(\nabla) \subseteq U(n)$. Паралелността на формата на обема ни дава допълнително, че $Hol(\nabla) \subseteq SU(n)$. Следователно на лице е $SU(n)$-структура. Второто уравнение в (1.3.1) осигурява почти комплексната структура да бъде интегруема и неанулиращата се комплексна форма на обема да е холоморфна форма на обема, т.е. решението на първите две уравнения на (1.3.1) е Ермитово многообразие X, допускащо гореописаната свързаност ∇, и имащо холоморфно тривиално канонично разслоение, вж. [**86**]. Известен е фактът, че в случай на компактно не-Келерово решение на първите две уравнения на (1.3.1), холоморфната $(n, 0)$-форма е единствена, вж. [**4, 63**]. В [**86**] Strominger показва, че в комплексния случай торзионната 3-форма на ∇ е единствена, и се задава чрез

$$T = JdF_J, \tag{1.3.2}$$

където F_J е фундаменталната 2-форма, съответстваща на двойката (g, J). Уравнението (1.3.2), заедно с класическия резултат, че метрична свързаност е напълно определена от своята торзия, показва, че свързаността ∇, запазваща Ермитовата структура (g, J) и имаща антисиметрична торзия, винаги съществува и е единствена. Така стигаме до понятието *Келерово многообразие с торзия* (или, съкратено, *KT-многообразие*) (M, g, J, ∇). Понеже почти комплексната структура е интегруема, от (1.3.2) следва, че торзионната 3-форма е от тип $(1, 2) + (2, 1)$, вж. [**70**, Vol. 2]. Ще отбележим, че свързаността ∇ с торзионна 3-форма и запазваща Ермитовата структура (наричана *KT-свързаност*) е независимо използвана от Bismut [**13**] за доказване на локална индекс-формула за оператора на Dolbeault, когато многообразието не е Келерово, и поради тази причина в литературата се е утвърдило названието *свързаност на Bismut*. Както вече отбелязахме, $Hol(\nabla) \subseteq U(n)$. Ермитови многообразия с реална размерност $2n$, за които рестриктираната (restricted) група на холономия $Hol^0(\nabla)$ на свързаността на Bismut е подгрупа на специалната унитарна група $SU(n)$, $Hol^0(\nabla) \subseteq SU(n)$, се наричат *Calabi-Yau многообразия с торзия* (или, съкратено, *CYT-многообразия*), вж. [30] и съответните препратки там.

Ако торзионната 3-форма е затворена, $dT = 0$, тогава КТ-многообразието се нарича *силно* (strong). Тези многообразия са свързани със суперсиметричните струнни теории от тип IIA и IIB (вж. [41]). Не е трудно да се види, използвайки равенството (1.3.2), че условието КТ-многообразието да бъде силно, $dT = 0$, е еквивалентно на условието $\partial\bar{\partial}F_J = 0$, където ∂ и $\bar{\partial}$ са операторите на Dolbeault. Ермитови пространства, за които е в сила последното равенство, се наричат *плуризатворени* (pluriclosed). В работата [85] е изследван поток от тип на Ricci върху тях. Ако следата $g(dT, F_J)$ на външната производна на тензора на торзията е нула, $g(dT, F_J) = 0$ (или, еквивалентно, следата на формата $\partial\bar{\partial}F_J$ е нула, $g(\partial\bar{\partial}F_J, F_J) = 0$), тогава КТ-многообразието се нарича *почти силно*. Върху компактни почти силни КТ-многообразия са доказани някои теореми за анулиране в работите [62, 63].

Трябва да отбележим, че върху почти Ермитово многообразие (M, g, J) съществуването на свързаност с антисиметрична торзия и запазваща почти Ермитовата структура е ограничено. В [33] Friedrich и Ivanov показват, че ограничението се определя от *тензора на Nijenhuis* N_J, дефиниран чрез

$$N_J(X, Y) := [JX, JY] - [X, Y] - J[X, JY] - J[JX, Y].$$

Именно, такава свързаност съществува точно когато тензорът

$$N_J(X, Y, Z) := g(N_J(X, Y), Z)$$

е 3-форма[3], т.е. е (напълно) антисиметричен. В такъв случай свързаността е единствена и нейният тензор на торзията се определя от равенството (вж. [33])

$$T = JdF_J + N_J. \tag{1.3.3}$$

[3] Този тензор също се нарича тензор на Nijenhuis. По принцип, всеки тензор, получен от даден тензор S чрез "сваляне на индекс" посредством g, носи същото име и означаваме също чрез S. Ако не е казано явно, от контекста винаги ще е ясно за кой от двата става въпрос.

Върху почти Ермитово многообразие, $(3,0)+(0,3)$-частта dF_J^- на външната производна на фундаменталната 2-форма е определена чрез тензора на Nijenhuis, вж. [40], и когато тензорът на Nijenhuis е 3-форма, съответната формула има вида $JdF_J^- = -\frac{3}{4}N_J$, вж. [33]. Важен специален случай са *приблизително Келеровите многообразия* (nearly Kähler manifolds), които се дефинират като почти Ермитови многообразия, за които е в сила

$$JdF_J = JdF_J^- = -\frac{3}{4}N_J.$$

За хубаво въведение в теорията на тези многообразия препоръчваме [44]. Така, приблизително Келеровите многообразия са пример за почти Ермитови многообразия, допускащи гореописаната свързаност.

В размерност $4n$, съществуването на повече от два паралелни спинора в първото уравнение на (1.3.1) води до съществуването на $Sp(n)$-структура. Това означава, че съществува почти хипер-Ермитова структура (g,H), която се запазва от свързаност ∇ с антисиметрична торзия. Следователно групата на холономия на ∇ се съдържа в групата $Sp(n)$ (вж. също работата [53]). Използвайки резултата на Friedrich и Ivanov [33] в "хипер" случая и факта, че за всяко $J_s \in H$ свързаността е единствена и се определя от тензора на торзията, получаваме от (1.3.3) следното важно

Твърдение 1.3.1. *Едно почти хипер-Ермитовото многообразие (M,g,H) допуска линейна свързаност ∇, запазваща хипер-Ермитовата структура и имаща антисиметрична торзия, точно тогава, когато тензорите на Nijenhuis $N_{J_1}, N_{J_2}, N_{J_3}$, съответни на почти комплексните структури J_1, J_2, J_3, са 3-форми и следните равенства са в сила*

$$J_1dF_{J_1} + N_{J_1} = J_2dF_{J_2} + N_{J_2} = J_3dF_{J_3} + N_{J_3}. \tag{1.3.4}$$

При условие че съществува, метричната линейна свързаност ∇ в горното твърдение е определена от своята торзия

$$T = J_sdF_{J_s} + N_{J_s}, s = 1,2,3.$$

Ако почти хиперкомплексната структура е интегруема, което съгласно добре известната теоремата на Newlander-Nirenberg е еквивалентно с анулирането на тензорите на Nijenhuis, от (1.3.4) получаваме (1.2.2), т.е. многообразието е НКТ-многообразие.

Трябва да отбележим, че едно почти хипер-Ермитово многообразие, чиято почти хиперкомплексна структура се състои от три приблизително Келерови структури J_1, J_2, J_3 (т.е. "хипер" аналогът на приблизително Келерово многообразие), допуска линейна свързаност, запазваща хипер-Ермитовата структура и имаща антисиметрична торзия, точно тогава, когато то е хипер-Келерово. Действително, условието почти комплексните структури да са приблизително Келерови $J_s dF_{J_s} = -\frac{3}{4} N_{J_s}, s = 1, 2, 3$, заедно с (1.3.4) ни дава

$$J_1 dF_{J_1} = J_2 dF_{J_2} = J_3 dF_{J_3}.$$

От последните равенства, използвайки вече споменатия резултат [**74**], получаваме, че почти комплексните структури са интегруеми, т.е. $N_{J_s} = 0, s = 1, 2, 3$, откъдето веднага следва, че $dF_{J_s} = 0, s = 1, 2, 3$, т.е. многообразието е хипер-Келерово.

Второто уравнение в (1.3.1) ни дава интегруемост на почти комплексните структури $J_s \in H$, вж. [**86**]. Така, налице е хипер-Ермитово многообразие, удовлетворяващо (1.2.2), т.е. НКТ-многообразие, съответната НКТ-структура на което има торзионна 3-форма, зададена чрез

$$T = J_1 dF_{J_1} = J_2 dF_{J_2} = J_3 dF_{J_3}. \tag{1.3.5}$$

Следвайки [**86**], в размерност $4n$ получаваме, че първите две уравнения на (1.3.1) влекат съществуването върху НКТ-многообразието на неизродена холоморфна $(2n, 0)$-форма по отношение на коя да е комплексна структура $J_s \in H$, т.е. каноничното разслоение на съответното КТ-многообразие $(M, g, J_s \in H, \nabla)$ е холоморфно тривиално. Така, решението на първите две уравнения на (1.3.1) в размерност $4n$ е НКТ-многообразие с холоморфно тривиално канонично разслоение. Всъщност, този факт е главна причина за интереса от страна на математици и физици към НКТ-многообразията. В [**91**] M. Verbitsky показва, че в компактния случай условието да съществува холоморфно тривиално канонично разслоение върху едно НКТ-многообразие може да се изрази чрез холономията на свързаността на Obata, което ни довежда до разглеждането на т. нар. $SL(n,\mathbb{H})$-многообразия.

1.4. Свързаност на Obata и $SL(n,\mathbb{H})$-многообразия

1.4.1. Групите $GL(n,\mathbb{H})$ и $SL(n,\mathbb{H})$. *Общата кватернионна линейна група* $GL(n,\mathbb{H})$ се дефинира като множеството от всички линейни трансформации на $\mathbb{H}^n$, запазващи комплексните структури (кватернионите) J_1, J_2 и J_3.

Детерминанта на елемент на групата $GL(n,\mathbb{H})$ може да се дефинира по следния начин (вж. [91]). Разглеждаме $V \cong \mathbb{H}^n$ като линейно пространство над $\mathbb{H}$. Относно комплексната структура, индуцирана от J_1, можем да си мислим за V като за комплексно линейно пространство, което ще означаваме с $V^{1,0}_{J_1}$. Тогава разлагането на Hodge (Hodge decomposition) ни дава за комплексификацията на V следното равенство

$$V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = V^{1,0}_{J_1} \oplus V^{0,1}_{J_1},$$

където $V^{1,0}_{J_1}$ и $V^{0,1}_{J_1}$ са собствените пространства на J_1, отговарящи на собствени стойности $\sqrt{-1}$ и $-\sqrt{-1}$ съответно. Ясно е, че за пространството от $(2n,0)$-комплексните форми $\bigwedge^{2n,0}_{J_1}(V) := \bigwedge^{2n}(V^{1,0}_{J_1})$ имаме $\bigwedge^{2n,0}_{J_1}(V) \cong \mathbb{C}$, понеже са от максимална степен. То е снабдено с естествена *реална структура* σ по следния начин:

$$\sigma : \omega \longrightarrow \sigma(\omega) = J_2(\bar{\omega}),$$

където $\omega \in \bigwedge^{2n,0}_{J_1}(V)$. Че това е реална структура (антилинейна инволюция) следва от факта, че комплексната структура J_2 "разменя местата" на $\bigwedge^{p,q}_{J_1}(V)$ и $\bigwedge^{q,p}_{J_1}(V)$, тъй като J_1 и J_2 антикомутират. Понеже при дефиниране на реалната структура σ върху $\bigwedge^{2n,0}_{J_1}(V)$ участват комплексните структури и комплексното спрягане, ясно е, че действието на всяка $\eta \in GL(n,\mathbb{H})$ върху $\bigwedge^{2n,0}_{J_1}(V)$ ще запазва реалната структура. Нека $det(\eta)$ означава действието, индуцирано от η върху $\mathbb{C} \cong \bigwedge^{2n,0}_{J_1}(V)$. Тогава $\det(\eta) \in \mathbb{R}$. Именно така построения хомоморфизъм

$$det : GL(n,\mathbb{H}) \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

на $GL(n,\mathbb{H})$ в мултипликативната група на ненулевите реални числа ще наричаме *детерминанта.*

Специалната кватернионна линейна група $SL(n,\mathbb{H})$ се дефинира като ядрото на det, т.е.

$$SL(n,\mathbb{H}) := Ker(det) = \{\eta \in GL(n,\mathbb{H}) : det(\eta) = 1)\}.$$

С други думи, $SL(n,\mathbb{H})$ е множеството от кватернионните матрици от ред n, които запазват комплексните форми от $\bigwedge^{2n,0}_{J_1}(V)$. Може да се покаже, че специалната кватернионна линейна група е точно *комутаторът* на общата, т.е.

$$SL(n,\mathbb{H}) = [GL(n,\mathbb{H}), GL(n,\mathbb{H})].$$

Забележка 1.4.1. *Групите* $GL(n,\mathbb{H})$ *и* $SL(n,\mathbb{H})$ *може да се дефинират и чрез използване на влагането*

$$f : M(n,\mathbb{H}) \longrightarrow M(2n,\mathbb{C})$$

на пръстена на кватернионните матрици от ред n *в пръстена на комплексните матрици от ред* $2n$ *чрез равенството*

$$f(A + BJ_2) = \begin{pmatrix} A & -B \\ \overline{B} & \overline{A} \end{pmatrix}, \quad A, B \in M(n,\mathbb{C}),$$

където $\overline{A}$ *означава комплексно-спрегнатата матрица на* A, *а имагинерната единица в* $\mathbb{C}$ *е* J_1. *Тогава дефинициите на въпросните групи се дават чрез образите на матриците по стандартен начин.*

Подгрупата $SL(n,\mathbb{H})$ фигурира в списъка на Merkulov-Schwachhöfer [75] на възможните групи на холономии на линейни свързаности с нулева торзия, което я прави с особен статут.

1.4.2. Свързаност на Obata и нейната холономия. $SL(n,\mathbb{H})$**-многообразия.** В добре известната си работа [78] Obata доказва, че върху хиперкомплексно многообразие (M, H) съществува единствена линейна свързаност, запазваща хиперкомплексната структура и имаща торзия нула. Прието е тази свързаност да се нарича *свързаност на Obata*, и често се означава с ∇^{ob}. С други думи, ∇^{ob} се определя по единствен начин от условието

$$\nabla^{ob} J_1 = \nabla^{ob} J_2 = \nabla^{ob} J_3 = T^{ob} = 0,$$

където $J_s \in H, s = 1, 2, 3$, а T^{ob} е тензорът на торзията на свързаността на Obata.

Обратното също е вярно, именно, ако за едно почти хиперкомплексно многообразие съществува линейна свързаност, запазваща почти комплексните структури, и имаща торзия нула, тогава почти комплексните структури са интегруеми, т.е. многообразието е хиперкомплексно.

Групата на холономия на свързаността на Obata е една от найважните инварианти на хиперкомплексните многообразия. Обаче засега в малко случаи тя е намерена в експлицитен вид. Разбира се, тривиален е случаят, когато съществува хипер-Келерова метрика за (M, H). В този случай, понеже комплексните структури са паралелни по отношение на свързаността на Levi-Civita, свързаността на Obata съвпада със свързаността на Levi-Civita, чиято група на холономия е подгрупа на симплектичната група $Sp(n)$.

Тъй като свързаността на Obata запазва хиперкомплексната структура, нейната група на холономия $Hol(\nabla^{ob})$ е подгрупа на общата кватернионна линейна група $GL(n,\mathbb{H})$, където

$$\mathbb{H} := span_{\mathbb{R}}\{1, J_1, J_2, J_3\}, J_1^2 = J_2^2 = J_3^2 = -1, J_1 J_2 = -J_2 J_1 = J_3,$$

е тялото на кватернионите. Тук за удобство използваме същите означения, както за хиперкомплексната структура.

В [83], например, е доказано, че групата на холономия на свързаността на Obata върху групата на Lie $SU(3)$ съвпада с $GL(2,\mathbb{H})$.

Хиперкомплексно многообразие, за което групата на холономия на свързаността на Obata е подгрупа на $SL(n,\mathbb{H})$, се нарича $SL(n,\mathbb{H})$-*многообразие*. Примери за $SL(n,\mathbb{H})$-многообразия са *хиперкомплексните нилпотентни многообразия (nilmanifolds)*, вж. [8].

M. Verbitsky е доказал в [91], че ако хиперкомплексното многообразие (M,H) е $SL(n,\mathbb{H})$-многообразие, то комплексното многообразие $(M, J \in H)$ допуска холоморфно тривиално канонично разслоение. В [8, 91] е доказано, че за всяко $SL(n,\mathbb{H})$-многообразие (M,H) и всяка комплексна структура $J \in H$ съществува холоморфна форма на обема $\Phi \in \Lambda^{2n,0}$ относно J, която е паралелна по отношение на свързаността на Obata.

Естествено възниква въпросът: Дали ако за дадено хиперкомплексно многообразие (M,H) съответното комплексно многообразие $(M, J \in H)$ има холоморфно тривиално канонично разслоение, то (M,H) е $SL(n,\mathbb{H})$-многообразие? Въпреки, че за всички известни примери горният въпрос има утвърдителен отговор [8], доказателство за сега е дадено само в компактния случай от M. Verbitsky в [91] при едно допълнително условие. Именно, доказано е, че компактно хиперкомплексно многообразие с холоморфно тривиално канонично разслоение, което допуска НКТ-структура, е $SL(n,\mathbb{H})$-многообразие. Така, върху компактно НКТ-многообразие условието да има холоморфно тривиално канонично разслоение е еквивалентно с условието многообразието да бъде $SL(n,\mathbb{H})$-многообразие.

Трябва да отбележим, че условието за съществуване на НКТ-структура не е необходимо за това едно компактно хиперкомплексно многообразие с холоморфно тривиално канонично разслоение да е $SL(n,\mathbb{H})$-многообразие. В [88] са дадени примери на компактни просто свързани (simply connected) хиперкомплексни многообразия, които не допускат НКТ-структура, но са $SL(n,\mathbb{H})$-многообразия.

1.5. Форма на Lee на НКТ-многообразие и формулировка на основния резултат

Форма на Lee на едно почти Ермитово многообразие (M,g,J) наричаме 1-формата θ, дефинирана чрез

$$\theta = \delta F_J \circ J,$$

където δ е ко-диференциалът, действащ върху диференциалните форми на многообразието, чиято дефиниция е добре известна. Ермитово многообразие, за което форма на Lee е нула, се нарича *балансирано* (balanced) [**76**]. Интересен факт е, че върху КТ-многообразие формата на Lee може да се изрази посредством тензора на торзията на свързаността на Bismut по следния начин [**63**]:

$$\theta(X) = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n} T(JX, e_i, Je_i), \tag{1.5.1}$$

където $\{e_1, \dots, e_{2n}\}$ е ортонормиран базис на допирателното разслоение TM.

За НКТ-многообразие от (1.3.5) следва, че торзионната 3-форма е от тип $(1,2)+(2,1)$ по отношение на всяка от комплексните структури $J_s \in H$. В работата [**54**] е показано, че за тензора на торзията на НКТ-свързаността на едно НКТ-многообразие са в сила равенствата

$$\sum_{a=1}^{4n} T(J_1X, e_a, J_1e_a) = \sum_{a=1}^{4n} T(J_2X, e_a, J_2e_a) = \sum_{a=1}^{4n} T(J_3X, e_a, J_3e_a), \tag{1.5.2}$$

където $\{e_1, \dots, e_{4n}\}$ е ортонормиран базис[4] на TM.

