Софийски университет „Св. Климент Охридски"
Факултет по математика и информатика

АЛГОРИТМИ ЗА ХАРАКТЕРИЗИРАНЕ НА ОРТОГОНАЛНИ МАСИВИ

ДИСЕРТАЦИЯ

за присъждане на образователна и научна степен

„доктор"

по Професионално направление 4.5. Математика
Докторска програма „Алгебра, топология и приложения"

на

Таня Тодорова Маринова

научен ръководител:
доц. д-р Мая Митева Стоянова

София
2 0 2 1

Съдържание

Увод

В настоящия дисертационен труд се изследва структурата на някои класове от ортогонални масиви в Хеминговото пространство $H(n,q)$. Тези комбинаторни структури имат редица приложения както в различни подобласти на математиката (като статистиката [30, 48, 56], теория на кодирането [1, 2, 20, 29], криптографията [4, 36, 57] и др.), така и в други области като компютърни науки (за тестване на софтуери), физика и др. За нашите изследвания е съществено, че можем да разглеждаме Хеминговото пространство $H(n,q)$ като крайномерно полиномиално метрично пространство, в което ще използваме полиномиални техники, за да получаваме ограничения върху спектрите на разглежданите от нас класове от ортогонални масиви в $H(n,q)$.

Дисертационният труд е в обем от 115 страници и се състои от увод, четири глави и използвана литература, съдържаща 59 заглавия.

Хемингово пространство $H(n,q)$ с размерност n наричаме векторното пространство от всички наредени n-орки (точки, думи) над азбука (поле) Q с q елемента. В крайномерното пространство $H(n,q)$ се въвежда метрика като се използва разстоянието $d(x,y)$ между две думи, което е равно на броя на позициите, в които думите се различават. В крайномерното метрично пространство $H(n,q)$ е удобно да се въведе подходящо скаларно произведение по следното правило

$$\langle x,y\rangle := 1 - \frac{2d(x,y)}{n}.$$

Функцията, благодарение на която преминаваме от разстояния към скаларни произведения, се нарича стандартна субституция. Бележим я с $\sigma(d) = 1 - \frac{2d}{n}$.

Всяко (крайно) непразно подмножество $C \subset H(n,q)$ се нарича код. Основни параметри на един код са неговата размерност n, неговата мощност $M = |C|$, както и минималното разстояние $d = d(C) = \min\{\ d(x,y) \mid x,y \in C, x \neq y\}$ между две различни думи от кода.

Фазекаш и Левенщейн [26] въвеждат понятието τ-дизайни в $H(n,q)$. Един код $C \subset H(n,q)$ се нарича τ-дизайн тогава и само тогава, когато за всеки полином с реални коефициенти $f(t)$ от степен k, ненадминаваща τ, и за всяка точка $y \in H(n,q)$ е в сила равенството

$$\sum_{x\in C} f(\langle x,y\rangle) = f_0|C|,$$

където f_0 е първият коефициент в развитието на полинома $f(t)$ по нормализираните полиноми на Кравчук, т.е. $f(t) = \sum_{i=0}^{n} f_i Q_i^{(n)}(t)$. Максималното цяло неотрицателно число $\tau \leq n$, за което C е τ-дизайн, се нарича сила на дизайна.

Основна задача в теория на кодирането е намирането на минимална възможна мощност, при която съществува τ-дизайн в $H(n,q)$ за фиксирани сила τ и размерност n, т.е. да се оцени величината

$$B(n,q,\tau) := \min\{M = |C| \ : \ \text{съществува } \tau\text{-дизайн в } H(n,q)\}.$$

В Хеминговото пространство τ-дизайните могат да бъдат описани и по комбинаторен начин. Едно подмножество $C \in H(n,q)$ се нарича ортогонален масив с q нива, сила τ и индекс λ, където $0 \leq \tau \leq n$, ако всяка $M \times \tau$ подматрица на C съдържа всички τ-орки над Q точно λ пъти като редове. Такъв ортогонален масив C се бележи с (n, M, q, τ). Ортогоналните масиви с параметри (n, M, q, τ) са именно τ-дизайни в $H(n,q)$.

Ще разглеждаме ортогонални масиви в пространството $H(n,q)$. Основните им свойства и характеристики могат да бъдат намерени подробно в книгата "Ортогонални масиви. Теория и приложения" [28] на Hedayat, Sloane и Stufken. Задачите от теория на кодирането можем да ги пренесем върху разглежданите от нас ортогонални масиви, т.е. задачата за намиране на минималната възможна мощност придобива вида

$$B(n,q,\tau) := \min\{M = |C| \ : \ \text{съществува } (n,M,q,\tau) \text{ ортогонален масив}\}.$$

Известно е, че индексът λ на даден ортогонален масив може да бъде пресметнат посредством зависимостта $\lambda = M/q^{\tau}$. По този начин получаваме следната еквивалентна задача

$$\Lambda(n,q,\tau) := min\{\lambda = |C|/q^{\tau} \ : \ \text{съществува } \ (n,M,q,\tau) \text{ ортогонален масив}\}.$$

В *първа глава* на настоящия труд са въведени основните понятия, дефиниции и известни факти, които са необходими и са отправна точка за нашите изследвания, на базата на които в дисертацията ще получим редица нови резултати. Въведени са полиномите на Кравчук, както и нормализираните полиноми на Кравчук, които се явяват зоналните функции за крайномерното полиномиално метрично Хемингово пространство $H(n,q)$.

Описани са известни граници за мощността $|C|$ на един ортогонален масив C в $H(n,q)$. Това са границата на Делсарт, известна още като граница на линейното програмиране [24], границите на Рао и Хеминг [49], [39], които в Хеминговото пространство $H(n,q)$ съвпадат. Дадени са също така границата на Сингълтън [53] и границата на Плоткин [47]. Подробно са описани универсалните граници на Левенщейн [38].

Както споменахме по-горе, настоящият труд се основава на прилагането на различни полиномиални техники за получаване на ограничения върху структурата на разглежданите τ-дизайни, които в $H(n,q)$ са точно ортогоналните масиви.

Нека C е ортогонален масив в $H(n,q)$, а x е фиксирана точка от пространството. Спектър на ортогонален масив относно точката x ще наричаме наредената $(n+1)$-орка от цели неотрицателни числа

$$W = W(c) = (w_0(c), w_1(c), \ldots, w_n(c)),$$

където за всяко $i = 0, \dots, n$ стойността $w_i(c)$ е точно броят на думите на разстояние i от фиксираната точка x, т.е.

$$w_i(c) = |\{x \in C | d(x, c) = i\}|.$$

Спектър на ортогонален масив е основната изследвана характеристика на ортогоналните масиви в настоящия труд. Теоремите, които са формулирани и доказани в следващите глави, се базират на различни взаимовръзки между спектри на ортогонални масиви с различни параметри. Затова от изключителна важност за бъдещата работа е теоремата [21, 13], която дава възможност да се намерят всички възможни спектри на един ортогонален масив в $H(n, q)$ (Теорема 1.4.1).

За по-голяма яснота за фиксирани естествени числа n, M, τ и q е въведено множеството $W(n, M, q, \tau)$ от всички възможни спектри на ортогонални масиви с параметри (n, M, q, τ) относно точките в пространството $H(n, q)$. Ясно е, че множеството $W(n, M, q, \tau)$ можем да го разбием на две непресичащи се множества $P(n, M, q, \tau)$ и $Q(n, M, q, \tau)$ спрямо това дали точката от пространството е съответно вътрешна или външна за ортогоналния масив. При това е в сила равенството

$$W(n, M, q, \tau) = P(n, M, q, \tau) \cup Q(n, M, q, \tau).$$

Доказани са Теорема 1.4.4, Теорема 1.4.6 и Теорема 1.4.8, както и техните непосредствени следствия - Следствие 1.4.5, Следствие 1.4.7 и Следствие 1.4.9, които ни дават възможност да разглеждаме спектрите на ортогонални масиви спрямо коя да е фиксирана точка от пространството $H(n, q)$.

Във *втора глава* се разглежда двоичното Хемингово пространство $H(n, 2)$. Важно е да се отбележи, че $H(n, 2)$ е антиподално полиномиално метрично пространство, т.е. за всяка точка $x \in H(n, 2)$ съществува дума $\bar{x}$, такава че $x + \bar{x} = n$. Благодарение на този факт в [28] е доказано, че ортогонални масиви с параметри $(n, M, 2, 2k)$ и $(n + 1, 2M, 2, 2k + 1)$ съществуват едновременно.

