СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ "СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ"
ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

НИКОЛАЙ ПЕТРОВ БУЮКЛИЕВ

Клас C^*-алгебри на Тьоплиц

ДИСЕРТАЦИЯ

за придобиване на образователната и научна степен **Доктор в професионално направление 4.5 Математика, докторска програма "Математически анализ"**

СОФИЯ 2023

На паметта на Рони– приятел и колега,
който ми предложи тази задача

На Надя– за проявеното търпение и положените грижи

СЪДЪРЖАНИЕ

БЛАГОДАРНОСТИ

Бих искал да изразя благодарност към редица хора, без чиято помощ тази дисертация не би могла да се появи.

Най напред искам да кажа колко много съм задължен на доц. О. Христов, за постоянната му подкрепа в различни насоки. Без колебание нееднократно той е зарязвал своите ангажименти, за да ми помогне да придвижа напред моите дела.

Не мога да подмина и помощта на доц. Н. Иванов. Плодотворните обсъждания на разнообразни математически задачи са ми били много полезни. Не бива да забравям и коригирането на многобройните дървени изрази на моя българо-английски.

Изразявам моята благодарност на цялата катедра и колегите, чиято помощ ми помогна да се възстановя след моите боледувания.

Специално на Надя– при борбата с административните клопки,

Специално на Първан и Вили за оправянето на административни проблеми, породени от моято небрежност.

Благодаря за подкрепата на всички колеги и приятели!!

Декларация за автентичност

Авторът декларира, че дисертацията съдържа автентични резултати, получени от него.Използването на резултатите от други учени е придружено със съответно цитиране.

Николай Петров Буюклиев

1 Увод

1.1 Едномерен случай на C^*-алгебрата на Тьоплиц

Нека T е групата на комплексните числа с модул 1. Ще фиксираме в T Хаарова мярка μ, която е нормирана т.е $\mu(T) = 1$. Тогава $L^2(T, \mu)$ е комплекснозначно хилбертово пространство с базис $\{e_n = z^n\}_{n=1}^{\infty}$.
Подпространството, с базис $\{e_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ се означава с $H^2(\mathbb{Z}_+)$ и се нарича пространство на Харди. С $P : L^2(T) \longrightarrow H^2(T)$ ще означаваме операторът на проектиране (наричан понякога проектор на Сегьо (Szego). За $\varphi \in C(T)$ дефинираме оператора T_φ с формулата $T_\varphi(f) = P(\varphi.f), f \in H^2(T)$. C^*-алгебрата, породена от операторите T_φ, където φ пробягва $C(T)$, ще бъде отбелязвана тук с $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_+)$.
$\mathcal{T}$ се поражда от оператора T_z, който при това е изометрия. По такъв начин $\mathcal{T}$ съвпада с алгебрата, породена от една изометрия, изучавана в **[3]**, **[4]**. В (**[3]**, Thm 1.] е доказано, че комутаторния идеал на $\mathcal{T}$ съвпада с $\mathcal{K}$– идеалът на компактните оператори, а в [(**[3]**, Thm 2.] е доказано, че съответното частно е $C(T)$. По такъв начин Coburn е достига до точната редица:

$$0 \longrightarrow \mathcal{K} \xrightarrow{i} \mathcal{T} \xrightarrow{\pi} \mathcal{T}/\mathcal{K} = C(T) \longrightarrow 0 \tag{0.1}$$

Определянето на структурата на идеалите на $\mathcal{T}$, позволява на Coburn в [**[4]**, § V] да докаже, че $\mathcal{T}$ е postliminal и да опише множеството на нейните неприводими представяния.

След като се направи преобразувание на Фурие, то дискретното уравнение на Винер-Хопф (уравнение на Тьоплиц), добива вида:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_{j-k}\xi_k = \eta_j, \qquad (j = 1, 2, \ldots), \tag{1}$$

където $\xi = \{\xi_i\}_1^\infty$ е търсеният вектор, а $\eta = \{\eta_i\}_1^\infty$ и $a = \{a_i\}_{-\infty}^\infty$ са зададени вектори. Предполагаме, че $a \in l_1(\mathbb{Z})$. Уравнението може да се разглежда в l_p $(1 \le p < \infty)$, т.е при $\eta, \xi \in l_p(\mathbb{Z}_+)$. Нашите разглеждания са в l_2.

За операторите на Тьоплиц е доказана знаменита теорема, която изразява индекса на Фредхолмов оператор в топологични термини:

Теорема (Гохберг- Крейн**[1]**, **[2]**). Нека функцията $a(\zeta)$ $(|\zeta| = 1)$ се разлага в абсолютно сходящ ред на Фурие.
(i)За да е обратим оператора $A = a(V)$ е необходимо и достатъчно функцията $a(\zeta)$ никъде да не се анулира на единичната окръжност $(a(\zeta) \neq 0, |\zeta| = 1)$.
Ако това условие е изпълнено, то оператора A е обратим отляво, отдясно или двустранно в зависимост от това дали числото

$$\kappa = \text{ind } a(\zeta) = \tfrac{1}{2\pi}[\arg a(e^{i\varphi})]_{\varphi=0}^{2\pi}$$

е положително, отрицателно или е равно на нула.

(ii)Ако A е Фредхолмов оператор, то Фредхолмовия индекс $ind(A)$ на A се изразява по следния начин:

$$ind(A) = -\kappa.$$

1.2 Едномерен случай C^*-алгебрата на Винер-Хопф

Класическото уравнението на Винер-Хопф има вида $(1 + W_f)u = v$, където

$$W_f u(x) = \int_0^\infty f(x-y)u(y)dy, \qquad f \in L^1(\mathbb{R}), \quad u \in L^2([0,\infty)), \quad x \in [0,\infty).$$

Операторът W_f се нарича оператор на Винер-Хопф със символ f.
C^*-алгебрата $\mathcal{B}$, породена от $\{W_f : f \in L^1(\mathbb{R})\}$ се нарича C^*-алгебра на Винер-Хопф и е в сила теорема —аналог на теоремата за индекса от предишната част.

1.3 Автори и подходи за изучаване на операторите на Тьоплиц и Винер-Хопф

Само в най-ранните статии се обсъждат условия и свойства на конкретни оператори. След цикъла статии на Coburn и Douglas **[3]**, **[5]** , **[6]**, а също след работата на Muhly-Renault **[16]**обичайно е да се разглежда C^*-алгебра, породена от клас оператори и след като се изяснят свойствата на алгебрата, те да бъдат прехвърлени към конкретни оператори. Като правило алгебрите са некомутативни. Изучаването на тяхната структура при различните подходи е много различна и може да се натъкнем на разнообразен вид проблеми.

Тук накратко ще направя бегъл преглед на някои от подходите за изучаването на този клас алгебри и авторите, които са работили с тях.
• Локален принцип, И. Симоненко, А. Динин(A. Dynin).

През 1964 г. И. Симоненко в **[7]** дефинира т. нар. оператори от локален тип и дава условия такъв оператор да е Ньотеров (Старо наименование на Фредхолмов оператор). Той прилага разработената техника към интегрални оператори на Калдерон-Зигмунт и Винер-Хопф. Методът му по-късно е наречен Локален принцип.
Продължение на тази идея е реализирана в серия статии от А. Динин(A. Dynin). В [**[9]**,§0.2] той разглежда оператори S_ψ на конволюция, където $\psi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ и ограничението им в $L^2(\Lambda)$, където Λ е хубав (completely tangible) конус в $\mathbb{R}^n$. За алгебрата породена от тези оператори, той определя спектъра и доказва, че тя е разрешима (solvable).

• Метод на трипотентите– Ъпмайер (Upmeier) Виж **[36]** и **[34]**, а също и литературата, цитирана там.

1.4 Дефиниране на C^*–алгебрата на многомерните оператори на на Тьоплиц и Винер-Хопф

Разглеждаме локално компактна, хаусдорфова, унимодулярна група G с неутрален елемент e и лява мярка на Хаар λ.
Фиксираме затворено подмножество $P \subset G$, което поражда G и има следните свойства:

(i)P е полугрупа ($P.P \subseteq P$);
(ii)P е solid (P е затворена обвивка на вътрешността си);
(iii)$P \cap P^{-1} = \{e\}$;
(iv)P е нормална ($tPt^{-1} = P, \forall t \in G$)

За $f \in C_c(G)$ дефинираме оператор на Винер-Хопф със символ f в $L^2(P)$ чрез формулата:

$$W_f\xi(t) = \int_P f(ts^{-1})\xi(s)d\mu(s), \quad \xi \in L^2(P).$$

C^*-алгебрата, породена от операторите $\{W_f : f \in C_c(G)\}$ ще означаваме с някой от символите $\mathcal{B}$ или $\mathcal{T}$, а когато искаме да подчертаем групата и нейната подполугрупа– с $\mathcal{B}(G,P)$ или с $\mathcal{T}(G,P)$. и ще наричаме C^*-алгебра на операторите на Винер-Хопф.
По такъв начин виждаме, че $\mathcal{B}$ е компресия до $L^2(P)$ на груповата алгебра на G.

Бележка. По традиция, когато групата G е дискретна, се употребява термина оператор на Тьоплиц. Тук и двата вида операторни алгебри се третират по един и същи начин и затова няма да се прави стриктна разлика между двата случая.

1.5 Възникващи задачи и средства за решаването им

• Като правило разглежданите алгебрите са некомутативни, и само в най-простите случаи комутаторния идеал е единствен идеал. Затова е важен въпроса за изясняване на решетката на идеалите.
За решаване на този проблем за групоидни алгебри може да се разчита на теоремата за решетката на идеалите в групоидна C^*-алгебра. (**[16]**, Prop. 2.16 и **[29]** , Prop.4.5). По-подробно тази теорема е разгледана в § 2.2.5.

В оптималния случай се конструира растяща редица от отворени инвариантни подмножества на $\mathcal{G}^0$:

$$U_1 \subset U_2 \subset \cdots \subset U_n = \mathcal{G}^0.$$

Тази редица генерира композиционен ред за $\mathcal{B}$:

$$I_1 \subset I_2 \subset \cdots \subset I_n = \mathcal{B}.$$

В този ред и идеалите и междинните частни се представят като групоидни алгебри, чиито групоиди се получават от началния чрез редукция. Такъв композиционен ред служи като основа за изясняване на типа на алгебрата, а също така ако алгебрата се окаже postliminal, да се даде списък на нейните неприводими представяния.

• Вторият въпрос е въпросът за изясняване на типа на алгебрата $\mathcal{B}$.За целта е удобно да се работи с композиционен ред за $\mathcal{B}$. Полезни са **[48]**, Prop. 4.3.4.] и по-общо **[48]**, chapter 4] и [**[12]**,ch. 5, § 5. 6.]

Ще отбележа, че не винаги $\mathcal{B}$ е тип I алгебра, дори не винаги съдържа идеала на компактните оператори. Например в статията на Douglas **[30]** за алгебрата, породена от еднопараметрична група от изометрии е показано, че тя не съдържа компактни оператори. Допълнителни детайли могат да се намерят и в работите на Ji-Xia-Kaminker **[23]**, **[24]** относно нейната K-теория.

• В същата посока е и въпросът дали $\mathcal{B}$ съдържа $\mathcal{K}-$ идеалът на компактните оператори в $L^2(P)$.

Достатъчни условия($P \cap P^{-1} = \{e\}$ и X да бъде регулярна компактификация [1] на P) в случая, когато $\mathcal{G}$ е групоид на Винер-Хопф са дадени в [(**[16]**, § 3.7.2]. По-късно Shew показва, че тези условия освен достатъчни са и необходими. По-прецизно: в [**[17]**, Thm. 1.] той доказва, че ако X не е регулярна компактификация на P, то $\mathcal{T}$ не е тип-I-алгебра и не съдържа нетривиални компактни оператори.

В такава ситуация има проблеми с дефинирането на подходяща следа и не се обсъжда понятието Фредхолмовост, а негови модификации, въведени от Бройер(Breuer) **[49]**, **[50]**.

Обичайно е да се обсъжда главно хубавия (тип I) случай и алгебри, които са postliminal.

След изясняване на решетката на идеалите, като съответните частни са също явно определени, може да се пристъпи към решаване на някоя от следните задачи:

• Ако алгебрата $\mathcal{B}$ е тип I, то могат да се определят неприводимите представяния на $\mathcal{B}$ по схемата, описана в Диксме, и фактически повтаряйки mutatis mutandis разсъжденията, направени в **[4]**, § V и (**[16]**, §4.8.

• Алтернативна посока е определянето на K-теорията на $\mathcal{B}$. Разглеждаме някое от междинните частни. То също е представено като групоидна алгебра $C^*(\mathcal{G}_1)$ и ако има краен брой орбити в $\mathcal{G}_1^0$, то това частно е директна сума на подалгебри , всяка от тях съответна на орбита. Да насочим вниманието си към едно от тези събираеми, означавам го с $C^*(\mathcal{G}_2)$. Ако изотропната група е една и съща за всяко $x \in \mathcal{G}_2^0$, можем да я изнесем като множител; представянето на групоид като декартово произведение дава, че съответната групоидна алгебра е тензорно произведение на алгебрите на множителите. Представяне на алгебра като тензорно произведение дава възможност да се използва формулата на

[1] Ще припомня, че X се нарича регулярна компактификация на P, ако влагането $i(P)$ на P в X е хомеоморфизъм и ако $i(P)$ е отворено в X.

Кюнет и да се пресметне К-теорията на събираемото. К-теорията на частното се получава при залепване на събираемите, като се използва някоя от точните редици в К-теорията: редицата на Майер-Виеторис; или спектралната редица. На теория това би трябвало да позволи да се определи К-теорията на частното и идеала.

• В този момент изниква нов проблем: Дори ако са известни К-теориите на идеал и частното само диаграмно следене при използването на точния шестоъгълник не стига за определяне на К-теорията на цялата алгебра .Нуждаем от допълнителна информация за индексните изображения ∂_0 и∂_1.
Като пример нека за простота смятаме, че идеалът е $\mathcal{K}$– идеалът на компактните оператори, не е ясно как изглежда индексното изображение от точния шестоъгълник в К-теорията, за да се изясни К-теорията на цялата алгебра. Това води до нов кръг въпроси—конструирането на оператори, за които знаем образа им при индексното изображение.
• В разглеждания по-горе пример това е конструирането на Фредхолмов оператор с нетривиален индекс—например индекс 1. Резултат в това направление е представен в § 5.2.

• Определяне дали оператор от алгебрата е Фредхолмов.
Критерий за Фредхолмовост е доказан тук в § 3.1.
• Извод на формула, която пресмята индекса на Фредхолмов оператор.
Такава индексна формула е доказана тук в § 4.

Други интересни направления и класически интересни въпроси са:
• Определяне на топологичен индекс на обратим оператор в някое частно. Интересно изследване може да се намери в серия работи на J. Murphy.

Ще отбележа, че не е изяснен въпросът каква е връзката между индексната формула, генерирана от цикличен 1-коцикъл (както в § 4) и indicial triples на J. Murphy **[13]**, които дават изразяване на топологичния индекс, като при това за класическите оператори на Тьоплиц двата индекса са равни.

1.6 Програма за изучаване на групоидните алгебри на Винер-Хопф

Аз се придържам основно към групоидния подход, за изучаване на този клас алгебри. След монографията на Renault **[29]** и основополагащата за групоидния подход (**[16]** трябва да се добавят работите на A. Nica **[10]** и други автори, които изясняват различни аспекти на този подход.
• Първата задача при този подход е да се дефинира групоид $\mathcal{G}$,такъв че изучаваната алгебра (дефинирана като породената от фамилия оператори) е изоморфна на групоидна алгебра на групоида $\mathcal{G}$. За решаването на този въпрос може да се разчита на (**[16]**,§ 3.2-3.4 и **[10]**, Prop.2.4.1). Там се дават конструкции за дефиниране на групоид $\mathcal{G}$ с необходимите свойства.
•Определянето на решетката на идеалите и вида на частните се основава на следния резултат за групоидни алгебри:

(**[16]**, Prop. 2.16,]или **[29]** , Prop.4.5]) . В най-груба форма тази теорема твърди, че редукцията на $\mathcal{G}$ по отворено инвариантно подмножество $U \subset \mathcal{G}^0$ определя идеал в $\mathcal{B}$, а редукцията по допълнението на U в $\mathcal{G}^0$ определя частното. По-късно, (в § 2.2.5.) ще се спра отново на този въпрос. В § 6. разглеждам алгебрата на Тьоплицовите оператори, асоциирани с дискретната група на Хайзенберг. Там по такъв начин е определена решетката на идеалите на алгебрата.
• Следваща стъпка е определянето на K-теорията на идеалите и междинните частни, а като следствие- и определянето на K-теорията на цялата алгебра. За тази цел са полезни представяне на групоид като декартово произведение на по- прости групоиди, което дава представяне на съответните алгебри като тензорно произведение и позволява впоследствие да се използва формулата на Кюнет. Полезни са също и точните редици в K-теорията– точния шестоъгълник, редицата на Mayer-Vietoris и др. Допълнителна информация за изображенията в тези редици може да се получи при конструиране на оператори със специални свойсва (напр. Фредхолмови оператори с индекс 1).

Направил съм такова изследване в **[42]** за алгебрата на Винер- Хопф, асоциирана с полиедрален "exhaustible" конус в $\mathbb{R}^n$, то е представено тук в § 5.
• Конструиране на индексна формула за пресмятане на индекса на Фредхолмов оператор. В § 6. съм дал достатъчни условия за дефиниране на цикличен 1-коцикъл свързан с групоид на Винер-Хопф $\mathcal{G}$, който пък дава формула за пресмятане на индекса на Фредхолмов оператор в алгебрата $C^*(\mathcal{G})$.
• Изразяване на аналитичния индекс в топологични термини. Резултати в това направление са получени от A. Alldridge и T. Johansen в **[18]** и **[19]**. Тяхната идея е свързана с представяне на междинното частно като непрекъсното поле от елементарни алгебри. Тогава обратим оператор в частното определя непрекъснато поле от Фредхолмови оператори и индексното изображение дава полето от индексите на фамилия Фредхолмови оператори.

1.7 Съдържание и основни резултати на дисертацията по глави

В ГЛАВА 1 са представени Дефиниция на C^*–алгебрата на многомерните оператори на на Тьоплиц и Винер-Хопф и Програма за изучаване на C^*-алгебрите на Винер-Хопф и Тьоплиц.

В ГЛАВА 2 са представени някои необходими и използвани сведения. Засегнати са темите за C^*-алгебри; групоиди и техните алгебри; Основните примери за групоидни C^*-алгебри; K-теория и циклични кохомологии на C^*-алгебри.

В ГЛАВА 3 се разглеждат Линейните сечения в групоидните алгебри на Винер- Хопф. Резултататите са приети за печат в **[43]**. Получени са:
• Критерий за Фредхолмовост: резултататът е приет за печат в **[43]**.

При построяване на групоида $\mathcal{G}$, който има свойството, че $C^*(\mathcal{G}) \cong \mathcal{T}$, се използва така наречената наредбена компактификация X на полугрупата P.
В случая, когато X е регулярна компактификация на P. Тогава $U = i(P)$ е отворено и инвариантно подмножество на $X = \mathcal{G}^0$ и получаваме точна редица от вида:

$$0 \longrightarrow \mathcal{K} \xrightarrow{i} \mathcal{T} = C^*(\mathcal{G}) \xrightarrow{\gamma} C^*(\mathcal{G})/\mathcal{K} = C^*(\mathcal{G}_{|F}) \longrightarrow 0$$

Тази точна редица вече дава критерий кога оператор $T \in \mathcal{T}$ е Фредхолмов.

Теорема 3.1 Оператор $T \in \mathcal{T}$ е Фредхолмов тогава и само тогава, когато $\gamma(T)$ е обратим в $C^*(\mathcal{G}_{|F})$.

• Метод за конструиране на непрекъснати линейни сечения, като се използват контракции в пространството от единици $\mathcal{G}^0$ на групоида.
Резултататът е приет за печат в **[43]**.