За почти хипер-Ермитово многообразие могат да се дефинират три форми на Lee, аналогично на дефиницията върху почти Ермитово многообразие. Когато то е снабдено с НКТ-структура, за тях се получават изразявания, аналогични на изразяването (1.5.1) [**63**]. Вземайки предвид равенствата (1.5.2), получаваме, че трите форми на Lee върху НКТ-многообразие, съответни на трите комплексни структури J_s, $s = 1, 2, 3$, съвпадат, и това ни дава основание да дефинираме (глобално определената) 1-форма θ върху НКТ-многообразие чрез равенството

$$\theta(X) = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4n} T(JX, e_i, Je_i), \tag{1.5.3}$$

[4] От тук нататък, до края на тази глава, винаги ще предполагаме, че $\{e_1, \dots, e_{4n}\}$ е ортонормиран базис на TM.

където $J \in H$, [54, 63, 64]. Тази форма ще наричаме *форма на Lee* за НКТ-многообразието. Ако формата на Lee на едно НКТ-многообразие е нула, то се нарича *балансирано*, вж. също [89].

Важно е да се отбележи, че балансираните НКТ-многообразия са $SL(n,\mathbb{H})$-многообразия, но обратното не е вярно [89]. Основната цел на тази глава е да намерим просто необходимо и достатъчно условие за това едно НКТ-многообразие да е $SL(n,\mathbb{H})$-многообразие. Оказва се, че едно такова условие е формата на Lee да бъде точна, т.е. в сила е следният, основен за тази глава, резултат.

Теорема 1.5.1. *Върху НКТ-многообразие (M,g,H,∇) следните условия са еквивалентни:*

a) *НКТ-многообразието е $SL(n,\mathbb{H})$-многообразие, т.е.* $Hol(\nabla^{ob}) \subset SL(n,\mathbb{H})$.
b) *Формата на Lee е точна 1-форма.*

От теорема Теорема 1.5.1 и споменатия вече в Раздел 1.4 резултат на Verbitsky [91], получаваме в компактния случай следното

Следствие 1.5.2. *Едно компактно НКТ-многообразие допуска холоморфно тривиално канонично разслоение точно тогава, когато формата му на Lee е точна.*

Като друго следствие получаваме известния ни вече резултат, че балансираните НКТ-многообразия са $SL(n,\mathbb{H})$-многообразия [89]. Наистина, понеже формата им на Lee по дефиниция е нула, която е точна форма, твърдението следва непосредствено от Теорема 1.5.1.

Прилагайки Теорема 1.5.1 към експлицитните примери за НКТ-многообразия, посочени в [7, Example 6.1 и Example 6.2], получаваме, че тези многообразия са $SL(2,\mathbb{H})$-многообразия, понеже формата им на Lee е точна. Така, налице са примери за небалансирани компактни НКТ-многообразия с холоморфно тривиално канонично разслоение.

1.6. Доказателство на основния резултат

1.6.1. Помощни резултати. На първо време ще пресметнем разликата A между свързаността на Obata и НКТ-свързаността.

Тензорът A е от тип $(1,2)$ и със същата буква ще означаваме съответния му чрез метриката тензор от тип $(0,3)$. Изненадващо, оказва се, че тази разлика може да се изрази само чрез тензора на торзията на HKT-свързаността. По-точно, в сила е следното

Твърдение 1.6.1. *Върху HKT-многообразие за свързаността на Obata ∇^{ob} и HKT-свързаността ∇ е в сила равенството*

$$\begin{aligned} g(\nabla^{ob}_X Y, Z) =& g(\nabla_X Y, Z) + A(X,Y,Z), \quad \textit{където} \\ 2A(X,Y,Z) =& -T(X,J_1Y,J_1Z) - T(J_1X,J_1Y,Z) \\ & - T(X,J_3Y,J_3Z) - T(J_1X,J_3Y,J_2Z). \end{aligned} \tag{1.6.1}$$

Доказателство. В класическата си статия [78] Obata доказва формула, даваща връзка между свързаността на Obata и произволна линейна свързаност с тензор на торзията T, запазваща хиперкомплексната структура върху едно хиперкомплексно многообразие. Следвайки доказателството на [[78],Theorem 10.4] и използвайки, че тензорите на Nijenhuis на хиперкомплексната структура са нули, намираме, че разликата B на двете свързаности, която е тензор от тип $(1,2)$, има следното представяне

$$\begin{aligned} -4B(X,Y) =& T(X,Y) - J_1T(X,J_1Y) \\ & - J_2T(X,J_2Y) - J_3T(X,J_3Y) + T(J_1X,J_1Y) \\ & + J_1T(J_1X,Y) - J_2T(J_1X,J_3Y) + J_3T(J_1X,J_2Y). \end{aligned} \tag{1.6.2}$$

В частност, за HKT-свързаността ще използваме специалните свойства на нейния тензор на торзията, именно, че той е 3-форма и е от тип $(1,2)+(2,1)$ по отношение на коя да е комплексна структура $J \in H$, т.е. в сила са следните равенства

$$\begin{aligned} & T(X,Y,Z) - T(JX,JY,Z) \\ & \qquad - T(JX,Y,JZ) - T(X,JY,JZ) = 0, \quad J \in H; \\ & T(J_iX,J_iY,Z) - T(J_kX,J_kY,Z) \\ & \qquad - T(J_kX,J_iY,J_jZ) - T(J_iX,J_kY,J_jZ) = 0, \end{aligned} \tag{1.6.3}$$

където (i,j,k) е циклична пермутация на $(1,2,3)$. Използвайки (1.6.3), от (1.6.2) получаваме, че B (написан като тензор от тип $(0,3)$) е равен на тензора A от второто равенство на (1.6.1), с което доказателството на твърдението е завършено. ■

В сила е следната важна за доказателството на основния резултат лема.

Лема 1.6.2. *Върху НКТ-многообразие за тензора A на разликата между свързаността на Obata и НКТ-свързаността са в сила формулите*

$$\sum_{a=1}^{4n} A(X,e_a,e_a) = -2\theta(X);$$
$$\sum_{a=1}^{4n} A(X,e_a,J_se_a) = 0, \quad s=1,2,3. \tag{1.6.4}$$

Доказателство. От (1.6.1), използвайки (1.5.3) и свойствата на кватернионите и факта, че тензорът на торзията е 3-форма, получаваме

$$\begin{aligned}\sum_{a=1}^{4n} A(X,e_a,e_a) &= -\frac{1}{2}\sum_{a=1}^{4n} T(J_1X,J_1e_a,e_a) - \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{4n} T(J_1X,J_3e_a,J_2e_a)\\ &= -\theta(X) + \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{4n} T(J_1X,e_a,J_1e_a) = -2\theta(X).\end{aligned} \tag{1.6.5}$$

Подобно, получаваме следната редица от равенства

$$\begin{aligned}\sum_{a=1}^{4n} A(X,e_a,J_1e_a) &= \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{4n}\Big(T(X,J_1e_a,e_a) - T(X,J_3e_a,J_2e_a)\Big) = 0;\end{aligned} \tag{1.6.6}$$

$$
\begin{aligned}
(1.6.7)\quad & \sum_{a=1}^{4n} A(X, e_a, J_2 e_a) \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{a=1}^{4n}\Big(T(X, J_1e_a, J_1J_2e_a) + T(J_1X, J_1e_a, J_2e_a)\Big) \\
&\quad -\frac{1}{2}\sum_{a=1}^{4n}\Big(T(X, J_3e_a, J_3J_2e_a) - T(J_1X, J_3e_a, e_a)\Big) \\
&= \sum_{a=1}^{4n}\Big(T(X, e_a, J_2e_a) - T(J_1X, e_a, J_3e_a)\Big) \\
&= 2\theta(J_2X) - 2\theta(J_3J_1X) = 0;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(1.6.8)\quad & \sum_{a=1}^{4n} A(X, e_a, J_3 e_a) \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{a=1}^{4n}\Big(T(X, J_1e_a, J_1J_3e_a) + T(J_1X, J_1e_a, J_3e_a)\Big) \\
&\quad +\frac{1}{2}\sum_{a=1}^{4n}\Big(T(X, J_3e_a, e_a) - T(J_1X, J_3e_a, J_2J_3e_a)\Big) = 0.
\end{aligned}
$$

Желаните равенства (1.6.4) следват от равенствата (1.6.5), (1.6.6), (1.6.7) и (1.6.8), с което доказателството на лемата е завършено. ∎

1.6.2. Доказателство на Теорема 1.5.1. Да напомним, че неизродената 2-форма $\Omega_i = F_j + \sqrt{-1}F_k$, където (i,j,k) е циклична пермутация на $(1,2,3)$, е от тип $(2,0)$ по отношение на комплексната структура J_i и очевидно е паралелна по отношение на HKT-свързаността, понеже последната запазва хипер-Ермитовата структура върху многообразието. Следователно, Ω_i^n е неизродена комплексна форма на обема, която е от тип $(2n,0)$ и е ∇-паралелна, $\nabla\Omega_i^n = 0$.

За да докажем едната страна на теоремата, да допуснем, че формата на Lee е точна 1-форма, $\theta = df, \quad f \in \mathcal{F}(M)$. Твърдим, че $(2n,0)$-формата $\Phi := e^{-f}\Omega_i^n$ е паралелна по отношение на свързаността на Obata, което, от самата дефиниция на $SL(n,\mathbb{H})$ (вж. Раздел 1.4.), ни дава, че $Hol(\nabla^{ob}) \subset SL(n,\mathbb{H})$.

Действително, нека $\{e_1,\dots,e_{2n},J_ie_1,\dots,J_ie_{2n}\}$ е ортонормиран базис на допирателното разслоение TM и

$$\{E_\alpha := e_\alpha - \sqrt{-1}J_ie_\alpha, \alpha=1,\dots,2n\}$$

е базис на комплексното $(1,0)$-пространство $T^{1,0}_{J_i}M$ по отношение на J_i. Комплексно-спрегнатите на E_α вектори се дефинират чрез $\overline{E_\alpha} := e_\alpha + \sqrt{-1}J_ie_\alpha$ и очевидно те образуват базис на $(0,1)$-пространството $T^{0,1}_{J_i}M$.

Нека X е произволно (реално) допирателно векторно поле към M, $\quad X\in\Gamma(TM)$. Използвайки (1.6.1), имаме, че

$$\begin{aligned}(1.6.9)\quad (\nabla^{ob}_X\Phi)(E_1,\dots,E_{2n}) &= (\nabla_X\Phi)(E_1,\dots,E_{2n})\\ &\quad -\Phi\Big(A(X,E_1),\dots,E_{2n}\Big)-\dots-\Phi\Big(E_1,\dots,A(X,E_{2n})\Big)\\ &=(\nabla_X\Phi)(E_1,\dots,E_{2n})-\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{2n}A(X,E_\alpha,\overline{E_\alpha})\Phi(E_1,\dots,E_{2n})\\ &=-df(X)\Phi(E_1,\dots,E_{2n})+e^{-f}(\nabla_X\Omega_i^n)(E_1,\dots,E_{2n})\\ &\qquad +\theta(X)\Phi(E_1,\dots,E_{2n})=0.\end{aligned}$$

Второто равенство в горната редица от равенства следва от факта, че

$$A(X,E_\alpha)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n}A(X,E_\alpha,\overline{E_i})E_i+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n}A(X,E_\alpha,E_i)\overline{E_i}$$

и Φ е $(2n,0)$-форма. Третото и четвъртото равенства се получават като използваме, че $\nabla\Omega_i^n=0$, $\quad\theta=df\quad$ и $\quad\sum_{\alpha=1}^{2n}A(X,E_\alpha,\overline{E_\alpha})=-2\theta(X)$. За да докажем последното равенство, пресмятаме, използвайки Лема 1.6.2, че

$$\begin{aligned}(1.6.10)\quad \sum_{\alpha=1}^{2n}A(X,E_\alpha,\overline{E_\alpha}) &= \sum_{a=1}^{2n}\Big[A(X,e_a,e_a)+A(X,J_ie_a,J_ie_a)\\ &\quad+\sqrt{-1}\Big(A(X,e_a,J_ie_a)-A(X,J_ie_a,e_a)\Big)\Big]=-2\theta(X).\end{aligned}$$

Тъй като Φ е комплексна форма от тип $(2n,0)$ по отношение на J_i и свързаността на Obata запазва хиперкомплексната структура, следва, че $\nabla^{ob}_X\Phi$ е също форма от тип $(2n,0)$. Последното обстоятелство и равенството (1.6.9) ни дават, че Φ е ∇^{ob}-паралелна.

За да докажем другата страна на теоремата, да допуснем, че $Hol(\nabla^{ob}) \subset SL(n, \mathbb{H})$ и следователно съществува $(2n, 0)$-форма на обема Ψ, която е ∇^{ob}-паралелна, $\nabla^{ob}\Psi = 0$, вж. [**8, 91**]. Ясно е, че $|\Psi|^2 := \Psi(E_1, \ldots, E_{2n})^2 > 0$. Подобно на доказателството на (1.6.9), имаме, че

$$\begin{aligned} (1.6.11) \quad 0 &= (\nabla^{ob}_X\Psi)(E_1, \ldots, E_{2n}) \\ &= (\nabla_X\Psi)(E_1, \ldots, E_{2n}) - \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{2n} A(X, E_\alpha, \overline{E_\alpha})\Psi(E_1, \ldots, E_{2n}). \end{aligned}$$

Като използваме (1.6.10) в (1.6.11), получаваме

$$(1.6.12) \qquad (\nabla_X\Psi)(E_1, \ldots, E_{2n}) = -\theta(X)\Psi(E_1, \ldots, E_{2n}).$$

Тъй като равенството (1.6.12) е инвариантно относно избора на ортонормирания базис $\{e_1, \ldots, e_{2n}, J_ie_1, \ldots, J_ie_{2n}\}$, можем да предполагаме, че последният е *нормален* (в точка) относно НКТ-свързаността ∇, понеже тя запазва хипер-Ермитовата структура (вж. Забележка 1.6.3). Така, равенството (1.6.12) може да се запише във вида

$$(1.6.13) \qquad \frac{X(\Psi(E_1, \ldots, E_{2n}))}{\Psi(E_1, \ldots, E_{2n})} = -\theta(X).$$

От равенството (1.6.13) получаваме

$$\theta = -\frac{1}{2}d(ln|\Psi|^2),$$

т.е. θ е точна 1-форма, с което доказателството на Теорема 1.5.1 е завършено. ■

Забележка 1.6.3. *Ако е дадена метрична линейна свързаност ∇ върху n-мерното Римановo многообразие (M, g), ортонормиран базис на TM, нормален в точката $p \in M$, наричаме такъв базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$, за който $g(e_i, e_j)(p) = \delta_{ij}$ и $(\nabla_{e_i}e_j)(p) = 0, i, j = 1, \ldots, n$. Без да се впускаме в подробности, най-общо казано, такъв базис може да се построи по следния начин. Нека U е нормална околност на p, т.е., по дефиниция, за всяка точка $q \in U$ да съществува единствена минимална геодезична линия, която да свързва p и q. Ако $\{v_1, \ldots, v_n\}$ е ортонормиран базис на T_pM, а точката $q \in U$, то дефинираме $e_i(q)$ като допирателния вектор,* *получен чрез паралелен пренос относно ∇ на v_i по единствената минимална геодезична, свързваща p и q. Не е трудно да се види, че така получените векторни полета, дефинирани в U, образуват ортонормиран базис, нормален в p. В нашия специален случай, когато многообразието е хипер-Ермитово и свързаността запазва хипер-Ермитовата структура, за получаването на нормалния базис, който използваме в доказателството на теоремата, се взема предвид и паралелността на комплексните структури.*

За подробно описание на построяване на нормален ортонормиран базис в по-общ случай препращаме читателя към книгата на Wu [**94**].

1.7. Кривина на свързаността на Obata върху HKT-многообразие

Оказва се, че върху HKT-многообразие съществува тясна връзка между тензора и формите на Ricci на свързаността на Obata и 1-формата на Lee. В този раздел показваме тази връзка, както и факта, че скаларните кривини на свързаността на Obata върху HKT-многообразие са нули. Като следствие даваме едно необходимо и достатъчно условие за това, рестриктираната група на холономия на свързаността на Obata върху едно HKT-многообразие да е подгрупа на $SL(n,\mathbb{H})$ в термините на формата на Lee. Като друго следствие даваме критерий за несъществуване на HKT-метрика върху едно хиперкомплексно многообразие.

1.7.1. Предварителни понятия. Ако върху многообразието M е дадена линейна свързаност ∇, както обикновено, с R ще означаваме нейния *тензор на кривината*, т.е. тензорът от тип $(1,3)$, дефиниран чрез

$$R(X,Y,Z) := \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z, \quad X,Y,Z \in \Gamma(TM).$$

Ако многообразието е Риманово с метрика g, на горния тензор от тип $(1,3)$ може да се съпостави чрез g тензор от тип $(0,4)$, който също ще наричаме тензор на кривината и ще означаваме със същата буква, дефиниран чрез

$$R(X,Y,Z,U) := g(R(X,Y,Z),U), \quad X,Y,Z,U \in \Gamma(TM).$$

До края на тази глава, при дадено HKT-многообразие (M,g,H,∇), с R, R^{ob} и R^g ще означаваме тензорите на кривината съответно на HKT-свързаността ∇, свързаността на Obata ∇^{ob} и свързаността на Levi-Civita ∇^g. Изобщо, за тензорите, получени от HKT-свързаността няма да използваме индекс, за тензорите, получени от свързаността на Obata, ще използваме горен индекс $.^{ob}$, а за тези, получени от свързаността на Levi-Civita-горен индекс $.^g$. Да отбележим, че R^{ob} не е антисиметричен по отношение на втората двойка аргументи, понеже свързаността на Obata не е метрична.

Тензорът на Ricci Ric, *скаларните кривини* $Scal, Scal_s$ и *2-формите от тип на Ricci* ρ, ρ_s се дефинират по стандартен начин, както следва:

$$Ric(X,Y) = \sum_{a=1}^{4n} R(e_a,X,Y,e_a), \quad Scal = \sum_{a=1}^{4n} Ric(e_a,e_a),$$

$$Scal_s = \sum_{a=1}^{4n} Ric(J_s e_a,e_a), \quad \rho(X,Y) = \sum_{a=1}^{4n} R(X,Y,e_a,e_a),$$

$$\rho_s(X,Y) = \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{4n} R(X,Y,e_a,J_s e_a), \quad s=1,2,3.$$

1.7.2. Основни резултати. В сила е следната Лема.

Лема 1.7.1. *Върху хиперкомплексно многообразие* (M,H), *за* $s=1,2,3$, *са в сила равенствата*

$$\begin{aligned} Ric^{ob}(J_sX,J_sY) + Ric^{ob}(Y,X) &= 2\rho_s^{ob}(J_sX,Y), \\ Ric^{ob}(X,Y) - Ric^{ob}(Y,X) &= -\rho^{ob}(X,Y). \end{aligned} \tag{1.7.1}$$

Доказателство. Нека g е Риманова метрика върху M, която е Ермитово съгласувана с хиперкомплексната структура H. Такава метрика винаги съществува. Например, ако h е произволна Риманова метрика, тогава метриката g, дефинирана чрез

$$g(X,Y) := h(X,Y) + \sum_{s=1}^{3} h(J_sX,J_sY), \quad X,Y \in \Gamma(TM),$$

е хипер-Ермитова. От първото тъждество на Bianchi и равенството $R^{ob}J_s = J_sR^{ob}, s = 1,2,3,$ (което следва от паралелността на комплексните структури J_s относно ∇^{ob}) получаваме следните равенства:

$$\begin{aligned}
2\rho_s^{ob}(X,Y) &= \sum_{a=1}^{4n} R^{ob}(X,Y,e_a,J_se_a) \\
&= \sum_{a=1}^{4n} \Big(R^{ob}(Y,e_a,J_sX,e_a) + R^{ob}(e_a,X,J_sY,e_a)\Big) \\
&= -Ric^{ob}(Y,J_sX) + Ric^{ob}(X,J_sY), \quad s=1,2,3;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Ric^{ob}(X,Y) &= \sum_{a=1}^{4n} R^{ob}(e_a,X,Y,e_a) \\
&= -\sum_{a=1}^{4n} \Big(R^{ob}(X,Y,e_a,e_a) + R^{ob}(Y,e_a,X,e_a)\Big) \\
&= -\rho^{ob}(X,Y) + Ric^{ob}(Y,X),
\end{aligned}$$

с което доказателството на равенствата (1.7.1) е завършено. ■

Следващото твърдение е основно за този раздел.