Две са основните конструкции, разглеждани във втора глава. При първата от фиксиран ортогонален масив се премахва един стълб и се търсят различни зависимости между оригиналния ортогонален масив и неговите производни масиви. Новополучените производни ортогонални масиви имат параметри $(n - 1, M, 2, \tau)$ и $(n - 1, M/2, 2, \tau - 1)$. Поредицата от доказани теореми (Теорема 2.3.1, Теорема 2.3.3, Теорема 2.3.4 и Теорема 2.3.6) дават достатъчно добър апарат за работа върху множеството $P(n, M, 2, \tau)$ от възможностите за спектри относно вътрешна за масива точка. Благодарение на тях и на получените техни следствия в Параграф 2.3 е организиран алгоритъм за редуциране на броя на елементите в множеството $P(n, M, 2, \tau)$.

В процеса на изследване установихме, че когато работим само с множеството от спектри на даден ортогонален масив единствено относно вътрешни точки, част от получените в разглежданата конструкция производни ортогонални масиви и техните спектри не могат да бъдат обхванати. Благодарение на нашите наблюдения споменатите теореми бяха обобщени върху множеството $W(n, M, 2, \tau)$ и по този начин са формулирани и доказани съответни теореми (Теореми2.4.2, Теорема 2.4.18, Теорема 2.4.2, Теорема 2.4.8 и Теорема 2.4.12). Нещо повече, намерени са в явен вид спектрите на производните масиви с параметри $(n - 1, M/2, 2, \tau - 1)$. Важно е да се отбележи, че използвайки антиподалността достигнахме до редица теореми и следствия, благодарение на които доказахме важната за изследванията ни Теорема 2.4.16, която за даден спектър (относно произволна точка x от пространството) задава вида на спектър спрямо точката x на друг ортогонален масив със същите параметри, изоморфен на изходния масив. Така спектърът на новополучения изоморфен ортогонален масив трябва да принадлежи отново на множеството $W(n, M, 2, \tau)$. По този начин за пръв път достигаме до извода, че даден спектър на масива, т.е. елемент на множеството $W(n, M, 2, \tau)$ зависи от друг спектър (елемент) на същото множество. Реализиран е Алгоритъм 2, който е доста по-мощен от Алгоритъм 1. Недостатък за него е, че е множеството, върху което се работи, е с доста по-голяма мощност при големи стойности за n.

Втората основна конструкция при разглеждане на спектрите на двоични ортогонални масиви представлява премахване на два стълба от първоначално фиксирания ортогонален масив C с параметри $(n, M, 2, \tau)$. По този начин се получават редица производни масиви с различни параметри, а именно: $(n-1, M, 2, \tau)$, $(n-1, M/2, 2, \tau-1)$, $(n-2, M, 2, \tau)$, $(n-2, M/2, 2, \tau-1)$ и $(n-2, M/4, 2, \tau-2)$. Намерени са различни зависимости между спектрите на тези ортогонални масиви, които са доказани в Теореми 2.5.3-2.5.28. Благодарение на тях и техните следствия е представен Алгоритъм 3. Този алгоритъм представлява мощен апарат за редуциране на възможностите за спектри на изходните ортогонални масиви, т.е. на елементите на множеството $W(n, M, 2, \tau)$.

Да отбележим, че резултатите от настоящия труд зависят от реализацията на алгоритмите. Затова са описани редица оптимизации, които сме извършили, за да могат програмите да имат по-добро бързодействие. Представени са също и някои по-интересни моменти от алгоритмите, тъй като за част от тях се налага използването на рекурсия.

Всички резултати, които сме получили върху двоични ортогонални масиви, са описани в Параграф 2.8. При това Теорема 2.8.1, която показва, че не съществува $(11, 96, 2, 4)$ ортогонален масив се получава още при прилагането на Алгоритъм 1. С този алгоритъм и някои съображение върху минималното разстояние на код с параметри $(10, 96, 2, 4)$ достигаме до следващата теорема за несъществуване - Теорема 2.8.2. Прилагайки Алгоритъм 2, успяваме да достигнем до същия извод, дори до Теорема 2.8.4, доказваща несъществуването на $(9, 96, 2, 4)$ ортогонален масив.

Благодарение на Алгоритъм 1 получаваме още, че $(13, 224, 2, 5)$ ортогонален масив не съществува (Теорема 2.8.6). От това следва, че и ортогонален масив с параметри $(12, 112, 2, 4)$ не съществува (Теорема 2.8.7). Върху същата редица от спектри с Алгоритъм 2 достигаме и до Теорема 2.8.8, доказваща несъществуването на $(10, 112, 2, 4)$ ортогонален масив, а съответно и до произтичащите от това Следствия 2.8.9-2.8.11. Накрая за доказването на Теорема 2.8.12, т.е. за обосноваването, че не съществува $(9, 112, 2, 4)$ ортогонален масив, беше използван Алгоритъм 3.

По този начин достигнахме до точни граници за $\Lambda(n, 2, \tau)$ в следните случаи:

$$\Lambda(9,2,4) = \Lambda(10,2,5) = 8, \quad \Lambda(9,2,4) = \Lambda(10,2,5) = 8,$$

$$\Lambda(11,2,4) = \Lambda(12,2,5) = 8 \quad \Lambda(12,2,5) = \Lambda(13,2,5) = 8.$$

На база на разработените от нас алгоритми успяхме да достигнем и до други вече известни резултати за несъществуване, описани накрая на Параграф 2.8. От своя страна за редица параметри на ортогонални масиви, въпреки че не сме достигнали до резултат за съществуване или несъществуване, сме получили значително редуциране на броя на елементите в множеството $W(n, M, 2, \tau)$ от възможности за спектри за изследвания ортогонален масив.

Втора глава е написана въз основа на следните три публикации [16], [17] и [43].

В *трета глава* се разглеждат ортогонални масиви в троичното Хемингово пространство $H(n, 3)$. Конструкцията с премахване на даден стълб от един ортогонален масив с параметри $(n, M, 3, \tau)$ е в сила и за този случай. Получават се доста по-голям брой производни ортогонални масиви. Техните параметри са съответно от вида $(n-1, M, 3, \tau)$, $(n-1, M/3, 3, \tau-1)$ и $(n-1, 2M/3, 3, \tau-1)$. В Теорема 3.2.2 са описани в явен вид някои от спектрите на $(n-1, M/3, 3, \tau-1)$ ортогоналните масиви. Теорема 3.2.6 ни задава и зависимостите между останалите производни ортогонални масиви. Поради възможността да прилагаме пермутация на символите 0, 1 и 2, т.е. елементите на симетричната група S_3 във фиксиран стълб на разглеждания троичен ортогонален масив, доказахме Теорема 3.2.7, за намиране на зависещи един от друг спектри от множеството $W(n, M, 3, \tau)$, а с това и доказахме следствия за отхвърляне на възможности за спектри от разглежданото множество. Формулирана и доказана е Теорема 3.2.10, която е аналог на доказаната Теорема 2.4.18 в двоичния случай.

На база на доказаните теореми и техните следствия е представен Алгоритъм 5 за редуциране на броя на възможностите за спектри на даден троичен ортогонален масив, т.е. на елементите от множеството $W(n, M, 3, \tau)$. Извършени са редица пресмятания като освен редукция в случаите $n < 20$ и $\tau < 6$ достигаме и до резултат за несъществуване на $(17, 108, 3, 3)$ ортогонален масив (виж Теорема 3.3.1). По този начин получаваме, че в троичния случай имаме $5 \leq \Lambda(17, 3, 3)$.

Трета глава е написана въз основа на следните две публикации [6, 7].