Нека F е затворено и инвариантно подмножество на X и нека $\lambda : X \longrightarrow F$ е непрекъсната контракция (т.е $\lambda(x) = x, \forall x \in F$). В такъв случай можем да дефинираме линейно сечение по следния начин:

Теорема 3.2-1 При горните означения изображението ψ, зададено с формулата:

$$\psi(b)(x, n) = b(\lambda(x), n) \quad b \in C_c\big(\mathcal{G}_{|F}\big)$$

е непрекъснато сечение.

Има аналог на тази формула в случая, когато F е обединение на краен брой затворени и инвариантни подможества на X.
Нека предположим, че $F_1, F_2, \dots F_n$ са затворени и инвариантни подмножества на X и $F = \bigcup_{i=1}^{n} F_i$.За $\sigma \subset \{1, 2, \dots, n\}$, дефинирам $rank(\sigma)$ да е броят на елементите на σ и означавам $F_\sigma = \bigcap_{i\in\sigma} F_i$. Нека $\lambda_\sigma : X \longrightarrow F_\sigma$ са непрекъснати контракции, за които $\lambda_{\sigma\cup\tau} = \lambda_\sigma \circ \lambda_\tau$ при произволни $\sigma, \tau \subset \{1, 2, \dots, n\}$.
Тогава можем отново да дадем формула, дефинираща непрекъснато сечение:

Теорема 3.2-2 При горните означения изображението ψ, дефинирано с формулата:

$$\psi(b)(x, n) = \sum_{\sigma \subset . \{1,2,\dots,n\}} (-1)^{rank(\sigma)+1} b(\lambda_\sigma(x), n) \quad b \in C_c\big(\mathcal{G}_{|F}\big)$$

е непрекъснато сечение.

В ГЛАВА 4 е доказана една индексна формула за Фредхолмови оператори в алгебри на Винер- Хопф. Резултатите са приети за печат в **[45]**.

Преди да формулирам моите резултати, ще кажа няколко думи за резултатите на A.Connes и E. Park, за да мога обясня какво съм направил.

В **[40]**, A. Connes е дал връзка между $H^*_\lambda(A)$ и изображения, които ще наричаме почти комутативни ϱ (т.е. изображения, $\varrho : A \longrightarrow L(H)$ за които $\varrho(x.y) - \varrho(x)\varrho(y)$ са оператори с крайна следа при $x, y \in A$). Когато изображението ϱ е почти мултипликативно, Connes конструира цикличен 1-коцикъл $\tau \in H^1_\lambda$. Освен това билинейното сдвояване на $H^1_\lambda(A)$ и $K_1(A)$ дава формула за пресмятане на индекса на обратим елемент в A.

В **[15]**, E. Park изучава C^*- алгебрата $\mathcal{T}^{\alpha,\beta}$, породена от операторите на Тьоплиц в квадранта. Там, използвайки горната връзка, открита от Connes, той успява да я приложи в $\mathcal{T}^{\alpha,\beta}$, като в резултат получава формула, която пресмята индекса на Фредхолмов оператор $T \in \mathcal{T}^{\alpha,\beta}$
Най-напред Park конструира непрекъснато сечение $\rho : T^{\alpha,\beta}/\mathcal{K} \longrightarrow T^{\alpha,\beta}$.

Изображението ρ има свойството, че за всички x и y от $T^{\alpha,\beta}/\mathcal{K}$, операторът $\rho(xy) - \rho(x)\rho(y)$ е компактен.
За съжаление, това е най-многото, което може да се твърди: $\rho(xy) - \rho(x)\rho(y)$ не винаги е оператор с крайна следа. E. Park заобикаля проблема, като ограничава избора на x и y. Той изисква x и y да са елементи на навсякъде гъста подалгебра $T^{\alpha,\beta}_\infty$ на $T^{\alpha,\beta}/\mathcal{K}$.

В **[43]** (и тук в § 3.2), съм представил метод как да се конструира непрекъснато линейно сечение ψ в групоидна алгебра на Винер-Хопф, като се използват контракции в пространството от единици на групоида $\mathcal{G}$. При опит да се използва идеята на Connes, свързана с почти комутативните изображения, за ψ се наблюдава същото затруднение, както в работата на E. Park: операторът $\rho(xy) - \rho(x)\rho(y)$ е винаги компактен, но не винаги има крайна следа.
За да се последва идеята на E. Park от**[15]** (а именно– да се ограничи изменението на x и y до навсякъде гъста подалгебра на $\mathcal{T}/\mathcal{K}$) е необходимо да се наложат допълнителни условия на ψ,които да позволят да дефинираме подалгебра $\mathcal{T}^\infty$, гъста в $\mathcal{T}/\mathcal{K}$, със свойството, че $\psi(x.y) - \psi(x).\psi(y)$ да има крайна следа за всички $x, y \in \mathcal{T}^\infty$. Такива условия са представени в § 4.1.

В § 4.2 е дефинирана на алгебрата $\mathcal{T}^\infty$, която е навсякъде гъста в $\mathcal{B}/\mathcal{K}$.

След това в § 4.3 е доказано, че изображението $\psi : \mathcal{T}^\infty \to C^*(\mathcal{G})$ е почти мултипликативно. Тогава вече ψ генерира цикличен 1-коцикъл τ.

Това дава възможност да се докаже аналог на индексната теорема на E.Park, за групоидни алгебри на Винер-Хопф, удовлетворяващи условията от § 4.1:

Теорема 4.4 Нека $T \in \mathcal{T}$ е Фредхолмов оператор.
Нека $\gamma(T)$ и $\big(\gamma(T)\big)^{-1}$ са в $\mathcal{T}^\infty$.
Тогава Фредхолмовия индекс $ind(T)$ на оператора T се пресмята със следната формула:

$$ind(T) = tr\left[\psi\gamma(T)\psi(\gamma(T)^{-1}) - \psi(\gamma(T)^{-1})\psi\gamma(T)\right]$$

В ГЛАВА 5 се разглеждат определянето на К-теорията на $\mathcal{B}(R^n, P)$ в случая, когато полугрупата P е полиедрален конус с допълнителното ограничение да бъде "exhaustible". Резултататите са публикувани в **[42]**
Основните резултати в тази глава са:

- **Конструиране на на Фредхолмов оператор с индекс 1**.

Това е направено в § 5.2:

Когато са ни известни идеал на алгебрата $\mathcal{B}$ и съответното частно, може да се запише точният шестоъгълник от К-теорията (виж § 2.4.1.).

Обаче дори когато са известни К-групите на идеала и частното, диаграмното следене в тази диаграма не е достатъчно за да се определи и К-теорията на алгебрата. За тази цел е необходима допълнителна информация за изображенията в шестоъгълника.

В случая, когато идеалът е $\mathcal{K}-$ идеалът на компактните оператори, такава допълнителна информация може да се получи чрез конструиране на Фредхолмов оператор S. Съществуването на такъв оператор доказва, че индексното изображение $\partial_1 : K_1(\mathcal{B}/\mathcal{K}) \longrightarrow K_0(\mathcal{K})$ е нетривиално; а ако допълнително $ind(S) = 1$, получаваме, че пораждащата на $K_0(\mathcal{K}) = \mathbb{Z}$ е в образа на ∂_1 : т.е. $\partial_1 : K_1(\mathcal{B}/\mathcal{K}) \longrightarrow K_0(\mathcal{K})$ е сюрекция. Това съображение обяснява важността на конструкцията, която е представена в § 5.2, с което е доказана следната:

Теорема 5.2 Нека P е полиедрален конус в $\mathbb{R}^d$. В $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d, P)$ съществува Фредхолмов оператор с индекс 1.

Ще отбележа, че тази теорема е цитирана и използвана в **[21]**и **[20]**.

- **Определяне на К-теориите на $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d, P)/\mathcal{K}$ и $\mathcal{B}$** .

Алгебрата $\mathcal{B}$ е с явно описани идеали и междинни частни. Следващ въпрос е да се изясни коя е нейната К-теория. Един възможен подход е да се приложи комбинация от точната редица на Майер-Виеторис и точната редица на К-теорията. Този подход е приложен в **[42]**.
За общият случай на полиедрален конус ($n > 2$) прилагането на точната редица на Майер-Виеторис и такова разсъждение дава добри резултати когато средните членове в диаграмата на Майер-Виеторис са нулеви групи. За да се обходи цялата граница на P обаче се изисква подходяща подредба при изброяването на стените. В **[42]** съм въвел понятието exhaustible cone.То позволява многократно прилагане на точната редица на Майер-Виеторис.

Като се използва индукция по размерността n, в **[42]**, thm 3.5 е доказано, че ако P е exhaustible, то $K_*\big(\mathcal{B}(\mathbb{R}^d, P)\big)/\mathcal{K} = (0, \mathbb{Z})$, което комбинирано с лемата от § 2.4.3 и съществуването на Фредхолмов оператор с индекс 1 дава следния резултат:

Теорема 5.3 Нека P е полиедрален конус в $\mathbb{R}^n$, който е exhaustible. Тогава

$$K_*\big(\mathcal{B}(\mathbb{R}^d, P)\big)/\mathcal{K} = (0, \mathbb{Z}) \qquad \text{и} \qquad K_*\big(\mathcal{B}(\mathbb{R}^d, P)\big) = (0, 0).$$

Индуктивната дефиниция на понятието exhaustible cone е тромава и неудобна. При все това в **[42]**, Лема 3.4 е доказано, че симплициалните конуси във всички размерности и всички конуси в $\mathbb{R}^n$, при $n \leq 3$ са exhaustible.
За да се разшири обхвата на Теорема 5.2 следва да се намерят още класове конуси от този вид. В действителност, не ми е известен пример на полиедрален конус, който не е exhaustible. Естествената хипотеза е че всички полиедрални конуси са exhaustible, за съжаление не съм в състояние да я докажа.

В **[20]**, Thm 0.1 с помощта на друга техника – спектралната точна редица – е получен резултат, който е по-силен от Теорема 5.2 в две направления: за P не се поставят изисквания да бъде exhaustible и са получени резултати от KK-теорията, от които Теорема 5.2 е непосредствено следствие.
Вижда се оттук, че въведеното ограничение за конуса да бъде exhaustible е съществено само за доказателство, което използва многократно прилагане на точната редица на Майер-Виеторис. След работата на Aldridge става безпредметно обсъждането на това понятие и това не е правено тук. Ще приведа и резултата на Aldridge:

Теорема 5.3 (Aldridge, **[20]**, Thm 0.1) Нека P е полиедрален конус.
Тогава$\mathcal{B}$ е KK-свиваема (KK-contractible)
и $\mathcal{B}/\mathcal{K}$ и $\mathbb{C}$ са KK- еквивалентни.
В заключение, ще отбележа, че при доказването на Теорема 5.3 в **[20]** съществено е използвана конструкцията на Фредхолмов оператор с индекс 1. Обобщение на горните резултати от **[42]** и **[20]** за случая на действие на полугрупа може да се види в **[46]**.

В ГЛАВА 6

В ГЛАВА 6 се разглежда алгебрата $\mathcal{T}(H_3(\mathbb{Z}))$, асоцииирана с дискретната група на Хайзенберг $H_3(\mathbb{Z})$ и полугрупата P на положителните и елементи. Получено е представяне на $\mathcal{T}(H_3(\mathbb{Z}))$ като групоидна C^*-алгебра. Резултатите от тази глава са представени за печат в **[44]**.
The main rezults i n this chapter is:
Theorem6.3. The closed two-sided ideals of $\mathcal{T} \cong C^*(\mathcal{G})$ are

$$\{0\} \subset I_0 \subset I_1 \subset I_{1d} \subset I_2 \subset I_3 = \mathcal{T},$$

where $I_0 \cong \mathcal{K}$ and $I_3/I_2 \cong C^*(H_3(\mathbb{Z})$. Also we have $I_2/I_{1d} \cong (C(T^2) \times \mathcal{K})^2$, $I_{1d}/I_1 \cong C(T) \times \mathcal{K}$ and $I_1/I_0 \cong (C(T) \times \mathcal{K})^2$.

Corolary.6.4 The ideal I_2 is type I C^*-algebra, but $\mathcal{T}$ is not type I C^*-algebra.

Параметризирано е явно пространството от единиците на получения групоид. Това позволява да се получи решетката на идеалите и композиционен ред за $\mathcal{T}(H_3(\mathbb{Z}))$. Основният резултат в тази глава е следната теорема:

Теорема 6.0.3. За $\mathcal{T}(H_3(\mathbb{Z}))$ съществува редица от двустранни затворени идеали

$$\{0\} \subset I_0 \subset I_1 \subset I_{1d} \subset I_2 \subset I_3 = \mathcal{T}(H_3(\mathbb{Z})),$$

където $I_0 \cong \mathcal{K}$ и $I_3/I_2 \cong C^*(H_3(\mathbb{Z})$.
Освен това $I_2/I_{1d} \cong (C(T^2) \times \mathcal{K})^2$, $I_{1d}/I_1 \cong C(T) \times \mathcal{K}$, $I_1/I_0 \cong (C(T) \times \mathcal{K})^2$.

ИЗПОЛЗВАНАТА ЛИТЕРАТУРА заема 3 страници и включва 51 заглавия. Три от тях– **[42]**, **[43]** и **[44]**— са мои публикации по дисертацията.

2 Някои необходими и използвани сведения

2.1 C^*-алгебри.

2.1.1 Дефиниция на C^*-алгебра.

Определение. C^*-алгебра е инволютивна банахова алгебра със свойството:

$$\|x^*x\| = \|x\|^2, \quad \forall x \in A.$$

• По-подробно инволютивна банахова алгебра означава:
нормирано пространство + алгебра
+ непрекъснати операции ($\|xy\| \leq \|x\| \, \|y\|$)
+ инволюция: $(x^*)^* = x$, $(x+y)^* = x^* + y^*$, $(\lambda x)^* = \overline{\lambda} x^*$, $(xy)^* = y^* x^*$, $\|x^*\| = \|x\|$
+ пълнота.

2.1.2 Основни примери на C^*-алгебри.

• $\mathcal{K}$ – алгебрата на компактните оператори;
• $C(X)$ – алгебрата на непрекъснатите функции, дефинирани в компактно пространство X;
• $C_0(X)$ – алгебрата на непрекъснатите функции, дефинирани в локално компактно пространство X, които клонят към 0 на безкрайност
• $C^*(G)$ – груповата C^*-алгебра на локално компактна група G снабдена с λ – лява мярка на Хаар.
Ще спомена, че след прилагане на преобразованието на Фурие имаме $C^*(\mathbb{R}) \cong C_0(\mathbb{R})$, $C^*(\mathbb{Z}) \cong C(T)$.

2.1.3 Тип на C^*-алгебра.

Определение.(**[52]**, §5.6)
C^*-алгебра A се нарича *liminal*, ако за всяко ненулево неприводимо представяне (H, φ) имаме, че $\varphi(A) = \mathcal{K}(H)$. Liminal алгебрите се наричат също CCR. [2]

Определение.(**[52]**, §5.6) C^*-алгебра A се нарича *postliminal*, ако за всяко ненулево неприводимо представяне (H, φ) имаме, че $\varphi(A) = \mathcal{K}(H)$. Postliminal алгебрите се наричат също GCR, а също тип I алгебри (Type I C^*-algebras).

[2] Това е съкращение от Completely Continuous Representation.

Определение.(**[8]**) C^*-алгебра A се нарича разрешима (*solvable*), ако съществува крайна филтрация

$$\{0\} = J_0 \subset J_1 \subset \cdots \subset J_{N+1} = A$$

която има следните свойства:

(i) J_j е затворен самоспрегнат идеал на J_{j+1};

(ii) J_{j+1}/J_j е C^*-изоморфно на C^*-алгебрата $C_0(\Sigma_j, \mathcal{K}(H_j))$, чиито елементи са всички непрекъснати изображения, дефинирани в локално компактното пространство Σ_j с образ в идеала на компактните оператори в Хилбертовото пространство H_j;

(iii) $dim(H_j) \geq dim(H_{j+1})$.

За разрешимите алгебри може да се дефинира понятието j- Фредхолмовост; Dynin е определил техния спектър. Разрешими са алгебрите, разгледани в **[31]** и **[16]**.

2.1.4 Оператори на Фредхолм. Индекс на Фредхолмов оператор

Нека H е сепарабелно, безкрайномерно Хилбертово пространство. С $B(H)$ означаваме алгебрата на ограничените линейни оператори в H, с $\mathcal{K} = \mathcal{K}(H)$– идеалът на компактните оператори, а с $Q = Q(H) = B(H)/\mathcal{K}$– алгебрата на Калкин.

Теорема(Аткинсон) (**[47]**, Thm.9.4.1, p175/252) Нека $T \in B(H)$. Тогава следните условия са еквивалентни:

(i) Образът $Im(T)$ на T е затворен и ядрата $Ker(T)$ и $Ker(T^*)$ са крайномерни.

(ii) Съществува $S \in B(H)$ такъв, че операторите $1 - S \circ T$ и $1 - T \circ S$ да са компактни.

(iii) Образът $\pi(T)$ на T в $Q(H)$ е обратим.

Определение. Оператор $T \in B(H)$, който удовлетворява горните еквивалентни условия се нарича Фредхолмов. Множеството на всички Фредхолмови оператори ще означаваме с $\Phi(H)$.

За Фредхолмов оператор T дефинираме неговия индекс с формулата:

$$ind(T) = dim(Ker(T)) - dim(Ker(T^*)) \in \mathbb{Z}.$$

Връзката между K-теорията и Фредхолмовите оператори се дава от следната теорема:

Теорема(Аткинсон) (**[47]**, Thm.9.4.1.) Нека $T \in B(H)$ е Фредхолмов оператор. Тогава

$$ind(T) = tr_*(\partial_1([\pi(T)])),$$

където $[\pi(T))]$ е класът на $\pi(T)$ в $K_1(Q(H))$, $tr_* : K_0(\mathcal{K}) \longrightarrow \mathbb{Z}$ е следовия хомоморфизъм и ∂_1 е индексното изображение от точния шестоъгълник на разширението:

$$0 \longrightarrow \mathcal{K} \xrightarrow{i} B(H) \xrightarrow{\pi} Q(H) \longrightarrow 0$$

Основните свойства на Фредхолмовите оператори и техните индекси са събрани в следната

Теорема Индексът на Фредхолмов оператор има следните свойства:
(i)(**[41]**, Prop14.1.6) Индексът на Фредхолмов оператор не се променя от компактна пертурбация.
(ii)(**[41]**, Prop14.1.7) Индексното изображение $\Phi(H) \longrightarrow \mathbb{Z}$ е хомоморфизъм, т.е. $ind(F_1F_2) = ind(F_1) + ind(F_2)$ при $F_1, F_2 \in \Phi(H)$.
(iii)(**[41]**, Prop14.1.8) Индексното изображение $\Phi(H) \longrightarrow \mathbb{Z}$ е локално константно.

2.2 Групоиди и техните алгебри

Групоидите и техните алгебри представляват основно техническо средство за изучаване на обсъжданите тук операторни алгебри.
В тази част ще бъдат представени основните дефиниции и често използваните им свойства. Основното пособие за референции ще бъде **[29]**. Добро изложение на тази материя може да бъде видяно и в **[16]**, което също ще бъде цитирано често.