Твърдение 1.7.2. *Върху НКТ-многообразие (M,g,H,∇) е изпълнено:*

a) *Външната производна на формата на Lee е $(1,1)$-форма по отношение на всяка комплексна структура $J_s \in H$, т.е.*

$$d\theta(J_sX,J_sY) = d\theta(X,Y), \quad s=1,2,3.$$

b) *Тензорът и формите на Ricci на свързаността на Obata се определят от формата на Lee по следния начин:*

$$\begin{aligned}
&Ric^{ob}(X,Y) = d\theta(X,Y), \\
&\rho^{ob} = -2d\theta, \quad \rho_s^{ob} = 0, \quad s=1,2,3.
\end{aligned} \tag{1.7.2}$$

В частност, тензорът и формите на Ricci на свързаността на Obata са $(1,1)$-форми по отношение на хиперкомплексната структура H, т.е.

$$Ric^{ob}(J_sX,J_sY) = Ric^{ob}(X,Y), \quad \rho^{ob}(J_sX,J_sY) = \rho^{ob}(X,Y).$$

c) *Скаларните кривини на свързаността на Obata са нули,*

$$Scal^{ob} = Scal^{ob}_s = 0, \quad s = 1, 2, 3.$$

Доказателство. Най-напред ще докажем точка b). Използвайки първото равенство от (1.6.1), след стандартни изчисления, намираме, че за тензорите на кривината относно свързаността на Obata и HKT-свързаността е в сила връзката

$$\begin{aligned}(1.7.3)\quad & R^{ob}(X,Y,Z,U) \\ & = R(X,Y,Z,U) + (\nabla_X A)(Y,Z,U) - (\nabla_Y A)(X,Z,U) \\ & + A(T(X,Y),Z,U) + A(X,A(Y,Z),U) - A(Y,A(X,Z),U),\end{aligned}$$

където A се задава чрез второто равенство на (1.6.1).

По-нататък, понеже HKT-свързаността запазва хипер-Ермитовата структура, групата ѝ на холономия се съдържа в симплектичната група $Sp(n)$. Тъй като са в сила влаганията

$$Sp(n) \subset SU(2n) \subset SL(2n, \mathbb{C}) \subset SL(4n, \mathbb{R}),$$

съгласно [70, Vol. 2, p. 151, Lemma 2], имаме, че [5]

$$trace R(X,Y) = 0, \quad trace J_s \circ R(X,Y) = 0, \quad s = 1, 2, 3,$$
$$X, Y \in \Gamma(TM),$$

т.е.

$$(1.7.4)\qquad \rho = \rho_s = 0, \qquad s = 1, 2, 3.$$

Вземайки следата $Z = U = e_a$ в (1.7.3) и използвайки (1.6.4) и (1.7.4), получаваме

$$\begin{aligned}(1.7.5)\quad & \rho^{ob}(X,Y) = -2(\nabla_X \theta)Y + 2(\nabla_Y \theta)X - 2\theta(T(X,Y)) \\ & + \sum_{a,b=1}^{4n} \Big(A(X,e_b,e_a)A(Y,e_a,e_b) - A(Y,e_b,e_a)A(X,e_a,e_b) \Big) \\ & = -2d\theta(X,Y).\end{aligned}$$

В последното равенство използвахме представянето на външната производна на дадена 1-форма чрез ковариантното диференциране,

[5] Тук под $R(X,Y)$ се разбира линейният оператор $R(X,Y,\cdot) : \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$.

породено от метрична линейна свързаност ∇ с торзия T (каквато е НКТ-свързаността),

$$d\alpha(X,Y) = (\nabla_X\alpha)Y - (\nabla_Y\alpha)X + \alpha(T(X,Y)).$$

Вземайки следата $Z = e_a, U = J_s e_a$ в (1.7.3) и използвайки (1.6.4) и (1.7.4), получаваме

$$\begin{aligned}(1.7.6)\quad & \rho_s^{ob}(X,Y)\\ &= \sum_{a,b=1}^{4n} \Big(A(X,e_b,J_se_a)A(Y,e_a,e_b) - A(Y,e_b,J_se_a)A(X,e_a,e_b)\Big)\\ &= \sum_{a,b=1}^{4n} \Big[A(Y,e_a,J_se_b)\Big(A(X,J_se_b,J_se_a) - A(X,e_b,e_a)\Big)\Big] = 0,\\ & \qquad\qquad\qquad\qquad s = 1,2,3.\end{aligned}$$

За да получим последното равенство в (1.7.6), използвахме равенството

$$A(X,J_sY,J_sZ) - A(X,Y,Z) = 0, \quad s = 1,2,3,$$

което е следствие от факта, че свързаността на Obata и НКТ-свързаността запазват хиперкомплексната структура. Така, второто и третото равенство на (1.7.2) следват от (1.7.5) и (1.7.6).

Използвайки (1.7.6), от първото равенство на (1.7.1) получаваме

$$(1.7.7)\qquad Ric^{ob}(J_sX,J_sY) + Ric^{ob}(Y,X) = 0, \quad s = 1,2,3,$$

от което като следствие имаме, че

$$Ric^{ob}(J_sX,J_sY) = Ric^{ob}(J_tX,J_tY), \quad s,t = 1,2,3.$$

Последното равенство ни дава

$$(1.7.8)\qquad Ric^{ob}(J_sX,J_sY) = Ric^{ob}(X,Y), \quad s = 1,2,3.$$

Сега, равенствата (1.7.7) и (1.7.8) ни дават, че

$$Ric^{ob}(X,Y) + Ric^{ob}(Y,X) = 0,$$

т.е. тензорът на Ricci на свързаността на Obata е 2-форма. Този факт, заедно с второто равенство на (1.7.1) и (1.7.5) ни дават, че $Ric^{ob}(X,Y) = d\theta(X,Y)$, с което и първото равенство на (1.7.2) е доказано. Освен това, равенството (1.7.8) ни показва, че тензорът на Ricci Ric^{ob} е комплексна $(1,1)$-форма по отношение на комплексната структура $J_s, \quad s = 1,2,3$.

Точка а) на твърдението следва непосредствено от точка б).

За да докажем c), трябва да покажем, че тензорът на Ricci Ric^{ob} е напълно безследен (completely trace-free). Равенството

$$Scal^{ob} = \sum_{a=1}^{4n} Ric^{ob}(e_a, e_a) = 0$$

е очевидно изпълнено, съгласно b). За да докажем, че и другите следи са нули, да фиксираме $s \in \{1,2,3\}$ и да разгледаме 1-формата $J_s\theta$, дефинирана чрез $J_s\theta(X) := -\theta(J_sX)$. Дефиниционното равенство $\theta = \delta F_s \circ J_s$ влече $J_s\theta = \delta F_s$, и следователно 1-формата $J_s\theta$ е ко-затворена (co-closed), т.е. $\delta(J_s\theta) = 0$. Твърдим, че

$$\sum_{a=1}^{4n} (\nabla_{e_a}\theta)(J_s e_a) = 0. \tag{1.7.9}$$

Наистина, използвайки изразяването на ко-диференциала чрез ∇^g (вж. [94]) и ∇, получаваме

$$0 = \delta(J_s\theta) = -\sum_{a=1}^{4n} (\nabla^g_{e_a} J_s\theta)(e_a) = -\sum_{a=1}^{4n} (\nabla_{e_a} J_s\theta)(e_a)$$
$$= \sum_{a=1}^{4n} (\nabla_{e_a}\theta)(J_s e_a),$$

където за третото равенство използвахме формулата $\nabla^g = \nabla - \frac{1}{2}T$, която е следствие от добре познатата формула за разликата на две метрични свързаности, а за четвъртото равенство взехме предвид, че $\nabla J_s = 0$. Нека $\tilde{\theta}$ е дуалното векторно поле на 1-формата θ чрез g. Имаме следната редица от равенства

$$\sum_{a=1}^{4n} Ric^{ob}(e_a, J_s e_a)$$
$$= \sum_{a=1}^{4n} d\theta(e_a, J_s e_a) = \sum_{a=1}^{4n} \Big[2(\nabla_{e_a}\theta)(J_s e_a) + \theta\Big(T(e_a, J_s e_a)\Big)\Big]$$
$$= 2g(\tilde{\theta}, J_s\tilde{\theta}) = 0,$$

където за първото равенство използвахме (1.7.2), за второто-изразяването на външната производна на 1-формата θ чрез метричната свързаност ∇, а за третото равенство-формулата (1.7.9) и дефиницията (1.5.3) на формата на Lee. Така, $Scal^{ob}_s = 0$, с което и точката c) е доказана. ■

От работата [1] е известно, че рестриктираната група на холономия $Hol^0(\nabla^{ob})$ на свързаността на Obata върху хиперкомплексно многообразие е подгрупа на групата $SL(n,\mathbb{H})$ точно тогава, когато тензорът на Ricci е нула, $Ric^{ob} = 0$. Така, получаваме от Твърдение 1.7.2 следното

Следствие 1.7.3. *Рестриктираната група на холономия на свързаността на Obata върху HKT-многообразие е подгрупа на групата $SL(n,\mathbb{H})$ точно тогава, когато формата на Lee е затворена, $d\theta = 0$.*

Това следствие се получава и непосредствено от Теорема 1.5.1 и Лемата на Poincaré за диференциалните форми в едносвързана област. Освен това, то може да се докаже и като вземем предвид влаганията

$$SL(n,\mathbb{H}) \subset SL(2n,\mathbb{C}) \subset SL(4n,\mathbb{R}),$$

което показва, че $Hol^0(\nabla^{ob}) \subset SL(n,\mathbb{H})$ точно тогава, когато всички форми на Ricci на свързаността на Obata са нули [70, Vol. 2, p. 151, Lemma 2]. Така, използвайки Твърдение 1.7.2, пак получаваме следствието.

Обръщаме внимание на факта, че ако формата на Lee е затворена, но не е точна, тогава рестриктираната група на холономия $Hol^0(\nabla^{ob})$ е подгрупа на $SL(n,\mathbb{H})$, но цялата група на холономия $Hol(\nabla^{ob})$ може и да не е подгрупа на $SL(n,\mathbb{H})$. Пример за това са т. нар. многообразия на Hopf $(\mathbb{H}^n - \{0\})/\Gamma$. В работата [89] е отбелязано, че те имат плоска свързаност на Obata, и следователно тензорът на Ricci е нула, т.е. рестриктираната група на холономия на свързаността на Obata е подгрупа на $SL(n,\mathbb{H})$. Обаче е показано, че тези многообразия не допускат холоморфна форма на обема, и следователно не са $SL(n,\mathbb{H})$-многообразия.

1.7.3. Несъществуване на НКТ-метрика. В този подраздел, като непосредствено следствие от Твърдение 1.7.2, даваме едно достатъчно условие за несъществуване на НКТ-метрика върху хиперкомплексно многообразие (M, H) в термините на тензора и формите на Ricci на свързаността на Obata.

Следствие 1.7.4. *Нека (M, H) е хиперкомплексно многообразие и някое от следните условия е изпълнено:*

a) *Тензорът на Ricci на свързаността на Obata не е антисиметричен (т.е. не е 2-форма) или не е $(1, 1)$-форма по отношение на хиперкомплексната структура.*

b) *Формата от тип на Ricci на свързаността на Obata ρ^{ob} не е $(1, 1)$-форма по отношение на хиперкомплексната структура.*

c) *Поне една от формите от тип на Ricci на свързаността на Obata ρ^{ob}_s не е тъждествено равна на нула, $\rho^{ob}_s \neq 0$ за някое $s \in \{1, 2, 3\}$.*

d) *Поне една от скаларните кривини на свързаността на Obata*[6] *не е тъждествено равна на нула, $Scal^{ob} \neq 0$ или $Scal^{ob}_s \neq 0$ за някое $s \in \{1, 2, 3\}$.*

Тогава (M, H) не допуска НКТ-метрика, съгласувана с хиперкомплексната структура H.

Да отбележим, че ако условията a), b), c) или d) не са изпълнени, от това не следва, че (M, H) допуска НКТ-метрика, т.е. те не са необходими за несъществуването на НКТ-метрика. Наистина, Swann в работата си [**88**] е дал примери за компактни $SL(n, \mathbb{H})$-многообразия, които не допускат НКТ-метрика, но имат нулев тензор на Ricci на свързаността на Obata [**1**], и значи всяко от условията a), b), c) или d) не е изпълнено.

1.8. Хипер-Келерови НКТ-многообразия

Както вече е известно, хипер-Келеровите многообразия са частен случай на НКТ-многообразията. В този раздел даваме едно

[6] Има се предвид скаларната кривина относно коя да е хипер-Ермитова метрика върху (M, H).

достатъчно условие за това, едно НКТ-многообразие да е хипер-Келерово, в термините на определени следи на външната производна на торзионната 3-форма на НКТ-свързаноста и т. нар. *-скаларна кривина на свързаността на Levi-Civita.

1.8.1. Предварителни сведения. В [4] е доказано, че силно, балансирано КТ-многообразие е необходимо Келерово (вж. [31] за друго, независимо доказателство на този факт). По-общо твърдение се получава от равенството (2.13) в [4], записано във формата (вж. [63, (3.10)])

$$\sum_{a,b=1}^{2n} dT(e_a, Je_a, e_b, Je_b) = 8\delta\theta + 8|\theta|^2 - \frac{4}{3}|T|^2. \tag{1.8.1}$$

От горното равенство следва, че ако КТ-многообразието е балансирано (θ=0) и удовлетворява условието

$$\sum_{a,b=1}^{2n} dT(e_a, Je_a, e_b, Je_b) = 0,$$

тогава тензорът на торзията $T = 0$ и многообразието е Келерово. Ако многообразието е компактно, като следствие от теоремата за анулиране [63, Theorem 4.1], [62], получаваме следната теорема, която ни дава едно достатъчно условие за несъществуване на холоморфно тривиално канонично разслоение върху не-Келерово компактно КТ-многообразие.

Теорема 1.8.1. [63] *Нека (M, g, J, ∇) е компактно (не-Келерово) КТ-многообразие. Тогава, ако рестриктираната група на холономия на КТ-свързаността се съдържа в групата $SU(n)$, $Hol^0(\nabla) \subset SU(n)$, и е изпълнено равенството $\sum_{a,b=1}^{2n} dT(e_a, Je_a, e_b, Je_b) = 0$, то (M, g, J, ∇) не допуска холоморфна форма на обема.*

Макар че не е свързано пряко с нашата цел, за пълнота ще дадем някои дефиниции, отнасящи се до кватернионните многообразия. *(Почти) кватернионно многообразие* наричаме $4n$-мерно многообразие M, снабдено с подразслоение Q от ранг 3 на разслоението от ендоморфизмите $End(TM)$ на допирателното разслоение

TM, $Q \subset End(TM)$, при което Q локално се поражда от три (почти) комплексни структури J_1, J_2, J_3, удовлетворяващи тъждествата на кватернионите $J_s^2 = -id_{|TM}, \quad J_1J_2 = -J_2J_1 = J_3$. Бележим (M, Q). Риманова метрика g върху M, която е Ермитово съгласувана с всеки ендоморфизъм $\mathcal{L} \in Q$, за който $\mathcal{L}^2 = -id_{|TM}$, т.е. $g(\mathcal{L}\cdot, \mathcal{L}\cdot) = g(\cdot,\cdot)$, се нарича *кватернионно-Ермитова*, а многообразието се нарича *(почти) кватернионно-Ермитово* и се означава с (M, g, Q). *Кватернионна линейна свързаност* върху (почти) кватернионното многообразие $(M, J_s \in Q, s = 1, 2, 3)$ наричаме линейна свързаност ∇, за която е изпълнено

$$\nabla J_i = -\alpha_j \otimes J_k + \alpha_k \otimes J_j,$$

където (i, j, k) е циклична пермутация на $(1, 2, 3)$, а $\alpha_s, s = 1, 2, 3$, са (локално дефинирани) 1-форми.

Кватернионно многообразие с торзия (или съкратено *QKT-многообразие*) наричаме почти кватернионно-Ермитово многообразие, което е снабдено с кватернионна метрична линейна свързаност ∇, имаща напълно антисиметрична торзия T, която е от тип $(1, 2) + (2, 1)$ по отношение на всяка почти комплексна структура $J_s, s = 1, 2, 3$. Тази свързаност се нарича *QKT-свързаност* и многообразието, снабдено с тези структури, се означава с (M, g, Q, ∇). Веднага да отбележим, че QKT-многообразията са необходимо кватернионни, т.е. локално дефинираните почти комплексни структури $J_s, s = 1, 2, 3$, са интегруеми, вж. [54]. QKT-многообразията са въведени от Howe и др. в работата [50] във връзка със суперсиметричните сигма-модели с Wess-Zumino член. Да отбележим, че от самата дефиниция следва, че всяко HKT-многообразие е QKT-многообразие. Ние ще използваме именно този факт, за да получим информация за HKT-многообразията въз основа на известна вече информация за QKT-многообразията.

В [54] е дефинирана *QKT-торзионна 1-форма* t върху дадено QKT-многообразие чрез равенството

$$t(X) = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^{4n} T(J_s X, e_a, J_s e_a),$$

и е показано, че тя не зависи от избора на $J_s, s = 1,2,3$. Очевидно, ако QKT-многообразието е HKT-многообразие (в който случай QKT-свързаността е HKT-свързаността), тогава QKT-торзионната 1-форма t съвпада (с точност до знак) с 1-формата на Lee θ.

За фиксирано $s \in \{1,2,3\}$, **-скаларна кривина* $Scal^g_s$ върху (почти) Ермитовото многообразие (M,g,J_s) се дефинира с равенството

$$Scal^g_s := \sum_{a=1}^{4n} \rho^g_s(J_s e_a, e_a).$$

Съгласно [64, Proposition 3.4], трите *-скаларни кривини върху QKT-многообразие (M,g,Q,∇) от размерност $4n > 4$ съвпадат, $Scal^g_1 = Scal^g_2 = Scal^g_3$. Това важи в частност и за HKT-многообразие от размерност $4n > 4$, и в такъв случай може да се дефинира **-скаларна кривина* на HKT-многообразие $Scal^g_H$ чрез равенството

$$Scal^g_H := Scal^g_1 = Scal^g_2 = Scal^g_3.$$

Използвайки [64, Proposition 3.1, Proposition 3.4] и факта, че формите от тип на Ricci на HKT-свързаността са нули (и следователно $Scal_Q = 0$), стигаме до следното представяне на $Scal^g_H$:

$$Scal^g_H = \frac{1}{8}\sum_{a,b=1}^{4n} dT(e_a, Je_a, e_b, Je_b) + \frac{1}{12}|T|^2, \quad J \in H. \tag{1.8.2}$$

Равенството (1.8.2) важи и за 4-мерни HKT-многообразия. Наистина, като положим в равенството [64, (3.12)] $t = -\theta$ и вземем предвид, че формите от тип на Ricci на HKT-свързаността са нули, $\rho_s = 0, s = 1,2,3$, добиваме

$$\rho^g_s(X, J_sY) = \frac{1}{2}(\nabla_X\theta)Y + \frac{1}{2}(\nabla_{J_sY}\theta)J_sX - \frac{1}{2}\theta(J_sT(X,J_sY)) \\ + \frac{1}{4}\sum_{a,b=1}^{4n} T(X,e_a,e_b)T(J_sY, J_se_a, e_b),$$

за $s = 1,2,3$. Вземайки следата $X = e_a, Y = e_a$ в горното равенство и използвайки представянето на ко-диференциала чрез метричната свързаност ∇, равенството (1.5.3) и [64, Lemma 3.2], стигаме до равенствата

$$(1.8.3)\quad \begin{aligned} Scal^g_s &= \delta\theta + |\theta|^2 - \frac{1}{12}|T|^2 \\ &= \frac{1}{8}\sum_{a,b=1}^{4n} dT(e_a, Je_a, e_b, Je_b) + \frac{1}{12}|T|^2, \quad J \in H, \end{aligned}$$

където, за да получим второто равенство, използвахме (1.8.1). Така, съгласно (1.8.3), изразяването (1.8.2) на *-скаларната кривина важи за HKT-многообразие (M, g, H, ∇) от произволна размерност. Тази формула ние ще използваме съществено в доказателството на Теорема 1.8.2 от следващия подраздел.