В последната *четвърта глава* е въведено понятието енергия на ортогонален масив в пространството $H(n, q)$. За всяка функция, определена в интервала $[-1, 1]$ и приемаща положителни стойности, се дефинира h-енергията (потенциалната енергия) за ортогонални масив C като:

$$E(n, C; h) = \frac{1}{|C|} \sum_{x,y \in C, x \neq y} h(\langle x, y \rangle).$$

Основната задача при изследване на енергиите на ортогоналните масиви е при фиксирана функция h да се намерят минималната и максималната стойност на енергията, т.е. да се оценят следните две величини

$$L(n, M; \tau; h) := \min\{E(n, C; h) : C \subset H(n, q) \text{ е } (n, M, q, \tau) \text{ ортогонален масив}\},$$

$$U(n, M; \tau; h) := \max\{E(n, C; h) : C \subset H(n, q) \text{ е } (n, M, q, \tau) \text{ ортогонален масив}\}.$$

Въведена е енергията на спектър $P(x) = (p_0(x), p_1(x), \ldots, p_n(x))$ на ортогонален масив C относно вътрешна за масива точка $x \in C$. Енергия на спектъра $P(x)$ наричаме стойността

$$E(x, C; h) = \frac{1}{|C|} \sum_{i=1}^{n} p_i(x) h(t_i).$$

$E(x, C; h)$ също се нарича енергия на точката x в ортогоналния масив C.

Ако знаем, че (n, M, q, τ) ортогонален масив съществува и имаме спектрите относно всички вътрешни за него точки, заедно с техните кратностите, т.е. $P_1(x_1)$, $P_2(x_2)$, …, $P_s(x_s)$ са всички спектри съответно с кратности $k_1, k_2, \dots, k_s$, тогава енергията на масива (Теорема 4.1.2) е равна точно на

$$E(n, C; h) = \sum_{i=1}^{s} k_i E(x_i, C; h).$$

Ако не знаем дали съществува (n, M, q, τ) ортогонален масив, но имаме всички възможности за спектри, т.е. елементите на множеството $P(n, M, q, \tau)$, заедно с техните кратности, можем да определим и множеството от възможните стойности за енергията

$$E(|C|) = \Big\{ \sum_{k_1+k_2+\cdots+k_s=|C|} k_i E(x_i, C; h) \Big\}$$

на ортогоналните масиви с тези параметри. На база на възможностите от спектри относно вътрешни за масива точки, т.е. елементите на множеството $P(n, M, q, \tau)$ са получени комбинаторни граници, които ограничат отдолу и отгоре стойността на енергията $E(n, C; h)$. За ортогонален масив C с единствен възможен спектър, е доказано, че енергията на масива е именно $ME(x, C; h)$, където $x \in C$ е произволна вътрешна за ортогоналния масив точка. Накрая е направен сравнителен анализ между получените комбинаторни граници и известните универсални долни граници за енергии на ортогоналните масиви [10]. В някои случаи комбинаторната граница дава по-добри резултати, докато в други случаи универсалната граница се оказва по-мощна.

Четвърта глава е написана въз основа на следната публикация [18].

Важно е да отбележим, че разглежданите комбинаторни задачи или задачи от линейното програмиране, както е известно, са от така наречените NP пълни [31, 33] и затова сложността на прилаганите от нас алгоритми няма да е обект на дискусия в тази дисертация.

Всички изчисления и алгоритми, направени за целите на настоящия труд, са реализирани на Maple. Актуалните резултати се поддържат и могат да бъдат намерени на следния адрес [59], а кодът на алгоритмите може да бъде предоставен при поискване.

Научни приноси

По преценка на автора основните приноси на дисертационния труд са следните:

1. Разработен е и е приложен алгоритъм (Алгоритъм 1) за редуциране на множеството от спектри $P(n, M, \tau)$ относно вътрешни точки на двоичен ортогонален (n, M, τ) масив;

2. Разработен е и е приложен алгоритъм (Алгоритъм 2 - основен алгоритъм) за редуциране на множеството от спектри $W(n, M, \tau)$ на двоичен ортогонален (n, M, τ) масив;

3. Разработен е и е приложен алгоритъм (Алгоритъм 3 - обобщен алгоритъм) за редуциране на множеството от спектри $W(n, M, \tau)$ на двоичен ортогонален (n, M, τ) масив чрез премахване на два стълба;

4. Намерена е точна стойност на минималния възможен индекс на двоичен ортогонален масив за следните параметри

$$\Lambda(9,4,2) = \Lambda(10,4,2) = \Lambda(11,4,2) = \Lambda(12,4,2) = 8 \text{ и}$$

$$\Lambda(10,5,2) = \Lambda(11,5,2) = \Lambda(12,5,2) = \Lambda(13,5,2) = 8;$$

5. Разработен е и е приложен алгоритъм (Алгоритъм 5 - основен алгоритъм) за редуциране на множеството от спектри $W(n, M, \tau)$ на троичен ортогонален (n, M, τ) масив;

6. Разработен е и е приложен алгоритъм (Алгоритъм 6) за редуциране на множеството от спектри $P(n, M, \tau)$ относно вътрешни точки на (n, M, τ) троичен ортогонален масив;

7. Подобрена е долната граница за минималния възможен индекс на $(17, 108, 3, 3)$ ортогонален масив т.е. доказано е, че $\Lambda(17, 3, 3) \geq 5$;

8. Разработен е и е приложен алгоритъм (Алгоритъм 7) за пресмятане границите за енергиите на ортогоналните масиви при фиксиран потенциал;

9. Намерена ни са следните комбинаторни граници за стойността на енергията на (n, M, q, τ) ортогонален масив

$$Mp \leq L(n, M, \tau; h) \leq U(n, M, \tau; h) \leq MP.$$

Апробация на резултатите

Резултатите, които са описани в настоящия труд, са публикувани в следните 6 статии:

[16] Boyvalenkov P., Kulina H., Marinova T., Stoyanova M., Nonexistence of binary orthogonal arrays via their distance distributions, *Problems of Information Transmission*, Vol. 51(4), pages: 326–334 (2015), (Original Russian Text Published in Problemy Peredachi Informatsii, Vol. 51(4), pages: 23–31 (2015), ISSN: 0555-2923), Print ISSN: 0032-9460, Online ISSN: 1608-3253, https://doi.org/10.1134/S003294601504002X, Ref Web of Science, Impact Factor: 0.632 (2015), Web of Science Quartile: Q_3 (2015).

[18] Peter Boyvalenkov, Tanya Marinova, Maya Stoyanova, Mila Sukalinska, Distance distributions and energy of designs in Hamming spaces, *Serdica Journal of Computing*, Vol. 9, No. 2, pages: 139–150 (2015), ISSN: 1314-7897 (Online), ISSN: 1312-6555 (Print), Ref zbMATH (Zbl 1387.94112).

[17] Peter Boyvalenkov, Tanya Marinova, Maya Stoyanova, Nonexistence of a few binary orthogonal arrays, *Discrete Applied Mathematics*, Vol. 217(2), pages: 144–150 (2017), ISSN: 0166-218X, https://doi.org/10.1016/j.dam.2016.07.023, Ref Web of Science, Impact Factor: 0.932 (2017), Web of Science Quartile: Q_3 (2017).

[43] Tanya Marinova, Maya Stoyanova, Nonexistence of $(9, 112, 4)$ and $(10, 224, 5)$ binary orthogonal arrays, *Electronic Notes in Discrete Mathematics (containing the Proceedings of ACCT XV)*, Vol. 57, pages: 153-159 (March 2017), ISSN: 1571-0653, Ref Scopus, SJR: 0.262 (2017), SNIP 0.401 (2017), http://doi.org/10.1016/j.endm.2017.02.026.

[7] Boumova S., Marinova T., Ramaj T., Stoyanova M., Nonexistence of (17, 108, 3) ternary orthogonal array, *Ann. Sofia Univ., Fac. Math and Inf.*, Vol. 106, pages: 117-126 (2019), Ref MathSciNet (MR4125835).

[6] Boumova S., Marinova T., Stoyanova M., On ternary orthogonal arrays, *Proceedings Sixteenth International Workshop on Algebraic and Combinatorial Coding Theory*, ACCT XVI, September 2-9, 2018, Svetlogorsk (Kaliningrad region), Russia, pages: 102-105 (2018).

Резултатите от публикации [17] и [43] са анонсирани на Fifteenth International Workshop on Algebraic and Combinatorial Coding Theory, ACCT–15, June 18-24, 2016, Albena, Bulgaria.

Две от публикациите са с импакт фактор ([16],[17]), една е с SJR ([43]), а две са реферирани в научните бази от данни ZbMath и MathSciNet ([18], [7]).

Публикациите са цитирани 12 пъти, като 10 от тези цитати са в Web of Science или Scopus, т.е. в реферирани и индексирани издания.

Във всички публикации съавтор е моят научен ръководител - доц. д-р Мая Стоянова. В публикации [16], [17] и [18] съавтор е също и проф. дмн Петър Бойваленков. Със съавтор доц. д-р Силвия Бумова са статиите [6] и [7], като в последната съавтор е също така докторант Тедис Рамай. Работата по статиите [16] е в съавторство и с доц. д-р Христина Кулина, а в [18] съавтор е и Мила Сукалинска.