2.2.1 Дефиниция на групоид

Определение.[29],Def. 1.1; (**[16]**,§ 2.1]) Под групоид ще разбираме множество $\mathcal{G}$, снабдено с:

• бинарна операция умножение$(x, y) \mapsto x\,.\,y, \quad \mathcal{G}^2 \longrightarrow \mathcal{G}$, където множеството $\mathcal{G}^2 \subset \mathcal{G} \times \mathcal{G}$ се нарича множество на композируемите двойки; и

• унарна операция инверсия $x \mapsto x^{-1}$, така, че да са в сила следните релации:
(i) $(x^{-1})^{-1} = x$;
(ii) Ако $(x, y), (y, z) \in \mathcal{G}^2$, то $\quad (x.y, z), (x, y.z) \in \mathcal{G}^2$ и $\quad (x.y).z = x.(y.z)$;
(iii) $(x^{-1}, x) \in \mathcal{G}^2$ и ако $(x, y) \in \mathcal{G}^2$ то $x^{-1}.(x.y) = y$;
(iv) $(x, x^{-1}) \in \mathcal{G}^2$ и ако $(z, x) \in \mathcal{G}^2$ то $(z.x).x^{-1} = z$.
Ако допълнително $\mathcal{G}$ е локално компактно Хаусдорфово топологично пространство и операциите са непрекъснати (снабдили сме $\mathcal{G}^2$ с релативната топология), то $\mathcal{G}$ ще наричаме локално компактен групоид.

Ще отбележа, че топологичните групоиди, дефинирани по-горе, са различни по свойства от измеримите групоиди, използвани от A. Connes в [Cones-94].

Определение.(**[29]**, Def. 1.2) Ако $x \in \mathcal{G}$, дефинираме $d(x) = x^{-1}.x$ (domain на x) и $r(x) = x.x^{-1}$ (range на x). От горните аксиоми следва,че двойката (x, y) е композируема точно когато $r(y) = d(x)$.

Множеството $\mathcal{G}^0 = r(\mathcal{G}) = d(\mathcal{G})$ се нарича множество на единиците (unit space) на $\mathcal{G}$.

2.2.2 Инвариантни подмножества на $\mathcal{G}^{(0)}$

Определение. ((**[16]**,§ 2.1]) Нека $u, v \in \mathcal{G}^{(0)}$.
Тогава релацията $u \sim v$, когато $r^{-1}(u) \cap d^{-1}(v) \neq \varnothing$ е релация на еквивалентност в $\mathcal{G}^{(0)}$, която определя разбиването на $\mathcal{G}^{(0)}$ на орбити– класовете на еквивалентност на тази релация. Подмножество на $\mathcal{G}^{(0)}$ наричаме инвариантно, ако е обединение на орбити. За $u \in \mathcal{G}^{(0)}$ множеството $r^{-1}(u) \cap d^{-1}(u)$ има структурата на група, нарича се изотропна група.

2.2.3 Лява Хаарова система на групоид

Нека $\mathcal{G}$ е локално компактен групоид. Смятаме, че $C_c(\mathcal{G})$ – пространството на непрекъснатите, комплекснозначни функции с компактен носител е снабдено с топологията на равномерната сходимост върху компактите.
Определение. ((**[16]**, § 2.4,];**[29]**, ch. 1, § 2. Def. 2.2])
Фамилия мерки $\{\lambda^u : u \in \mathcal{G}^{(0)}\}$ се нарича лява Хаарова система за $\mathcal{G}$, ако са в сила следните условия:
1. $\mathrm{supp}(\lambda^u) = r^{-1}(u)$;
2. за всяка $f \in C_c(\mathcal{G})$ функцията $u \mapsto \int f d\lambda^u$ е непрекъсната върху $\mathcal{G}^{(0)}$;
3. за всяко $x \in \mathcal{G}$ и за всяка $C_c(\mathcal{G})$ е в сила $\int f(xy) d\lambda^{d(x)}(y) = \int f(y) d\lambda^{r(x)}(y)$.

2.2.4 Дефиниране на групоидните алгебри $C_c^*(\mathcal{G}, \lambda)$, $C^*(\mathcal{G}, \lambda)$ и $C_{red}^*(\mathcal{G}, \lambda)$

Фамилията на комплекснозначните функции f. чиито носител $supp(f)$ е компактен означаваме с $C_c(\mathcal{G})$. Снабдяваме $C_c(\mathcal{G})$ с топологията на равномерната сходимост върху компактите. Дефинираме в $C_c(\mathcal{G})$ операции с формулите:

$$f * g(x) = \int f(x.y) g(y^{-1})\, d\lambda(y)$$

$$f^*(x) = \overline{f(x^{-1})}$$

Съгласно [**[29]**, Ch. II, § 1, Prop. 1.1] $C_c(\mathcal{G})$ е топологична *-алгебра
В $C_c(\mathcal{G})$ се дефинира норма с формулата:

$$\|f\|_I = \max\left(\sup_{u \in \mathcal{G}^0} \int |f| d\lambda^u, \sup_{u \in \mathcal{G}^0} \int |f^*| d\lambda^u\right).$$

Съгласно [**[29]**, Prop1.4] така дефинираната $\| \, \|_I$ е $*$-норма в $C_c(\mathcal{G})$.
Представяне L на $C_c(\mathcal{G})$ се нарича ограничено, ако $\|L(f)\| \leq \|f\|_I \quad \forall f \in C_c(\mathcal{G})$

C^*-полунорма в $C_c(\mathcal{G})$ може да се зададе с

$$\|f\| = \sup\{\|L(f)\|\},$$

където супремумът се взема по всички ограничени представяния L на $C_c(\mathcal{G})$. Попълнението на $C_c(\mathcal{G})$ относно тази полунорма се нарича групоидна C^*-алгебра и се означава с $C^*(\mathcal{G}, \lambda)$ или $C^*(\mathcal{G})$.

Ще отбележа, че в **[29]** дефиницията на групоидна C^*-алгебра е малко по-обща, там в дефиницията се използва и 1- коцикъл σ, дефиниран в групоида $\mathcal{G}$. Тук не се нуждаем от това и ще смятаме, че този коцикъл е тривиален, т.е. $\sigma \equiv 1$.

Друга C^*-алгебра играе дори по-важна роля — редуцираната групоидна C^*-алгебра $C^*_{red}(\mathcal{G})$. Важността ѝ се определя от [(**[16]**,Thm. 3.7], според която алгебрата на Тьоплиц е изоморфна на $C^*_{red}(\mathcal{G})$.
Редуцираната групоидна C^*-алгебра се дефинира в **[16]**,$ 2.13 като факторалгебрата:

$$C^*_{red}(\mathcal{G}) = C^*(\mathcal{G})/I,$$

където I е сечението на ядрата на всевъзможните представяния $Ind\mu$ на $C_c(\mathcal{G})$, индуцирани от мярка μ в $\mathcal{G}^0$.

2.2.5 Решетка на идеалите на $C^*_{red}(\mathcal{G}, \lambda)$.

Нека $\mathcal{G}$ е групоид с лява Хаарова система $\{\lambda^u\}$ и нека U е отворено инвариантно подмножество на $\mathcal{G}^0$. Тогава $I_U = \{f \in C_c(\mathcal{G}) : \operatorname{supp} f \subset \mathcal{G}|U\}$ е двустранен идеал в $C_c(\mathcal{G})$, а затворената му обвивка $\overline{I_U}$ в $C^*_{red}(\mathcal{G}, \lambda)$ е затворен двустранен идеал в $C^*_{red}(\mathcal{G}, \lambda)$.

Теорема (Muhly, Renault,(**[16]**, Prop. 2.16 ; **[29]**, Prop. 4.5). Изображението $U \mapsto \overline{I_U}$, дефинирано в решетката на отворените инвариантни подмножества на $\mathcal{G}^0$ със стойности в решетката на двустранните идеали на $C^*_{red}(\mathcal{G})$ е биекция, запазваща наредбата. За всяко отворено инвариантно подмножество U на $\mathcal{G}^0$ идеалът $\overline{I_U}$ е канонично изоморфен на $C^*_{red}(\mathcal{G}|U, 1_{\mathcal{G}|U}\lambda)$ и частното $C^*_{red}(\mathcal{G}, \lambda)/\overline{I_U}$ е канонично изоморфно на $C^*_{red}(\mathcal{G}|F, 1_{\mathcal{G}|F}\lambda)$, където $F = \mathcal{G}^0 \backslash U$.

2.2.6 Топологичен изоморфизъм на групоиди.

Нека $\left(\mathcal{G}_1, \{\lambda_1^u\}_{u\in\mathcal{G}_1^0}\right)$ и $\left(\mathcal{G}_2, \{\lambda_2^v\}_{v\in\mathcal{G}_2^0}\right)$ са два топологични групоида с ЛХС.
Определение.(**[16]**,§ 2.10) Топологичен изоморфизъм на $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$ наричаме биекция $\Phi : \mathcal{G}_1 \longrightarrow \mathcal{G}_2$, която е алгебричен морфизъм за операциите умножение и вземане на обратен, и също така е хомеоморфизъм, който прехвърля ЛХС на $\mathcal{G}_1$ в ЛХС на $\mathcal{G}_2$ (т.е.λ_1^u се прехвърля в $\lambda_2^{\Phi(u)}$).
В [**[16]**,Prop. 2.10] е показано, че топологичен изоморфизъм на $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$ дава и изоморфизъм между C^*-алгебрите им.

Ще отбележа, че понятието топологичен изоморфизъм е различно от понятието морфизъм на групоиди, което дава само еквивалентни по Морита C^*-алгебри.

2.3 Основни примери на групоиди и техните алгебри

2.3.1 Тривиален групоид, определен от множество X.

Определение.(**[16]**, § 2.2.1) Нека X е локално компактно пространство. Дефинираме групоид, наричан тривиален групоид, който ще бележим с $\mathcal{G} = Triv(X)$ по следния начин:

• $\mathcal{G} = Triv(X) = X \times X$;

• $\mathcal{G}^{(2)} = \big\{\big((x,y),(x_1,y_1)\big) : y = x_1\big\}$;
$(x,y).(y,y_1) = (x,y_1)$; $(x,y)^{-1} = (y,x)$;

• $r\big((x,y)\big) = (x,y).(x,y)^{-1} = (x,x)$; $d\big((x,y)\big) = (x,y)^{-1}.(x,y) = (y,y)$;

• $\mathcal{G}^{(0)} = \{(x,x) : x \in X\}$; идентифицираме $\mathcal{G}^{(0)}$ с X.

Ако X е локално компактно пространство и α е фиксирана мярка, зададена в X, със $supp(\alpha) = X$, ЛХС се дефинира [(**[16]**,§ 2.5)]) с формулите:

$$\{\lambda^x = \delta_x \times \alpha : x \in X\}\,.$$

Тогава [**[16]**,§ 2.6.2]

$$f * g(x,y) = \int_X f(x,z)g(z,y)d\alpha(z)$$

$$f^*(x,y) = \overline{f(y,x)}.$$

2.3.2 Котривиален групоид, определен от множество X.

Определение. (**[16]**, § 2.2.2) Нека X е локално компактно пространство. Дефинираме групоид, наричан котривиален групоид, който ще бележим с $\mathcal{G} = Cotriv(X)$ по следния начин:

• $\mathcal{G} = Cotriv(X) = X$;

• $\mathcal{G}^{(2)} = \{(x,y) : x = y\}$;

• $x.x = x$; $x^{-1} = x$;
$r\big(x\big) = x$; $d\big(x\big) = x$;

• $\mathcal{G}^{(0)} = X$.

Ако X е локално компактно пространство, ЛХС се дефинира (**[16]**, § 2.5) с

$$\{\lambda^x = \delta_x : x \in X\}\,.$$

Тогава $C_c\big(Cotriv(X)\big)$ представлява(**[16]**, § 2.6.1) алгебрата на непрекъснатите функции с компактен носител и обичайните операции на (поточково) умножение и инволюция.

2.3.3 Група от трансформации.

Нека Y е локално компактно пространство и G е локално компактна група с единица e и λ – лява мярка на Хаар, която действа непрекъснато върху Y.

$$\alpha : \left| \begin{array}{l} Y \times G \to Y \\ (y,t) \mapsto yt \end{array} \right.$$

Определение.(**[16]**, § 2.2.2) Дефинираме групоид $\mathcal{G}$, наречен група от трансформации (transformation group) по следния начин:
• $\mathcal{G} = Y \times G$;
• $\mathcal{G}^{(2)} = \big\{\big((y,t),(y_1,t_1)\big) : y_1 = yt\big\}$;
• $(y,t),(yt,t_1) = (y,tt_1)$; $\qquad (y,t)^{-1} = (yt,t^{-1})$;
• $r\big((y,t)\big) = (y,t).(y,t)^{-1} = (y,e)$; $\qquad d\big((y,t)\big) = (y,t)^{-1}.(y,t) = (yt,e)$;
• $\mathcal{G}^{(0)} = \{(y,e) : y \in Y\}$; идентифицираме $\mathcal{G}^{(0)}$ с Y.

Нека λ е фиксирана мярка на Хаар за G. Фамилията мерки

$$\{\lambda^u = \delta_u \times \lambda : u \in Y = \mathcal{G}^0\}$$

е (**[16]**, § 2.5,) лява Хаарова система за $\mathcal{G}$.
Тогава операциите в $C_c(\mathcal{G})$ се дават(**[16]**, § 2.6.3) с формулите:

$$f * g(x,t) = \int f(x,s)g(xs,s^{-1}t)d\lambda(s) \qquad f^*(x,s) = \overline{f(xs,s^{-1})}.$$

2.3.4 Редукция на групоид по подмножество на множеството от единици.

Определение.(**[16]**, § 2.2.5) Нека $\mathcal{G}$ е групоид с множество на единиците $\mathcal{G}^{(0)}$ и нека E е локално затворено подмножество на $\mathcal{G}^{(0)}$. Редукцията $\mathcal{G}|E$ на $\mathcal{G}$ по E се дефинира с

$$\mathcal{G}|E = \{x \in \mathcal{G} : r(x) \in E, d(x) \in E\}.$$

Операциите в $\mathcal{G}|E$ са ограничения на операциите в $\mathcal{G}$, $(\mathcal{G}|E)^{(0)} = E$.

Когато $\mathcal{G}$ е групата от трансформации $Y \times G$, винаги ще предполагаме, че е в сила условието от **[16]**, § 2.6.4, а именно:

$$supp(1_{\mathcal{G}|X}(\lambda^x) = r^{-1}(x) \cap \mathcal{G}|X,$$

където $x \in E$, $\lambda^x = \delta_x \times \lambda$ и λ е лявата мярка на Хаар за групата G. В този случай произведението се дава с формулата:

$$f * g(x,t) = \int f(x,s)g(xs,s^{-1}t)1_E(xs)d\lambda(s) \quad f,g \in C_c(\mathcal{G}|E).$$

2.3.5 C^*–алгебрата на групоид, който е произведение

Често срещана е ситуацията, когато групоид $\mathcal{G}$ се представя като произведение:

$$\mathcal{G} = \widetilde{\mathcal{G}} \times H$$

на подходящи групоид $\widetilde{\mathcal{G}}$ с ЛХС $\{\lambda^u\}$ и локално компактна група H (предполагаме, че ЛХС на $\mathcal{G}$ е получена като произведение на ЛХС на $\widetilde{\mathcal{G}}$ и Хааровата мярка на H).
Следвайки(**[16]**, § 3.7.1) , можем да запишем. че

$$C^*_{red}(\mathcal{G}) \approxeq C^*_{red}(\widetilde{\mathcal{G}}) \otimes C^*_{red}(H),$$

Този изоморфизъм следва от наблюдението на Muhly и Renault, че аргументите на Guichardet **[38]**, за C^*-алгебрата на произведение на групи са валидни и в по-общата ситуация— произведение на групоид и група. където тензорното произведение е снабдено с най-малката C^*-крос-норма.
Горният изоморфизъм дава възможност да се приложи формулата на Кюнет за пресмятане на K-теорията на $C^*_{red}(\mathcal{G})$.

2.3.6 Относно една пробойна в програмата за работа и нейното закърпване

Преди да се пресмята K-теорията на $\mathcal{B}$ или да се определя типа на алгебрата и да се конструира индексна формула за Фредхолмови оператори е необходимо да се определи решетката на идеалите и съответните частни. За групоидни C^*-алгебри всички изследователи използват теоремата за решетката на идеалите на групоидна C^*-алгебра (формулирана е тук в § 2.2.5). Тази теорема е използвана например от A. Alldridge, Hilgert-Neeb и A. Nica в **[20]**, **[22]** и **[11]**.

Пробойната.

Изследовател, който разчита да използва тази теорема остава неприятно изненадан да види в статията **[46]** [3] на J.Renault и Sundar следната бележка:

Бележка (Remark 5.3 от **[46]**) A part of the proposition quoted in 2.16 of **[16]** is wrong, namely the exactness of the sequence

$$0 \longrightarrow C^*_{red}(\mathcal{G}|U) \longrightarrow C^*_{red}(\mathcal{G}) \longrightarrow C^*_{red}(\mathcal{G}|F)$$

where U is an open invariant subset of $\mathcal{G}^0$ and $F = \mathcal{G}^0 \setminus U$.
It holds for the full C^*- algebras.
However the statement of Propositon 5.2 is proved in complete detail in 2.17 of [MR82].

[3] Ще припомня, че на първият съавтор принадлежи най-цитираното ръководство**[29]** върху групоиди и техните алгебри и е съавтор в **[16]**–основополагащата работа, посветена на групоидния подход за изучаване на разглеждания тук клас алгебри, така че компетентността му е вън от съмнение.

Ще отбележа, че за съжаление в **[46]** не е представен контрапример или допълнителен коментар къде се крие дефектът на Теоремата за решетката на идеалите (цитирана по-горе като Prop.2.16. of **[16]**). Моята проверка на доказателството на тази теорема също не констатира грешка.

Закърпването:

В действителност тук не се използва пълната теория на групоидните C^*-алгебри. В програмата за работа, която следвам и за нашите цели е достатъчно да се разглеждат групоиди от вида $\mathcal{G} = (Y \times G)\,|X$, наричани групоиди на Винер-Хопф– т.е. $\mathcal{G}$ е редукция на група от трансформации $Y \times G$ по затворено подмножество $X \subset \mathcal{G}^0$. Ще установим, че в случаите, които разглеждаме, редуцираната алгебра съвпада с пълната алгебра и следователно предложената програма може да се използва.

В [(**[16]**, §2.15] е представено следното Предложение и неговото доказателство:

Предложение. ([(**[16]**, Prop. 2.15)Ако $\mathcal{G}$ е групоидът, получен чрез редуциране на групата от трансформации $Y \times G\ Y$ и удовлетворяващ условието от § 2.6.4 и ако групата G е аменабелна, то

$$C^*(\mathcal{G}) = C^*_{red}(\mathcal{G})$$

Proof. Това следва от Предложения 3.2, 3.7 и 3.9 на глава II от **[29]**.

Цитираното в това предложение условие от § 2.6.4 е зададено тук в дефиницията в §2.3.4. на редукция на група от трансформации и е валидно за разглежданите в Дисертацията групоиди, а също така разглежданите групи са аменабелни, следователно свойството, което според горната бележка 5.3 от **[46]** е в сила за пълната алгебра е достатъчно за нашите цели.