1.8.2. Основен резултат.

Теорема 1.8.2. *Нека (M, g, H, ∇) е компактно HKT-многообразие с точна форма на Lee и нека някое от следните условия е изпълнено:*

a) *Функцията $h := -\frac{1}{4}\sum_{a,b=1}^{4n} dT(e_a, Je_a, e_b, Je_b)$, $J \in H$, е тъждествено равна на нула, $h = 0$.*

b) **-скаларната кривина на (M, g, H, ∇) е нула, $Scal^g_H = 0$.*

Тогава (M, g, H, ∇) е хипер-Келерово многообразие.

Доказателство. За доказателството на теоремата ще приложим някои резултати за анулиране от работите [**62**, **63**], за да покажем, че компактно не-хипер-Келерово HKT-многообразие, изпълняващо някое от условията a) или b) на теоремата, не допуска холоморфна форма на обема, т.е. не притежава холоморфно тривиално канонично разслоение, и значи формата му на Lee не е точна, съгласно Следствие 1.5.2.

Да допуснем, че (M, g, H, ∇) е не-хипер-Келерово HKT-многообразие и да разгледаме не-Келеровото KT-многообразие $(M, g, J \in H, \nabla)$. Тъй като групата на холономия $Hol(\nabla)$ на HKT-свързаността ∇ се съдържа в $Sp(n) \subset SU(2n)$, то можем да приложим [**63**, Corollary 4.2 (b)]. Съгласно [**63**, Corollary 4.2 (b)] имаме, че ако функцията $|C|^2 - h$, където C е тензорът на торзията на *свързаността на Chern* на KT-многообразието (M, g, J, ∇), е строго положителна, тогава числото $p_m(J) := dimH^0(M, \mathcal{O}(K^m_M))$ е нула за

$m > 0$ (вж. Забележка 1.8.4), и в частност, комплексното многообразие (M, J) не допуска холоморфна форма на обема. Нашата цел е да покажем, че за компактното не-Келерово КТ-многообразие $(M, g, J \in H, \nabla), s = 1, 2, 3$, е изпълнено точно това, при условие, че е налице някое от условията a) или b).

Напомняме, че тензорът на торзията C на свързаността на Chern на едно КТ-многообразие (M, g, J, ∇) се изразява чрез торзионната 3-форма T на КТ-свързаността ∇ по следния начин (вж. например [**63**]):

$$g(C(X,Y),Z) = \frac{1}{2}T(X,JY,JZ) + \frac{1}{2}T(JX,Y,JZ). \tag{1.8.4}$$

От равенството (1.8.4), прилагайки [**64**, Lemma 3.2], получаваме

$$|C_1|^2 = |C_2|^2 = |C_3|^2 = \frac{1}{3}|T|^2, \tag{1.8.5}$$

където C_1, C_2, C_3, са тензорите на торзията на свързаността на Chern съответно на Ермитовите многообразия $(M, g, J_1), (M, g, J_2)$, (M, g, J_3).

Ако $h = 0$ (изпълнено е условие a)), тогава тривиално имаме

$$|C_s|^2 - h = |C_s|^2 = \frac{1}{3}|T|^2, \quad s = 1, 2, 3,$$

където използвахме (1.8.5).

Ако $Scal^g_H = 0$ (изпълнено е условие b)), тогава от (1.8.3) получаваме $h = \frac{1}{6}|T|^2$. Сега, използвайки последното равенство и (1.8.5), стигаме до равенствата

$$|C_s|^2 - h = \frac{1}{6}|T|^2, \quad s = 1, 2, 3.$$

И така, в двата случая получаваме, че всяка от функциите $|C_s|^2 - h, s = 1, 2, 3$, е положително кратна на $|T|^2$, което е положително число, тъй като НКТ-многообразието е не-хипер-Келерово. Прилагайки [**63**, Corollary 4.2 (b)], получаваме, че компактно не-хипер-Келерово НКТ-многообразие (M, g, H, ∇), удовлетворяващо някое от условията a) или b) на теоремата, не допуска холоморфна форма на обема, т.е. формата му на Lee не е точна. Така, условието от теоремата е възможно само ако (M, g, H, ∇) е хипер-Келерово многообразие. ∎

Забележка 1.8.3. *Да отбележим, че достатъчността на условието а) от Теорема 1.8.2 за това, компактното НКТ-многообразие с точна форма на Lee да е хипер-Келерово, следва и непосредствено от Теорема 1.8.1.*

Забележка 1.8.4. *За едно комплексно многообразие (M, J) числото $p_m(J) := dimH^0(M, \mathcal{O}(K_M^m))$ се нарича m-ти плурирод (plurigenera). Тук $H^0(M, \mathcal{O}(K_M^m))$ е нулевата кохомологична група на Čech за снопа $\mathcal{O}(K_M^m)$ от холоморфните сечения на m-тата (тензорна) степен на каноничното разслоение $K_M(= \Lambda^n T^*(M)$, $n = dim_{\mathbb{C}} M)$, т.е. това е пространството от сеченията на m-тата (тензорна) степен на разслоението K_M. За подробно запознаване с гореспоменатите понятия препращаме читателя към* [46].

Външната производна dT на торсионната 3-форма T на НКТ-свързаността на едно НКТ-многообразие (M, g, H, ∇) е комплексна форма от тип $(2, 2)$ по отношение на хиперкомплексната структура H и са в сила равенствата (вж. [54])

$$\sum_{a=1}^{4n} dT(e_a, J_1e_a, X, J_1Y) = \sum_{a=1}^{4n} dT(e_a, J_2e_a, X, J_2Y) = \sum_{a=1}^{4n} dT(e_a, J_3e_a, X, J_3Y).$$

Тези равенства ни позволяват да дефинираме *почти силно НКТ-многообразие* като НКТ-многообразие, удовлетворяващо равенството $\sum_{a,b=1}^{4n} dT(e_a, Je_a, e_b, Je_b) = 0, J \in H$. Използвайки това понятие, от Теорема 1.8.2 получаваме следното следствие.

Следствие 1.8.5. *Компактно почти силно НКТ-многообразие с точна форма на Lee е хипер-Келерово.*

Глава 2

Точна долна оценка на първата собствена стойност на суб-Лапласиана върху кватернионно-контактни многообразия

В тази глава се съдържа втората част на настоящата дисертация. Резултатите са публикувани в статията [57]. С цел съкращаване на записа, правим следната уговорка.

Конвенция. *Навсякъде в Глава 2 ще е в сила:*

a) *Буквите X, Y, Z, U ще използваме, за да означаваме хоризонтални векторни полета, $X, Y, Z, U \in \Gamma(H)$, докато буквите A, B, C, D ще използваме за означаване на произволни векторни полета, $A, B, C, D \in \Gamma(TM)$.*

b) *$\{e_1, \dots, e_{4n}\}$ ще означава локален ортонормиран базис на хоризонталното пространство H.*

c) *Когато във формула фигурират две повтарящи се векторни полета от базиса $\{e_1, \dots, e_{4n}\}$, ще предполагаме, че имаме сумиране. Например, за тензора P от тип $(0, 4)$, формулата $k = P(e_a, e_b, e_a, e_b)$ означава*

$$k = \sum_{a,b=1}^{4n} P(e_a, e_b, e_a, e_b).$$

d) *Тройката (i, j, k) ще означава циклична пермутация на $(1, 2, 3)$.*

c) *s, t ще означават числа от множеството $\{1, 2, 3\}$.*

2.1. Кватернионно-контактни многообразия

В този раздел даваме необходимата базисна информация, свързана с кватернионно-контактната геометрия, както и някои факти, публикувани в статиите [11], [58] и [66], които ще използваме понататък.

2.1.1. Кватернионно-контактни структури и свързаността на Biquard. *Кватернионно-контактно (или съкр. QC-) многообразие* наричаме $(4n+3)$-мерно многообразие M, върху което е фиксирано разпределение H с коразмерност 3, което локално се задава като ядрото на 1-форма $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ със стойности в $\mathbb{R}^3$, като при това H е снабдено със $Sp(n)Sp(1)$-структура. Последното означава, че е дадена Риманова метрика[1] g върху H и (главно) разслоение $\mathbb{Q}$ с ранг 3 от ендоморфизми върху H, локално породено от три почти комплексни структури I_1, I_2, I_3, удовлетворяващи тъждествата на кватернионите,

$$I_1 I_2 = -I_2 I_1 = I_3, \quad I_1 I_2 I_3 = -id_{|H},$$

които са Ермитово съгласувани с метриката,

$$g(I_s \cdot, I_s \cdot) = g(\cdot, \cdot), \quad s = 1, 2, 3,$$

и следните условия за съгласуваност са в сила:

$$2g(I_s X, Y) = d\eta_s(X, Y), \quad s = 1, 2, 3, \quad X, Y \in H.$$

Тройката $(\eta, g, \mathbb{Q})$ се нарича *кватернионно-контактна структура* върху M, а съответното кватернионно-контактно многообразие се означава с $(M, \eta, g, \mathbb{Q})$. 1-формата η се нарича *контактна форма* на QC-многообразието, а разпределението *H-хоризонтално разпределение (пространство).* Да отбележим, че I_1, I_2, I_3 пораждат 2-сферично разслоение $\mathbb{Q}$ от почти комплексни[2] структури,

$$\mathbb{Q} = \{aI_1 + bI_2 + cI_3 | a^2 + b^2 + c^2 = 1\}.$$

Кватернионно-контактните структури са въведени от Olivier Biquard в работите [**11, 12**].

Специален феномен, показан в [**11**], е че контактната форма η определя кватернионната структура $\mathbb{Q}$ и метриката g върху H по единствен начин, ако те съществуват. Възниква въпросът, кога

[1] Всъщност, може да се смята, че е зададен конформен клас от метрики $[g]$ и ние сме фиксирали една определена метрика g от него.

[2] За 2-сферичното разслоение и главното разслоение ще използваме една и съща буква $\mathbb{Q}$.

евентуално контактната форма η е глобално дефинирана. Ограничението за това е "закодирано" в *първия клас на Pontryagin* на M. Ако той се анулира, тогава 2-сферичното разслоние от $\mathbb{R}^3$-значни 1-форми е тривиално [2], т.е. съществува глобално дефинирана контактна форма η, чието ядро е H, и в този случай означаваме съответното QC-многообразие с (M, η). Тогава 2-сферичното разслоение от асоциираните почти комплексни структури е също глобално дефинирано върху H. Трябва да отбележим също, че ако направим ротация на контактната форма $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ и почти комплексната структура $I = (I_1, I_2, I_3)$ с матрица $\Psi \in SO(3)$, тогава $\tilde{\eta} := \Psi\eta$ и $\tilde{I} := \Psi I$ също са контактна форма и почти комплексна структура, удовлетворяващи условията за съгласуваност, т.е. получаваме също QC-многообразие $(M, \tilde{\eta}, g, \mathbb{Q})$, като метриката g не се изменя. Очевидно, конформната смяна на контактната форма (умножение с положителна константа) е еквивалентна с конформната смяна на метриката, заради условията за съгласуваност. Също така подчертаваме, че ако е дадено хоризонталното разпределение H и метриката g върху него, тогава съществува най-много едно 2-сферично разслоение от контактни форми и асоциирано разслоение $\mathbb{Q}$ от почти комплексни структури, вж. [11]. Именно този факт, т.е. наличието на хоризонтално пространство и метрика върху него, които "определят" QC-многообразието с точност до ротация на контактната и кватернионната структура, правят QC-геометрията част от т. нар. суб-Риманова геометрия.

Върху QC-многообразие с фиксирана метрика g върху H съществува канонична свързаност, дефинирана в [11], когато размерността на многообразието е по-голяма от седем, и в [28] в седеммерния случай. По-точно, в сила е следната теорема.

Теорема 2.1.1. [**11**] *Нека $(M, \eta, g, \mathbb{Q})$ е QC-многообразие от размерност $4n+3 > 7$ с фиксирана метрика g върху H от конформния клас $[g]$. Тогава върху M^{4n+3} съществува единствена свързаност ∇ с тензор на торзията*[3] *T и единствено допълващо на H в TM подпространство V, такива, че:*

i) *∇ запазва разлагането $H \oplus V$ и $Sp(n)Sp(1)$-структурата върху H, т.е. $\nabla g = 0, \nabla\sigma \in \Gamma(\mathbb{Q})$ за всяко сечение $\sigma \in \Gamma(\mathbb{Q})$, и тензорът на торзията върху H се задава чрез $T(X,Y) = -[X,Y]_{|V}$;*

ii) *За всяко $\xi \in V$, торзионният ендоморфизъм $T(\xi,\cdot)_{|H}$ на H принадлежи на $(sp(n) \oplus sp(1))^{\perp} \subset gl(4n)$;*

iii) *свързаността върху V е индуцирана чрез естествената идентификация φ на V с подпространството $sp(1)$ на ендоморфизмите върху H, т.е. $\nabla\varphi = 0$.*

Да отбележим, че в ii) скаларното произведение $< \cdot, \cdot >$ на ендоморфизмите от $End(H)$ се задава чрез

$$< A, B >= \sum_{a=1}^{4n} g(A(e_a), B(e_a)), \ \text{за } A, B \in End(H).$$

Горната свързаност се нарича *свързаност на Biquard,* и е въведена от Biquard в [**11, 12**]. Когато размерността на QC-многообразието е най-малко единадесет, в [**11**] е описано допълващото пространство V, което е (локално) породено от т. нар. *векторни полета на Reeb* $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$, определени чрез равенствата

$$\eta_s(\xi_k) = \delta_{sk}, \qquad (\xi_s \lrcorner d\eta_s)_{|H} = 0, \qquad (\xi_s \lrcorner d\eta_k)_{|H} = -(\xi_k \lrcorner d\eta_s)_{|H}, \tag{2.1.1}$$

където $\lrcorner$ означава вътрешното произведение на векторно поле с диференциална форма. Ако многообразието е седем-мерно, Duchemin показва в [**28**], че ако предположим, в добавка, съществуването на векторните полета на Reeb, удовлетворяващи (2.1.1), тогава Теорема 2.1.1 важи. От тук-нататък, под QC-структура от размерност седем ще разбираме винаги QC-структура, удовлетвояваща

[3] *Тензорът на торзията T* се дефинира по стандартен начин чрез $T(A,B) = \nabla_A B - \nabla_B A - [A,B]$.

(2.1.1). Разпределението V се нарича *вертикално разпределение (пространство).* Освен това, кватернионната структура $\mathbb{Q}$ може да бъде продължена върху V чрез изискването $\mathbb{Q}_{|V} = 0$.

Най-важният плосък пример за QC-многообразие е *кватернионната група на Heisenberg,* $\mathbf{G}(\mathbb{H})$, която е снабдена с естествена QC-структура. Важен клас QC-многообразия са *QC-Айнщайновите многообразия* (вж. Дефиниция 2.1.2). Съществен пример за QC-Айнщайнови многообразия са т. нар. 3-*Сасакиеви многообразия.* 3-Сасакиево многообразие се дефинира като $(4n+3)$-мерно Риманово многообразие (M, g), за което коничната метрика $g_c := t^2 g + dt^2$ върху многообразието $C := M \times \mathbb{R}^+$ е хипер-Келерова, т.е. групата на холономия на свързаността на Levi-Civita върху C относно g_c се съдържа в симплектичната група $Sp(n+1)$, вж. [**16**]. 3-Сасакиевите многообразия от размерност $4n+3$ са, както отбелязахме, QC-Айнщайнови и при това са с положителна константна скаларна кривина (вж. (2.1.11)), равна на $(4n+2)(4n+3)$, вж. [**69**]. Освен това, ако едно 3-Сасакиево многообразие е пълно, тогава то е компактно с крайна фундаментална група. За хубав обзор на теорията на 3-Сасакиевите многообразия препоръчваме [**15**]. За подробно разглеждане на всички гореизброени примери препращаме читателя към [**59**] и съответните референции там.

Конформна кватернионно-контактна трансформация (или съкратено *конформна QC-трансформация*) между две QC-многообразия $(M, g, \eta, \mathbb{Q})$ и $(\tilde{M}, \tilde{g}, \tilde{\eta}, \tilde{\mathbb{Q}})$ наричаме дифеоморфизъм

$$\Phi : M \to \tilde{M},$$

за който $\Phi^* \tilde{\eta} = \mu \Psi \cdot \eta$ за някоя положителна гладка функция μ върху M и матрица $\Psi \in SO(3)$ с елементи-гладки функции върху M. Тук под η разбираме $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)^t$ и е разглеждано като елемент от $\mathbb{R}^3$. Когато между две QC-многообразия съществува конформна QC-трансформация, те се наричат *QC-конформно еквивалентни* (или съкратено *QC-конформни*, или *QC-еквивалентни*).

В *QC-конформният тензор на кривината* W^{qc}, въведен в [**58**], е закодирано ограничението за това, една QC-структура да бъде локално QC-конформно еквивалентна с плоската структура върху кватернионната група на Heisenberg $\mathbf{G}(\mathbb{H})$. Една QC-конформно плоска структура е също локално QC-конформна със стандартната 3-Сасакиева сфера поради това, че стандартната 3-Сасакиева структура върху $(4n+3)-$мерната сфера е локално QC-конформна с кватернионната група на Heisenberg [**58**, **66**].