Резултатите в настоящия труд са докладвани (от мен) на следните национални и международни форуми:

- Юбилейна конференция 125 години математика и природни науки в СУ ”Св. Климент Охридски”, София, Декември 2014,
- Национален семинар по теория на кодирането ”Проф. Стефан Додунеков”, Велико Търново, Ноември 2014,
- Национален семинар по теория на кодирането ”Проф. Стефан Додунеков”, Чифлик, Ноември 2015,
- Пролетна научна сесия на ФМИ-СУ, Секция ”Алгебра, Геометрия и Топология”, София, Март 2015,
- Пролетна научна сесия на ФМИ-СУ, Секция ”Алгебра, Геометрия и Топология”, София, Март 2016,
- Семинар към секция Математически основи на информатиката на ИМИ-БАН, София, Декември 2015,
- 15та Международна конференция по Алгебрична и комбинаторна теория на кодирането, Албена, Юни 2016,
- Национален семинар по теория на кодирането ”Проф. Стефан Додунеков”, Чифлик, Ноември 2019.

Благодарности

Бих искала да изкажа голямата си благодарност към научния си ръководител доц. д-р Мая Стоянова за ценните съвети, напътствията и оказаната подкрепа. Благодаря на проф. дмн Петър Бойваленков за доверието, което ми оказа и за идеите и знанията, които успя да ми предаде. Благодарна съм на всеки един мой съавтор - доц. д-р Силвия Бумова, доц. д-р Христина Кулина, Мила Сукалинска и Тедис Рамай, за различните гледни точки и чудесната работа в екип.

Благодаря на всички колеги от катедра Алгебра за вярата в мен и окуражителните думи, които получавах от тях.

Не на последно място искам да благодаря на моя съпруг за безрезервната подкрепа, която ми оказваше във всеки един момент, за грижите за децата ни, докато пишех тази дисертация, и за факта, че винаги е бил мое вдъхновение и опора.

Декларация за оригиналност на резултатите

Декларирам, че настоящият дисертационен труд съдържа оригинални резултати, получени при проведени от мен научни изследвания (с подкрепата и съдействието на научния ми ръководител и всичките ми съавтори). Резултатите, които са получени, описани и/или публикувани от други учени, са надлежно и подробно цитирани в библиографията.

Настоящата работа не е прилагана за придобиване на образователна и научна степен "Доктор" в друго висше училище, университет или научен институт.

Подпис:

Глава 1

Ортогонални масиви в полиномиалното метрично пространство $H(n, q)$

В първа глава са въведени основните понятия и известни факти, които се използват в настоящия труд. Разгледано е Хеминговото пространство като полиномиално метрично пространство. В параграф 1.2 е представено понятието ортогонален масив. Разгледани са основните характеристики на ортогоналните масиви. Представени са известните свойства на спектрите на ортогонален масив относно фиксирана точка от Хеминговото пространство, които са основен обект на нашите изследвания. В Параграф 1.3 са формулирани известните резултати за една от основните задачи, разглеждана от нас в настоящата работа, които са отправна точка при изследването на спектрите на ортогоналните масиви. В последния параграф е даден метод за намиране на всички възможни спектри на даден ортогонален масив и са доказани важни свойства на анализираното множество от всички възможности за спектри на даден ортогонален масив.

1.1 Хеминговото пространство $H(n, q)$

Нека Q е фиксирана азбука (поле) с q елемента.

Определение 1.1.1 *Хемингово пространство с размерност n наричаме векторното пространство от всички наредени n-орки над азбуката Q. Ще го означаваме с $H(n, q)$, а неговите елементи ще наричаме точки (думи). Разстояние на Хеминг между две точки x и y в $H(n, q)$ определяме с функцията:*

$$d : \begin{cases} H(n,q) \times H(n,q) & \to \mathbb{N} \\ (x,y) & \to d(x,y), \end{cases}$$

където

$$d(x,y) = |\{\ i \mid x_i \neq y_i, x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), y = (y_1, y_2, \ldots, y_n), x_i, y_i \in Q\ \}|.$$

С други думи разстоянието $d(x,y)$ между две думи x и y е равно на броя на координатите, в които думите се различават. Диаметър на пространството $H(n,q)$ означаваме с D и определяме като $D = \max\{\ d(x,y)\ \ |\ \ x,y \in H(n,q)\ \}$.

Твърдение 1.1.2 *За Хеминговото разстояние $d(x,y)$ в пространството $H(n,q)$ са в сила следните зависимости:*

1. *$d(x,y) \geq 0$ като равенство се достига само когато $x = y$;*
2. *$d(x,y) = d(y,x)$;*
3. *$d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$,*

където x, y и z са три произволни точки от $H(n,q)$.

Доказателство: Първите две условия са директно следствие от Дефиниция 1.1.1.

3. Нека $x = (x_1,\ldots,x_n)$, $y = (y_1,\ldots,y_n)$, $z = (z_1,\ldots,z_n)$ са три точки от $H(n,q)$. Да разгледаме разстоянието $d(x,z) = |\{i, x_i \neq z_i\}|$. За фиксиран елемент $i \in \{1,\ldots,n\}$ е изпълнено, че $x_i \neq z_i$ точно когато поне едното от двете е различно от y_i. Формално записано $\{i, x_i \neq z_i\} \subset \{i, x_i \neq y_i\} \cup \{i, y_i \neq z_i\}$. Като вземем предвид равенството за мощността на обединение на две множества A и B: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \leq |A| + |B|$ и дефиницията за разстояние на Хеминг, то можем да заключим, че $d(x,z) \leq |\{i, x_i \neq y_i\} \cup \{i, y_i \neq z_i\}| \leq |\{i, x_i \neq y_i\}| + |\{i, y_i \neq z_i\}| = d(x,y) + d(y,z)$, с което доказателството е завършено. $\square$

Да означим нулевата дума на пространството $H(n,q)$ с $\mathbf{0}$. Тогава разстоянието $d(x,\mathbf{0})$ задава броя на ненулевите позиции в точката $x \in H(n,q)$. Наричаме това разстояние тегло на точката x и го означаваме с $wt(x)$. За всеки две точки $x, y \in H(n,q)$ е в сила равенството

$$d(x,y) = wt(x) + wt(y) - 2wt(x * y),$$

където $wt(x * y)$ е броят на еднаквите ненулеви позиции на x и y.

От Твърдение 1.1.2 следва, че Хеминговото разстояние $d(x,y)$ задава метрика в $H(n,q)$, т.е. можем да го разглеждаме като метрично пространство. Това позволява да въведем подходящо скаларно произведение в $H(n,q)$ по следното правило:

$$\langle x,y \rangle = 1 - \frac{2d(x,y)}{n},$$

т.е. преобразуването от разстояния към скаларни произведения ще бележим със $\sigma(d) = 1 - \frac{2d}{n}$ и наричаме стандартна субституция. Стандартната субституция е обратима функция като нейната обратна използваме за преобразуване от скаларни произведения към разстояния. Тя има следния вид: $\sigma^{-1}(t) = \frac{n(1-t)}{2}$, т.е. пресмятаме разстоянието като

$$d(x,y) = \frac{n(1 - \langle x,y \rangle)}{2}.$$

Тъй като n-мерното Хемингово пространство е крайномерно с q^n елемента, то и разстоянията в него са краен брой, по-точно всички възможни разстояния между две думи от пространството пробягват числата $0, 1, \ldots, n$. От тук е ясно, че всички възможности за скаларно произведение също са краен брой и те са именно $1, 1 - \frac{2}{n}, \ldots, 1 - \frac{2n-2}{n}, -1$.

Определение 1.1.3 *Едно полиномиално метрични пространство $\mathcal{M}$ се нарича антиподално, ако за всяка точка $x \in \mathcal{M}$ съществува точка $\bar{x} \in \mathcal{M}$, такава че $\sigma(d(x, y)) + \sigma(d(\bar{x}, y)) = 0$.*

От дефиницията се вижда, че в едно антиподално метрично пространство за всяка точка $x \in \mathcal{M}$ съществува единствена точка $\bar{x} \in \mathcal{M}$ със свойството $x + \bar{x} = D$. Затова често се означава и с $(-x)$ и се нарича диаметрално противоположна (допълнителна) на точката x.