2.4 К-теория на C^*-алгебра

2.4.1 Точен шестоъгълник в К-теорията

Нека A е C^*-алгебра. За нея могат да се дефинират групите $K_0(A)$ и $K_1(A)$. По дефиниция, $K_0(A)$ е групата, породена от полугрупата на стабилно изоморфните класове на крайните проективни модули над A. Групата $K_1(A)$ може да се дефинира като частното на $GL_\infty(A)$ при факторизация по комутатора на тази група.
Предложение. (**[26]**, § 9.3.1.) Нека

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{i} \mathcal{B} \xrightarrow{\pi} \mathcal{B}/I \longrightarrow 0$$

е точна редица на C^*-алгебри. Тогава следната циклична редица е точна:

$$\begin{array}{lcccc} K_0(I) & \xrightarrow{i_*} & K_0(\mathcal{B}) & \xrightarrow{\pi_*} & K_0(\mathcal{B}/I) \\ \partial_1 \uparrow & & & & \downarrow \partial_0 \\ K_1(\mathcal{B}/I) & \xleftarrow{\pi_*} & K_1(\mathcal{B}) & \xleftarrow{i_*} & K_1(I) \end{array}$$

2.4.2 Пример: Точен шестоъгълник за$\mathcal{T}^1$

Добре известно(**[3]**, Thm 1.] е, че $\mathcal{T}^1$– $\mathbb{C}^*$-алгебрата на класическите Тьоплицови оператори. съдържа като идеал $\mathcal{K}$– алгебрата на компактните оператори, при това [(**[3]**, Thm 2.] частното е изоморфно на $C(T)$ т.е. имаме къса точна редица:

$$0 \longrightarrow \mathcal{K} \xrightarrow{i} \mathcal{T}^1 \xrightarrow{\pi} C(T) \longrightarrow 0.$$

Ще използваме точния шестоъгълник на тази къса точна редица, за да определим К-теорията на $\mathcal{T}^1$:

$$\begin{array}{lcccc} K_0(\mathcal{K}) & \xrightarrow{i_*} & K_0(\mathcal{T}^1) & \xrightarrow{\pi_*} & K_0(C(T)) \\ \partial_1 \uparrow & & & & \downarrow \partial_0 \\ K_1(C(T)) & \xleftarrow{\pi_*} & K_1(\mathcal{T}^1) & \xleftarrow{i_*} & K_1(\mathcal{K}) \end{array}$$

След като използваме, че$K_*(\mathcal{K}) = (\mathbb{Z}, 0)$ и $K_*(C(T)) = (\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$, получаваме:

$$\begin{array}{lcccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{i_*} & K_0(\mathcal{T}^1) & \xrightarrow{\pi_*} & \mathbb{Z} \\ \partial_1 \uparrow & & & & \downarrow \partial_0 \\ \mathbb{Z} & \xleftarrow{\pi_*} & K_1(\mathcal{T}^1) & \xleftarrow{i_*} & 0 \end{array}$$

Алгебрата $\mathcal{T}^1$ е породена от изометрия, която е Фредхолмов оператор с индекс 1.Това дава, че изображението ∂_1 е изоморфизъм.Диаграмното следене в този шестоъгълник позволява да направим извода, че $K_*(\mathcal{T}^1) = (\mathbb{Z}, 0)$.

2.4.3 Пример: Една лема от [42]

Лема. Нека $K_*(\mathcal{B}/\mathcal{K}) = (0, Z)$. Нека да съществува Фредхолмов оператор $S \in \mathcal{B}$ с индекс 1. Тогава:
(i) $K_*(\mathcal{B}) = (0, 0)$;
(ii) Индексното изображение ind $:K_1(\mathcal{B}/\mathcal{K}) \longrightarrow K_0(\mathcal{K})$ е изоморфизъм.
Доказателство. Разглеждаме разширението:

$$0 \longrightarrow \mathcal{K} \xrightarrow{i} \mathcal{B} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{B}/\mathcal{K} \longrightarrow 0. \tag{2.4.3}$$

Записваме точния шестоъгълник за разширението (2.4.3):

$$\begin{array}{ccccc} K_0(\mathcal{K}) & \xrightarrow{i_*} & K_0(\mathcal{B}) & \xrightarrow{\pi_*} & K_0(\mathcal{B}/\mathcal{K}) \\ \partial_1 \uparrow & & & & \downarrow \partial_0 \\ K_1(\mathcal{B}/\mathcal{K}) & \xleftarrow{\pi_*} & K_1(\mathcal{B}) & \xleftarrow{i_*} & K_1(\mathcal{K}) \end{array}$$

Нека означим образуващата на $K_0(\mathcal{K})$ с E. Означаваме също и $U = \gamma(S)$.
Като следствие от критерия за Фредхолмовост [Wedge-Olsen, Thm. 1.4.16] имаме, че U е обратим. Разглеждаме $\partial_1([U]) \in K_0(\mathcal{K})$. $\partial_1([U]) = m[E]$, за някое m.
Образът на E при следовия хомоморфизъм $\tau_* : K_0(\mathcal{K}) \to \mathbb{Z}$ е $\tau_*([E]) = 1$.
Но $\partial_1([U]) = ind(S) = 1$, следователно $m = 1$ или $m = -1$ и оттук $Im(\partial_1) = K_0(\mathcal{K})$.
Стандартно диаграмно следене довършва доказателството.

2.4.4 Точна редица на Майер-Виеторис в К-теорията

Разглеждаме следната комутативна диаграма на C^*-алгебри с единица:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{g_1} & B_1 \\ g_2 \downarrow & & \downarrow f_1 \\ B_2 & \xrightarrow{f_2} & D \end{array} \tag{2.4.4}$$

където $A = \{(b_1, b_2) \in B_1 \oplus B_2 : f_1(b_1) = f_2(b_2)\} \subseteq B_1 \oplus B_2$ и f_1 и f_2 са сюрективни хомоморфизми. Смятаме, че g_1 и g_2 са ограниченията на проекциите $B_1 \oplus B_2 \to B_1$ и $B_1 \oplus B_2 \to B_2$ до подпространството $A \subseteq B_1 \oplus B_2$.
Тогава алгебрата A наричаме pullback на B_1 и B_2 по D, а диаграма от вида (2.4.4) ще наричаме pullback диаграма.

Теорема. (**[47]**, Thm.7.2.1) Ако е дадена комутативната диаграма (2.4.4.) на C^*-алгебри с единица, то съществува следния точен шестоъгълник:

$$\begin{array}{ccccc} K_0(A) & \xrightarrow{(g_{1*}, g_{2*})} & K_0(B_1) \oplus K_0(B_2) & \xrightarrow{f_{1*} - f_{2*}} & K_0(D) \\ \partial_1 \uparrow & & & & \downarrow \partial_0 \\ K_1(D) & \xleftarrow{f_{1*} - f_{2*}} & K_1(B_1) \oplus K_1(B_2) & \xleftarrow{(g_{1*}, g_{2*})} & K_1(A) \end{array}$$

Ще отбележа, че в **[26]**, Thm. 21.2.2 може да се намери дългата точна редица на Майер-Виеторис за кохомологична теория $\{h^n\}$

2.4.5 Конструиране на pullback диаграми за групоидни алгебри

Точната редица на Mayer-Vietoris може да се приложи към групоидни C^*-алгебри по следния начин:

Нека $\mathcal{G}$ е групоид на Винер-Хопф и нека A_1 и A_2 са затворени инвариантни подмножества на $\mathcal{G}^0 = X$. Имаме, че

$$C^*\left(\mathcal{G}|_{A_1 \cup A_2}\right) \cong \{(a_1, a_2) : \varphi_1(a_1) = \varphi_2(a_2) \subseteq C^*\left(\mathcal{G}|_{A_1}\right) \oplus C^*\left(\mathcal{G}|_{A_2}\right)\},$$

където φ_1 и φ_2 се дават като ограничения. Те са очевидно сюрективни. Получаваме следната pullback диаграма на групоидни C^*-алгебри:

$$\begin{array}{lcl}
C^*\left(\mathcal{G}|_{A_1 \cup A_2}\right) & \xrightarrow{\psi_1} & C^*\left(\mathcal{G}|_{A_1}\right) \\
\psi_2 \downarrow & & \downarrow \varphi_1 \\
C^*\left(\mathcal{G}|_{A_2}\right) & \xrightarrow{\varphi_2} & C^*\left(\mathcal{G}|_{A_1 \cap A_2}\right)
\end{array}$$

Тази диаграма определя следния точен шестоъгълник:

$$\begin{array}{lcccl}
K_0\big(C^*\left(\mathcal{G}|_{A_1 \cup A_2}\right)\big) & \xrightarrow{(\psi_{1*}, \psi_{2*})} & K_0\big(C^*\left(\mathcal{G}|_{A_1}\right)\big) \oplus K_0\big(C^*\left(\mathcal{G}|_{A_2}\right)\big) & \xrightarrow{\varphi_{2*} - \varphi_{1*}} & K_0\big(C^*\left(\mathcal{G}|_{A_1 \cap A_2}\right)\big) \\
\partial_1 \uparrow & & & & \downarrow \partial_0 \\
K_1\big(C^*\left(\mathcal{G}|_{A_1 \cap A_2}\right)\big) & \xleftarrow{\varphi_{2*} - \varphi_{1*}} & K_1\big(C^*\left(\mathcal{G}|_{A_1}\right)\big) \oplus K_1\big(C^*\left(\mathcal{G}|_{A_2}\right)\big) & \xleftarrow{(\psi_{1*}, \psi_{2*})} & K_1\big(C^*\left(\mathcal{G}|_{A_1 \cup A_2}\right)\big)
\end{array}$$

Този начин за конструиране на pullback диаграма на групоидни C^*-алгебри съм описал и използвал в **[42]**.

2.4.6 Теорема на Кюнет

В случая, когато C^*-алгебра е представена като тензорно произведение на C^*-алгебрите A и B (удовлетворяващи известни предположения), можем да приложим теоремата на Кюнет:

$$K_0(A \otimes B) = K_0(A) \otimes K_0(B) \oplus K_1(A) \otimes K_1(B)$$
$$K_1(A \otimes B) = K_0(A) \otimes K_1(B) \oplus K_1(A) \otimes K_0(B)$$

Тези равенства са валидни когато A е разрешима (solvable) (виж § 2.1) и $K_*(B)$ няма торзия (**[33]**, Предл. 2.12, Опр. 2.3).

Забележка. Тази формула може да се приложи за определяне на K-теорията на $\mathcal{B} \otimes \mathcal{B}$. Аналогична сметка е приложима и за многопородена група в квадранта.

2.4.7 ПРИМЕР-прилагане на формулата на Кюнет:

Нека $\mathcal{T}^0$ е C^*-алгебрата на Тьоплицовите оператори в горната полуравнина. В сила е следното представяне:

$$T^0 = T^1 \otimes C(T),$$

където T^1 е класическата C^*-алгебра на Тьоплицовите оператори в окръжността.
Добре известно е, че $K_*(T^1) = (\mathbb{Z}, 0)$, като елементите на $K_0(T^1)$ са тривиалните проектори и $K_*(C(T)) = (\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$, като елементите на $K_0(C(T))$ са тривиалните проектори, а елементите на $K_1(C(T))$ са $e^{ik\theta}$.
Прилагането на формулата на Кюнет дава следният резултат:

$$K_0(T^0) = K_0(T^1 \otimes C(T)) = K_0(T^1) \otimes K_0(C(T)) \oplus K_1(T^1) \otimes K_1(C(T)) = \mathbb{Z}$$

Аналогично

$$K_1(T^0) = K_1(T^1 \otimes C(T)) = K_0(T^1) \otimes K_1(C(T)) \oplus K_1(T^1) \otimes K_0(C(T)) = \mathbb{Z}$$

Окончателно $K_*(T^0) = (\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$.

2.5 Циклични кохомологии

2.5.1 Дефиниция на Цикличните кохомологии

По-късно (в § 4.) ще използвам цикличните кохомологии на алгебра, развити от А. Кон (Connes), за получаване на формула за пресмятане на индекса на Фредхолмов оператор. В тази част са събрани необходимите сведения за тази теория.

Определение. (**[39]**, ch.III, § 1) Нека A е нормирана алгебра с единица. За $n \geq 0$ C_λ^n означава A- модула от всички $(n+1)$-линейни, комплекснозначни функционали φ в A, такива че

$$\varphi(a^1, a^2 \dots, a^n, a^0) = (-1)^n \varphi(a^0, a^1 \dots, a^n).$$

При $n < 0$, дефинираме $C_\lambda^n = \{0\}$.
Дефинираме също градуирания A-модул

$$C_\lambda^* = \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_\lambda^n(A).$$

Изображението на Хохшилд (Hochschild) b е A-модулния хомоморфизъм в C_λ^* дефиниран при $n \geq 0$ с формулата :

$$b\varphi(a^0, \dots, a^{n+1}) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^j \varphi(a^0, \dots, a^j a^{j+1}, \dots a^{n+1}) + (-1)^{n+1} \varphi(a^{n+1} a^0, \dots a^n).$$

При $n < 0$ смятаме, че b е нулевото изображение.

Може да се провери, че $b^2 = 0$, и следователно можем да дефинираме кохомологиите H^*_λ на комплекса $\left(C^n_\lambda, b\right)$.Те са известни като циклични кохомологии на Кон.

За продуциране на индексна формула на Фредхолмов оператор,ще използваме билинейното сдвояване на $H^1_\lambda(A)$ и $K_1(A)$.
Съгласно[**[40]**, Part II, Prop15] имаме:

$$\langle u, [\tau] \rangle = \tau(u - 1, u^{-1} - 1).$$

2.5.2 Конструкцията на цикличен 1- коцикъл

Конструкцията на цикличен 1- коцикъл в групоидна алгебра следва от
Теорема ([**[40]**, стр.75, Thm 5.]) Нека H е хилбертово пространство и $L(H)$ е алгебрата на ограничените линейни оператори в H, С $\mathcal{K}$ ще означаваме идеалът на компактните оператори в H, с tr– стандартната следа в $\mathcal{K}$, и с $L^1(H)$–идеалът на операторите с крайна следа. Нека линейното непрекъснато изображение $\rho : A \longrightarrow L(H)$ е почти мултипликативно, т.е.

$$\rho(xy) - \rho(x)\rho(y) \in L^1(H), \qquad \forall x, y \in A.$$

Тогава цикличен 1- коцикъл τ в A се дефинира с формулите:

$$\tau(a^0, a^1) = tr(\varepsilon_0 - \varepsilon_1)$$

където

$$\varepsilon_0 = \rho(a^0 a^1) - \rho(a^0)\rho(a^1),$$

$$\varepsilon_1 = \rho(a^1 a^0) - \rho(a^1)\rho(a^0),$$

По-късно, в § 4.4 за продуциране на индексна формула на Фредхолмов оператор, ще използваме билинейното сдвояване на $H^1_\lambda(A)$ и $K_1(A)$, а именно– съгласно [**[40]**, Part II, Prop. 15] имаме:

$$\langle u, [\tau] \rangle = \tau(u - 1, u^{-1} - 1) \qquad 2.5.2.$$

3 Линейни сечения в един клас групоидни C^*-алгебри

В тази глава ще представя резултатите от **[43]**.

В тази глава разглеждам групоидни C^*-алгебри $\mathcal{T} = C^*(\mathcal{G})$, където групоидът $\mathcal{G}$ е групоид на Винер-Хопф, т.е. $\mathcal{G}$ е редукция на група от трансформации $\mathcal{G} = (Y \times G)|X$ където Y и X са подходящи топологични просранства.

Контекстът е, че при зададена локално компактна група G и нейна подполугрупа P, J. Renault и P.Muhly са описали начин за построяване на пространствата

Y и X, така, че C^*-алгебрата $\mathcal{T}$ на операторите на Винер-Хопф, асоциирани с G и P да е изоморфна с групоидната алгебра: $\mathcal{T} = C^*(\mathcal{G})$. По такъв начин резултати за групоидната алгебра могат да се тълкуват като резултати за операторната алгебра, породена от операторите на Винер-Хопф.

Нека F е затворено инвариантно подмножество на $\mathcal{G}^0 = X$. Тогава $U = X \setminus F$ е отворено инвариантно подмножество на $\mathcal{G}^0 = X$.

Съгласно теоремата за решетката на идеалите в групоидна алгебра **[10**,§ 2.2.16, Prop. 2.16] и [**11** § 3.9, Prop.4.5] , имаме следната къса точна редица:

$$0 \longrightarrow J = C^*_{red}(\mathcal{G}_{|U}) \xrightarrow{i} C^*_{red}(\mathcal{G}) \xrightarrow{\gamma} C^*_{red}(\mathcal{G}_{|F}) \longrightarrow 0 \tag{3.1}$$

Факторизображението $\gamma : C^*_{red}(\mathcal{G}) \xrightarrow{\gamma} C^*_{red}(\mathcal{G}_{|F})$ съпоставя на финитна функция $a \in C_c(\mathcal{G})$ нейното ограничение$\gamma(a)$ до $\mathcal{G}_{|F}$. $\gamma(a)$ представлява финитна функция, дефинирана в $\mathcal{G}_{|F}$.

Нека да разгледаме и обратната задача. Ако зададем правило ψ, което на финитна функция $b \in C_c(\mathcal{G}_{|F})$ съпоставя нейно продължение до финитна функция $\psi(b)$, дефинирана в $\mathcal{G}$, то значи сме дефинирали обратен на γ,
(т.е. $\gamma(\psi(b)) = b$).Смислено е да се погрижим ψ да е непрекъснато и линейно.
Тогава ψ се продължава до непрекъснато линейно сечение:

$$\psi : C^*_{red}(\mathcal{G}_{|F}) \xrightarrow{\psi} C^*_{red}(\mathcal{G})$$

.

3.1 Случаят, когато $\mathcal{K} \subset C^*(\mathcal{G})$. Критерий за Фредхолмовост

Интересно е да се обсъди случаят когато $\mathcal{T}$ съдържа $\mathcal{K}$ — идеалът на компактните оператори в $L^2(P)$.
Достатъчни условия за това ($P \cap P^{-1} = \{e\}$ и X да е регулярна компактификация на P) са дадени в **[16]**, § 3.7.2. Ще припомня, че X се нарича регулярна компактификация на P ако $i(P)$ е отворено в X и влагането на P в X дава хомеоморфизъм между P и $i(P)$.

По-късно Sheu в [**[17]**, Thm. 1.] доказва, че ако X не е регулярна компактификация на P, то $\mathcal{T}$ не е type I-алгебра и не съдържа нетривиални компактни оператори.
Нека сега X е регулярна компактификация на P. Тогава $U = i(P)$ е отворено и инвариантно подмножество на $X = \mathcal{G}^0$ и горната точна редица (3.1) добива вида:

$$0 \longrightarrow \mathcal{K} \xrightarrow{i} C^*(\mathcal{G}) \xrightarrow{\gamma} C^*(\mathcal{G}) \backslash \mathcal{K} = C^*(\mathcal{G}_{|F}) \longrightarrow 0$$

Тази точна редица вече дава критерий кога оператор $T \in \mathcal{T}$ е Фредхолмов.

Теорема 3.1 Оператор $T \in C^*(\mathcal{G})$ е Фредхолмов тогава и само тогава, когато $\gamma(T)$ е обратим в $C^*(\mathcal{G}_{|F})$.

Доказателство. Теоремата е директно следствие от добре известно твърдение, наричано Теорема на Atkinson в **7**, Thm. 1.4.16 и наричано Теорема на Nikolskii в **8**, § 3, Теорема 19.

Бележка 3.1 Ако $a \in C^*(\mathcal{G})$, то $a - \psi\gamma(a) \in \mathcal{K}$, защото $\gamma\big(a - \psi\gamma(a)\big) = 0$ и поради точността на редицата.
По такъв начин a е Фредхолмов точно когато $\psi\gamma(a)$ е Фредхолмов, като при това a и $\psi\gamma(a)$ имат равни Фредхолмови индекси.

3.2 Линейни сечения в $C^*(\mathcal{G})$, породени от контракции в пространството от единици $\mathcal{G}^0$

В тази част ще представя метод за конструиране на непрекъснати линейни сечения, като се използват контракции в пространството от единици $\mathcal{G}^0$ на групоида.

Нека F е затворено и инвариантно подмножество на X и нека $\lambda : X \longrightarrow F$ е непрекъсната контракция (т.е $\lambda(x) = x, \forall x \in F$). В такъв случай можем да дефинираме линейно сечение по следния начин:

Теорема 3.2-1 При горните означения изображението ψ, зададено с формулата:

$$\psi(b)(x, n) = b(\lambda(x), n) \quad b \in C_c\big(\mathcal{G}_{|F}\big)$$

е непрекъснато сечение.

• **Пример 1.** Основен пример за приложение на тази теорема е групоидната алгебра, която представя C^*-алгебрата, породена от една изометрия, т.е. предполагаме, че $G = \mathbb{Z}$, и $P = \mathbb{Z}_+ = \{0, 1.2. \dots, n \dots\}$– полугрупата на естествените числа.
Дефинираме $Y = \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$. Имаме очевидно влагане $i : G \hookrightarrow Y$; смятаме, че G действа като транслация върху точките от $\mathbb{Z}$ и че това действие оставя ∞ неподвижна. Дефинираме $X = clos(i(P))$ и $\mathcal{G} = (Y \times G)|X$.