Очевидно, равенствата (2.1.1) са инвариантни под естественото действие на $SO(3)$. Хоризонталната метрика g може да се продължи до Риманова метрика върху цялото TM чрез изискването $span\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\} = V \perp^g H$ и $g(\xi_s, \xi_t) = \delta_{st}$. Разширената метрика ще отбелязваме със същата буква g. При това е очевидно, че тя е инвариантна под действието на групата $SO(3)$ върху V, но се сменя по очевиден начин при умножаване на контактната форма η с конформен множител. Освен това, свързаността на Biquard запазва разширената метрика върху $TM, \nabla g = 0$ (вж. равенства (2.1.3)). Понеже свързаността на Biquard е метрична свързаност, от добре известната формула за разликата на две метрични свързаности получаваме следната релация между свързаността на Biquard ∇ и свързаността на Levi-Civita ∇^g

$$
\begin{aligned}
(2.1.2) \quad g(\nabla_A B, C) &= g(\nabla^g_A B, C) \\
&\quad + \frac{1}{2}\Big[g(T(A,B),C) - g(T(B,C),A) + g(T(C,A),B)\Big].
\end{aligned}
$$

Ковариантните производни на кватернионната структура и на вертикалното разпределение V по отношение на свързаността на Biquard се задават с формулите

$$
(2.1.3) \qquad \nabla I_i = -\alpha_j \otimes I_k + \alpha_k \otimes I_j, \quad \nabla \xi_i = -\alpha_j \otimes \xi_k + \alpha_k \otimes \xi_j,
$$

където $\alpha_s, s = 1, 2, 3$, са $sp(1)$-формите на свързаността. Върху хоризонталното разпределение H 1-формите α_s са изразени в [**11**] чрез равенствата

$$
(2.1.4) \qquad \alpha_i(X) = d\eta_k(\xi_j, X) = -d\eta_j(\xi_k, X), \quad X \in H, \quad \xi_i \in V,
$$

докато изразяването им върху вертикалното разпределение V е получено в [66] както следва:

$$\begin{aligned} \alpha_i(\xi_s) \;&=\; d\eta_s(\xi_j,\xi_k)- \\ &-\;\delta_{is}\Big[\frac{S}{2}\;+\;\frac{1}{2}\Big(d\eta_1(\xi_2,\xi_3)\;+\;d\eta_2(\xi_3,\xi_1)\;+\;d\eta_3(\xi_1,\xi_2)\Big)\Big], \end{aligned} \tag{2.1.5}$$

където S е нормализираната QC-скаларна кривина, дефинирана по-долу в (2.1.11). Анулирането на $sp(1)$-формите на свързаността върху H влече анулирането на торзионния ендоморфизъм $T(\xi,\cdot)_{|H}$ на свързаността на Biquard, вж. [66].

Фундаменталните 2*-форми* ω_s на кватернионната структура $\mathbb{Q}$, дефинирани чрез $\omega_s(A,B) = g(I_sA,B)$, съгласно условието за съгласуваност от дефиницията на QC-структура и условието $\mathbb{Q}_{|V} = 0$, имат свойствата

$$2\omega_{s|H} \;=\; d\eta_{s|H}, \qquad \xi\lrcorner\omega_s = 0, \quad \xi\in V. \tag{2.1.6}$$

Рестрикцията на тензора на торзията T върху H има следното експлицитно представяне (вж. напр. [59]):

$$\begin{aligned} T(X,Y) &= -[X,Y]_{|V} \\ &= 2\omega_1(X,Y)\xi_1 + 2\omega_2(X,Y)\xi_2 + 2\omega_3(X,Y)\xi_3. \end{aligned} \tag{2.1.7}$$

2.1.2. Инвариантно разлагане на хоризонталните ендоморфизми. Всеки ендоморфизъм Ψ на H може да бъде разложен по отношение на кватернионно-Ермитовата структура $(g,\mathbb{Q})$ по единствен начин като сума на четири $Sp(n)$-инвариантни части,

$$\Psi = \Psi^{+++} + \Psi^{+--} + \Psi^{-+-} + \Psi^{--+},$$

където Ψ^{+++} комутира с всичките почти комплексни структури I_s, Ψ^{+--} комутира с I_1 и антикомутира с I_2 и I_3 и т.н. В експлицитен вид имаме:

$$\begin{aligned} 4\Psi^{+++} &= \Psi - I_1\Psi I_1 - I_2\Psi I_2 - I_3\Psi I_3, \\ 4\Psi^{+--} &= \Psi - I_1\Psi I_1 + I_2\Psi I_2 + I_3\Psi I_3, \\ 4\Psi^{-+-} &= \Psi + I_1\Psi I_1 - I_2\Psi I_2 + I_3\Psi I_3, \\ 4\Psi^{--+} &= \Psi + I_1\Psi I_1 + I_2\Psi I_2 - I_3\Psi I_3. \end{aligned} \tag{2.1.8}$$

Освен това, Ψ се разлага по единствен начин на две $Sp(n)Sp(1)$-инвариантни компоненти,

$$\Psi = \Psi_{[3]} + \Psi_{[-1]},$$

които се задават явно чрез

$$\Psi_{[3]} = \Psi^{+++}, \quad \Psi_{[-1]} = \Psi^{+--} + \Psi^{-+-} + \Psi^{--+}.$$

Непосредствено се вижда, че са в сила следните характеристични равенства:

$$\begin{aligned} \Psi = \Psi_{[3]} \quad &\Longleftrightarrow \quad 3\Psi + I_1\Psi I_1 + I_2\Psi I_2 + I_3\Psi I_3 = 0, \\ \Psi = \Psi_{[-1]} \quad &\Longleftrightarrow \quad \Psi - I_1\Psi I_1 - I_2\Psi I_2 - I_3\Psi I_3 = 0. \end{aligned} \tag{2.1.9}$$

След кратко изчисление се получава, че $Sp(n)Sp(1)$-инвариантните компоненти $\Psi_{[3]}$ и $\Psi_{[-1]}$ на ендоморфизма Ψ са проекциите му върху собствените пространства на *оператора на Casimir*

$$\Upsilon = \ I_1 \otimes I_1 \ + \ I_2 \otimes I_2 \ + \ I_3 \otimes I_3, \tag{2.1.10}$$

съответстващи на собствени стойности 3 и -1 съответно, вж. [18]. Ако $n = 1$, тогава пространството от симетричните ендоморфизми, комутиращи с всички I_s, е 1-мерно, т.е. [3]-компонентата на всеки симетричен ендоморфизъм Ψ на H е пропорционална на идентитета върху H, $\Psi_{[3]} = -\frac{tr\Psi}{4} id_{|H}$. Да отбележим, че всяка от фундаменталните 2-форми ω_s е равна на своята $[-1]$-компонента, $\omega_s = \omega_{s[-1]}$, и $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ образуват базис на алгебрата на Lie $sp(1)$.

2.1.3. Торзионен ендоморфизъм на свързаността на Biquard върху QC-многообразие. Свойствата на свързаността на Biquard са "закодирани" в нейния тензор на торзията T, и по-специално, в торзионния ендоморфизъм

$$T_\xi = T(\xi, \cdot)_{|H} : H \to H, \quad \xi \in V.$$

Разлагайки ендоморфизма $T_\xi \in (sp(n) \oplus sp(1))^\perp$ като сума от симетрична T^0_ξ и антисиметрична b_ξ част, $T_\xi = T^0_\xi + b_\xi$, O. Biquard показва в [11], че T_ξ е напълно безследен,

$$trT_\xi = tr(T_\xi \circ I_s) = 0.$$

Освен това, в споменатата работа е показано, че неговата симетрична част T^0_ξ има свойствата:

$$\begin{aligned} &T^0_{\xi_i} I_i = -I_i T^0_{\xi_i}, && I_2(T^0_{\xi_2})^{+--} = I_1(T^0_{\xi_1})^{-+-}, \\ &I_3(T^0_{\xi_3})^{-+-} = I_2(T^0_{\xi_2})^{--+}, && I_1(T^0_{\xi_1})^{--+} = I_3(T^0_{\xi_3})^{+--}, \end{aligned}$$

където суперскриптът $+++$ обозначава частта, която комутира с всичките I_s, $+--$ маркира частта, която комутира с I_1 и антикомутира с другите две почти комплексни структури и т.н. Антисиметричната му част b_{ξ_i} може да бъде представена като $b_{\xi_i} = I_i u$, където u е безследен симетричен тензор от тип $(1,1)$ върху H, който комутира с почти комплексните структури I_1, I_2, I_3. Ако $n = 1$, тогава тензорът u се анулира тъждествено, $u = 0$, и торзионният ендоморфизъм е симетричен тензор, $T_\xi = T^0_\xi$.

Всяко 3-Сасакиево многообразие има нулев торзионен ендоморфизъм. Обратното също е вярно в локален смисъл, именно, ако торзионният ендоморфизъм на едно QC-многообразие е нула и, в добавка, QC-скаларната кривина (дефинирана в (2.1.11)) е положителна константа, тогава многообразието е локално QC-еквивалентно на 3-Сасакиевата сфера [**66**].

2.1.4. Тензори на торзията и на кривината на свързаността на Biquard върху QC-многообразие. Както обикновено, $R = [\nabla, \nabla] - \nabla_{[,]}$ ще означава *тензорът на кривината* на свързаността на Biquard от тип $(1,3)$. Със същата буква ще бележим и съответния тензор от тип $(0,4)$, получен от R чрез сваляне на индекс чрез g, $R(A,B,C,D) = g(R(A,B)C,D)$. Същото важи и за тензора на торзията T, тензорът от тип $(0,3)$ се дефинира чрез $T(A,B,C) = g(T(A,B),C)$. *Тензорът на Ricci Ric, QC-скаларната кривина Scal, нормализираната QC-скаларна кривина S, 2-формите от тип на Ricci* ρ_s, τ_s, се дефинират съответно чрез равенствата

$$
\begin{aligned}
&Ric(A,B) = R(e_b, A, B, e_b),\\
&Scal = R(e_b, e_a, e_a, e_b), \quad S = \frac{Scal}{8n(n+2)},\\
&\rho_s(A,B) = \frac{1}{4n} R(A, B, e_a, I_s e_a),\\
&\tau_s(A,B) = \frac{1}{4n} R(e_a, I_s e_a, A, B).
\end{aligned}
\tag{2.1.11}
$$

Когато говорим за *хоризонтален* (респ. *вертикален*) тензор, ще имаме предвид неговата рестрикция върху хоризонталното разпределение H (респ. вертикалното разпределение V). $sp(1)$-частта на R е определена чрез 2-формите от тип на Ricci ρ_s и $sp(1)$-формите на свързаността α_s чрез

$$
R(A, B, \xi_i, \xi_j) = 2\rho_k(A,B) = (d\alpha_k + \alpha_i \wedge \alpha_j)(A,B),
\tag{2.1.12}
$$

където $A, B \in \Gamma(TM)$. В [66] са въведени два $Sp(n)Sp(1)$-инвариантни, безследни и симетрични тензори от тип $(0,2)$ върху H чрез равенствата

$$
\begin{aligned}
&T^0(X,Y) = g\Big((T^0_{\xi_1} I_1 + T^0_{\xi_2} I_2 + T^0_{\xi_3} I_3)X, Y\Big),\\
&U(X,Y) = g(uX, Y).
\end{aligned}
$$

Те имат важните свойства (вж. [66])

$$
\begin{aligned}
&T^0(X,Y) + T^0(I_1X, I_1Y)\\
&\quad + T^0(I_2X, I_2Y) + T^0(I_3X, I_3Y) = 0,\\
&U(X,Y) = U(I_1X, I_1Y) = U(I_2X, I_2Y) = U(I_3X, I_3Y).
\end{aligned}
\tag{2.1.13}
$$

В размерност седем ($n = 1$), тензорът U е тъждествено равен на нула, $U = 0$.

Ще имаме нужда от следното равенство, взето от [58, Proposition 2.3],

$$
4T^0(\xi_s, I_sX, Y) = T^0(X,Y) - T^0(I_sX, I_sY).
\tag{2.1.14}
$$

Така, вземайки предвид (2.1.14), получаваме формулата

$$
\begin{aligned}
T(\xi_s, I_sX, Y) &= T^0(\xi_s, I_sX, Y) + g(I_suI_sX, Y) \\
&= \frac{1}{4}\Big[T^0(X,Y) - T^0(I_sX, I_sY)\Big] - U(X,Y).
\end{aligned} \tag{2.1.15}
$$

Следващата дефиниция ни дава понятието QC-Айнщайново многообразие.

Определение 2.1.2. *Една QC-структура се нарича QC-Айнщайнова, ако хоризонталният QC-тензор на Ricci е константно пропорционален на метриката,*

$$Ric(X,Y) = 2(n+2)Sg(X,Y).$$

QC-многообразие, чиято QC-структура е QC-Айнщайнова, се нарича QC-Айнщайново многообразие.

Хоризонталният тензор на Ricci и хоризонталните 2-форми от тип на Ricci могат да бъдат изразени чрез тензорите на торзията на свързаността на Biquard [66] (вж. също и [58, 65]). В следващата теорема са събрани необходимите ни факти от [66, Theorem 1.3, Theorem 3.12, Corollary 3.14, Proposition 4.3 и Proposition 4.4], които с лека модификация са дадени в [58].

Теорема 2.1.3 ([66]). *Върху* $(4n+3)$*-мерно QC-многообразие* $(M,\eta,g,\mathbb{Q})$ *с нормализирана скаларна кривина* S *са в сила следните връзки:*

$$Ric(X,Y) = (2n+2)T^0(X,Y) + (4n+10)U(X,Y) + 2(n+2)Sg(X,Y),$$

$$\rho_s(X,I_sY) = -\frac{1}{2}\Big[T^0(X,Y) + T^0(I_sX,I_sY)\Big] - 2U(X,Y) - Sg(X,Y),$$

$$\tau_s(X,I_sY) = -\frac{n+2}{2n}\Big[T^0(X,Y) + T^0(I_sX,I_sY)\Big] - Sg(X,Y),$$

$$T(\xi_i,\xi_j) = -S\xi_k - [\xi_i,\xi_j]_{|H}, \qquad S = -g(T(\xi_1,\xi_2),\xi_3), \tag{2.1.16}$$

$$g(T(\xi_i,\xi_j),X) = -\rho_k(I_iX,\xi_i) = -\rho_k(I_jX,\xi_j) = -g([\xi_i,\xi_j],X),$$

$$\frac{1}{2}\xi_j(S) = \rho_i(\xi_i,\xi_j) + \rho_k(\xi_k,\xi_j),$$

$$\rho_i(\xi_i,X) = \frac{1}{2}\Big[\rho_i(\xi_j,I_kX) - \rho_j(\xi_k,I_iX) - \rho_k(\xi_i,I_jX)\Big] + \frac{X(S)}{4}.$$

За $n=1$ *горните формули важат с* $U=0$.

Условието за QC-Айнщайновост е еквивалентно на тъждественото анулиране на торзионния ендоморфизъм на свързаността на Biquard. В този случай нормализираната скаларна кривина S *е константа и вертикалното разпределение е интегруемо*[4] *за* $n>1$.

2.1.5. Тъждества на Ricci. *Вторият и третият ковариантен диференциал* на гладка функция f върху M относно свързаността на Biquard се дефинират по стандартен начин чрез равенствата

$$\nabla^2 f(A,B) := (\nabla_A df)(B), \quad \nabla^3 f(A,B,C) := (\nabla_A\nabla^2 f)(B,C).$$

[4]Едно разпределение се нарича *интегруемо (инволютивно)*, ако комутаторът на две векторни полета от него също принадлежи на разпределението.

Вторият ковариантен диференциал $\nabla^2 f$ на f се нарича още *Хесиан* на f. За доказателствата на основните резултати ще използваме неколкократно изброените по-долу *тъждества на Ricci* от ред 2 и 3, свързани с ковариантните диференциали, вж. също [58]. Нека $\xi_i, i = 1,2,3$, е векторно поле на Reeb, $X, Y \in H$ и f е гладка функция върху QC-многообразието M. С ∇f ще означаваме *хоризонталния градиент* на f, т.е.

$$g(\nabla f, X) = df(X).$$

В сила са следните тъждества на Ricci:

$$\begin{aligned}
&\nabla^2 f(X,Y) - \nabla^2 f(Y,X) = -2\sum_{s=1}^{3}\omega_s(X,Y)df(\xi_s)\\
&\nabla^2 f(X,\xi_s) - \nabla^2 f(\xi_s,X) = T(\xi_s,X,\nabla f)\\
&\nabla^3 f(X,Y,Z) - \nabla^3 f(Y,X,Z) = -R(X,Y,Z,\nabla f)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - 2\sum_{s=1}^{3}\omega_s(X,Y)\nabla^2 f(\xi_s,Z).
\end{aligned} \tag{2.1.17}$$

Те се получават леко като използваме дефиницията на ковариантните диференциали, свойствата на свързаността на Biquard, както и тъждеството (2.1.7).

2.1.6. Теорема за хоризонталната дивергенция. Нека е дадено QC-многообразието $(M,\eta,g,\mathbb{Q})$ от размерност $4n+3 > 7$. За фиксирано $s \in \{1,2,3\}$, формата

$$Vol_\eta = \eta_1 \wedge \eta_2 \wedge \eta_3 \wedge \omega_s^{2n} \tag{2.1.18}$$

е от степен $4n+3$ и е независима от s. Освен това, въпреки че локално се задава от (локалните) 1-форми η_1, η_2, η_3, тя е еднозначно определена в околност на всяка точка. Следователно, Vol_η е глобално дефинирана *форма на обема.*

Хоризонтална дивергенция на хоризонтална 1-форма (или хоризонтално векторно поле) $\sigma \in \Lambda^1(H)$ се дефинира чрез равенството:

$$\nabla^*\sigma \;= -tr|_H^g \nabla\sigma = \; -\nabla\sigma(e_a,e_a). \tag{2.1.19}$$

Следващото твърдение, което вземаме наготово от [66] (вж. също [93]) ни позволява да "интегрираме по части".

Твърдение 2.1.4 ([66]). *Върху компактно QC-многообразие $(M, \eta, g, \mathbb{Q})$ е в сила следната формула за дивергенцията*

$$\int_M (\nabla^* \sigma)\, Vol_\eta \;=\; 0.$$

2.2. Формулировка на основните резултати

В този раздел даваме формулировка на основните резултати, именно теорема от тип на Lichnerowicz за първата собствена стойност на суб-Лапласиана, теорема от тип на Obata, характеризираща случая на равенство, и теорема, даваща едно интегрално неравенство, включващо суб-Лапласиана и Хесиана на една функция с компактен носител върху M и тензорите на кривината и на торзията на свързаността на Biquard. Посочваме и някои следствия от това неравенство.

Преди всичко, да дадем някои дефиниции. Нека f е дадена гладка функция върху $M, f \in \mathcal{F}(M)$. *Суб-Лапласиан* (или *хоризонтален Лапласиан*) и *норма на хоризонталния градиент* на f се дефинират съответно чрез равенствата

$$\begin{aligned} \triangle f \;&=\; -tr^g_{|H}(\nabla^2 f) \;=\; \nabla^* df = -\nabla^2 f(e_a, e_a), \\ |\nabla f|^2 \;&=\; df(e_a) df(e_a). \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

Функцията f се нарича *собствена функция* на $\triangle$ със *собствена стойност* λ, ако

$$\triangle f = \lambda f, \tag{2.2.2}$$

където λ е константа. Формулата за дивергенцията ни дава, че върху компактно QC-многообразие всички собствени стойности на суб-Лапласиана са неотрицателни. Действително, нека λ е собствена стойност на $\triangle$ и f е нейна собствена функция, $\triangle f = \lambda f$. Интегрирайки равенството $f \triangle f = \lambda f^2$, получаваме последователно

$$\begin{aligned} \int_M f \triangle f\, Vol_\eta = -\int_M f \nabla^2 f(e_a, e_a)\, Vol_\eta = \int_M |\nabla f|^2\, Vol_\eta \\ = \int_M \lambda f^2\, Vol_\eta, \end{aligned}$$

където във второто равенство интегрирахме по части. Така,

$$\lambda \int_M f^2 \, Vol_\eta = \int_M |\nabla f|^2 \, Vol_\eta,$$

и неотрицателността на λ е очевидна.

Следва основният резултат.