Пример за антиподално метрично пространство е двоичното Хемингово пространство $H(n, 2)$. За разлика от него троичното метрично пространство $H(n, 3)$ не притежава това свойство и то не е антиподално.

Теорема 1.1.4 *[39] За компактното метрично пространство $H(n, q)$ с фиксирана стандартна субституция $\sigma(d)$ съществува единствена система $Q = \{Q_i^{(n)}(t)\}_{i=0}^{n}$ от ортогонални полиноми в $[-1, 1]$ от степен i и единствена система от положителни константи r_i, удовлетворяващи следното първо ортогонално съотношение:*

$$r_i \sum_{x,y \in C} Q_i^{(n)}(t) Q_j^{(n)}(t) = \delta_{i,j},$$

където $\delta_{i,j}$ е символът на Кронекер. Полиномите са нормализирани чрез $Q_i^{(n)}(1) = 1$ за $i = 0, 1, \ldots, n$. Ортогоналните полиноми $Q_i^{(n)}(t)$ за $i = 0, 1, \ldots, n$ се наричат зонални (сферични) полиноми на метричното пространство.

Преди да дадем в явен вид зоналните полиноми на Хеминговото пространство $H(n, q)$ трябва да въведем полиномите на Кравчук. Полиномите на Кравчук са въведени през 1929 година и през годините са били предмет на изследване от редица учени [37], [41], [1], [55], [44]. Това са полиноми, които за фиксирани елементи n и q, за $i = 0, 1, 2, \ldots$ имат следния вид:

$$K_i^{(n)}(t) = \sum_{j=0}^{i} (-1)^j \binom{t}{i} \binom{n-t}{i-j} (q-1)^{i-j}.$$

Ще дадем някои специални стойности на тези полиноми. В сила са следните равенства

$$K_i^{(n)}(0) = (q-1)^i \binom{n}{i},$$

$$K_i^{(n)}(n) = (-1)^i \binom{n}{i},$$

за всяко $i = 0, 1, \ldots, n$.

Лесно може да се покаже, че за всяко $i = 0, 1, \dots, n+1$ са в сила и следните равенства за полиномите на Кравчук:

$$K_i^{(n)}(-1) = \sum_{j=0}^{i} (q-1)^j \binom{n+1}{j},$$

$$K_i^{(n)}(n+1) = (-1)^i \sum_{j=0}^{i} (q-1)^{i-j} \binom{n+1}{j}.$$

За всяко число $t = 0, 1, \dots, n$ стойността на $K_n^n(t)$ може да бъде пресметната по формулата

$$K_n^{(n)}(t) = (-1)^d (q-1)^{n-t},$$

докато при $t = n+1$ придобива вида

$$K_n^{(n)}(n+1) = (-1)^n \frac{(q-1)^{n+1} - 1}{q-1}.$$

За полиномите на Кравчук е известно още, че удовлетворяват следната тричленна рекурентна зависимост

$$(i+1)K_{i+1}^{(n)}(t) = [i + (q-1)(n-i) - qt]K_i^{(n)}(t) - (q-1)(n-i+1)K_{i-1}^{(n)}(t),$$

където

$$K_0^{(n)}(t) = 1, \quad K_1^{(n)}(t) = n(q-1) - qt.$$

Ясно е, че полиномът $K_i^{(n)}(t)$ е от степен i, със старши коефициент $\frac{(-q)^i}{i!}$.

В сила е и следната зависимост между двойки полиноми на Кравчук:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (q-1)^k K_i^{(n)}(k) K_j^{(n)}(k) = \delta_{ij} q^{n-1} (q-1)^i \binom{n}{i}.$$

Благодарение на нея без затруднения може да се изведе и следното второ ортогонално съотношение

$$\sum_{k=0}^{n} K_i^{(n)}(k) K_k^{(n)}(j) = \delta_{i,j} q^n.$$

За да дадем явен вид на зоналните сферични функции на Хеминговото пространство $H(n,q)$, трябва да разгледаме полиномите на Кравчук след прилагане на стандартната субституция. Получената система полиноми $Q_i^{(n)}$ за $i = 0, \dots, n$ се наричат Нормализирани полиноми на Кравчук [55] и имат вида:

$$Q_i^{(n)}(t) = \frac{1}{r_i} K_i^{(n)} \left(\frac{n(1-t)}{2} \right),$$

където константите $r_i = \binom{n}{i}(q-1)^i$, за всяко $i = 0, 1, \dots, n$.

Например, в двоичното Хемингово пространство $H(n,2)$ първите няколко нормализирани полиноми на Кравчук са:

$$Q_0^{(n)}(t)=1,\ \ Q_1^{(n)}(t)=t,\ \ Q_2^{(n)}(t)=\frac{nt^2-1}{n-1},\ \ Q_3^{(n)}(t)=\frac{n^2t^3+(2-3n)t}{(n-1)(n-2)},\ \ \ldots,$$

докато съответните нормализирани полиноми на Кравчук в троичното Хемингово пространство $H(n,3)$ имат вида:

$$Q_0^{(n)}(t)=1,\ \ Q_1^{(n)}(t)=\frac{3t+1}{4},\ \ Q_2^{(n)}(t)=\frac{9nt^2+6nt+n-6t-10}{16(n-1)},$$

$$Q_3^{(n)}(t)=\frac{27n^2t^3+27n^2t^2+9n^2t-54nt^2+n^2-108nt-30n+72t+56}{64(n-1)(n-2)},\ \ \ldots$$

По-долу са описани някои известни свойства на нормализираните полиноми на Кравчук [34, 38].

Твърдение 1.1.5 *[38] Всеки полином $Q_i^{(n)}(t)$, $1\le i<n+1$ е полином от степен i, който има i различни корена в интервала $[-1,1]$. Нека да означим тези корени в нарастващ ред $z_{i,j}$ за $j=1,\ldots,i$. Тогава е в сила следната редица от неравенства:*

$$-1<z_{i,1}<z_{i,2}<\ldots<z_{i,i}<1.$$

Да отбележим още, че в двоичния случай, т.е. при $q=2$ полиномите $Q_i^{(n)}(t)$ са четни и нечетни функции съответно за четно и нечетно i. Това означава, че нормализираните полиноми на Кравчук в този случай имат свойството $Q_i^{(n)}(t)=(-1)^iQ_i^{(n)}(-t)$ за всяко i и t.

За корените на $Q_i^{(n)}(t)$ и $Q_j^{(n)}(t)$ са в сила следните важни закономерности, описани в следващото твърдение.

Твърдение 1.1.6 *[38] За всеки две фиксирани числа i и j, ако $1\le j\le i<D$ са изпълнени неравенствата $z_{i+1,j}<z_{i,j}<z_{i+1,j+1}$.*

Важна роля в намирането на границите на линейното програмиране играе също така и *ядрото* на полиномите на Кравчук. Това е симетрична функция на две реални променливи x, y, която означаваме с $T_k(x,y)$, за $0\le k<n$. Тя има вида

$$T_k(x,y)=\sum_{i=0}^{k}r_iQ_i^{(n)}(x)Q_i^{(n)}(y).$$

Други важни серии от полиноми, свързани с полиномите на Кравчук, са така наречените присъединени полиноми на Кравчук.