В този пример контракцията се дава с $\lambda(y) = \infty, \forall y \in Y$.
Тогава сечението се задава с $\psi(b(x, n)) = b(\infty, n)$.
Ще отбележа, че това сечение съвпада с разгледаното от Coburn в **[3]**, Thm1. сечение.

Има аналог на тази формула в случая, когато F е обединение на краен брой затворени и инвариантни подможества на X.

Нека предположим, че $F_1, F_2, \dots F_n$ са затворени и инвариантни подмножества на X и $F = \bigcup_{i=1}^{n} F_i$.За $\sigma \subset \{1, 2, \dots, n\}$, дефинирам $rank(\sigma)$ да е броят на елементите на σ и означавам $F_\sigma = \bigcap_{i\in\sigma} F_i$. Нека $\lambda_\sigma : X \longrightarrow F_\sigma$ са непрекъснати контракции, за които $\lambda_{\sigma\cup\tau} = \lambda_\sigma \circ \lambda_\tau$ при произволни $\sigma, \tau \subset \{1, 2, \dots, n\}$.
Тогава можем отново да дадем формула, дефинираща непрекъснато сечение:

Теорема 3.2-2 При горните означения изображението ψ, дефинирано с формулата:

$$\psi(b)(x, n) = \sum_{\sigma \subset . \{1,2,\dots,n\}} (-1)^{rank(\sigma)+1} b(\lambda_\sigma(x), n) \quad b \in C_c\big(\mathcal{G}_{|F}\big)$$

е непрекъснато сечение.

Доказателство. Избираме $x \in F$. Ще смятаме за определеност, че $x \in F_1$.Тогава имаме $\lambda_1(x) = x$. За да докажем, че $\psi(b)$ е продължение на b, трябва да установим, че $\psi(b)(x, n) = b(x, n)$.
За тази цел ще групираме членовете на сумата в дясната страна на равенството. Ще видим, че при това групиране събираемите се съкращават и остава само едно събираемо, а именно събираемото: $b(\lambda_1(x), n) = b(x, n)$.
Избираме $\varnothing \neq \sigma \subset \{1, 2, \dots, n\}$ със $\sigma \neq \{1\}$.
Ако $1 \notin \sigma$, означаваме $\rho = \sigma \cup \{1\}$.
Имаме $rank(\rho) = rank(\sigma) + 1$. Освен това $\lambda_\rho(x) = \lambda_{\sigma\cup\{1\}} = \lambda_\sigma \circ \lambda_1(x) = \lambda_\sigma(x)$. Следователно събираемите в горната сума, съответни на σ и ρ имат равни стойности и противоположни знаци и се съкращават взаимно.
В алтернативния случай, когато $1 \in \sigma$, избираме $\tau = \sigma \setminus \{1\}$. Отново събираемите, съответни на σ и τ имат равни стойности и противоположни знаци и се съкращават взаимно.
И така, при такова групиране всички събираеми освен това, което е съответно на $\sigma = \{1\}$ се съкращават и $\psi(b)(x, n) = (b)(x, n)$.
Изображението ψ е непрекъснато като композиция на непрекъснати.

Пример 2. Подходящ за илюстрация на горната теорема пример е C^*-алгебрата на Тьоплицовите оператори в първи октант. Тя е разгледана в частния случай когато $n = 2$ от R. Douglas и R. Howe в **[31]**. Тук ще ограничa до записването на формулата, която дефинира сечението ψ. При $n = 2$ се получава C^*-алгебрата на Тьоплицовите оператори в първи квадрант.
В общия случай на първи октант можем да дефинираме затворени инвариантни подмножества в $\mathcal{G}^0 = X$ с формулата:
За $\sigma \subset \{1, 2, \dots, n\}$ дефинираме следните затворени и инвариантни орбити в X:

$$F_\sigma = \{x \in X : x_j = \infty \text{ за } j \in \sigma\}$$

.

В случая на квадранта ($n=2$ и $\sigma \subset \{1,2\}$) имаме следните орбити в X:

$F_{\{1\}} = \{x = (\infty, x_2) : x_2 \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\}\}$; $F_{\{2\}} = \{x = (x_1, \infty,) : x_1 \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\}\}$; и $F_{\{1,2\}} = \{x = (\infty, \infty)\}$.
Разглеждаме контракциите $\lambda_1 : (x_1, x_2) \mapsto (\infty, x_2)$, $\lambda_2 : (x_1, x_2) \mapsto (x_1, \infty)$ и $\lambda_{1,2} : (x_1, x_2) \mapsto (\infty, \infty)$. Тогава сечението ψ в този пример се задава със следната формула:

$$\psi b(x_1, x_2) = b(\infty, x_2) + b(x_1, \infty) - b(\infty, \infty).$$

Ще отбележа, че това сечение съвпада със сечението, обсъждано от E. Park в [**[15]**, Prop2.2.]

4 Една индексна формула в клас групоидни алгебри

В тази част ще представя резултатите от **[45]**.
В **[40]** и **[39]**, A. Connes развива теорията на цикличните кохомологии$H_\lambda^*(A)$ на алгебра A (преглед на необходимите сведения от тази теория е направен в § 2.5.). Там той доказва, че съществува билинейно сдвояване $\langle .,. \rangle$ между $H_\lambda^*(A)$ и $K_*(A)$– K-теорията на A.
В **[40]**, глава 7, Теорема 5, е дадена връзка между $H_\lambda^*(A)$и изображения, които ще наричаме почти комутативни ϱ (т.е. изображения, $\varrho : A \longrightarrow L(H)$ за които $\varrho(x.y) - \varrho(.y)\varrho(y)$ са оператори с крайна следа при $x, y \in A$). Когато изображението ϱ е почти мултипликативно, Connes конструира цикличен 1-коцикъл $\tau \in H_\lambda^1$. и доказва, че индексното изображение $K_1(A) \longrightarrow \mathbb{Z}$ се дава с формулата:

$$index(\varrho(U)) = \langle U, \tau \rangle \qquad \forall U \in GL(A). \tag{4.1}$$

В **[15]**, E. Park изучава C^*- алгебрата $\mathcal{T}^{\alpha,\beta}$, породена от операторите на Тьоплиц в квадранта. Там използвайки горната връзка, открита от Connes, той успява да я приложи в $\mathcal{T}^{\alpha,\beta}$, като в резултат получава формула, която пресмята индекса на Фредхолмов оператор $T \in \mathcal{T}^{\alpha,\beta}$
Park доказва в **[15]**, Prop. 2.3 че $\mathcal{T}^{\alpha,\beta}$ съдържа $\mathcal{K}$ – идеала на компактните оператори и по такъв начин достига до следната точна редица:

$$0 \longrightarrow \mathcal{K} \xrightarrow{i} T^{\alpha,\beta} \xrightarrow{\gamma} T^{\alpha,\beta}/\mathcal{K} \longrightarrow 0$$

След това конструира непрекъснато сечение $\rho : T^{\alpha,\beta}/\mathcal{K} \longrightarrow T^{\alpha,\beta}$(заб. това сечение съвпада със сечението, получено в Пример 2. от предишната глава).

Изображението ρ има свойството, че за всички x и y от $T^{\alpha,\beta}/\mathcal{K}$, операторът $\rho(xy) - \rho(x)\rho(y)$ е компактен. За съжаление, това е най-многото, което може да се твърди: $\rho(xy) - \rho(x)\rho(y)$ не е винаги оператор с крайна следа. E. Park заобикаля проблема, като ограничава избора на x и y. Той изисква x и y да са елементи на навсякъде гъста подалгебра $T_\infty^{\alpha,\beta}$ на $T^{\alpha,\beta}/\mathcal{K}$.

В тази глава ще раглеждаме групоидна C^*-алгебра $\mathcal{T} = C^*(\mathcal{G})$, където групоидът $\mathcal{G}$ е групоид на Винер-Хопф, т.е. $\mathcal{G}$ е редукция на група от трансформации: $\mathcal{G} = (Y \times G)|X$, и където Y и X са подходящи топологични пространства. Ще припомня, че групоидът $\mathcal{G}$ и неговата редуцирана C^*-алгебра $C^*_{red}(\mathcal{G})$ са важни поради теоремата за представяне на C^*-алгебрите, породени от оператори на Винер-Хопф или от оператори на Тьоплиц $\mathcal{T}$ [**6**, § 3.7] [**4**,§ 2.4.1] $C^*_{red}(\mathcal{G})$.
Достатъчни условия за това $\mathcal{K} \subset \mathcal{T}$ са представени в [**6**, § 3.7.2]и [**12**, Thm. 1]
В **[43]**, § 3], съм представил метод как да се конструира непрекъснато линейно сечение ψ в групоидна алгебра на Винер-Хопф, като се използват контракции в пространството от единици на групоида $\mathcal{G}$.

При опит да използваме връзката между цикличните кохомологии и почти комутативните изображения се натъкваме на същите затруднения каквито е срещнал E. Park в **[15]** : операторът $\psi(xy) - \psi(x)\psi(y)$ е компактен, но не винаги е с крайна следа. За да се последва идеята на E. Park от**[15]** (а именно да се ограничи изменението на x и y до навсякъде гъста подалгебра на $\mathcal{T}/\mathcal{K}$) е необходимо да се наложат допълнителни условия на ψ,които да позволят да дефинираме подалгебра $\mathcal{T}^\infty$, гъста в $\mathcal{T}/\mathcal{K}$, със свойството, че $\psi(x.y) - \psi(x).\psi(y)$ да има крайна следа за всички $x, y \in \mathcal{T}^\infty$. Такива условия ще бъдат представени в следващата част.

4.1 Допълнителни ограничения върху сечението ψ.

• **Предп. 1.** Предполагам, че съществува фамилияM от оператори– елементи на групоидната алгебра.
Предполагам, че M поражда алгебрата $C^*(\mathcal{G})$. Елементите на M ще наричам **елементарни образуващи**. Ако A е елементарна образуваща предполагам, че $\|A\| \leq 1$
Ако $A = A_1A_2A_3 \dots A_n$,където A_i са елементарни образуващи, то A ще наричам **крайно произведение**. Поради условието за нормата на елементарна образуваща, имаме, че $\|A\| \leq 1$ и за всяко крайно произведение A.

• **Предп. 2.** Предполагам, че е определена числова функция $N(A)$, дефинирана в множеството от крайните произведения, такава, че ако A е крайно произведение, то $A - \psi\gamma(A)$ е оператор с крайна следа (trace class operator) и

$$\|A - \psi\gamma(A)\|_1 \leq N(A).$$

• **Предп. 3.** Предполагам, че съществува константа C_1, такава че $N(A) \geq C_1$ за всяка елементарна образуваща A.

• **Предп. 4.** Предполагам, че съществува константа C_2, такава че

$$N(AB) \leq C_2[N(A) + N(B)]$$

за всички крайни произведения A и B.

4.2 Дефиниране на алгебрите S и $\mathcal{T}^\infty$

Нека да разгледаме следния ред, за който ще предполагаме, че е сходящ: $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i N(A_i)$, където A_i са крайни произведения и константите α_i са реални. Поради Предпол. 2 ($N(A) \geq C_1$) имаме, че редът $\sum\limits_{i=1}^{\infty} C_1 |\alpha_i|$ а затова и редът $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| < \infty$ е също сходящ. Но $\|A_i\| \leq 1$ и следователно операторът $A = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i A_i$ е добре дефиниран.

Определение 4.2.1. Нека S е множеството на всички оператори от този вид:

$$S = \{A = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i A_i : \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| N(A_i) < \infty\}.$$

Теорема 4.2 S е алгебра.

Доказателство. Очевидно S е затворено относно събиране и умножение с константа. Трябва да се провери само, че S е затворено относно умножението. Избираме произволни $A = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i A_i$ и $B = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \beta_j B_j$ от S.
Тогава $AB = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_i \beta_j A_i B_j$. За да видим, че $AB \in S$ е достатъчно да докажем, че редът $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_i \beta_j| N(A_i B_j) < \infty$ е сходящ.
Имаме

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_i \beta_j| N(A_i B_j) \leq \mathrm{C}_2 \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_i \beta_j| \left(N(A_i) + N(B_j)\right) =$$

$$= \mathrm{C}_2 \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_i| \, |\beta_j| N(A_i) + \mathrm{C}_2 \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_i| \, |\beta_j| N(B_j) \leq$$

$$\leq \mathrm{C}_2 \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| \, N(A_i) \sum_{j=1}^{\infty} |\beta_j| + \mathrm{C}_2 \sum_{j=1}^{\infty} |\beta_j| N(B_j) \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| < \infty.$$

При предпоследното неравенство използвахме очевидните неравенства$\forall i \, |\alpha_i| \leq \sum\limits_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|$ и $\forall j \, |\beta_j| \leq \sum\limits_{j=1}^{\infty} |\beta_j|$. □

Определение. $\mathcal{T}^\infty = \gamma(\mathcal{S})$.
Ще отбележа, че $\mathcal{T}^\infty$ е гъста в $C^*(\mathcal{G}_{|\mathcal{F}})$, най-малкото защото в S се съдържат елементарните образуващи.

4.3 Изображението $\psi : \mathcal{T}^\infty \to C^*(\mathcal{G})$ е почти мултипликативно

Lemma 4.3 Нека A и B са крайни произведения.

Тогава операторът $\psi\gamma(AB) - \psi\gamma(A)\psi\gamma(B)$ е с крайна следа и съществува константа C_3, такава, че

$$\|\psi\gamma(AB) - \psi\gamma(A)\psi\gamma(B)\|_1 \leq C_3[N(A) + N(B)]$$

Доказателство. Имаме:

$$\psi\gamma(AB) - \psi\gamma(A)\psi\gamma(B) =$$

$$= [\psi\gamma(AB) - AB] + [AB - A\psi\gamma(B)] + [A\psi\gamma(B) - \psi\gamma(A)\psi\gamma(B)] =$$

$$= [\psi\gamma(AB) - AB] + A\,[B - \psi\gamma(B)] + [A - \psi\gamma(A)]\,\psi\gamma(B).$$

Следователно

$$\|\psi\gamma(AB) - \psi\gamma(A)\psi\gamma(B)\|_1 \leq$$

$$\|AB - \psi\gamma(AB)\|_1 + \|A\|\,\|B - \psi\gamma(B)\|_1 + \|A - \psi\gamma(A)\|_1\,\|\psi\gamma(B)\| \leq$$

$$\leq N(AB) + 1\,.\,N(B) + N(A)\,.\,\|\psi\|\,.\,1 \leq \mathrm{C}_2(N(A) + N(B)) + N(B) + N(A)\,.\,\|\psi\| \leq$$

$$(\mathrm{C}_2 + \|\psi\| + 1)\,(N(A) + N(B)) = \mathrm{C}_3\,(N(A) + N(B))\,.$$

Тук сме означили $\mathrm{C}_3 = \mathrm{C}_2 + \|\psi\| + 1$. □

Теорема 4.3 Нека $\gamma(A), \gamma(B) \in \mathcal{T}^\infty$.
Тогава $\psi\gamma(AB) - \psi\gamma(A)\psi\gamma(B)$ е оператор с крайна следа.

Доказателство. Нека $A, B \in \mathcal{S}$ и нека $A = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i A_i$, $B = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \beta_j B_j$.

Според горната лема имаме

$$\|\psi\gamma(A_iB_j) - \psi\gamma(A_i)\psi\gamma(B_j)\|_1 \leq \mathrm{C}_3\,(N(A_i) + N(B_j))\,.$$

Тогава от представянето

$$\psi\gamma(AB) - \psi\gamma(A)\psi\gamma(B) =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_i\beta_j(\psi\gamma(A_iB_j) - \psi\gamma(A_i)\psi\gamma(B_j))$$

заключаваме, че

$$\|\psi\gamma(AB) - \psi\gamma(A)\psi\gamma(B)\|_1 \leq C_3 \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_i|\,|\beta_j|\,(N(A_i) + N(B_j)) =$$

$$= C_3 \left[\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| N(A_i)\right]\left[\sum_{j=1}^{\infty} |\beta_j|\right] + C_3\left[\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|\right]\left[\sum_{j=1}^{\infty} |\beta_j|\,N(B_j)\right] < \infty.$$

□

4.4 Извод на индексната формула за Фредхомови оператори в $\mathcal{T}$

В тази част ще използваме сдвояването на $H^*_\lambda(A)$ и$K_*(A)$ и дефинициите на 1-коцикъла τ и сечението ψ, за да получим следната индексна формула:

Теорема 4.4 Нека $T \in \mathcal{T}$ е Фредхолмов оператор.
Нека $\gamma(T)$ и $\big(\gamma(T)\big)^{-1}$ са в $\mathcal{T}^\infty$.
Тогава Фредхолмовия индекс $ind(T)$ на оператора T се пресмята със следната формула:

$$ind(T) = tr\left[\psi\gamma(T)\psi(\gamma(T)^{-1}) - \psi(\gamma(T)^{-1})\psi\gamma(T)\right]$$

Доказателство. Да разгледаме Фредхолмовия оператор $T \in \mathcal{T}$.

Според **[43]**, Теорема 2.1 (Критерият за това оператор T да е Фредхолмов) имаме, че $U = \gamma(T)$ обратим. Следователно операторът $U^{-1} = \big(\gamma(T)\big)^{-1}$ е добре дефиниран.
Съгласно [§ 3.1, Бел. 3.1.], $T - \psi\gamma(T) \in \mathcal{K}$. Следователно T е Фредхолмов тогава и само тогава когато $\psi\gamma(T)$ е Фредхолмов , при това T и $\psi\gamma(T)$ имат равни Фредхолмови индекси. Затова за да определим индекса на T, е достатъчно да пресметнем индекса на $\psi\gamma(T)$.

Но съгласно [**[40]**, Глава 7, Теорема 5], за $U = \gamma(T)$ имаме, че индексът на $\psi(U) = \psi\big(\gamma(T)\big)$се равнява на $\langle\tau, U\rangle = \tau(U, U^{-1})$.
Ще получим желаната индексна формула като заместим в дефиницията на τ, (дадена тук в § 2.5.2). □

Ще отбележа, че изискваните в § 4.1 ограничения за сечението ψ и предположенията на теоремата са валидни за добре познати алгебри– напр. C^*-алгебрата $\mathcal{T}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_+)$ на класическите Тьоплицови оператори и C^*- алгебрата на Тьоплицовите оператори в квадранта **[15]**, §4.5. по-конкретно виж Лема 4.2.

За съжаление доказателството на този факт не използва групоидна техника.
Ще изкажа хипотезата, че условията от § 4.1. за сечението ψ са в сила за популярни алгебри – напр. C^*- алгебрата на Тьоплицовите оператори в първи октант, което ще генерира и съответната индексна теорема.

5 Относно K-теорията на $\mathcal{B}(R^n, P)$ при P – полиедрален конус

5.1 Предварителни бележки за K-теорията на $\mathcal{B}(R^n, P)$

В тази част ще бъдат представени резултатите от **[42]**
В тази глава ще разглеждам C^*-алгебрата $\mathcal{B}(R^n, P)$ на операторите на Винер-Хопф, асоциирани с групата $G = \mathbb{R}^n$ и конус P. Ще предполагаме, че P е полиедрален конус, т.е. P е с връх 0 и е породен от краен брой екстремни лъчи. Разнообразни свойства на полиедралните конуси могат да бъдат намерени в **[51]**.

Muhly и Renault в **[16]** са разгледали C^*-алгебрата $\mathcal{B}$ на Винер-Хопф в случая, когато $G = \mathbb{R}^n$ и P е полиедрален конус или самоспрегнат конус. Те доказват [**[16]**, Thm. 3.7], че $\mathcal{B}$ е изоморфна на групоидна C^*-алгебра. Това им позволява да получат композиционен ред [**[16]**, Thm. 4.7] за $\mathcal{B}$, откъдето пък следва, че $\mathcal{B}$ е разрешима (solvable) [**[16]**, Cor. 4.7.2].