Теорема 2.2.1. *Нека $(M, \eta, g, \mathbb{Q})$ е компактно кватернионно-контактно многообразие от размерност $4n+3>7$. Ако тензорът на Ricci и тензорът на торзията на свързаността на Biquard удовлетворяват наравенството*

$$\begin{aligned}(2.2.3) \quad Ric(X,X) + \frac{2(4n+5)}{2n+1} T^0(X,X) \\ + \frac{6(2n^2+5n-1)}{(n-1)(2n+1)} U(X,X) \geq k_0 g(X,X)\end{aligned}$$

за някоя положителна константа k_0, тогава всяка положителна собствена стойност λ на суб-Лапласиана $\triangle$ удовлетворява неравенството

$$(2.2.4) \qquad \lambda \geq \frac{n}{n+2} k_0.$$

Теорема 2.2.1 дава долна граница за множеството от положителните собствени стойности на суб-Лапласиана. Следователно, тя може да бъде интерпретирана като даваща долна граница за първата положителна собствена стойност λ_1 на суб-Лапласиана, т.е. за най-малкото положително число, за което е в сила (2.2.2). Оценката (2.2.4) е точна в следния смисъл. За 3-Сасакиевата сфера S^{4n+3} от размерност $4n+3$ имаме [**59**]:

$$Ric(X,Y) = 4(n+2)g(X,Y), \quad \lambda_1 = 4n.$$

Значи в този случай $k_0 = 4(n+2)$, а $\lambda_1 = 4n = \frac{n}{n+2}k_0$, т.е. равенството в 2.2.4 се достига (поне) върху 3-Сасакиевата сфера. Доказателството на Теорема 2.2.1 даваме в Раздел 2.4.

Следващият основен резултат изследва случая на равенство от Теорема 2.2.1 при условие, че многообразието е QC-Айнщайново.

Теорема 2.2.2. *Нека $(M, \eta, g, \mathbb{Q})$ е компактно QC-Айнщайново многообразие от размерност $4n+3>7$ с QC-скаларна кривина*

$Scal = 16n(n+2)$,

$$Ric(X,Y) = \frac{1}{4n} Scal \cdot g(X,Y) = 4(n+2)g(X,Y).$$

Първата собствена стойност λ_1 на суб-Лапласиана е равна на $4n$ точно тогава, когато $(M,\eta,g,\mathbb{Q})$ е QC-еквивалентно на 3-Сасакиевата сфера от размерност $4n+3$. В частност, върху 3-Сасакиево многообразие от размерност $4n+3$, $n>1$, първата положителна собствена стойност на суб-Лапласиана е равна на $4n$ точно тогава, когато 3-Сасакиевото многообразие е QC-еквивалентно на 3-Сасакиевата сфера.

Доказателството на Теорема 2.2.2 даваме в Раздел 2.5.

Теоремата, която следва, ни дава едно интегрално неравенство между квадрата на суб-Лапласиана и квадрата на нормата на хоризонталния Хесиан на една гладка функция f с компактен носител върху M, $f \in \mathcal{C}_o^\infty(M)$, включващо тензора на торзията и тензора на Ricci на свързаността на Biquard.

Теорема 2.2.3. *Нека $(M,\eta,g,\mathbb{Q})$ е $(4n+3)$-мерно QC-многообразие, $n>1$. Тогава за всяка $f \in \mathcal{C}_o^\infty(M)$ следното интегрално неравенство е в сила:*

$$(2.2.5) \quad \int_M |\triangle f|^2 \, Vol_\eta \geq \frac{n}{n+1}\int_M |\nabla^2 f|^2 \, Vol_\eta$$
$$+\frac{n^2}{n^2-1}\int_M \Big[Ric(\nabla f,\nabla f) - \frac{4}{n}T^0(\nabla f,\nabla f) - 6U(\nabla f,\nabla f) - 6S|\nabla f|^2\Big] \, Vol_\eta$$
$$= \frac{n}{n+1}\int_M |\nabla^2 f|^2 \; Vol_\eta$$
$$+\int_M \Big[\frac{2n(n+2)}{n+1}T^0(\nabla f,\nabla f) + \frac{4n^2}{n-1}U(\nabla f,\nabla f) + \frac{2n^2}{n+1}S|\nabla f|^2\Big] \, Vol_\eta.$$

Доказателството на Теорема 2.2.3 даваме в Раздел 2.6.

За QC-Айнщайново многообразие, където $T^0 = U = 0$, Теорема 2.2.3 ни дава долното следствие, вземайки предвид, че QC-Айнщайново многообразие от размерност поне единадесет има константна QC-скаларна кривина, вж. [**66**].

Следствие 2.2.4. *Нека $(M,\eta,g,\mathbb{Q})$ е $(4n+3)$-мерно QC-Айнщайново многообразие, $n>1$. Тогава за всяка функция $f \in \mathcal{C}_o^\infty(M)$*

е изпълнено

$$\int_M |\triangle f|^2\, Vol_\eta \geq \frac{n}{n+1}\int_M |\nabla^2 f|^2\, Vol_\eta + \frac{2n^2 S}{n+1}\int_M |\nabla f|^2\, Vol_\eta. \tag{2.2.6}$$

За кватернионната група на Heisenberg с нейната стандартна QC-структура (вж. [66] и [58]), горното следствие ни дава следващия резултат. Целта тук е да прецизираме стойността на константата c_n, понеже дори по-общата Calderón-Zygmund L^p версия важи върху нилпотентни групи на Lie, вж. [32] за хубав обзор.

Следствие 2.2.5. *Нека* $(\boldsymbol{G}\,(\mathbb{H}), \tilde{\Theta})$ *е* $(4n+3)$*-мерната група на Heisenberg, снабдена със стандартната си QC-структура. Тогава за всяка функция* $f \in \mathcal{C}^\infty_o(\boldsymbol{G}\,(\mathbb{H}))$ *е изпълнено*

$$\|\nabla^2 f\|_{L^2(\boldsymbol{G}\,(\mathbb{H}))} \leq c_n\, \|\triangle f\|_{L^2(\boldsymbol{G}\,(\mathbb{H}))}, \qquad c_n = \sqrt{1+\frac{1}{n}}. \tag{2.2.7}$$

Като следствие от горната оценка, вземайки предвид [27] и [26], които обобщават резултатите на Cordes в суб-Римановия случай, получаваме, че за

$$2 \leq p < 2 + \frac{n + n\sqrt{16n^2+8n-3}}{4n^2+2n-1}, \tag{2.2.8}$$

произволна p-хармонична функция, дефинирана върху отворено множество $\Omega \subset \boldsymbol{G}\,(\mathbb{H})$ върху кватернионната група на Heisenberg от размерност $4n+3$, $f \in S^{1,p}(\boldsymbol{G}\,(\mathbb{H}))$, има допълнителна регулярност (additional regularity) $f \in S^{2,2}_{loc}(\boldsymbol{G}\,(\mathbb{H}))$. Тук с $S^{k,p}\,(\Omega)$ са означени обичайните неизотропни Соболеви пространства, вж. например [32]. Подобно на [27] и [26], може да се получи $\mathcal{C}^{1,\alpha}$ регулярност при подходящи ограничения за p. Получаването на $\mathcal{C}^{1,\alpha}$ регулярност на решението е все още отворен проблем, с изключение на някои случаи, вж. [26], [77] и [38], както и препратките там. Първата $\mathcal{C}^{1,\alpha}$ оценка е получена за суб-Лапласиана върху групата на Heisenberg [17].

2.3. Формула от тип на Bochner за суб-Лапласиана

В този раздел доказваме формула от тип на Bochner за суб-Лапласиана на дадена гладка функция върху QC-многообразие.

Тази формула ще е основният инструмент при намирането на оценката за първата собствена стойност на суб-Лапласиана. Освен това, доказваме и някои помощни твърдения, които ще използваме при доказателството на основния резултат.

Теорема 2.3.1. *Нека е дадено QC-многообразие M от размерност $4n+3$ и $f \in \mathcal{F}(M)$. Тогава е в сила следната формула (от тип на Bochner):*

$$-\frac{1}{2}\triangle|\nabla f|^2 = |\nabla^2 f|^2 - g\left(\nabla(\triangle f), \nabla f\right) + Ric(\nabla f, \nabla f) + 2\sum_{s=1}^{3} T(\xi_s, I_s\nabla f, \nabla f) + 4\sum_{s=1}^{3} \nabla^2 f(\xi_s, I_s\nabla f). \tag{2.3.1}$$

Доказателство. Използвайки дефинициите на суб-Лапласиана и нормата на хоризонталния градиент, имаме

$$-\frac{1}{2}\triangle|\nabla f|^2 = \nabla^3 f(e_a, e_a, e_b)df(e_b) + \nabla^2 f(e_a, e_b)\nabla^2 f(e_a, e_b) = \nabla^3 f(e_a, e_a, e_b)df(e_b) + |\nabla^2 f|^2. \tag{2.3.2}$$

За да пресметнем първото събираемо от дясната страна на (2.3.2), ще използваме тъждествата на Ricci (2.1.17). Прилагайки (2.1.3) към (2.1.7), получаваме

$$(\nabla_X T)(Y, Z) = 0. \tag{2.3.3}$$

Като използваме няколко пъти тъждествата на Ricci (2.1.17) и (2.3.3), добиваме следната редица от равенства:

$$
\begin{aligned}
(2.3.4)\quad & \nabla^3 f(e_a,e_a,e_b)df(e_b) \\
&= \nabla^3 f(e_a,e_b,e_a)df(e_b) - 2\sum_{s=1}^{3}\omega_s(e_a,e_b)df(e_b)\nabla^2 f(e_a,\xi_s) \\
&= \nabla^3 f(e_b,e_a,e_a)df(e_b) - R(e_a,e_b,e_a,e_c)df(e_c)df(e_b) \\
&\quad - 2\sum_{s=1}^{3}\omega_s(e_a,e_b)df(e_b)\Big[\nabla^2 f(\xi_s,e_a) + \nabla^2 f(e_a,\xi_s)\Big] \\
&= -d(\triangle f)(e_b)df(e_b) + Ric(\nabla f,\nabla f) + 4\sum_{s=1}^{3}\nabla^2 f(\xi_s, I_s\nabla f) \\
&\qquad + 2\sum_{s=1}^{3}T(\xi_s, I_s\nabla f,\nabla f).
\end{aligned}
$$

Полагайки (2.3.4) в (2.3.2), получаваме формулата (2.3.1). ■
В сила е

Следствие 2.3.2. *Върху QC-многообразие от размерност* $4n+3$ *е вярна формулата*

$$
\begin{aligned}
(2.3.5)\quad & -\frac{1}{2}\triangle|\nabla f|^2 = -d(\triangle f)(e_a)df(e_a) + Ric(\nabla f,\nabla f) \\
&+ 2T^0(\nabla f,\nabla f) - 6U(\nabla f,\nabla f) + |\nabla^2 f|^2 + 4\sum_{s=1}^{3}\nabla^2 f(\xi_s, I_s\nabla f).
\end{aligned}
$$

Доказателство. Използвайки (2.1.15) заедно с (2.1.13), пресмятаме

$$
(2.3.6)\qquad 2\sum_{s=1}^{3}T(\xi_s, I_s\nabla f,\nabla f) = 2T^0(\nabla f,\nabla f) - 6U(\nabla f,\nabla f),
$$

което, комбинирано с (2.3.1), ни дава (2.3.5). ■

Следващата ни цел е да пресметнем по два начина последното събираемо в дясната страна на (2.3.5). Първо, ако Ψ е ендоморфизъм върху H, в сила е $Sp(n)Sp(1)$-инвариантното му ортогонално разлагане $\Psi_{[3]} \oplus \Psi_{[-1]}$. В частност, получаваме следното $Sp(n)Sp(1)$-инвариантно разлагане на хоризонталния Хесиан $\nabla^2 f$ (след обичайното отъждествяване на тензори посредством метриката):

$$
\begin{aligned}
(\nabla^2 f)_{[3]}(X,Y) &= \frac{1}{4}\Big[\nabla^2 f(X,Y) + \sum_{s=1}^{3} \nabla^2 f(I_sX, I_sY)\Big] \\
(\nabla^2 f)_{[-1]}(X,Y) &= \frac{1}{4}\Big[3\nabla^2 f(X,Y) - \sum_{s=1}^{3} \nabla^2 f(I_sX, I_sY)\Big].
\end{aligned} \tag{2.3.7}
$$

Продължаваме със следната лема, която ни дава единия начин за изразяване на последното събираемо в дясната страна на (2.3.5).

Лема 2.3.3. *Върху компактно QC-многообразие от размерност $4n+3$ е в сила следната интегрална формула:*

$$
\begin{aligned}
&\int_M \sum_{s=1}^{3} \nabla^2 f(\xi_s, I_s\nabla f)\, Vol_\eta \\
&= \int_M \Big[\frac{3}{4n}|(\nabla^2 f)_{[3]}|^2 - \frac{1}{4n}|(\nabla^2 f)_{[-1]}|^2 - \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{3} \tau_s(I_s\nabla f, \nabla f)\Big]\, Vol_\eta.
\end{aligned} \tag{2.3.8}
$$

Доказателство. Най-напред да споменем, че ортонормираният базис

$$\{e_1, e_2 = I_1e_1, e_3 = I_2e_1, e_4 = I_3e_1, \dots, e_{4n} = I_3e_{4n-3}, \xi_1, \xi_2, \xi_3\}$$

на TM се нарича *QC-нормален* (в точка), ako 1-формите на свързаността на Biquard се анулират (в тази точка). Неговото съществуване е доказано в Lemma 4.5 в [**66**], където се твърди, че QC-нормален базис съществува във всяка точка от многообразието.

Използвайки отъждествяването на 3-мерните линейни пространства, породени от $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ и $\{I_1, I_2, I_3\}$, с $\mathbb{R}^3$, получаваме, че рестрикцията на действието на групата $Sp(n)Sp(1)$ върху тези пространства може да бъде отъждествена с действието на групата $SO(3)$, т.е. $\xi_i = \sum_{t=1}^{3} \Psi_{it}\bar{\xi}_t$ и $I_i = \sum_{t=1}^{3} \Psi_{it}\bar{I}_t$, $i = 1,2,3$, където $\Psi = (\Psi_{st}) \in SO(3)$. Може лесно да се провери, че хоризонталната 1-форма

$$B(X) = \sum_{s=1}^{3} \nabla^2 f(I_sX, I_se_a)df(e_a)$$

е $Sp(n)Sp(1)$-инвариантна (т.е. не зависи от избора на ортонормирания базис на TM), например,

$$\bar{B}(X) = (det\Psi)\, B(X) = B(X).$$

Следователно, достатъчно е да изчислим дивергенцията на B в QC-нормален ортонормиран базис. За да избегнем въвеждането на нови означения, ще предполагаме, че $\{e_1, \dots, e_{4n}, \xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ е QC-нормален базис.

Използвайки, че свързаността на Biquard запазва разлагането $TM = H \oplus V$, тъждествата на Ricci (2.1.17), дефиницията на τ_s и (2.1.7), получаваме

$$(2.3.9)\quad \nabla^* B$$

$$= \sum_{s=1}^{3} \Big[\nabla^3 f(e_b, I_s e_b, I_s e_a) df(e_a) + \nabla^2 f(I_s e_b, I_s e_a)\nabla^2 f(e_b, e_a)\Big]$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{3} \Big[\nabla^3 f(e_b, I_s e_b, I_s e_a) - \nabla^3 f(I_s e_b, e_b, I_s e_a)\Big] df(e_a)$$

$$+ \sum_{s=1}^{3} \nabla^2 f(I_s e_b, I_s e_a)\nabla^2 f(e_b, e_a) = -\frac{1}{2} R(e_b, I_s e_b, I_s e_a, e_c) df(e_c) df(e_a)$$

$$- \sum_{s=1}^{3} \omega_s(e_b, I_s e_b)\nabla^2 f(\xi_s, I_s e_a) df(e_a) + \sum_{s=1}^{3} \nabla^2 f(I_s e_b, I_s e_a)\nabla^2 f(e_b, e_a)$$

$$= -2n \sum_{s=1}^{3} \tau_s(I_s \nabla f, \nabla f) - 4n \sum_{s=1}^{3} \nabla^2 f(\xi_s, I_s \nabla f) + g\left(\Upsilon \nabla^2 f, \nabla^2 f\right),$$

където използвахме (2.1.10) в последното събираемо на 6-ия ред и $I_s\alpha(X) = -\alpha(I_s X)$ за хоризонтална 1-форма α. Използвайки ортогоналността на проекциите $\Psi_{[3]}$ и $\Psi_{[-1]}$, получаваме

$$g\left(\Upsilon \nabla^2 f, \nabla^2 f\right) = 3|(\nabla^2 f)_{[3]}|^2 - |(\nabla^2 f)_{[-1]}|^2.$$

Полагането на последното равенство в (2.3.9) и формулата за дивергенцията ни дават (2.3.8). С това доказателството на лемата е завършено. ■

Следва другото представяне на последното събираемо в дясната страна на (2.3.5).

Лема 2.3.4. *Върху компактно QC-многообразие от размерност $4n+3$ е в сила следната интегрална формула.*

$$\int_M \sum_{s=1}^{3} \nabla^2 f(\xi_s, I_s \nabla f)\, Vol_\eta = -\int_M \Big[4n \sum_{s=1}^{3} \Big(df(\xi_s)\Big)^2 + \sum_{s=1}^{3} T(\xi_s, I_s\nabla f, \nabla f)\Big]\, Vol_\eta. \tag{2.3.10}$$

Доказателство. Да отбележим, че по дефиниция имаме

$$\Big[g\left(\nabla^2 f, \omega_s\right)\Big]^2 = \Big[\nabla^2 f(e_a, I_s e_a)\Big]^2.$$

От тъждествата на Ricci имаме

$$g(\nabla^2 f, \omega_s) = \nabla^2 f(e_a, I_s e_a) = -4n df(\xi_s), \tag{2.3.11}$$

което влече

$$16n^2 \int_M \sum_{s=1}^{3} \Big(df(\xi_s)\Big)^2\; Vol_\eta = \int_M \sum_{s=1}^{3} \left[g\left(\nabla^2 f, \omega_s\right)\right]^2\; Vol_\eta = -4n \int_M \sum_{s=1}^{3} g(\nabla^2 f, \omega_s)\, df(\xi_s)\; Vol_\eta. \tag{2.3.12}$$

Нека да разгледаме $Sp(n)Sp(1)$-инвариантната хоризонтална 1-форма C, дефинирана чрез

$$C(X) = \sum_{s=1}^{3} df(I_s X) df(\xi_s),$$

чиято дивергенция е (работейки в QC-нормален ортонормиран базис)

$$\nabla^* C = \sum_{s=1}^{3} \Big[\nabla^2 f(e_a, I_s e_a)\, df(\xi_s) + \nabla^2 f(e_a, \xi_s)\, df(I_s e_a)\Big] = \sum_{s=1}^{3} \Big[g(\nabla^2 f, \omega_s)\, df(\xi_s) - \nabla^2 f(\xi_s, I_s\nabla f) - T(\xi_s, I_s \nabla f, \nabla f)\Big]. \tag{2.3.13}$$

В горните пресмятания използвахме втората формула от (2.1.17), за да получим второто равенство на (2.3.13). Интегрираме (2.3.13) върху M и използваме (2.3.12), за да получим (2.3.10), с което доказателството на лемата завършва. ∎

2.4. Доказателство на Теорема 2.2.1

В този раздел даваме доказателството на Теорема 2.2.1, което се основава на формулата от тип на Bochner 2.3.1 и двете леми, доказани в предишния раздел.