Определение 1.1.7 *За всеки две цели неотрицателни числа a и b системата от ортогонални полиноми $\{Q_i^{a,b}(t)\}_{i=0}^N$ се нарича присъединена на основната система $\{Q_i^{(n)}(t)\}_{i=0}^N$.*

По-точно:

$$Q_k^{0,0}(t)=Q_k^{(n)}(t),\qquad Q_k^{0,1}(t)=\frac{K_k^{n-1}(d)}{\binom{n-1}{k}(q-1)^k},$$

$$Q_k^{1,0}(t)=\frac{K_k^{n-1}(d-1)}{\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}(q-1)^i},\quad Q_k^{1,1}(t)=\frac{K_k^{n-2}(d-1)}{\sum_{i=0}^{k}\binom{n-1}{i}(q-1)^i}$$

Сериите от присъединени ортогонални полиноми също са нормализирани, т.е. $Q_i^{a,b}(1)=1$. Лесно може да се види, че $Q_0^{a,b}(t)=1$, $r_0^{a,b}=1$, $Q_i^{0,0}(t)=Q_i^{(n)}(t)$, $r_i^{0,0}=r_i$. На присъединените полиноми $Q_i^{a,b}(t)$ за a и $b\in\{0,1\}$ също се съпоставят ядра

$$T_k^{a,b}(x,y)=\sum_{i=0}^{k}r_i^{a,b}Q_i^{a,b}(x)Q_i^{a,b}(y),$$

където $r_i^{a,b}$ са еднозначно определени константи (виж [38]). В частност, за случаите $a=1,b=0$ и $a=b=1$ са в сила следните равенства:

$$r_j^{1,0}=\frac{\left(\sum_{u=0}^{j}r_u\right)^2}{\binom{n-1}{j}(q-1)^j},\ j=0,1,\ldots,n-1,$$

$$r_j^{1,1}=\frac{\left(\sum_{u=0}^{j}\binom{n-1}{u}(q-1)^u\right)^2}{\binom{n-2}{j}(q-1)^j},\ j=0,1,\ldots,n-2.$$

Може да се покаже, че

$$Q_i^{a,b+1}(t)=\frac{T_i^{a,b}(t,-1)}{T_i^{a,b}(1,-1)},\quad Q_i^{a+1,b}(t)=\frac{T_i^{a,b}(t,1)}{T_i^{a,b}(1,1)}.$$

За всяко естествено i най-големия корен на полинома $Q_i^{a,b}(t)$ ще означаваме с $z_i^{a,b}$, $a,b\in\{0,1\}$. За корените на присъединените полиноми $Q_i^{a,b}(t)$ имаме изпълнено следното твърдение

Твърдение 1.1.8 *[38] За всяко естествено число $1\le i<N$ са изпълнени неравенствата*

$$z_{i-1}^{1,1}<z_i^{1,0}<z_i^{1,1}<z_i^{0,1},$$

като $z_0^{1,1}=-1$ по дефиниция.

За всеки полином $f(x)$ с реални коефициенти от степен k е налице следното еднозначно разлагане по нормализираните полиноми на Кравчук

$$f(x)=\sum_{i=0}^{k}f_iQ_i(x).$$

За всяко фиксирано k ще означаваме с b_k коефициента $f_0 = f_{0,k}$ в горното развитие за полинома t^k. Във втора глава е представен явен вид на тези коефициенти при $q = 2$, т.е. в двоичния случай.

Ако разгледаме векторното пространство от комплекснозначни функции $u(x)$ с векторни променливи $x \in H(n,q)$ и скаларно произведение, дефинирано по следния начин:

$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{q^n} \sum_{x \in H(n,q)} u(x)v(x)$$

и след прилагането на някои известни факти от алгебрата е показано, че е в сила следната важна теорема, която ни дава силен апарат за изследване на подмножествата на полиномиалното метрично пространство $H(n,q)$.

Теорема 1.1.9 *[21, 23, 38] Нека C е непразно мултимножество, $C \subset H(n,q)$. За всеки полином $f(t) = \sum_{i=0}^{k} f_i Q_i^{(n)}(t)$ е в сила следното основно равенство:*

$$|C|f(1) = \sum_{x,y \in C, x \neq y} f(\langle x, y\rangle) = |C|^2 f_0 + \sum_{i=1}^{k} \frac{f_i}{r_i} \sum_{j=1}^{r_i} |\sum_{x \in C} \upsilon_{i,j}(x)|^2.$$

Определение 1.1.10 *Нека C е непразно мултимножество, $C \subset H(n,q)$. C се нарича τ-дизайн тогава и само тогава, когато*

$$\sum_{x \in C} \upsilon_{i,j}(x) = 0,$$

за всяко $j = 1, 2, .., r_i$ и за всяко $i = 1, 2, \ldots, \tau$. Максималното цяло неотрицателно число τ, за което C е τ-дизайн, се нарича сила на дизайна.

Теорема 1.1.11 *[40] Нека C е непразно мултимножество, $C \subset H(n,q)$. C е τ-дизайн, ако за всеки полином с реални коефициенти $f(t)$ от степен k, ненадминаваща τ, и за всяка точка $y \in H(n,q)$ е в сила равенството*

$$\sum_{x \in C} f(\langle x, y\rangle) = f_0|C|,$$

където f_0 е първият коефициент в развитието на полинома $f(t)$ по нормализираните полиноми на Кравчук, т.е. $f(t) = \sum_{i=0}^{n} f_i Q_i^{(n)}(t)$, а $\langle x, y\rangle = 1 - \frac{2d(x,y)}{n}$.

Тази теорема понякога се използва като еквивалентна дефиниция на τ-дизайни в Хеминговото пространство.

1.2 Ортогонални масиви в $H(n, q)$

Основното понятие, обект на изследване в настоящия дисертационен труд, е ортогонален масив. Това е комбинаторна структура, еквивалентна на τ-дизайните. Прилагайки известни полиномиални техники върху тези ортогонални масиви и използвайки комбинаторните им свойства, ще получим редица ограничения върху характеристиките на тези масиви, които от една страна ще доведат до редица нови резултати за несъществуване на ортогонални масиви със зададени параметри, а от друга ще изяснят структурата на съществуващи ортогонални масиви.

Определение 1.2.1 *Нека Q е азбука (поле) с q елемента, а C е матрица с M реда и n стълба с елементи от Q. Ще казваме, че C е ортогонален масив с q нива, сила τ и индекс λ, където $0 \leq \tau \leq n$, ако всяка $M \times \tau$ подматрица на C съдържа всички τ-орки над Q точно λ пъти като редове. Такъв ортогонален масив C ще бележим с (n, M, q, τ).*

Да отбележим, че параметърът λ може да бъде изразен чрез останалите параметри на даден ортогонален масив. Всички възможни τ-орки над азбуката Q с q елемента са точно q^τ. Тъй като всяка τ-орка се среща точно λ пъти, то е очевидно, че $M = \lambda q^\tau$ или с други думи $\lambda = M/q^\tau$. Това е причината индексът λ да се изпуска в означението (n, M, q, τ) на един ортогонален масив.

Ортогоналните масиви всъщност са непразно крайно подмножество (код) на Хеминговото пространство $H(n, q)$, в което се допуска да има повторения на елементи.

В [22] Делсарт за пръв път показва, че ортогоналните масиви са точно τ-дизайните в Хеминговото пространство. Тези подмножества на $H(n, q)$ са обект на изследване на редица автори от различни подобласти на математиката и компютърните науки, в частност се използват в статистиката, криптографията, при тестване на софтуери и др. Това е довело и до различните им наименования. Например, в [3] ги наричат τ-независими множества. От тук до края на дисертационния труд ще използваме термина ортогонален масив.

Пространството $H(n, q)$ е (n, q^n, q, n) ортогонален масив. Произволен (n, M, q, τ) ортогонален масив може да се разглежда като апроксимация на цялото Хемингово пространство $H(n, q)$. Благодарение на това тези структури могат успешно да бъдат прилагани в статистиката [48, 49, 56], както и в теория на кодирането [21] и в криптографията [30, 36, 57].

Важна характеристика на даден (n, M, q, τ) ортогонален масив $C \subset H(n, q)$ е спектърът му, относно произволна точка от пространството. Спектрите ще са основен инструмент в изследването на структурата на ортогоналните масиви в настоящия дисертационен труд.

Определение 1.2.2 *На всеки (n, M, q, τ) ортогонален масив $C \subset H(n, q)$ и фиксирана точка $c \in H(n, q)$ съпоставяме $(n + 1)$-орката от цели неотрицателни числа*

$$W = W(c) = (w_0(c), w_1(c), \ldots, w_n(c)),$$

където

$$w_i(c) = |\{x \in C | d(x, c) = i\}|,$$

за $i = 0, \ldots, n$. Ще наричаме $W = W(c)$ спектър на ортогоналния масив C относно точката c (или спектър на точката c, ако C се подразбира).

Определение 1.2.3 *Наредената $(n+1)$-орка от рационални неотрицателни числа*

$$W(C) = \frac{1}{|C|} \sum_{x \in C} W(x)$$

се нарича спектър на ортогоналния масив C.

Делсарт [22, 21] въвежда следните четири важни характеристики на ортогоналните масиви. За всеки ортогонален масив $C \subset H(n, q)$ ще означаваме минималното разстояние с $d(C)$, а с $s(C)$ ще бележим броя на различните ненулеви разстояния в него. Определяме тези параметри по следния начин:

$$d(C) = \min\{\ d(x, y) \mid x, y \in C, x \neq y\ \},$$

$$s(C) = |\{\ d(x, y) \mid x, y \in C, x \neq y\}|.$$

Също така да означим с $\delta(C) = 0$, когато $W_n = 0$ и $\delta(C) = 1$ в противен случай.