Ключово за описанието на групоида $\mathcal{G}$ и инвариантните подмножества на множеството на единиците му $\mathcal{G}^0$ е понятието стена [**[16]**,§ 3.9] на P.

Определение. Стена на конус P е затворена подполугрупа F на P, която удовлетворява следните изисквания:
(iii) $e \in F$ [4];
(iii) $tFt^{-1} = F, \forall t \in G$;
(iii)Ако $x \in P$ $y \in F$ и $x \leq_P y$ то $x \in F$;

Множеството от всички стени на P ще означаваме с $\mathcal{F}(P)$. Когато F е стена на P, с $\langle F\rangle$ означаваме затвореното подпространство на $\mathbb{R}^n$, породено от F: $\langle F\rangle = F - F$, а със $st(F)$ означаваме множеството на всички стени, които съдържат F. Множеството $P - F$ е конус, съдържащ $\langle F\rangle$. С $P_F = (P - F)/\langle F\rangle$ означаваме конуса в $\mathbb{R}^n \ominus \langle F\rangle$, определен от F. Ako $F_1 \in st(F)$, то $F - F_1$ съдържа $\langle F\rangle$. Нещо по-общо: изображението $F_1 \mapsto (F - F_1)/\langle F\rangle$ определя биекция между $st(F)$ и множеството $\mathcal{F}(P_F)$ от всички стени на P_F.

Предложение 5.1. ([**16**],§ 3.7.1]) $\mathcal{B}(R^n, P - F)$ е изоморфна на $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n \ominus \langle F\rangle), P_F) \otimes C^*_{red}(\langle F\rangle)$, където тензорното произведение е снабдено с най-малката C^*-крос норма.

Ще отбележа, че $C^*_{red}(\langle F\rangle) \cong C_0(\langle F\rangle)$, а също, че всички алгебри разгледани тук са postliminal **[12]**, § 5.6], това дава, че крос-нормата на тензорното произведение е единствена.

Този факт и изоморфизма на Том (Connes' Thom isomorphism) **[26]**, Thm 10.2.2] позволяват да определим, че
$K_i\left(\mathcal{B}(R^n, P - F)\right) = K_{(i+l)mod2}\left(\mathcal{B}(\mathbb{R}^n \ominus \langle F\rangle), P_F)\right)$, където $l = dim(\langle F\rangle))$.

[4]Ще припомня, че с e е означен неутралния елемент на групата G. В разглеждания тук случай $e = 0 \in R^n$.

Теорема (**[16]**, Thm 4.7]) C^*-алгебрата $\mathcal{B}$ има композиционен ред

$$0 = I_0 \subset I_1 \subset ... \subset I_n \subset \mathcal{B}.$$

При това $I_1 = \mathcal{K}$, $\mathcal{B}/I_n \cong C_0(\mathbb{R}^n)$ и $I_k/I_{k-1} \cong (F_k \times C_0(\mathbb{R}^k)) \otimes \mathcal{K}$, където F_k е множеството на k-мерните стени на P, взето с дискретната топология.

Алгебрата $\mathcal{B}$ е с явно описани идеали и междинни частни, следващ въпрос е да се изясни коя е нейната K-теория. Един възможен подход е да се приложи комбинация от точната редица на Майер-Виеторис и точната редица на K-теорията. Този подход ще бъде приложен тук.

Едно наблюдение Ще припомня, че моделът за пространство Y е

$$Y = \{(F,t) : F \in \mathcal{F}(P), t \in \mathbb{R}^n \ominus \langle F \rangle\}$$

Нека изберем подмножества A, B C и D на $\mathcal{F}(P)$ по следния начин: $B = C \cup D$ и $A = C \cap D$.
Означаваме $X_A = \{(F,t) : F \in A, t \in \mathbb{R}^n \ominus \langle F \rangle\}$, $\widetilde{A} = C^*(\mathcal{G}|X_A)$ и аналогично
$X_B = \{(F,t) : F \in B, t \in \mathbb{R}^n \ominus \langle F \rangle\}$, $\widetilde{B} = C^*(\mathcal{G}|X_B)$;
$X_D = \{(F,t) : F \in D, t \in \mathbb{R}^n \ominus \langle F \rangle\}$, $\widetilde{D} = C^*(\mathcal{G}|X_D)$.
$X_C = \{(F,t) : F \in C, t \in \mathbb{R}^n \ominus \langle F \rangle\}$, $\widetilde{C} = C^*(\mathcal{G}|X_C)$;
Както в § 2.4.5 конструирам pullback -диаграмата:

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{B} & \xrightarrow{g_1} & \widetilde{C} \\ g_2 \downarrow & & \downarrow f_1 \\ \widetilde{D} & \xrightarrow{f_2} & \widetilde{A} \end{array}$$

Тогава C^*-алгебрата $\widetilde{B}$ е pullback на $(\widetilde{C}, \widetilde{D})$ по $\widetilde{A}$. и можем да запишем съответната точна редица на Майер-Виеторис:

$$\begin{array}{ccccc} K_0(\widetilde{B}) & \xrightarrow{(\psi_{1*},\psi_{2*})} & K_0(\widetilde{D}) \oplus K_0(\widetilde{C}) & \xrightarrow{\varphi_{2*}-\varphi_{1*}} & K_0(\widetilde{A}) \\ \partial_1 \uparrow & & & & \downarrow \partial_0 \\ K_1(\widetilde{A}) & \xleftarrow{\varphi_{2*}-\varphi_{1*}} & K_1(\widetilde{D}) \oplus K_1(\widetilde{C}) & \xleftarrow{(\psi_{1*},\psi_{2*})} & K_1(\widetilde{B}) \end{array}$$

Ако в тази диаграма имаме, че $K_*(\widetilde{D}) = (0,0)$ и $K_*(\widetilde{C}) = (0,0)$, то можем да заключим, че вертикалните стрелки са изоморфизми.

$\mathcal{G}_1$ е изоморфен на $\mathbb{R} \times \mathcal{G}(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$, където $\mathcal{G}(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ е групоидът на Винер-Хопф, съответен на $G = \mathbb{R}$ и $P = \mathbb{R}_+$.
Получаваме следната pullback диаграма в която $\mathcal{B}/\mathcal{K}$ е залепване на $\widetilde{D_1}$ и $\widetilde{D_2}$ по $C_0(\mathbb{R}^2)$:

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\mathcal{B}/\mathcal{K}} & \xrightarrow{g_1} & \widetilde{D_1} \\ g_2 \downarrow & & \downarrow f_1 \\ \widetilde{D_2} & \xrightarrow{f_2} & C_0(\mathbb{R}^2) \end{array}$$

Редицата на Майер-Виеторис, приложена към тази pulback-диаграма е:

$$\begin{array}{cccccc} K_0(\widetilde{\mathcal{B}}/\mathcal{K}) & \xrightarrow{(\psi_{1*},\psi_{2*})} & K_0(\widetilde{D_1}) \oplus K_0(\widetilde{D_2}) & \xrightarrow{\varphi_{2*}-\varphi_{1*}} & K_0(C_0(\mathbb{R}^2)) \\ \partial_1 \uparrow & & & & \downarrow \partial_0 \\ K_1(C_0(\mathbb{R}^2)) & \xleftarrow{\varphi_{2*}-\varphi_{1*}} & K_1(\widetilde{D_1}) \oplus K_1(\widetilde{D_2}) & \xleftarrow{(\psi_{1*},\psi_{2*})} & K_1((\widetilde{\mathcal{B}}/\mathcal{K}) \end{array}$$

Получаваме, че $K_*(\widetilde{\mathcal{B}}/\mathcal{K}) = (0, \mathbb{Z})$.
Сега ще дам определение на основното ограничение, което налагам върху полиедралните конуси– понятието конус да бъде"exhaustible". То е нужно за да може се приложи индуктивно теоремата на Майер- Виеторис. По-долу– в § 5.4 ще се види, че това понятие няма значение, защото основната теорема е в сила за всички полиедрални конуси. Тук го давам само за пълнота на разглежданията.

Определение. Нека P е полиедрален конус в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Казваме, че $L \subset \mathcal{F}(P)$ удовлетворява условието **C**, точно когато са изпълнени :

(i) Съществува едномерна стена, която не принадлежи на L.

(ii)L е обединение на звездите на фамилия едномерни стени на P.

(iii) Съществува такова подрежданеF_1, F_2, $\dots F_k$ на тази фамилия едномерни стени на P, че за всяко от множествата A_l, $l = 2, 3, \dots, k$ да са в сила горните две условия (i) и (ii), където

$$A_l = st(F_l) \cap \bigcup_{i=1}^{l-1} st(F_i)$$

Конуса P се нарича exhaustible, ако съществува едномерна стена $F \in \mathcal{F}(P)$ такава, че $\mathcal{F}(P) \setminus \{F\}$ да удовлетворява условието C.

5.2 Конструиране на на Фредхолмов оператор с индекс 1

Когато са ни известни идеал на алгебрата $\mathcal{B}$ и съответното частно, може да се запише точният шестоъгълник от К-теорията (виж § 2.4.1.).

Обаче дори когато са известни К-групите на идеала и частното, диаграмното следене в тази диаграма не е достатъчно за да се определи и К-теорията на алгебрата. За тази цел е необходима допълнителна информация за изображенията в шестоъгълника.

В случая, когато идеалът е $\mathcal{K}$– идеалът на компактните оператори такава допълнителна информация може да се получи чрез конструиране на Фредхолмов оператор S. Съществуването на такъв оператор доказва, че индекното изображение $\partial_1 : K_1(\mathcal{B}/\mathcal{K}) \longrightarrow K_0(\mathcal{K})$ е нетривиално; а ако допълнително $ind(S) = 1$, получаваме, че пораждащата на $K_0(\mathcal{K}) = \mathbb{Z}$ е в образа на $\partial_1 : K_1(\mathcal{B}/\mathcal{K}) \longrightarrow K_0(\mathcal{K})$ т.е. ∂_1 е сюрекция. Това съображение обяснява важността на конструкцията, която ще бъде представена тук.

Дефинираме операторите

$$E(x,s) = C\prod_{k=1}^{n} e^{-(x,y_k)} e^{-\frac{1}{2}(s,y_k)} 1_{P'}(x) 1_{P'}(x+s)$$

$$F(x,s) = Ce^{\frac{1}{2}(s,y_1)} 1_{(-\infty,0]}\big((s,y_1)\big) \prod_{k=2}^{n} e^{-(x,y_k)} e^{-\frac{1}{2}(s,y_k)} 1_{P'}(x) 1_{P'}(x+s)$$

Лема. Нека P е полиедрален конус в $\mathbb{R}^d$.
(i) E е едномерен проектор в $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d, P)$
(ii) $F \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d, P)$ и удовлетворява равенствата:

$$F^* * F = F^* + F \qquad \text{и} \qquad F * F^* = F + F^* - E.$$

$$F(x,s) = Ce^{\frac{1}{2}(s,y_1)} 1_{(-\infty,0]}\big((s,y_1)\big) \prod_{k=2}^{n} e^{-(x,y_k)} e^{-\frac{1}{2}(s,y_k)} 1_{P'}(x) 1_{P'}(x+s)$$

Доказателство: Нека разгледаме най- напред случая, когато $P = \mathbb{R}^n_+$. В този случай операторите E и F имат вида:

$$E(x,s) = C\prod_{k=1}^{n} e^{-x_k} e^{-\frac{1}{2}s_k} 1_{\mathbb{R}^n_+}(x) 1_{\mathbb{R}^n_+}(x+s)$$

$$F(x,s) = Ce^{\frac{1}{2}s_1} 1_{(-\infty,0]}(s) \prod_{k=2}^{n} e^{-x_k} e^{-\frac{1}{2}s_k} 1_{\mathbb{R}^n_+}(x) 1_{\mathbb{R}^n_+}(x+s)$$

Най-напред ще покажем, че $E, F \in L_I(\mathcal{G})$. Ще припомня(**[16]**, §2.6.4.), че елементите на $L_I(\mathcal{G})$ са тези измерими функции f, дефинирани в $\mathcal{G}$, за които е крайно числото:

$$\|f\|_I = \max\big\{\sup_{u\in\mathcal{G}^0}\int |f|d\lambda^u, \sup_{u\in\mathcal{G}^0}\int |f^*|d\lambda^u\big\}$$

Като използваме теоремата на Фубини и равенството

$$\int e^{-(x+s)} 1_{[0,\infty)}(x+s) ds = 1 \qquad (5.2),$$

получаваме, че $E \in L_I(\mathcal{G})$. Сходни разсъждения дават, че и $F \in L_I(\mathcal{G})$.

За да докажем, че E е едномерен проектор, следва да проверим равенствата $E = E^*$, $E = E * E$ и $tr(E) = 1$. Непосредствено се проверява, че $E(x,s) = E(x+s,-s) = E^*(x,s)$.
За второто равенство— като използваме отново Теоремата на Фубини и (5.2), получаваме:

$$E * E(x,t) = \int E(x,s)E(x+s,t-s)1_X(x+s)ds =$$

$$= E(x,t)\int \prod_{k=1}^{n} e^{-(x_k+s_k)}1_{[0,\infty)}(x+s)ds = E(x,t)$$

Следвайки **[16]**, можем да разглеждаме $E(x,x-s)$,$x \in P$ като ядро на самоспрегнат интегрален оператор в $L^2(\mathbb{R}_+)$. Като използваме добре познатата формула за следа на самоспрегнат интегрален оператор с непрекъснато ядро, получаваме:

$$tr(E) = \int E(x,0)dx = ds \int \prod_{k=1}^{n} e^{-x_k}1_{[0,\infty)}(x)dx = 1.$$

С това се установява, че E е едномерен проектор. За (ii) записваме F във следната форма:

$$F(x,s) = e^{\frac{1}{2}s_1}1_{[0,\infty)}(s)E_{n-1}$$

Тогава

$$F^*(x,s) = e^{\frac{1}{2}x_1+s_1}1_{[0,\infty)}(s)E_{n-1}.$$

След това с непосредствено пресмятане се проверяват равенствата от (ii).

Сега ще разгледаме обшия случай, когато P е полиедрален конус в $\mathbb{R}^d$. Върху екстремалните лъчи на P избираме точки $\{y_i : i = 1,2,\ldots,N\}$ с условието $|y_i| = 1$. Нека F_i е стената на P, породена от y_i.
Можем да смятаме, че $\{y_i : i = 2,\ldots,n\}$ определят екстремните лъчи на нов конус— конуса P'.
Линейното изображение Φ,с матрица$\left(y_{i,j}\right)_{i,j=1}^{n}$,може да се разшири до топологически изоморфизъм $\Phi : (x,t) \mapsto (\Phi(x),\Phi(t))$ между$\mathcal{G}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n_+)$ и $\mathcal{G}(\mathbb{R}^n,P')$.При такъв изоморфизъм, E и F се изобразяват в елементи, дефинирани в подгрупоид на $\mathcal{G}(\mathbb{R}^n,P)$ и горните равенства са валидни.

Теорема 5.2 Нека P е полиедрален конус в $\mathbb{R}^d$. В $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d,P)$ съществува Фредхолмов оператор с индекс 1.

Доказателство: Ще отбележа най-напред, че $\mathcal{B}$ е алгебра, в която няма единица. Добавяме я и за простота ще използваме същото означение за така получената алгебра.

Нека изберем $S = 1 - F$.Непосредствена проверка с използване на гормата лема дава равенствата $SS^* = 1$ и $S^*S = 1 - E$. □

Следствие. Ако $K_*(\mathcal{B}(R^n, P)/\mathcal{K}) = (0, \mathbb{Z})$,
то (i) $K_*(\mathcal{B}) = (0, 0)$;
(ii)индексното изображение на разширението

$$ind : K_1(\mathcal{B}(R^n, P)/\mathcal{K}) \to K_0(\mathcal{K})$$

е изоморфизъм.

Доказателство. Виж §2.4.3. □

5.3 K-теория на $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d, P)/\mathcal{K}$

Теорема (**[42]**, Prop. 3.1.) Нека $n \leq 3$. Тогава $K_*(\mathcal{B}(R^n, P)/\mathcal{K}) = (0, \mathbb{Z})$.

Доказателство. Нека $n = 1$ и $P = \mathbb{R}_+$.
Имаме[M-R, §2.18 (p.13/44)], че $\mathcal{B}(R^1, \mathbb{R}_+)/\mathcal{K} = C_0(\mathbb{R})$ и е добре известно, че $K_*\big(C_0(\mathbb{R})\big) = (0, \mathbb{Z})$.

Нека $n = 2$ и P е полиедрален конус в равнината, т.е е ъгъл.За определеност ще разгледам случая, когато$P = [0, \infty) \times [0, \infty)$ в $\mathbb{R}^2$, в общия случай разсъждението е същото.

Ще пресметнем K-теорията на $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2, P)$.
Според конструкцията на Muhly-Renault $\mathcal{B} = C^*(\mathcal{G})$, решетката на идеалите се определя от $\mathcal{G}^0 = X$. Стените на P са: самото P, две едномерни стени, определени от двата екстремални лъча и $\{0\}$.
Можем да опишем X като обединение на следните орбити: $X_0 = i(P) \equiv P$; $X_1 = [0, \infty] \times \{\infty\}$; $X_2 = \{\infty\} \times [0, \infty]$ и $X_{1,2} = (\infty, \infty)$.
Означавам $\mathcal{G}_0 = \mathcal{G}|X_0$; $\mathcal{B}_0 = C^*(\mathcal{G}_0)$; $\mathcal{G}_1 = \mathcal{G}|X_0 \cup X_1$; $\mathcal{B}_1 = C^*(\mathcal{G}_1)$;
$\mathcal{G}_2 = \mathcal{G}|X_0 \cup X_2$; $\mathcal{B}_2 = C^*(\mathcal{G}_2)$; $G_\infty = \mathcal{G}|X_1 \cup X_2$; $\mathcal{B}_\infty = C^*(\mathcal{G}_\infty)$;
Съгласно **[16]**, теорема 5.1 съществува композиционен ред

$$0 \subset \mathcal{K} \subset I_1 \subset I_2 = \mathcal{B}.$$

При това $\mathcal{B}/I_1 \cong C_0(\mathbb{R}^2)$ и $I_1/\mathcal{K} \cong \big(C_0(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{K}\big) \oplus \big(C_0(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{K}\big) = J_1 \oplus J_2$.
Добре известно е ,че $K_*(\mathcal{K}) = (\mathbb{Z}, 0)$ и $K_*(C_0(\mathbb{R}^2)) = (\mathbb{Z}, 0)$.

Означаваме$\mathcal{G}_0 = (\mathcal{G})|X_0$. и $\mathcal{G}_1 = (\mathcal{G})|X_1 \cup X_0$, $\mathcal{G}_2 = (\mathcal{G})|X_2 \cup X_0$
$\mathcal{G}_{1,2} = (\mathcal{G})|X_{1,2}$.

Групоидът $\mathcal{G}_0 = Triv(P)$. Следователно $I_0 = C^*(\mathcal{G}_0) = \mathcal{K}$.

Групоидът $\mathcal{G}_1$ може да бъде представен по следния начин: $\mathcal{G}_1 \cong \mathbb{R} \times \mathcal{G}(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$, където $\mathcal{G}(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ е групоидът, построен при $G = \mathbb{R}$ и $P = \mathbb{R}_+$.

$C^*(\mathcal{B}_1) = C^*(\mathcal{G}_1) = C^*(C_0(\mathbb{R})) \otimes C^*(\mathcal{G}(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+))$. Прилагането на формулата на Кюнет дава, че $K_*((\mathcal{B}_1) = (0, \mathbb{Z}) \times (0, 0) = (0, 0)$.
Аналогично, за $C^*(\mathcal{B}_2) = C^*(\mathcal{G}_2)$ също получаваме $K_*((\mathcal{B}_2) = (0, 0)$.