Доказателство. Започваме с интегрирането на формулата (2.3.1) върху компактното многообразие M от размерност $4n+3$. Използвайки формулата за дивергенцията, получаваме:

$$
\begin{aligned}
(2.4.1)\quad 0 = \int_M \Big[-(\triangle f)^2 + |(\nabla^2 f)_{[3]}|^2 + |(\nabla^2 f)_{[-1]}|^2 + Ric(\nabla f, \nabla f) \\
+ 2\sum_{s=1}^{3} T(\xi_s, I_s\nabla f, \nabla f)\Big]\, Vol_\eta + 4\int_M \sum_{s=1}^{3} \nabla^2 f(\xi_s, I_s\nabla f)\; Vol_\eta.
\end{aligned}
$$

Следвайки Greenleaf [**44**], представяме последното събираемо в (2.4.1) както следва

$$
\begin{aligned}
&\int_M \sum_{s=1}^{3} \nabla^2 f(\xi_s, I_s\nabla f)\; Vol_\eta \\
&= (1-c)\int_M \sum_{s=1}^{3} \nabla^2 f(\xi_s, I_s\nabla f)\; Vol_\eta + c\int_M \sum_{s=1}^{3} \nabla^2 f(\xi_s, I_s\nabla f)\; Vol_\eta,
\end{aligned}
$$

където c е параметър, който подлежи на определяне. Прилагайки Лема 2.3.3 и Лема 2.3.4, съответно за първото и второто събираемо в дясната страна на горното равенство, тъждеството (2.4.1) приема формата

$$
\begin{aligned}
(2.4.2)\quad 0 = \int_M \Big[-(\triangle f)^2 + |(\nabla^2 f)_{[3]}|^2 + |(\nabla^2 f)_{[-1]}|^2 \Big]\, Vol_\eta \\
+ \int_M \Big[Ric(\nabla f, \nabla f) + 2\sum_{s=1}^{3} T(\xi_s, I_s\nabla f, \nabla f)\Big]\, Vol_\eta \\
+4(1-c)\int_M \Big[\frac{3}{4n}|(\nabla^2 f)_{[3]}|^2 - \frac{1}{4n}|(\nabla^2 f)_{[-1]}|^2 - \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{3}\tau_s(I_s\nabla f, \nabla f)\Big]\, Vol_\eta \\
-4c\int_M \Big[4n\sum_{s=1}^{3}\Big(df(\xi_s)\Big)^2 + \sum_{s=1}^{3} T(\xi_s, I_s\nabla f, \nabla f)\Big]\, Vol_\eta.
\end{aligned}
$$

Равенството (2.4.2) може да бъде опростено по следния начин:

$$
\begin{aligned}
(2.4.3)\quad 0 = &-\int_M (\triangle f)^2\, Vol_\eta \\
&+\int_M \Big[\Big(1+\frac{3(1-c)}{n}\Big)|(\nabla^2 f)_{[3]}|^2+\Big(1-\frac{1-c}{n}\Big)|(\nabla^2 f)_{[-1]}|^2\Big]\, Vol_\eta \\
&+\int_M \Big[Ric(\nabla f,\nabla f)-16nc\sum_{s=1}^3\Big(df(\xi_s)\Big)^2-2(1-c)\sum_{s=1}^3\tau_s(I_s\nabla f,\nabla f)\Big]\, Vol_\eta \\
&+(2-4c)\int_M\sum_{s=1}^3 T(\xi_s,I_s\nabla f,\nabla f)\, Vol_\eta = -\int_M (\triangle f)^2\, Vol_\eta \\
&+\int_M \Big[\Big(1+\frac{3(1-c)}{n}\Big)|(\nabla^2 f)_{[3]}|^2+\Big(1-\frac{1-c}{n}\Big)|(\nabla^2 f)_{[-1]}|^2\Big]\, Vol_\eta \\
&+\int_M \Big[Ric(\nabla f,\nabla f)-2(1-c)\sum_{s=1}^3\tau_s(I_s\nabla f,\nabla f)-\frac{c}{n}\sum_{s=1}^3\big[g\big(\nabla^2 f,\omega_s\big)\big]^2\Big]\, Vol_\eta \\
&+(2-4c)\int_M\sum_{s=1}^3 T(\xi_s,I_s\nabla f,\nabla f)\, Vol_\eta,
\end{aligned}
$$

където взехме в предвид (2.3.11), за да получим последното в горната редица от равенства. Полагаме

$$
(2.4.4)\qquad c=\frac{n-1}{4n-1},
$$

така че е изпълнено $1-(1-c)/n=4c$. С този избор на параметъра c равенството (2.4.3) придобива вида

$$
\begin{aligned}
(2.4.5)\quad 0 = &\int_M \Big[-(\triangle f)^2+\frac{4(n+2)}{4n-1}|(\nabla^2 f)_{[3]}|^2\Big]\, Vol_\eta \\
&+4\frac{n-1}{4n-1}\int_M\Big[|(\nabla^2 f)_{[-1]}|^2-\frac{1}{4n}\sum_{s=1}^3\big[g\big(\nabla^2 f,\omega_s\big)\big]^2\Big]\, Vol_\eta \\
&+\int_M\Big[Ric(\nabla f,\nabla f)-\frac{6n}{4n-1}\sum_{s=1}^3\tau_s(I_s\nabla f,\nabla f)\Big]\, Vol_\eta \\
&+\frac{4n+2}{4n-1}\int_M\sum_{s=1}^3 T(\xi_s,I_s\nabla f,\nabla f)\, Vol_\eta.
\end{aligned}
$$

Използвайки, че $\left\{\frac{1}{2\sqrt{n}}\omega_s\right\}$ е ортонормирано множество в $\Psi_{[-1]}$, имаме

$$|(\nabla^2 f)_{[-1]}|^2 \geq \frac{1}{4n}\sum_{s=1}^{3}\left[g\left(\nabla^2 f, \omega_s\right)\right]^2, \tag{2.4.6}$$

докато проекцията върху $\left\{\frac{1}{2\sqrt{n}}g\right\}$ ни дава

$$|(\nabla^2 f)_{[3]}|^2 \geq \frac{1}{4n}(\triangle f)^2. \tag{2.4.7}$$

Като приложим горните проекционни неравенства в (2.4.5), добиваме

$$\begin{aligned} 0 \geq \int_M &\Big[-\frac{2(n-1)(2n+1)}{n(4n-1)}(\triangle f)^2\Big]\, Vol_\eta \\ &+ \int_M \Big[Ric(\nabla f, \nabla f) + \frac{4n+2}{4n-1}\sum_{s=1}^{3} T(\xi_s, I_s\nabla f, \nabla f)\Big]\, Vol_\eta \\ &\qquad - \frac{6n}{4n-1}\int_M \sum_{s=1}^{3}\tau_s(I_s\nabla f, \nabla f)\, Vol_\eta. \end{aligned} \tag{2.4.8}$$

Използвайки тъждествата от Теорема 2.1.3 и (2.1.13), пресмятаме

$$\sum_{s=1}^{3}\tau_s(I_s X, Y) = \frac{n+2}{n}T^0(X,Y) + 3Sg(X,Y). \tag{2.4.9}$$

Като вземем предвид първото равенство от Теорема 2.1.3, (2.3.6) и (2.4.9), за сумата от второто, третото и четвъртото събираемо (2.4.8), изразена чрез Ric, T^0 и U, получаваме

$$\begin{aligned} &Ric(\nabla f, \nabla f) \\ &\quad - \frac{6n}{4n-1}\sum_{s=1}^{3}\tau_s(I_s\nabla f, \nabla f) + \frac{4n+2}{4n-1}\sum_{s=1}^{3}T(\xi_s, I_s\nabla f, \nabla f) \\ &= \frac{2(n-1)(2n+1)}{(4n-1)(n+2)}\Big[Ric(\nabla f, \nabla f) + \alpha_n T^0(\nabla f, \nabla f) + \beta_n U(\nabla f, \nabla f)\Big], \end{aligned} \tag{2.4.10}$$

където

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{2(4n+5)}{2n+1}, \\ \beta_n &= \frac{24n^2+60n-12}{4n^2-2n-2} = 6\frac{2n^2+5n-1}{(2n+1)(n-1)}. \end{aligned} \tag{2.4.11}$$

Нека сега f е собствена функция на суб-Лапласиана със собствена стойност λ, т.е., предполагаме, че е в сила (2.2.2). Едно интегриране по части ни дава

$$\int_M (\triangle f)^2 \; Vol_\eta = \lambda \int_M f \triangle f \; Vol_\eta = \lambda \int_M |\nabla f|^2 \; Vol_\eta. \tag{2.4.12}$$

Нека предположим, че $n \geq 2$. Като положим (2.4.12) и (2.4.10) в (2.4.8), получаваме

$$\begin{aligned} 0 \geq & \int_M -\lambda |\nabla f|^2 \, Vol_\eta \\ & + \frac{n}{n+2} \int_M \Big[Ric(\nabla f, \nabla f) + \alpha_n T^0(\nabla f, \nabla f) + \beta_n U(\nabla f, \nabla f) \Big] \, Vol_\eta. \end{aligned} \tag{2.4.13}$$

Условието (2.2.3) на теоремата, заедно с (2.4.13), ни дава

$$0 \geq \int_M \left(-\lambda + \frac{n}{n+2} k_0 \right) |\nabla f|^2 \; Vol_\eta, \tag{2.4.14}$$

което влече желаното неравенство

$$\lambda \geq \frac{n}{n+2} k_0.$$

С това доказателството на Теорема 2.2.1 е завършено. ■

Забележка 2.4.1. *Да предположим, че е в сила равенството в Теорема 2.2.1, т.е.*

$$\lambda = \frac{n}{n+2} k_0, \qquad \triangle f = \frac{n}{n+2} k_0 f.$$

За параметъра c, даден в (2.4.4), трябва да бъдат изпълнени равенствата в (2.4.6) и (2.4.7), което ни дава, че хоризонталният Хесиан на собствената функция f се дава в явен вид чрез следното равенство:

$$\nabla^2 f(X,Y) = -\frac{k_0}{4(n+2)} f g(X,Y) - \sum_{s=1}^{3} df(\xi_s) \omega_s(X,Y). \tag{2.4.15}$$

2.5. Доказателство на Теорема 2.2.2

В този раздел доказваме Теорема 2.2.2, като използваме оценката на Lichnerowicz за първата положителна собствена стойност на Римановия Лапласиан [73] и теоремата на Obata [79], характеризираща случая на равенство в оценката на Lichnerowicz, именно, че минималната възможна стойност на положителните собствени стойности се достига върху единичната сфера $S^n(1)$ с кръгова метрика.

2.5.1. Връзка между Лапласиана и суб-Лапласиана. Започваме раздела с една Лема, даваща ни връзката между Римановия Лапласиан и суб-Лапласиана.

Лема 2.5.1. *Нека M е $(4n+3)$-мерно QC-многообразие. Тогава суб-Лапласианът $\triangle$ и Римановият Лапласиан $\triangle^g$, съответстващ на свързаността на Levi-Civita ∇^g на разширената метрика g, са свързани чрез равенството*

$$\triangle^g f = \triangle f - \sum_{s=1}^{3} \xi_s^2 f + df(\sum_{s=1}^{3} \nabla_{\xi_s}\xi_s). \tag{2.5.1}$$

Доказателство. По дефиниция,

$$\triangle^g f = -\sum_{a=1}^{4n} \nabla^g df(e_a, e_a) - \sum_{s=1}^{3} \nabla^g df(\xi_s, \xi_s),$$

където $\{e_1, \dots, e_{4n}, \xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ е ортонормиран базис на $H \oplus V$. Използвайки означението $\widetilde{df}$ за градиента на f, последното равенство може да бъде записано във формата

$$\begin{aligned} \triangle^g f &= -g(\nabla^g_{e_a}\widetilde{df}, e_a) - \sum_{s=1}^{3} g(\nabla^g_{\xi_s}\widetilde{df}, \xi_s) \\ &= -g(\nabla_{e_a}\widetilde{df}, e_a) - \sum_{s=1}^{3} g(\nabla_{\xi_s}\widetilde{df}, \xi_s), \end{aligned} \tag{2.5.2}$$

където използвахме (2.1.2) и тъждествата

$$\sum_{a=1}^{4n} T(e_a, A, e_a) = \sum_{s=1}^{3} T(\xi_s, A, \xi_s) = 0. \tag{2.5.3}$$

Последните следват от свойствата на тензора на торзията T на ∇, изброени в (2.1.16). Сега, връзката (2.5.1) следва от равенството (2.5.2). ■

По-нататък, даваме следното неравенство между първите собствени стойности на Римановия Лапласиан и суб-Лапласиана.

Твърдение 2.5.2. *Нека M е $(4n+3)$-мерно затворено компактно QC-многообразие. Първата положителна собствена стойност μ на Римановия Лапласиан и първата положителна собствена стойност λ на суб-Лапласиана удовлетворяват следното неравенство:*

$$\mu \leq \lambda + \int_M \sum_{s=1}^{3} \Big(df(\xi_s)\Big)^2 \, Vol_\eta \tag{2.5.4}$$

за всяка гладка функция f върху M, за която $\int_M f^2 \, Vol_\eta = 1$.

Доказателство. От вариационната характеризация на първата собствена стойност и (2.5.1) имаме оценката

$$\begin{aligned}\mu \leq \int_M (\triangle^g f) f \, Vol_\eta = \int_M (\triangle f) f \, Vol_\eta \\ - \int_M \Big[\sum_{s=1}^{3} (\xi_s^2 f) f - df(\sum_{s=1}^{3} \nabla_{\xi_s}\xi_s) f \Big] \, Vol_\eta.\end{aligned} \tag{2.5.5}$$

Величината $df(\sum_{s=1}^{3} \nabla_{\xi_s}\xi_s)$ може да бъде пресметната както следва:

$$\begin{aligned}df(\sum_{s=1}^{3} \nabla_{\xi_s}\xi_s) = g(\widetilde{df}, \sum_{s=1}^{3} \nabla_{\xi_s}\xi_s) = \sum_{t=1}^{3} df(\xi_t) g(\xi_t, \sum_{s=1}^{3} \nabla_{\xi_s}\xi_s) \\ = \sum_{s,t=1}^{3} df(\xi_t) g(\nabla_{\xi_s}\xi_s, \xi_t).\end{aligned} \tag{2.5.6}$$

Да разгледаме векторното поле $f df(\xi_s)\xi_s$. Неговата Риманова дивергенция $div[f df(\xi_s)\xi_s]$ се пресмята както следва

$$\begin{aligned}&div[f(\xi_s f)\xi_s] \\ &= (df(\xi_s))^2 + (\xi_s^2 f) f + f df(\xi_s) \Big[g(\nabla^g_{e_a}\xi_s, e_a) + \sum_{t=1}^{3} g(\nabla^g_{\xi_t}\xi_s, \xi_t) \Big] \\ &= (df(\xi_s))^2 + (\xi_s^2 f) f + f df(\xi_s) \Big[g(\nabla_{e_a}\xi_s, e_a) + \sum_{t=1}^{3} g(\nabla_{\xi_t}\xi_s, \xi_t) \Big] \\ &= (df(\xi_s))^2 + (\xi_s^2 f) f - f df(\xi_s) \sum_{t=1}^{3} g(\nabla_{\xi_t}\xi_t, \xi_s),\end{aligned} \tag{2.5.7}$$

където използвахме (2.1.2), (2.5.3) и факта, че свързаността на Biquard запава разлагането $H \oplus V$ и метриката g, за да установим второто и третото равенство в горната редица от равенства. Като положим (2.5.7) и (2.5.6) в (2.5.5), и използваме формулата за Римановата дивергенция[5], получаваме неравенството (2.5.4). ■

2.5.2. Доказателство на Теорема 2.2.2. Да предположим, че M е QC-Айнщайново многообразие от размерност най-малко единадесет ($n \geq 2$) с нормализирана скаларна кривина $S = 2$, $Ric = 4(n+2)g$. Да допуснем, че е в сила равенството от Теорема 2.2.1, т.е. $\lambda = 4n$ и нека $\triangle f = \lambda f$. След евентуално умножаване на f с константа и използвайки формулата за дивергенцията, получаваме следните равенства

$$\begin{gathered}\lambda = 4n, \qquad \triangle f = 4nf, \qquad \int_M f^2\, Vol_\eta = 1, \\ \int_M |\nabla f|^2\, Vol_\eta = \lambda = \frac{1}{\lambda}\int_M (\triangle f)^2\, Vol_\eta.\end{gathered} \tag{2.5.8}$$

В този случай, Лема 2.3.3 и Лема 2.3.4, заедно с равенството (2.4.9), ни дават

$$\int_M \sum_{s=1}^{3} (df(\xi_s))^2\, Vol_\eta = 3. \tag{2.5.9}$$

Сега, от (2.5.4) и (2.5.9) получаваме неравенството

$$\mu \leq 4n + 3. \tag{2.5.10}$$

От друга страна, всяко QC-Айнщайново многообразие с положителна QC-скаларна кривина е локално QC-конформно еквивалентно с 3-Сасакиевата сфера [66] и е добре известен фактът, че всяко 3-Сасакиево многообразие е Айнщайново (по отношение на разширената метрика) с Риманова скаларна кривина $(4n + 2)$ [69], т.е. Римановият тензор на Ricci Ric^g се дава чрез

$$Ric^g(A, A) = (4n + 2)\, g(A, A). \tag{2.5.11}$$

[5] Върху компактно Риманово многообразие интегралът от дивергенцията на произволно гладко векторно поле е равен на нула.