Ако не знаем думите в кода C, но имаме информация за различните спектри на кода спрямо коя да е дума от него, тогава минималното разстояние $d(C)$ може да се намери като минималният индекс i, такъв че $w_j(c) = 0$ за всяко $0 \leq j < i$ и съществува $w_i(c) > 0$ за някоя дума $c \in C$. Параметърът $s(C)$ може да бъде определен като преброим възможните ненулеви координати в спектъра $W(C)$ на ортогоналния масив C.

Нека да приложим трансформацията на Мак Улиамс [41] върху спектъра на ортогоналния масив C, използвайки полиномите на Кравчук. По този начин за $0 \leq k \leq n$ получаваме нова $(n+1)$-орка $W'(C) = (w'_0, w'_1, \ldots, w'_n)$, където

$$w'_k = \frac{1}{|C|} \sum_{i=0}^{n} w_i K_k^n(i).$$

Минималният индекс i, такъв че $w'_j = 0$ за всяко $0 \leq j < i$ и $w_i(c) > 0$ означаваме с $d'(C)$ и наричаме дуално разстояние. С s' бележим броя на различните ненулеви координати на $W'(C)$ и го наричаме външно разстояние. Аналогично, въвеждаме $\delta'(C) = 0$, когато $W'(C)_n = 0$ и $\delta'(C) = 1$ в противен случай.

Когато q е степен на просто число, Хеминговото пространство $H(n, q) = F_q^n$ може да се разглежда като линейно пространство над крайното поле F_q. В този случай ортогоналният масив C е линеен код, за който $d'(C)$ съвпада с дуалното разстояние $d'(C) = d(C')$ на дуалния код C'. Тогава можем да пресметнем и $s'(C)$ като минималният брой на различните разстояния в дуалния код на един линеен код C. Да отбележим, че дуалният код на C има вида

$$C^{\perp} = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in F_q^n \mid \langle x, y \rangle = 0 \ \ \forall y \in C)\}.$$

Както е доказано в [21] и [22] за всеки линеен код $C \subset H(n, q)$ е изпълнено равенството $\tau = d'(C) - 1$.

За да изследваме спектрите на ортогоналните масиви, е необходимо да знаем освен техните основни параметри, също така и техните най-важни свойства. Представените по-долу свойства следват директно от дефиницията на ортогонален масив и са подробно описани в [28].

1. Всеки ортогонален масив със сила τ и индекс λ е ортогонален масив със сила τ', където $0 \leq \tau' < \tau$. Индексът спрямо силата τ' на ортогоналния масив се изразява по следния начин: $\lambda^{\tau-\tau'}$.

2. Нека $C_1, \ldots, C_k$ са ортогонални масиви с параметри (n, M_i, q, τ_i), $i = 1, \ldots, k$. Матрицата C, чиито редове е съставена от всички редове в C_i за всяко $i = 1, \ldots, k$, е ортогонален масив с параметри (n, M, q, τ), за някое $\tau \geq \{\tau_1, \ldots, \tau_k\}$. Броят на редовете M е точно сумата $M_1 + \ldots + M_k$ от редовете на отделните масиви. Схематично тази структура изглежда по следния начин:
$$C = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_k \end{bmatrix}.$$

3. Нека $C_1, \ldots, C_q$ са ортогонални масиви с параметри (n, M, q, τ). Матрицата C, чиито редове е съставена от всички редове в C_i като пред всеки ред е добавен елемента $i-1$ за всяко $i = 1, \ldots, q$, е ортогонален масив с параметри $(n + 1, qM, q, \tau)$. По-долу е дадена схемата на тази конструкция.
$$C = \left[\begin{array}{c|c} 0 & C_1 \\ 1 & C_2 \\ & \vdots \\ q-1 & C_q \end{array}\right].$$

4. При всяка пермутация на редове или стълбове в един ортогонален масив се получава ортогонален масив със същите параметри.

5. При всяка пермутация на елементите $\{0, 1, \ldots, q-1\}$ на даден стълб на ортогонален масив се получава ортогонален масив със същите параметри.

6. Всяка $M \times n'$ подматрица на един ортогонален масив (n, M, q, τ) е ортогонален масив с параметри (n', M, q, τ'), където $\tau' = \min\{n', \tau\}$.

7. Ако вземем редовете на един (n, M, q, τ) ортогонален масив, които започват с фиксиран елемент (например 0), и изпуснем елементите от първия стълб, остава ортогонален масив с параметри $(n-1, M/q, q, \tau-1)$. По-точно, налице е следната конструкция:

0 0 $\vdots$ 0	$(n-1, M/q, q, \tau-1)$
1 1 $\vdots$ 1	$(n-1, M/q, q, \tau-1)$
$\vdots$	
q - 1 q - 1 $\vdots$ q - 1	$(n-1, M/q, q, \tau-1)$

8. Нека $\mathcal{C}$ е множеството от всички възможни редове на един ортогонален масив A и за всяка възможна дума $c \in \mathcal{C}$ да означим с f_c честотата, с която думата c се среща в масива A. Да означим с f максималната честота f_c за всяко $c \in \mathcal{C}$. Тогава ортогоналният масив, който съдържа всяка дума c с честота $f - f_c$ за всяко $c \in \mathcal{C}$, се нарича теоретико-множествено допълнение или просто допълнение на A. Ако A е ортогонален масив с параметри (n, M, q, τ), тогава допълнението му е ортогонален масив с параметри $(n, fq^n - M, q, \tau)$.

9. Нека (n, M, q, τ) ортогоналният масив C съдържа в себе си друг ортогонален масив C_1, който е с параметри (n, M_1, q, τ_1). Тогава разликата между двата масива C_2 също е ортогонален масив съответно с параметри $(n, M - M_1, q, \tau_2)$, където $\tau_2 \geq \min\{\tau, \tau_1\}$.
$$C = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$$

От математическа гледна точка е важно да умеем да разграничаваме кога две структури (конфигурации) са изоморфни, т.е. са една и съща структура по същество или се различават.

Определение 1.2.4 *Два ортогонални масива се наричат изоморфни, ако могат да се получат един от друг при последователни пермутации на редове, стълбове или елементи от азбуката Q във фиксирани стълб от масивите.*

1.3 Граници върху характеристиките на ортогоналните масиви в $H(n, q)$

В настоящия дисертационен труд ще се фокусираме върху някои от основните задачи в изучаването на ортогонални масиви. Един от основните проблеми в теория на кодирането е да да определят възможните стойности за мощността (броят на редовете на матрицата) M на ортогоналния масив C, при фиксирани азбука Q, сила τ и брой на стълбовете (размерност) n, т.е. да се определят онези M, за които съществуват (n,M,q,τ) ортогонални масиви. Първата важна задача в тази насока е следната.

Задача 1.3.1 *За фиксирани сила τ, брой стълбове n и елементи в азбуката q да се намери минималната възможна мощност M, за която съществува (n,M,q,τ) ортогонален масив в $H(n,q)$, т.е. да се оцени величината*

$$B(n,q,\tau) = \min\{M = |C| \ : \ \textit{съществува } (n,M,q,\tau) \textit{ ортогонален масив в } H(n,q)\}.$$

От тъждеството $M = \lambda q^\tau$ лесно се съобразява, че горната задача е еквивалентна на задачата за намирането на минимален индекс λ на ортогонален масив.

Задача 1.3.2 *За фиксирани сила τ, брой стълбове n и елементи в азбуката q да се намери минималният възможен индекс λ, за който съществува (n,M,q,τ) ортогонален масив в $H(n,q)$, т.е. да се оцени величината*

$$\Lambda(n,\tau,q) = \min\{\lambda = |C|/q^\tau \ : \ \textit{съществува } (n,M,q,\tau) \textit{ ортогонален масив в } H(n,q)\}.$$

Тези задачи вълнуват учените от десетилетия. Получени са различни долни граници за величината $B(n,q,\tau)$ на (n,M,q,τ) ортогонален масив [4, 5, 22, 24, 25, 35, 50]. В този параграф са представени някои от тези граници. Първо са разгледани границите на линейното програмиране за дизайни в крайномерни полиномиални метрични пространства.