По-нататък, $\mathcal{G}_{1,2} = \{pt\} \times \mathbb{R}^2$, $C^*(\mathcal{B}_{1,2}) = C^*(\mathcal{G}_{1,2}) = C_0(\mathbb{R}^2)$ и $K_*((\mathcal{B}_{1,2}) = (\mathbb{Z}, 0)$

Естествено се получи следната pullback diagrama, в която морфизмите са ограничения:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B} & \xrightarrow{\psi_1} & \mathcal{B}_1 \\ \psi_2 \downarrow & & \downarrow \varphi_1 \\ \mathcal{B}_2 & \xrightarrow{\varphi_2} & \mathcal{B}_{1,2} \end{array} \tag{5.2}$$

Прилагаме точната редица на Майер-Виеторис:

$$\begin{array}{lcccl} K_0\left(\mathcal{B}/\mathcal{K}\right)) & \xrightarrow{(\psi_{1*},\psi_{2*})} & K_0\big(\mathcal{B}_1\big) \oplus K_0\big(\mathcal{B}_2\big) & \xrightarrow{\varphi_{2*}-\varphi_{1*}} & K_0\big(C_0(\mathbb{R}^2)\big) \\ \partial_1 \uparrow & & & & \downarrow \partial_0 \\ K_1\big(C_0(\mathbb{R}^2)\big) & \xleftarrow{\varphi_{2*}-\varphi_{1*}} & K_1\big(\mathcal{B}_1\big) \oplus K_1\big(\mathcal{B}_2\big) & \xleftarrow{(\psi_{1*},\psi_{2*})} & K_1\left(\mathcal{B}/\mathcal{K}\right) \end{array}$$

В тази диаграма средните членове са $\{0\}$, следователно вертикалните изображения са изоморфизми:

$$K_0(\mathcal{B}/\mathcal{K}) = K_1(C_0(\mathbb{R}^2)) = 0 \qquad K_1(\mathcal{B}/\mathcal{K}) = K_0(C_0(\mathbb{R}^2)) = \mathbb{Z}$$

При пресмятането К-теорията на $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2, P)$ в този пример $K_*\big(\mathcal{B}(\mathbb{R}^2, P)\big)/\mathcal{K} = (0, \mathbb{Z})$ и поради лемата от §2.4.3 и съществуването на Фредхолмов оператор с индекс 1 $K_*\big(\mathcal{B}(\mathbb{R}^d, P)\big) = (0, 0)$.

Накрая, разглеждаме разширението

$$0 \longrightarrow \mathcal{K} \xrightarrow{i} \widetilde{\mathcal{B}} \xrightarrow{\pi} \widetilde{\mathcal{B}}/\mathcal{K} \longrightarrow 0$$

Точния шестоъгълник на това разширение е:

$$\begin{array}{lcccl} K_0\big(\mathcal{K}\big) & \xrightarrow{i_*} & K_0\big(\widetilde{\mathcal{B}}\big) & \xrightarrow{\pi_*} & K_0\big(\widetilde{\mathcal{B}}/\mathcal{K}\big) \\ \partial_1 \uparrow & & & & \downarrow \partial_0 \\ K_1\big(\widetilde{\mathcal{B}}/\mathcal{K}\big) & \xleftarrow{\pi_*} & K_1\big(\widetilde{\mathcal{B}}\big) & \xleftarrow{i_*} & K_1\big(\mathcal{K}\big) \end{array}$$

□

Тази теорема ни доведе до въпроса за конструиране на Фредхолмов оператор и пресмятане на неговия индекс.

В предната глава беше показано, че съществува Фредхолмов оператор с индекс 1. Това дава както в § 2.4.3, че изображението $K_1(\mathcal{B}/\mathcal{K}) \to K_0(\mathcal{K})$, $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ е биекция и $K_*(\mathcal{B}/\mathcal{K}) = (0, \mathbb{Z})$ и $K_*(\mathcal{B}) = (0, 0)$ Оказва се, че за много широк клас полиедрални конуси е приложимо това разсъждение.

За общият случай на полиедрален конус ($n > 2$) прилагането на точната редица на Майер-Виеторис и такова разсъждение, както по-горе може да се направи винаги, когато средните членове в горната диаграма са нулеви групи. За да се обходи цялата граница на P обаче се изисква подходяща подредба при изброяването на стените. В **[42]** съм въвел понятието exhaustible cone.То позволява многократно прилагане на горното разсъждение.

Като се използва индукция по размерността n, в **[42]**, thm 3.5 е доказано, че ако P е exhaustible, то $K_*\big(\mathcal{B}(\mathbb{R}^d, P)\big)/\mathcal{K} = (0, \mathbb{Z})$, което комбинирано с лемата от § 2.4.3 и съществуването на Фредхолмов оператор с индекс 1 дава следния резултат:

Теорема 5.3 Нека P е полиедрален конус в $\mathbb{R}^n$, който е exhaustible. Тогава

$$K_*\big(\mathcal{B}(\mathbb{R}^d, P)\big)/\mathcal{K} = (0, \mathbb{Z}) \qquad \text{и} \qquad K_*\big(\mathcal{B}(\mathbb{R}^d, P)\big) = (0, 0).$$

5.4 Епилог на изследването за K-теория на $\mathcal{B}(R^n, P)$ при P – полиедрален конус

Индуктивната дефиниция на понятието exhaustible cone е тромава и неудобна. При все това в **[42]**, Лема 3.4 е доказано, че симплициалните конуси във всички размерности и всички конуси в $\mathbb{R}^n$, при $n \leq 3$ са exhaustible.
За да се разшири обхвата на Теорема 5.2 следва да се намерят още класове конуси от този вид.В действителност, не ми е известен пример на полиедрален конус, който не е exhaustible. Естествената хипотеза е че всички полиедрални конуси са exhaustible, за съжаление не съм в състояние да я докажа.
В **[20]**,Thm 0.1 и **[21]** с помощта на друга техника – спектралната точна редица – е получен резултат, който е по-силен от Теорема 5.2 в две направления: за P не се поставят изисквания да бъде exhaustible и са получени резултати от KK-теорията, от които Теорема 5.2 е непосредствено следствие.

Теорема 5.3 (Aldridge, **[20]**, Thm 0.1) Нека P е полиедрален конус.
Тогава$\mathcal{B}$ е KK-свиваема (KK-contractible) и $\mathcal{B}/\mathcal{K}$ и $\mathbb{C}$ са KK- еквивалентни.

След публикуването на Теорема 5.3 въпросът кои конуси са exhaustible престава да бъде интересен и поради тази причина, тук няма да бъдат обсъждани подробно дефиницията на exhaustible конус и доказателството на горната Теорема 5.2.

Ще отбележа, че публикуването на **[42]** не е било напразно. защото целта на работата на Alldridge е да се усили резултатът от Теорема 5.2. При това при доказването на Теорема 5.3 в **[20]** съществено е използвана конструкцията на Фредхолмов оператор с индекс 1.

Обобщение на горните резултати от **[42]**, **[20]** и **[21]** за случая на действие на полугрупа може да се види в **[46]**, Prop. 6.5 и Rem. 6.6. Използваната там техника е еквивалентност на Морита между алгебри.

6 C^*-алгебра на Тьоплицовите оператори в $H_3(\mathbb{Z})$

Дискретната група на Хайзенберг $H_3(\mathbb{Z})$ се дефинира по следния начин:

$$H_3(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \quad a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}$$

В **[37]** е показано, че K-теорията на $H_3(\mathbb{Z})$ е $(\mathbb{Z}^3, \mathbb{Z}^3)$.
Ако се избере P да бъде подполугрупата на $G = H_3(\mathbb{Z})$ от „положителните елементи на G“ :

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \quad a, b, c \in \mathbb{Z}, a, b, c \geq 0 \right\},$$

може да се дефинира C^*-алгебрата на операторите на Тьоплиц, асоциирани с $H_3(\mathbb{Z})$ и P. Тя ще бъде означавана с $\mathcal{T}(H_3(\mathbb{Z}))$.

Удобно е да се използва следният запис на $H_3(\mathbb{Z})$:

$$\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto (a, b, c)$$

При такива означения, неутралния елемент е $(0, 0, 0)$, а операциите са:

$$\begin{array}{rcl} (a, b, c)(a_1, b_1, c_1) & = & (a + a_1, b + b_1, c + c_1 + ab_1) \\ (a, b, c)^{-1} & = & (-a, -b, -c + ab) \end{array}$$

В тази част ще бъде получено представяне на $\mathcal{T}(H_3(\mathbb{Z}))$ като групоидна C^*-алгебра. Ще бъде параметризирано явно пространството от единиците на получения групоид. Това ще позволи да се получи решетката на идеалите и композиционен ред за $\mathcal{T}(H_3(\mathbb{Z}))$.

6.1 Дефиниране на групоида

За построяване на групоида, следвам схемата на A. Nica от **[10]**. Тя предписва за елементи на Y да се вземат всички граници относно слабата-* сходимост на редици от вида $\{t_k P^{-1}\}_{k=1}^{\infty}$. Понеже $H_3(\mathbb{Z})$ е дискретна група, затова ще търся поточковите граници на редиците от този вид. Множеството на всички поточкови граници на тези редици означавам с Y.
И така, елементите на Y са подмножества на $H_3(\mathbb{Z})$. Дефинираме действие на $H_3(\mathbb{Z})$ върху Y (отляво) с:

$$\left| \begin{array}{rcl} H_3(\mathbb{Z}) \times Y & \longrightarrow & Y \\ (t, S) & \mapsto & tS = \{\forall ts : s \in S\} \end{array} \right.$$

Разглеждаме множеството $\{tP^{-1} : t \in P\}$. Имаме влагане i на G в Y чрез формулата: $t \mapsto tP^{-1}$. Правим наредбена компактификация, получаваме Y и дефинираме X като $X = clos(i(P))$. X е снабдено с топологията на Виеторис. Разглеждаме групоида

$$\mathcal{G} = \big(H_3(\mathbb{Z}) \times Y\big)_{|X}.$$

Елементите на $\mathcal{G}$ са всички двойки $(t, S) : t \in H_3(\mathbb{Z})$, $S \in X$, $tS \in X$. Алгебричните операции в $\mathcal{G}$ са:

$$\begin{aligned} &\mathcal{G}^{(2)} = \{\forall\big((t', S'), (t, S)\big) : S' = tS\} \\ &((t', tS), (t, S)\big) = (t't, S) \\ &(t, S)^{-1} = (t^{-1}, tS) \end{aligned}$$

Имаме

$$\begin{aligned} &d\big((t, S)\big) = (t, S)^{-1}(t, S) = (e, S) \\ &r\big((t, S)\big) = (t, S)(t, S)^{-1} = (e, tS) \end{aligned}$$

Ще видим , че всеки елемент на $y \in Y$ има вида $y = 1_A$, където A е затворено и solid подмножество на G. Това означава, че е в сила условието M на Nica (**[10]**, Def. 2.3.2). Тогава, по**[10]**, Lema 2.2.3 и **[10]**, Prop. 2.3.4, редукцията на $Y \times G$ по X е законна и ограничението на Хааровата система за $Y \times G$ е Лява Хаарова система за $(Y \times G)|X$.

Теорема 6.1. $\mathcal{T}(H_3(\mathbb{Z})) \cong C^*(\mathcal{G})$.

Доказателство. Непосредствено следствие от резултата на A. Nica, представен в **[10]**, Prop. 2.4.1 □

6.2 Поточкови граници на редиците $\left\{t_k P^{-1}\right\}_{k=1}^{\infty}$

Ключов момент при определянето на решетката на идеалите е да се опишат в явен вид поточковите граници на редици от множества, които са от вида $\{t_k P^{-1}\}_{k=1}^{\infty}$. Редиците $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ в P ще записваме във вида $\left\{\left(t_1^k, t_2^k, t_3^k\right)\right\}_{k=1}^{\infty}$. Множеството $\{x = (x_1, x_2, x_3) : x \in t_k P^{-1}\}$ може да се запише във вида:

$$\begin{aligned} x \in t_k P^{-1} \quad &\iff \quad x^{-1} t_k \in P \\ &\iff \quad (t_1^k - x_1, t_2^k - x_2, t_3^k - x_3 + x_1 x_2 - x_1 t_2^k) \in P \\ &\iff \quad \left| \begin{array}{rcl} x_1 & \leq & t_1^k \\ x_2 & \leq & t_2^k \\ x_3 + (t_2^k - x_2)x_1 & \leq & t_3^k \end{array} \right. \end{aligned}$$

Идеята, която се реализира по-долу е следната: да се определи списък от условия за редиците $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$, които гарантират, че $\{t_k P^{-1}\}_{k=1}^{\infty}$ е поточково сходяща. По-късно ще бъде обосновано, че от всяка редица в P може да се намери подредица, която удовлетворява някое от условията в списъка.

Определение. С помощта на неравенства се определят следните подмножества на $H_3(\mathbb{Z})$:

$S_{c_1 c_2 c_3} = \{x \in H_3(\mathbb{Z}) : x_1 \leq c_1$ и $x_2 \leq c_2$ и $x_3 + (c_2 - x_2)x_1 \leq c_3\}$

$S_{c_1 c_2 *} = \{x \in H_3(\mathbb{Z}) : x_1 \leq c_1$ и $x_2 \leq c_2\}$

$S_{* c_2 c_3} = \{x \in H_3(\mathbb{Z}) : x_2 \leq c_2$ и $x_3 + (c_2 - x_2)x_1 \leq c_3\}$

$S_{c_1**} = \{x \in H_3(\mathbb{Z}) : x_1 \leq c_1\}$
$S_{c,d**} = \{x \in H_3(\mathbb{Z}) : x_1 \leq c-1\} \cup \{x \in H_3(\mathbb{Z}) : x_1 = c \text{ и } x_3 \leq cx_2 + d\}$
$S_{*c_2*} = \{x \in H_3(\mathbb{Z}) : x_2 \leq c_2\}$
$S_* = H_3(\mathbb{Z})$
Определение. Определяме:
$U_{123} = \{S_{c_1c_2c_3} : c_1, c_2, c_3 \in N\}$
$U_{12} = \{S_{c_1c_2*} : c_1, c_2 \in N\}$
$U_{23} = \{S_{*c_2c_3} : c_2, c_3 \in N\}$
$S_{c_1c_2c_3} = \{x \in H_3(\mathbb{Z}) : x_1 \leq c_1 \text{ и } x_2 \leq c_2 \text{ и } x_3 + (c_2 - x_2)x_1 \leq c_3\}$
$S_{c_1c_2*} = \{x \in H_3(\mathbb{Z}) : x_1 \leq c_1 \text{ и } x_2 \leq c_2\}$
$S_{*c_2c_3} = \{x \in H_3(\mathbb{Z}) : x_2 \leq c_2 \text{ и } x_3 + (c_2 - x_2)x_1 \leq c_3\}$
$S_{c_1**} = \{x \in H_3(\mathbb{Z}) : x_1 \leq c_1\}$
$S_{c,d**} = \{x \in H_3(\mathbb{Z}) : x_1 \leq c-1\} \cup \{x \in H_3(\mathbb{Z}) : x_1 = c \text{ and } x_3 \leq cx_2 + d\}$
$S_{*c_2*} = \{x \in H_3(\mathbb{Z}) : x_2 \leq c_2\}$
$S_* = H_3(\mathbb{Z})$

Определение 3.2. Определяме следните подмножества на X:
$U_{123} = \{S_{c_1c_2c_3} : c_1, c_2, c_3 \in N\}$
$U_{12} = \{S_{c_1c_2*} : c_1, c_2 \in N\}$
$U_{23} = \{S_{*c_2c_3} : c_2, c_3 \in N\}$
$U_{1d} = \{S_{c,d**} : c_1 \in N, d \in \mathbb{Z}\}$
$U_1 = \{S_{c_1**} : c_1 \in N\}$
$U_2 = \{S_{*c_2*} : c_2 \in N\}$
$U_0 = \{0\}$

Определение. Разглеждаме редици $\{t_k\}_{k=1}^{\infty} = \left\{\left(t_1^k, t_2^k, t_3^k\right)\right\}_{k=1}^{\infty}$ в P, такава че $\left\{t_1^k\right\}_{k=1}^{\infty}$, $\left\{t_3^k\right\}_{k=1}^{\infty}$, $\left\{t_3^k\right\}_{k=1}^{\infty}$ са монотонни и които удовлетворяват някое от следните условия:

1. **Усл**$_{123}$ $t_1^k \xrightarrow[k\to\infty]{} c_1 \in \mathbb{N}$ и $t_2^k \xrightarrow[k\to\infty]{} c_2 \in \mathbb{N}$ и $t_3^k \xrightarrow[k\to\infty]{} c_3 \in \mathbb{N}$

2. **Усл**$_{12}$ $t_1^k \xrightarrow[k\to\infty]{} c_1 \in \mathbb{N}$ и $t_2^k \xrightarrow[k\to\infty]{} c_2 \in \mathbb{N}$ и $t_3^k \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty$

3. **Усл**$_{23}$ $t_1^k \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty$ и $t_2^k \xrightarrow[k\to\infty]{} c_2 \in \mathbb{N}$ и $t_3^k \xrightarrow[k\to\infty]{} c_3 \in \mathbb{N}$

4. **Усл**$_{2}$ $t_1^k \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty$ и $t_2^k \xrightarrow[k\to\infty]{} c_2 \in \mathbb{N}$ и $t_3^k \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty$

5. **Усл**$_{1c}$ $t_1^k \xrightarrow[k\to\infty]{} c_1 \in \mathbb{N}$ и $t_2^k \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty$ и $t_3^k \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty$ и $\dfrac{t_3^k}{t_2^k} \xrightarrow[k\to\infty]{} c \in [0, \infty)$

6. **Усл**$_{1}$ $t_1^k \xrightarrow[k\to\infty]{} c_1 \in \mathbb{N}$ и $t_2^k \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty$ и $t_3^k \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty$ и $\dfrac{t_3^k}{t_2^k} \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty$

7. **Усл**$_{0}$ $t_1^k \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty$ и $t_2^k \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty$ и $t_3^k \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty$

Определение. За редици, които удовлетворяват **Усл**$_{1c}$ въвеждаме допълнително следните:

Усл$_A$ За всяко $d \in \mathbb{Z}$ и за всички достатъчно големи k е в сила $\dfrac{t_3^k - d}{t_2^k} < c$;

Усл$_B$ За всяко $d \in \mathbb{Z}$ и за всички достатъчно големи k е в сила $\dfrac{t_3^k - d}{t_2^k} > c$;

Усл$_D$ Съществува $d \in \mathbb{Z}$, за всички достатъчно големи k е в сила

$$\frac{t_3^k - d - 1}{t_2^k} \leq c < \frac{t_3^k - d}{t_2^k}.$$

Лема 4.1. Ако редицата $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$
а) удовлетворява условието **Усл**$_{123}$, то $t_k P^{-1} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} S_{c_1c_2c_3}$.
б) удовлетворява условието **Усл**$_{12}$, то $t_k P^{-1} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} S_{c_1c_2*}$.
в) удовлетворява условието **Усл**$_{23}$, то $t_k P^{-1} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} S_{*c_2c_3}$.
г) удовлетворява условието **Усл**$_2$, то $t_k P^{-1} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} S_{*c_2*}$.
д) удовлетворява условието **Усл**$_1$, то $t_k P^{-1} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} S_{c_1**}$.
е) удовлетворява условието **Усл**$_0$, то $t_k P^{-1} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} S_{***}$.

Доказателство. Предварително да отбележим, че ако някоя от обсъжданите редици има крайна граница, то тя става стационарна от някой номер нататък (защото е целочислена редица).
Ще докажем б). Останалите точки имат аналогично доказателство. Имаме $t_1^k \to c_1$, $t_2^k \to c_2$, $t_3^k \to \infty$; можем да смятаме, че $t_1^k = c_1$, $t_2^k = c_2$.
Трябва да обосновем, че

$$x \in S_{c_1c_2*} \quad \Leftrightarrow \quad \exists k_0 : \forall k > k_0 \Rightarrow x \in S_{t_1^k t_2^k t_3^k}$$

$$\left| \begin{array}{ll} x_1 & \leq c_1 \\ x_2 & \leq c_2 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left| \begin{array}{rl} x_1 & \leq c_1 \\ x_2 & \leq c_2 \\ x_3 + (c_2 - x_2) & \leq t_3^k \end{array} \right.$$

Третото неравенство е в сила, защото неговата лява страна е ограничена редица, а дясната – редица, клоняща към безкрайност.