От Теоремата на Lichnerowicz [73] и (2.5.11) имаме

$$\mu \geq 4n+3. \tag{2.5.12}$$

Неравенствата (2.5.10) и (2.5.12) ни дават равенството

$$\mu = 4n+3. \tag{2.5.13}$$

От класическия резултат на Obata [79] заключаваме, че Римановото многообразие (M,g) е изометрично със сферата $S^{4n+3}(1)$, и следователно QC-многообразието $(M,\eta,g,\mathbb{Q})$ е QC-конформно еквивалентно с 3-Сасакиевата сфера от размерност $4n+3$. С това доказателството на Теорема 2.2.2 е завършено. ∎

2.6. Доказателство на Теорема 2.2.3

В този раздел доказваме Теорема 2.2.3. Доказателството е подобно на доказателството на Теорема 2.2.1, обаче тук представяме величината $|(\nabla^2 f)_{[3]}|^2$ по два различни начина. Да отбележим, че по условие функцията f е нула извън даден компакт, така че разглежданите интеграли са добре дефинирани. Започваме с тъждеството (2.4.1). Имаме представянето

$$|(\nabla^2 f)_{[3]}|^2 = (1-c)\,|(\nabla^2 f)_{[3]}|^2 + c\,|(\nabla^2 f)_{[3]}|^2$$

за параметър c, който подлежи на определяне. Като използваме (2.4.7), от горното равенство получаваме

$$|(\nabla^2 f)_{[3]}|^2 \geq \frac{1-c}{4n}\,|\triangle f|^2 + c\,|(\nabla^2 f)_{[3]}|^2$$

когато $1-c \geq 0$. Накрая, използваме (2.3.8) за последното събираемо в така получената форма на (2.4.1). В резултат стигаме до следното неравенство (валидно за $1-c \geq 0$):

$$\begin{aligned}(2.6.1)\quad &\left(1-\frac{1-c}{4n}\right)\int_M |\triangle f|^2\, Vol_\eta \\ &\geq \int_M \left[\left(c+\frac{3}{n}\right)|(\nabla^2 f)_{[3]}|^2 + \left(1-\frac{1}{n}\right)|(\nabla^2 f)_{[-1]}|^2\right] Vol_\eta \\ &+\int_M \left[Ric(\nabla f,\nabla f) - 2\sum_{s=1}^3 \tau_s(I_s\nabla f,\nabla f) + 2\sum_{s=1}^3 T(\xi_s, I_s\nabla f,\nabla f)\right] Vol_\eta.\end{aligned}$$

С цел да получим нормата на хоризонталния Хесиан, решаваме относно c уравнението

$$c + \frac{3}{n} = 1 - \frac{1}{n},$$

което ни дава $c = (n-4)/n$. Понеже $1 - c = 4/n > 0$, полагаме $c = (n-4)/n$ в неравенството (2.6.1), което взема формата

$$\frac{n^2-1}{n^2}\int_M |\triangle f|^2 \, Vol_\eta \geq \frac{n-1}{n}\int_M |\nabla^2 f|^2 \, Vol_\eta \tag{2.6.2}$$

$$+\int_M \Big[Ric(\nabla f, \nabla f) - 2\sum_{s=1}^{3}\tau_s(I_s\nabla f, \nabla f) + 2\sum_{s=1}^{3} T(\xi_s, I_s\nabla f, \nabla f)\Big] \, Vol_\eta.$$

Използвайки формулата за тензора на Ricci от Теорема 2.1.3, (2.3.6) и (2.4.9), след кратко опростяване (предполагайки, че $n > 1$), получаваме желаното неравенство, с което завършва доказателството на теоремата. ■

Библиография

[1] Alekseevsky, D., S. Marchiafava. "Quaternionic structures on a manifold and subordinated structures." *Annali di Matematica Pura ed Applicata. Series IV* CLXXI (1996): 205-273. 42, 43

[2] Alekseevsky, D., Y. Kamishima. "Pseudo-conformal quaternionic CR structure on $(4n+3)$-dimensional manifold." *math.GT/0502531, Ann. Mat. Pura Appl.* 187 (2008): 487–529. 53

[3] Alesker, S., M. Verbitsky. "Quaternionic Monge-Ampere equation and Calabi problem for HKT-manifolds." *Israel Journal of Mathematics* 176 (2010): 109-138. 4

[4] Alexandrov, B., S. Ivanov. "Vanishing theorems on Hermitian manifolds." *Differential Geometry and its Applications* 14, no. 3 (2001): 251-265. 21, 44

[5] Astengo, F., Cowling, M., & Di Blasio, B. "The Cayley transform and uniformly bounded representations." *J. Funct. Anal.* 213 (2004), no. 2, 241-269. 7

[6] Banos, B., A. Swann. "Potentials for hyper-Kähler metrics with torsion." *Classical and Quantum Gravity* 21, no. 13 (2004): 3127-3136. 3

[7] Barberis, M. L., A. Fino. "New HKT manifolds arising from quaternionic representations." *Mathematische Zeitschrift*, 267, no. 3-4 (2011): 717-735. 5, 30

[8] Barberis, M. L., I. G. Dotti, and M. Verbitsky. "Canonical bundles of complex nilmanifolds, with applications to hypercomplex geometry." *Mathematical Research Letters* 16, no. 2 (2009): 331-347. 5, 27, 28, 35

[9] Barletta, E. "The Lichnerowicz theorem on CR manifolds." *Tsukuba J. Math.* 31 (2007), no. 1, 77-97. 6

[10] Becker, K., M. Becker, J.-X. Fu, L.-S. Tseng, S.-T. Yau. "Anomaly Cancellation and Smooth Non-Kahler Solutions in Heterotic String Theory." *Nuclear Physics* B751, no. 1-2 (2006): 108-128. 20

[11] Biquard, O. "Métriques d'Einstein asymptotiquement symétriques." *Astérisque* 265 (2000). 51, 52, 53, 54, 56, 58

[12] Biquard, O. "Quaternionic contact structures." *Quaternionic structures in mathematics and physics (Rome, 1999)*, 23-30 (electronic), *Univ. Studi Roma "La Sapienza", Roma,* 1999. 52, 54

[13] Bismut, J.-M. "A local index theorem for non-Kähler manifolds." *Mathematische Annalen* 284, no. 4 (1989): 681-699. 21

[14] Boyer, C. P. "A note on hyperhermitian four-manifolds." *Proc. Amer. Math. Soc.* 102, no. 1 (1988): 157-164. 17

[15] Boyer, Ch., K. Galicki. "3-Sasakian manifolds." *Surveys in differential geometry: essays on Einstein manifolds, Surv. Differ. Geom.*, VI, Int. Press, Boston, MA, (1999): 123-184. 55

[16] Boyer, Ch., K. Galicki, B. Mann. "The geometry and topology of 3-Sasakian manifolds." *J. Reine Angew. Math.,* 455 (1994): 183-220. 55

[17] Capogna, L. "Regularity of quasi-linear equations in the Heisenberg group." *Comm. Pure Appl. Math.*, 50 (1997), pp. 867-889. 67

[18] Capria, M., S. Salamon. "Yang-Mills fields on quaternionic spaces." *Nonlinearity* 1 (1988), no. 4, 517-530. 58

[19] Chang, S.-C., Chiu, H.-L. "Nonnegativity of CR Paneitz operator and its application to the CR Obata's theorem." *J. Geom. Anal.* 19 (2009), 261-287. 6

[20] Chang, S.-C., Chiu, H.-L. "On the CR analogue of Obata's theorem in a pseudohermitian 3-manifold." *Math. Ann.* 345 (2009), 31-51. 6

[21] Chang, S.-C., Chiu, H.-L. "On the estimate of the first eigenvalue of a subLaplacian on a pseudohermitian 3-manifold." *Pacific J. Math.* 232 (2007), no. 2, 269-282. 6

[22] Chang, S.-C., Wu, C.-T. "The entropy formulas for the CR heat equation and their applications on pseudohermitian (2n+1)-manifolds." *Pacific J. Math.* 246 (2010), no. 1, 1-29. 6

[23] Chanillo, S., & Manfredi, J. J. "Sharp global bounds for the Hessian on pseudo-Hermitian manifolds." *Recent developments in real and harmonic analysis, Appl. Numer. Harmon. Anal., Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA,* 2010, 159-172. 8

[24] Chiu, H.-L. "The sharp lower bound for the first positive eigenvalue of the subLaplacian on a pseudohermitian 3-manifold." *Ann. Global Anal. Geom.* 30 (2006), no. 1, 81-96. 6

[25] Cordes, H. O. "Zero order a priori estimates for solutions of elliptic differential equations." *Proc. Sympos. Pure Math., Vol. IV, American Mathematical Society, Providence, R.I.*, (1961): 157-166. 8

[26] Domokos, A. "On the regularity of subelliptic p-harmonic functions in Carnot groups." *Nonlinear Anal.* 69 (2008), no. 5-6, 1744-1756. 8, 67

[27] Domokos, A., & Manfredi, J. J. "Subelliptic Cordes estimates." *Proc. Amer. Math. Soc.* 133 (2005), no. 4, 1047-1056. 8, 67

[28] Duchemin, D. "Quaternionic contact structures in dimension 7." *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* 56 (2006), no. 4, 851-885. 53, 54

[29] Fernández, M., S. Ivanov, L. Ugarte, R. Villacampa. "Non-Kaehler heterotic-string compactifications with non-zero fluxes and constant dilaton." *Communications in Mathematical Physics* 288, no. 2 (2009): 677-697. 20

[30] Fino, A., A. Tomassini. "A survey on strong KT structures." *Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie* Tome 52 (100), no. 2 (2009): 99-116. 22

[31] Fino, A., M. Parton, S. Salamon. "Families of strong KT manifolds in six dimensions." *Commentarii Mathematici Helvetici* 79, no. 2 (2004): 317-340. 44

[32] Folland, G. B. "Applications of analysis on nilpotent groups to partial differential equations." *Bull. Amer. Math. Soc.* 83 (1977), no. 5, 912-930. 67

[33] Friedrich, Th., S. Ivanov. "Parallel spinors and connections with skew-symmetric torsion in string theory." *The Asian Journal of Mathematics* 6, no. 2 (2002): 3003-3036. 22, 23

[34] Fu, J.-X., S.-T. Yau. "Existence of Supersymmetric Hermitian Metrics with Torsion on Non-Kaehler Manifolds." (2005): preprint arXiv:hep-th/0509028. 20

[35] Fu, J.-X., S.-T. Yau. "The theory of superstring with flux on non-Kähler manifolds and the complex Monge-Ampère equation." *Journal of Differential Geometry* 78, no. 3 (2008): 369-428. 20

[36] Gallot, S. "Équations différentielles caractéristiques de la sphére." *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4) 12 (1979), no. 2, 235-267. 6

[37] Garofalo, N. "Geometric second derivative estimates in Carnot groups and convexity." *Manuscripta Math.* 126 (2008), no. 3, 353-373. 7

[38] Garofalo, N. "Gradient bounds for the horizontal p-Laplacian on a Carnot group and some applications." *Manuscripta Math.* 130 (2009), no. 3, 375-385. 67

[39] Gates, S. J., C. M. Hull, M. Rocek. "Twisted multiplets and new supersymmetric σ-models." *Nuclear Physics B* 248, no. 1 (1984): 157-186. 3

[40] Gauduchon, P. "Hermitian connections and Dirac operators." *Bollettino della Unione Matematica Italiana. Serie VII. Sezione B* 11, no. 2, Suppl. (1997):257-288. 23

[41] Gauntlett, J., D. Martelli, D. Waldram. "Superstrings with intrinsic torsion." *Physical Review* D69 (2004): 086002. 22

[42] Gibbons, G. W., G. Papadopoulos, K. Stelle. "HKT and OKT geometries on soliton black hole moduli space." *Nuclear Physics B* 508, no. 3 (1997): 623-658. 2, 19

[43] Grantcharov, G., Y.-S. Poon. "Geometry of hyper-Kähler connection with torsion." *Communications in Mathematical Physics* 213 (2000): 19-37. 3, 19

[44] Gray, A. "Nearly Kähler manifolds." *Journal of Differntial Geometry* 4 (1970): 283-309. 23, 73

[45] Greenleaf, A. "The first eigenvalue of a subLaplacian on a pseudohermitian manifold." *Commun. Partial Diff. Equations,* 10 (1985), no. 2, 191-217. 6

[46] Griffiths, Ph., J. Harris. "Principles of Algebraic Geometry." *Wiley Classics Library, New York: John Wiley&Sons*, 1994. 49

[47] Gutowski, J., G. Papadopoulos. "The Dynamics of Very Special Black Hole." *Physics Letters B* 472 (2000): 45-53. 19

[48] Gutowski, J., G. Papadopoulos. "The Moduli Spaces of Worldvolume Brane Solitons." *Physics Letters B* 432 (1998): 97-102. 19

[49] Hitchin, N. J. "The self-duality equations on a Riemann surface." *Proc. London Math. Soc.* 55 (1987): 59-126. 17

[50] Howe, P. S., A. Opfermann, G. Papadopoulos. "Twistor spaces for QKT manifolds." *Communications in Mathematical Physics* 197 (1998): 713-727. 45

[51] Howe, P. S., G. Papadopoulos. "Finitness and anomalies in (4,0) supersymmetric sigma models for HKT manifolds." *Nuclear Physics B* 381, no. 1-2 (1992): 360-372. 3

[52] Howe, P. S., G. Papadopoulos. "Twistor spaces for hyper-Kähler manifolds with torsion." *Physics Letters B* 379, no. 1-4 (1996): 80-86. 2, 3, 18, 19

[53] Howe, P. S., G. Papadopoulos, V. Stojevic. "Covariantly constant forms on torsionful geometries from world-sheet and spacetime perspectives." (2010): preprint arXiv: 1004.2824 [hep-th]. 23

[54] Ivanov, S. "Geometry of quaternionic Kähler connections with torsion." *Journal of Geometry and Physics* 41, no. 3 (2002): 235-257. 29, 30, 45, 49

[55] Ivanov, S. "Heterotic supersymmetry, anomaly cancellation and equations of motion." *Physics Letters B* 685 (2010): 190-196. 20

[56] Ivanov, S., A. Petkov. "HKT manifolds with holonomy SL(n,H)." *International Mathematics Research Notices* (2011), doi: 10.1093/imrn/rnr160, 21 pages. 15

[57] Ivanov, S., A. Petkov, D. Vassilev. "The Sharp Lower Bound of the First Eigenvalue of the Sub-Laplacian on a Quaternionic Contact Manifold." *Journal of Geometric Analysis*, doi: 10.1007/s12220-012-9354-9, (2012): 1-23. 51

[58] Ivanov, S., D. Vassilev. "Conformal quaternionic contact curvature and the local sphere theorem." *J. Math. Pures Appl.* 93 (2010): 277-307. 51, 55, 56, 60, 61, 63, 67

[59] Ivanov, S., D. Vassilev. "Extremals for the Sobolev Inequality and the Quaternionic Contact Yamabe Problem." *Imperial College Press Lecture Notes, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ,* 2011. 6, 7, 55, 57, 65

[60] Ivanov, S., D. Vassilev. "Quaternionic contact manifolds with a closed fundamental 4-form." *Bull. London Math. Soc.,* (2010) 42 (6), 1021-1030. 7

[61] Ivanov, S., D. Vassilev, S. Zamkovoy. "Conformal Paracontact curvature and the local flatness theorem." *Geom. Dedicata* 144 (2010), 79-100. 6

[62] Ivanov, S., G. Papadopoulos. "A no-go theorem for string warped compactifications." *Physics Letters* B497, no.3-4 (2001): 309-316. 22, 44, 47

[63] Ivanov, S., G. Papadopoulos. "Vanishing Theorems and String Backgrounds." *Classical and Quantum Gravity* 18, no. 6 (2001): 1089-1110. 21, 22, 29, 30, 44, 47, 48

[64] Ivanov, S., I. Minchev. "Quaternionic Kähler and hyperKähler manifolds with torsion and twistor spaces." *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik* 567 (2004): 215-233. 30, 46, 48

[65] Ivanov, S., I. Minchev, D. Vassilev. "Extremals for the Sobolev inequality on the seven dimensional quaternionic Heisenberg group and the quaternionic contact Yamabe problem." *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)* 12 (2010), no. 4, 1041-1067. 61

[66] Ivanov, S., I. Minchev, D. Vassilev. "Quaternionic contact Einstein structures and the quaternionic contact Yamabe problem." *preprint, math.DG/0611658.* 7, 51, 56, 57, 59, 60, 61, 62, 64, 66, 67, 70, 79

[67] Ivanov, S., I. Minchev, D. Vassilev. "The optimal constant in the L^2 Folland-Stein inequality on the quaternionic Heisenberg group." *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci.* (5) Vol. XI (2012), 635-662. 7

[68] Joyce, D. "Compact hypercomplex and quaternionic manifolds." *J. Differential Geom.* 35 (1992), no. 3, 743-761. 16, 19

[69] Kashiwada, T. "A note on Riemannian space with Sasakian 3-structure." *Nat. Sci. Reps. Ochanomizu Univ.,* 22, (1971): 1-2. 55, 79

[70] Kobayashi, S., K. Nomizu. "Foundations of Differential Geometry." *Interscience Publishers, New York-London* Vol. 1, 1963; Vol. 2, 1969. 17, 21, 39, 42

[71] Li, J., S.-T. Yau. "The Existence of Supersymmetric String Theory with Torsion." *Journal of Differential Geometry* 70, no. 1 (2005): 143-181. 20

[72] Li, S.-Y., Luk, H.-S. "The sharp lower bound for the first positive eigenvalue of a sub-Laplacian on a pseudo-Hermitian manifold." *Proc. Amer. Math. Soc.* 132 (2004), no. 3, 789-798. 6

[73] Lichnerowicz, A. "Géométrie des groupes de transformations." *Travaux et Recherches Mathematiques, III. Dunod, Paris* 1958. 5, 76, 80

[74] Martin Cabrera, F., A. Swann. "The intrinsic torsion of almost quaternion-Hermitian manifolds." *Annales de l'Institut Fourier (Grenoble)* 58, no. 5 (2008): 1455-1497. 3, 19, 24

[75] Merkulov, S., L. Schwachhöfer. "Classification of irreducible holonomies of torsion-free affine connections." *Annals of Mathematics. Second Series* 150, no. 1 (1999): 77-149, Abbendum : *Annals of Mathematics. Second Series* 150, no. 3 (1999): 1177-1179. 3, 4, 26

[76] Michelsohn, M. L. "On the existence of special metrics in complex geometry." *Acta Mathematica* 149, no. 3-4 (1982): 261-295. 29

[77] Mingione, G., A. Zatorska-Goldstein, X. Zhong. "Gradient regularity for elliptic equations in the Heisenberg group." *Adv. Math.* 222 (2009), no. 1, 62-129. 67

[78] Obata, M. "Affine connections on manifolds with almost complex, quaternionic or Hermitian structure." *Japanese Journal of Mathematics* 26 (1957): 43-77. 3, 26, 31

[79] Obata, M. "Certain conditions for a Riemannian manifold to be isometric with a sphere." *J. Math. Soc. Japan* 14, no. 3 (1962), 333-340. 5, 6, 76, 80

[80] Opfermann, A., Papadopoulos, G. "Homogeneous HKT and QKT manifolds." *mathph/ 9807026.* 19

[81] Papadopoulos, G. "Brane Solitons and Hypercomplex Structures." math.DG/0003024 (published in the volume *Proceedings of the second meeting on "Quaternionic Structures in Mathematics and Physics"*, World Scientific, 2001). 19

[82] Papadopoulos, G., A. Teschendorf. "Multi-angle five-brane intersection." *Physics Letters B* 443, no. 1-4 (1998): 159-166. 2

[83] Soldatenkov, A. "Holonomy of the Obata connection on $SU(3)$." *International Mathematics Research Notices* (2011), doi: 10.1093/imrn/rnr152, 15 pages. 27

[84] Spindel, Ph., A. Sevrin, W. Troost, A. Van Proeyen. "Extended supersymmetric σ-models on group manifold." *Nucl. Phys.* B308 (1988): 662-698. 19

[85] Streets, J., G. Tian. "Regularity results for pluriclosed flow." (2010): preprint arXiv:1008.2794. 22

[86] Strominger, A. "Superstrings with torsion." *Nuclear Physics B* 274, no. 2 (1986): 253-284. 2, 3, 19, 20, 21, 24

[87] Swann, A. "HyperKähler and Quaternionic Kähler Geometry." *PhD thesis, Oriel College, Oxford* (1990), 128 pages. 17

[88] Swann, A. "Twisting Hermitian and hypercomplex geometries." *Duke Mathematical Journal* 155, no. 2 (2010): 403-431. 4, 5, 28, 43

[89] Verbitsky, M. "Balanced HKT metrics and strong HKT metrics on hypercomplex manifolds." *Mathematical Research Letters* 16, no. 4 (2009): 735-752. 4, 30, 42

[90] Verbitsky, M. "Hyperkähler manifolds with torsion, supersymmetry and Hodge theory." *The Asian Journal of Mathematics* 6, no.4 (2002): 679-712. 3, 4

[91] Verbitsky, M. "Hypercomplex Manifolds with Trivial Canonical Bundle and their Holonomy." In Neretin, Yu. (ed.) et al., *Moscow Seminar in mathematical physics, II.* Providence, RI: American Mathematical Society (AMS) (ISBN 978-0-8218-4371-0/hbk). Translations. Series 2. American Mathematical Society 221. Advances in the Mathematical Sciences 60 (2007): 203-2011. 3, 4, 24, 25, 28, 30, 35

[92] Verbitsky, M. "Positive forms on hyperkähler manifolds." *Osaka Journal of Mathematics* 47, no. 2 (2010): 353-384. 4

[93] Wang, W. "The Yamabe problem on quaternionic contact manifolds." *Ann. Mat. Pura Appl.*, 186 (2007), no. 2, 359-380. 64

[94] Wu, Hung-Hsi. "The Bochner Technique in Differential Geometry." *harwood academic publishers, Chur-London-Paris-New York-Melbourne*, 1988.

36, 41

Декларация за оригиналност

Описаните нови резултати в настоящия дисертационен труд са изцяло авторски продукт и при тяхното получаване не са използвани чужди публикации и разработки, с което да се нарушават авторски права.