Ще докажем в): Нека е в сила **Усл**$_{23}$, т.е. нека $t_1^k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, $t_2^k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} c_2 \in \mathbb{N}$ и $t_3^k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} c_3 \in \mathbb{N}$.
Можем да смятаме, че редиците t_2^k и t_3^k са стационарни, т.е. $\forall k \quad t_2^k = c_2$ и $t_3^k = c_3$.
Тогава $t_k = (t_1^k, c_2, c_3)$.
Множеството $t_k P^{-1}$ удовлетворява условията: $x_1 \leq t_1^k$, $x_2 \leq c_2$ и $x_3 + (c_2 - x_2) \leq c_3$.Но това са точно условията, които определят $S_{*c_2c_3}$,
т.е $t_k P^{-1} = S_{*c_2c_3}$ и твърдението $t_k P^{-1} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} S_{*c_2c_3}$. е тривиално изпълнено.

Лема 4.2. Ако редицата $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворява условието **Усл**$_{1c}$ и **Усл**$_A$, то $t_k P^{-1} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} S_{min(c_1, c-1)**}$.

Доказателство. Нека изберем фиксирана точка $x = (x_1, x_2, x_3)$.
Ще докажем най-напред, че ако $x_1 > c_1$ и $x_1 > c - 1$, то за достатъчно големи k са валидни неравенствата:

$$\left| \begin{array}{rl} x_1 & \leq t_1^k \\ x_2 & \leq t_2^k \\ x_3 + (t_2^k - x_2) & \leq t_3^k \end{array} \right.$$

Ако $x_1 \leq c_1$, ще бъде изпълнено първото неравенство. Второто е очевидно вярно винаги.
Ако $x_1 \leq c - 1$, в третото неравенство делим на t_2^k и правим граничен преход:

$$\frac{x_3}{t_2^k} + \left(1 - \frac{x_2}{t_2^k}\right) x_1 \leq \frac{t_3^k}{t_2^k}$$

Имаме $\dfrac{x_3}{t_2^k} \to 0$, $\dfrac{x_2}{t_2^k} \to 0$ и $\dfrac{t_3^k}{t_2^k} \to c$
Границата вдясно е $x_1 \leq c - 1$, а границата вдясно е c, неравенството е вярно за всички големи k.
Нека сега $x_1 \leq c_1 + 1$ или $x_1 \leq c$. Ще докажем, че за достатъчно големи k не е валидно някое от трите неравенствата.
Редицата t_1^k е стационарна отнякъде нататък, ако $x_1 \leq c_1 + 1$, следователно първото неравенство ще бъде нарушено.
Нека $x_1 \leq c$. От $\textbf{Усл}_A$ имаме: $\forall d\, t_3^k < ct_2^k + d$; избирам $d = x_3 - cx_2$. Тогава:
$\dfrac{t_3^k - x_3}{t_2^k - x_2} < \dfrac{ct_2^k + d - x_3}{t_2^k - x_2} = \dfrac{ct_2^k - cx_2 + cx_2 + d - x_3}{t_2^k - x_2} = \dfrac{ct_2^k - cx_2}{t_2^k - x_2} = c \leq x_1$
Полученото неравенство $x_1 > \dfrac{t_3^k - x_3}{t_2^k - x_2}$ означава, че третото неравенство е невярно за всички големи k. □

Лема 4.3. Ако редицата $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворява условието $\textbf{Усл}_{1c}$ и $\textbf{Усл}_B$, то $t_k P^{-1} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} S_{min(c_1,c)**}$.

Доказателство. Нека изберем фиксирана точка $x = (x_1, x_2, x_3)$.
Ще докажем най-напред, че ако $x_1 > c_1$ или $x_1 > c$, то за достатъчно големи k не са валидни неравенствата:

$$\left| \begin{array}{rl} x_1 & \leq t_1^k \\ x_2 & \leq t_2^k \\ x_3 + (t_2^k - x_2) & \leq t_3^k \end{array} \right.$$

Ако $x_1 > c_1$, ще бъде нарушено първото неравенство.
Ако $x_1 > c$, в третото неравенство делим на t_2^k и правим граничен преход:

$$\frac{x_3}{t_2^k} + \left(1 - \frac{x_2}{t_2^k}\right) x_1 \leq \frac{t_3^k}{t_2^k}$$

От $\dfrac{x_3}{t_2^k}{\to}0$, $\dfrac{x_2}{t_2^k}{\to}0$ и $\dfrac{t_3^k}{t_2^k}{\to}c$ получаваме

$$x_1 \le c$$

което не е вярно за всички големи k.
Нека сега $x_1 \le c_1$ и $x_1 \le c$. Ще докажем, че за достатъчно големи k са валидни трите неравенствата.
Редицата t_1^k е стационарна отнякъде нататък, следователно първото неравенство е валидно.
От **Усл**$_B$ имаме: $\forall d\, t_3^k > ct_2^k + d$; избирам $d = x_3 - cx_2$. Тогава:
$\dfrac{t_3^k - x_3}{t_2^k - x_2} \ge \dfrac{ct_2^k + d - x_3}{t_2^k - x_2} = \dfrac{ct_2^k - cx_2 + cx_2 + d - x_3}{t_2^k - x_2} = \dfrac{ct_2^k - cx_2}{t_2^k - x_2} = c \ge x_1$
Полученото неравенство $x_1 \le \dfrac{t_3^k - x_3}{t_2^k - x_2}$ е еквивалентно с третото неравенство.

Лема 4.4. Ако редицата $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворява условието **Усл**$_{1c}$, **Усл**$_C$ и $c_1 \ge c$, то $t_k P^{-1} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} S_{c,d**}$.

Доказателство. В третото неравенство делим на t_2^k и правим граничен преход:

$$\frac{x_3}{t_2^k} + \left(1 - \frac{x_2}{t_2^k}\right) x_1 \le \frac{t_3^k}{t_2^k}$$

Имаме $\dfrac{x_3}{t_2^k}{\to}0$, $\dfrac{x_2}{t_2^k}{\to}0$ и $\dfrac{t_3^k}{t_2^k}{\to}c$
Границата вдясно е x_1, а границата вдясно е c.
Ако $x_1 \le c - 1$, то третото неравенство ще бъде вярно за всички достатъчно големи k. Понеже $c \le c_1$, то и първото неравенство ще бъде вярно за всички достатъчно големи k.
Ако $x_1 \ge c+1$, то третото неравенство ще бъде нарушено за всички достатъчно големи k.
Остава да се разгледат тези x, за които $x_1 = c$.
Нека $x_3 \le cx_2 + d$. Представяме във вида $x_3 = cx_2 + d - m$, $m \ge 0$. От $\dfrac{t_3^k - d}{t_2^k} \ge c$ получаваме $t_3^k \ge t_2 c + d$. Тогава:

$$\frac{t_3^k - x_3}{t_2^k - x_2} \ge \frac{ct_2^k + d - cx_2 + cx_2 - x_3}{t_2^k - x_2} = c + \frac{d + cx_2 - x_3}{t_2^k - x_2} = c + \frac{m}{t_2^k - x_2} \ge c = x_1.$$

Следователно за точки (c, x_2, x_3), за които $x_3 \le cx_2 + d$, неравенствата са в сила за достатъчно големи k.
Нека накрая $x_3 \le cx_2 + d$. Представяме във вида $x_3 = cx_2 + d + m$, $m \ge 1$. От $\dfrac{t_3^k - d - 1}{t_2^k} < c$ получаваме $t_3^k < t_2 c + d + 1$.

$$\frac{t_3^k - x_3}{t_2^k - x_2} < \frac{ct_2^k + d + 1 - cx_2 + cx_2 - cx_2 - d - m}{t_2^k - x_2} = c + \frac{1 - m}{t_2^k - x_2} \le c = x_1.$$

От полученото $\dfrac{t_3^k - x_3}{t_2^k - x_2} < x_1$ следва, че за всички достатъчно големи k неравенството не е валидно. □

Лема 4.5. От всяка редица $\{t_k\}_{k=1}^{\infty} = \left\{\left(t_1^k, t_2^k, t_3^k\right)\right\}_{k=1}^{\infty}$ в P може да се избере подредица, такава че $\left\{t_1^k\right\}_{k=1}^{\infty}$, $\left\{t_3^k\right\}_{k=1}^{\infty}$, $\left\{t_3^k\right\}_{k=1}^{\infty}$ са монотонни и която удовлетворява някое от условията $\mathbf{Усл}_{123}$, $\mathbf{Усл}_{12}$, $\mathbf{Усл}_{23}$, $\mathbf{Усл}_{1}$, $\mathbf{Усл}_{2}$, $\mathbf{Усл}_{\infty}$, $\mathbf{Усл}_{1c}$.

Доказателство. Елементарни съображения, основани на Теоремата на Болцано. □

Лема 4.6. От всяка редица $\{t_k\}_{k=1}^{\infty} = \left\{\left(t_1^k, t_2^k, t_3^k\right)\right\}_{k=1}^{\infty}$ в P която удовлетворява условието $\mathbf{Усл}_{1c}$, може да се избере подредица, която удовлетворява едно от условията $\mathbf{Усл}_{1A}$, $\mathbf{Усл}_{1B}$, $\mathbf{Усл}_{1D}$.

*Доказателство.*Отново съображения, основани на Теоремата на Болцано. □

Забележка. Съществуват редици $\left\{t_2^k\right\}_{k=1}^{\infty}$ и $\left\{t_3^k\right\}_{k=1}^{\infty}$, които удовлетворяват горните условия.

6.3 Орбити в пространството от единици $\mathcal{G}^0$ Структура на идеалите на $\mathcal{T}$

Предложение 6.0.3. Пространството от единиците $\mathcal{G}^0$ на $\mathcal{G}$ има седем орбити, а именно: $U_{123} = \{\forall S_{c_1c_2c_3}\}$;
$U_{12} = \{\forall S_{c_1c_2*}\}$;
$U_{23} = \{\forall S_{*c_2c_3}\}$;
$U_{1d} = \{\forall S_{c_1d**}\}$;
$U_1 = \{\forall S_{c_1**}\}$;
$U_2 = \{\forall S_{*c_2*}\}$;
$U_0 = \{S_{***}\}$.
При това
$\overline{U_{123}} = \mathcal{G}^0$;
$\overline{U_{12}} = U_{12} \cup U_1 \cup U_2 \cup U_0$;
$\overline{U_{23}} = U_{23} \cup U_{1d} \cup U_1 \cup U_2 \cup U_0$;
$\overline{U_{1d}} = U_{1d} \cup U_1 \cup U_0$;
$\overline{U_1} = U_1 \cup U_0$; $\overline{U_2} = U_2 \cup U_0$.

Теорема 6.0.3. За $\mathcal{T}(H_3(\mathbb{Z}))$ съществува редица от двустранни затворени идеали

$$\{0\} \subset I_0 \subset I_1 \subset I_{1d} \subset I_2 \subset I_3 = \mathcal{T}(H_3(\mathbb{Z}))$$

където $I_0 \cong \mathcal{K}$ и $I_3/I_2 \cong C^*(H_3(\mathbb{Z})$.
Освен това $I_2/I_{1d} \cong (C(T^2) \times \mathcal{K})^2$, $I_{1d}/I_1 \cong C(T) \times \mathcal{K}$, $I_1/I_0 \cong (C(T) \times \mathcal{K})^2$.

Ще отбележа, че X е регулярна компатификация на P, затова $I_0 \cong \mathcal{K}$, а групоидите, съответни на междинните частни са произведения (като локално компактни групоиди с лява Хаарова система) на група и тривиален групоид върху подходящо множество.

В заключение, ще изразя надеждата, че демонстрираната тук техника ще е полезна за изясняване на структурата и на други алгебри от оператори на Тьоплиц, асоциирани с дискретна група и нейна подполугрупа.

КРАЙ

ИЗПОЛЗВАНА ЛИТЕРАТУРА

1. M. G. Krein, Integral equations on the half-line with a kernel depending on the difference of the arguments, Uspekhi Mat. Nauk, 1958, Volume 13, Issue 5(83), 3–120
2. Gohberg I, Krein M., Fundamental aspects of defect numbers, root numbers and indices of linear operators., Uspehi Mat. Nauk (N.S.). Vol 12, Issue 2(74), pp. 43-118 (1957).
3. L. A. Coburn, The C^*-algebra generated by an isometry, I, Bull. Amer. Math. Soc., 73 (1967), 722-726
4. L. A. Coburn, The C^*-algebra generated by an isometry, II, Trans. Amer. Math. Soc., 137 (1969), 211-217.
5. L. Coburn and R. G. Douglas, On C^*-algebras of operators on a half-space. I, Inst. Hautes Etudes Sei. Publ. Math. 40 (1971), 59-67.
6. L. Coburn, R. G. Douglas, D. Schaeffer and I. Singer, On C^*-algebras of operators on a half-space. II. Index theory, Inst. Hautes Etudes Sei. Publ. Math. 40 (1971), 69-79.
7. I. Simonenko, A new general method of studying linear operator equations of a type of singular integral equations, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 158:4 (1964)
8. A. Dynin, Inversion problem for singular integral operators: C^*-approach, Proc. Natl. Acad. Sci. USA 75 (10) (1978) 4668–4670.
9. A. Dynin, Multivariable Wiener–Hopf operators. I. Representations, Integral Equations Operator Theory 9 (4) (1986) 537–569
10. A. Nica, Some remarks on the groupoid approach to the Wiener-Hopf operators, J.Operator Theory, **18**, 1987, 163-198.
11. A. Nica, Wiener-Hopf operators on the positive semigroup of a Haisenberg group, Preprint Series in Mathematics, Bukuresti, N62/1988.
12. G. J. Murphy, C^*-algebras and Operator Theory, Academic Press, Waltham, 1990.
13. G.J. Murphy, An index theorem for Toeplitz operators, J. Operator Theory 29 (1993), 97–114.
14. A.Kirillov, A.Gvishiani, Theorems and problems in functional analysis, Springer-Verlag,1982
15. E. Park, Index theory and Toeplitz algebras on certain cones in Z^2, J.Operator Theory, **23**, 1990, 125-146.
16. P. Muhly, J. Renault, C^*-algebras of multivariable Wiener-Hopf operators, Trans. Amer. Math. Soc., **274**, 1982, 1-44.
17. Albert Jeu-Liang-Shew, On the Type of Wiener-Hopf algebras, Pros. Amer. Math Soc., **109**, 4, 1990.

18. Alexander Alldridge, Troels Johansen, An index theorem for Wiener-Hopf operators, Adv. Math. 218 (2008), no. 1, 163–201.

19. Alldridge,A., T.R. Johansen, Spectrum and analytical indices for the C^*-Algebra of Wiener–Hopf operators, J. Func. Anal. 249 (2) (2007) 425–453.

20. Alexander Alldridge, Convex polytopes and the index of Wiener-Hopf operators J. Oper. Theory 65:1(2011), 145–155.

21. Alexander Alldridge, Index Theory for Wiener-Hopf Operators on Convex Cones, in Infinite Dimensional Harmonic Analysis IV, Proceedings of the Fourth German-Japanese Symposium, 1-13, ed. by Joachim Hilgert, The University of Tokyo, Japan, 2007.

22. J. Hilgert, K-H. Neeb, Wiener-Hopf operators in ordered homogeneous spaces, J. Funct. Anal. **132(1)**, (1995) 86-118.

23. Ronghui Ji, Jingbo Xia, On the classification of commutator ideals, J. of Functional Analysis **78**, 208-232 (1988).

24. J. Xia, The K-theory and the invertibility of almost periodic Toepliz operators, Integral Equations and Operator theory, **11**, (1988), 267-286.

25. Ronghui Ji, Jerome Kaminker, The K-theory of Toeplitz extensions, J. Operator theory, **19**, (1988), 347-354.

26. B. K. Blackadar, K-theory for operator algebras, Math. Sci. Res. Inst. Publ., N5, Springer Verlag, New York, 1986.

27. B. Anantharaman-Delaroche, J. Renault, Amenable Groupoids, Monogr. Enseign. Math., vol. 36, Enseignment Math., Geneva, 2000

28. P. Muhly, J. Renault, D. Williams, Equivalence and isomorphism for groupoid C^*-algebras, JOT, **17**, 1987, 3-22.

29. J. Renault, A groupoid approach to C^*-algebras, Lect. notes in Math., **793**, Springer Verlag, New York, 1980.

30. R.G. Douglas, On the C^*-algebra of a one parameter semigroup of izometries, Acta Math., 1972.

31. R.G. Douglas, R. Howe, On the C^*-algebra of Toeplitz operators on the quarter-plane, Trans. Amer. Math. Soc., **158**, 1971, 203-217.

32. G. A. Elliott, On the K-theory of the C^*-algebra generated by a projective representation of a torsion-free discrete abelian group, in Operator algebras and group representations, I, Neptun, Romania, 1980, edited by G. Arsene et al., Monograph Stud. Math. **17**, Pitman, Boston, 1984.

33. Claude Schochet, Topological methods for C^*-algebras I: Spectral sequences, Pacific J. of Math. **96**, 1 1981, 193-211.

34. H. Upmeier. Index Theory for Multivariable Wiener-Hopf Operators. J. Reine Angew. Math., 384:57–79, 1988.

35. Upmeier, H., Toeplitz C*-algebras on bounded symmetric domains Ann. of Math. (2), 119 (3) (1984), pp. 549-576

36. Upmeier, H., Toeplitz operators and index theory in several complex variables - Basel, Boston, Berlin Birkhauser, 1996

37. Hadfield, The noncommutative geometry of the discrete Heiserberg group, Houston J Math, 2002, 29: 453–481.

38. Guicherdet, Tensor product of C^*-algebras. I,II, Aarhus Universitet, Lecture Notes Series, No12, No13, 1969.

39. Connes, A.,Noncommutative geometry. Academic Press, Inc., San Diego, CA, 1994. **274**, 1982, 1-44.

40. Connes, A. Non-commutative differential geometry. Publ. Math I.H.E.S. **62** (1985), 257-360.

41. Wegge-Olsen, N.E. K-theory and C^*-algebras. A Friendly Approach, New York, Oxford University Press, 1993

42. Buyukliev N., K-theory of the C^*-algebra of multivariable Wiener-Hopf operators, associated with some polyhedral cones in $\mathbb{R}^n$, Ann. Sofia Univ., **1**, (1997), 115-119.

43. Buyukliev N., Linear cross-sections and Fredholm operators in a class groupoid C^* algebras, to appear in Ann. Univ.Sofia, Fac. Math. Inf.

44. Buyukliev N., The C^*-algebra of Toeplitz operators of the discrete Heisenberg group H_3 to appear in C. R. Acad. Bulg. Sci.

45. Buyukliev N., An index formula in a class of groupoid C^*-algebras, to appear in Annuaire Univ. Sofia Fac. Math. Inform.

46. Renault, J., S. Sundar. Groupoids associated to Ore semigroup actions, Journal of Operator Theory 73, no. 2 (2015): 491–514.

47. M. Rordam , F. Larsen, and N. J. Laustsen, An Introduction to K-theory for C^*-algebras, Cambridge Univ. Press, 2000.

48. J. Dixmier. C^*-алгебри и их представления,перев. с франц., Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», М., 1974 г.

49. M. Breuer, Fredholm theories in von Neumann algebras I, Math. Ann. 178 (1968), 243–254;

50. M. Breuer, Fredholm theories in von Neumann algebras II, Math. Ann. 180 (1969), 313–325.

51. Klee V., Some characterizations of convex polyhedra. Acta Math. 102 (1959), 79-107.

52. Murphy, G. C^* -Algebras and Operator Theory. San Diego, CA: Academic Press. (1990).