Теорема 1.3.3 *(Граница на линейното програмиране за кодове [24]) Нека $C \subset H(n,q)$ е (n,M,q,τ) ортогонален масив за $\tau \geq 1$ с минимално разстояние d. Нека $s = \sigma(d) \in [-1,1)$ и $f(t)$ е полином с реални коефициенти от степен k, за който за изпълнени условията*

1. *$f(t) \leq 0$ за всяко $t \in [-1,s]$,*
2. *Коефициентите в развитието на полинома $f(t)$ по нормализираните полиноми на Кравчук $f(t) = \sum_{i=1}^{k} f_i Q_i(t)$ удовлетворяват неравенствата $f_0 > 0, f_i \geq 0$ за $i = 1,2,\ldots k$.*

Тогава $M = |C| \leq f(1)/f_0$.

Следващата граница е горна граница за мощността на един ортогонален масив и е известна също и като граница на Делсарт.

Теорема 1.3.4 *(Граница на линейното програмиране за дизайни [24]) Нека $C \subset H(n,q)$ е (n,M,q,τ) ортогонален масив, $\tau \geq 1$ е цяло число. Нека $f(t)$ е полином с реални коефициенти от степен k, за който за изпълнени условията*

1. *$f(t) \geq 0$ за всяко $t \in [-1,1]$,*

2. *Коефициентите в развитието на полинома $f(t)$ по нормализираните полиноми на Кравчук $f(t) = \sum_{i=1}^{k} f_i Q_i(t)$ удовлетворяват неравенствата $f_0 > 0, f_i \leq 0$ за $i = \tau + 1, \ldots k$.*

Тогава $B(n, q, \tau) \geq f(1)/f_0$.

Следващите две двойки граници могат да се получат с помощта на комбинаторни методи, а също така могат да се докажат, използвайки методите на линейното програмиране. Да отбележим, че в общия случай горната граница на линейното програмиране е по-силна от представената по-долу граница на Рао. В двоичното Хемингово пространство обаче тези две граници съвпадат.

Теорема 1.3.5 *(Граници на Рао [49] и Хеминг [27]) Параметрите n, M, τ на един ортогонален масив C в пространството $H(n, q)$ удовлетворяват следните неравенства*

$$D(n, q, \tau) \leq |C| \leq \frac{q^n}{D(n, q, d(C))},$$

където $D(n, q, \tau)$ има вида

$$D(n, q, \tau) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{u} \binom{n}{i} (q-1)^i, & \text{ако } \tau = 2u, \\ \sum_{i=0}^{u} \binom{n}{i} (q-1)^i + \binom{n-1}{u} (q-1)^{u+1}, & \text{ако } \tau = 2u+1. \end{cases}$$

Кодовете, които достигат лявата или дясната граница в Теорема 1.3.5, се наричат съответно плътни дизайни или съвършени кодове.

Следващата двойка горни и долна граница са границите на Сингълтън за код $C \subset H(n, q)$.

Теорема 1.3.6 *[53] Нека C е крайно непразно подмножество (код) на $H(n, q)$. Тогава за мощността на C са в сила следните граници:*

$$q^{d'(C)-1} \leq |C| \leq q^{n-d(C)+1},$$

като всяка от границите се достига тогава и само тогава когато $d(C) + \tau = n + 1$. Да уточним още, че от факта, че дуалното разстояние може да бъде пресметнато като $d'(C) = \tau + 1$, тогава можем да формулираме още, че равенство получаваме тогава и само тогава когато $d(C) + d'(C) = n + 2$.

В сила е и следната граница [47, 46].

Теорема 1.3.7 *(Граница на Плоткин) Нека $C \subset H(n, 2)$ е двоичен код с минимално разстояние между думите d. Тогава за мощността на един код C е изпълнено следното неравенство*

$$|C| \leq \begin{cases} 2\left\lfloor \frac{d}{2d-n} \right\rfloor, & \text{ако } d \text{ е четно и } 2d > n, \\ 4d, & \text{ако } d \text{ е четно и } 2d = n, \\ 2\left\lfloor \frac{d+1}{2d+1-n} \right\rfloor, & \text{ако } d \text{ е нечетно и } 2d+1 > n, \\ 4d+4, & \text{ако } d \text{ е нечетно и } 2d+1 = n. \end{cases}$$

Преди да въведем следващата граница, ще покажем някои наблюдения и резултати на Левенщейн [38] върху границата на Рао $D(n,q,\tau)$. Нека да означим с $z^{a,b}$ най-големите корените на съответните присъединени полиноми на Кравчук $Q^{a,b}$. Използвайки факта, че подредбата на тези корени е ясна (виж Твърдение 1.1.8), Левенщейн разделя интервала $[-1,1)$ на различни непресичащи се във вътрешни точки затворени подинтервали $\mathcal{I}_\tau$, където

$$\mathcal{I}_\tau = \begin{cases} [z_{k-1}^{1,1}, z_k^{1,0}] & \text{за} \ \ \tau = 2k-1, \\ [z_k^{1,0}, z_k^{1,1}] & \text{за} \ \ \tau = 2k, \end{cases}$$

За всеки такъв подинтервал $\mathcal{I}_\tau$ и за фиксирано число s в него Левенщейн дефинира следния полином от степен τ

$$f_\tau^{(n,q,s)}(t) = \begin{cases} (t-s)(T_{k-1}^{1,0}(t,s))^2, & \text{за} \ \ \tau = 2k-1 \\ (t+1)(t-s)(T_{k-1}^{1,1}(t,s))^2, & \text{за} \ \ \tau = 2k. \end{cases}$$

Този полином удовлетворява условията на в Теорема 1.3.3 и по този начин се получава следната граница.

Теорема 1.3.8 *[38] (Граница на Левенщейн)*

$$|C| \le L_\tau(n,q,s) \begin{cases} = (1 - \frac{Q_{k-1}^{1,0}(s)}{Q_k^s}) \sum\limits_{i=0}^{k-1} r_i, & \text{ако } s \in \mathcal{I}_{2k-1} \\ = (1 - \frac{Q_k^{1,0}(s)}{Q_k^{0,1}(s)}) \sum\limits_{i=0}^{k} r_i, & \text{ако } s \in \mathcal{I}_{2k}, \end{cases}$$

като равенството се достига тогава и само тогава, когато $d'(C) > \max(2s(C) - \delta(C), 2)$.

Кодовете, за които границата се достига, са с добри комбинаторни свойства и се наричат максимални (оптимални) кодове. От друга страна има много други конкретни случаи, в които границите на Левенщейн са слаби. Известни са различни подходи, водещи до подобрения на тези граници. Такива подобрения на Левенщейн бяха получени от Бойваленков и Данев [11], както и от Бойваленков, Данев и Стоянова в [12]. Също така си струва да споменем, че границите на Левенщейн имат добро асимптотично поведение.

Понеже всяка от границите $L_\tau(n,q,s)$ е гладка по s можем да дефинираме функция $L_\tau(n,s)$, която ще бъде непрекъсната по s:

$$L_\tau(n,q,s) = \begin{cases} L_{2k-1}(n,q,s), & \text{за } s \in \mathcal{I}_{2k-1} \\ L_{2k}(n,q,s), & \text{за } s \in \mathcal{I}_{2k}. \end{cases}$$

Да отбележим, че в общата точка за подинтервалите $\mathcal{I}_\tau$ и $\mathcal{I}_{\tau+1}$ стойността на функцията е една и съща.

За корените на полинома $f_\tau^{(n,s)}(t)$ са в сила следните теореми.

Теорема 1.3.9 *[38, 39] Нека* $\tau = 2k-1$*,* $z_{k-1}^{1,1} \leq s < 1$*,* $1 \leq n+1, z_0^{1,1} = -1$*. Тогава полиномът* $(t-1)(t-s)T_{k-1}^{1,0}(t,s)$ *има* $k+1$ *прости реални корена*

$$-1 \leq \alpha_0 < \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1} < 1$$

като $\alpha_0 = -1$ *точно когато* $s = \alpha_{k-1} = t_{k-1}^{1,1}$*. Нещо повече, съществуват положителни числа (тегла)* $\rho_0, \rho_1, \ldots, \rho_{k-1}$*, такива че за всеки полином* $f(t)$ *от степен, ненадминаваща* $2k-1$ *е в сила следната квадратурна формула:*

$$f_0 = \rho_k f(1) + \sum_{i=0}^{k-1} \rho_i f(\alpha_i).$$

За теглата $\rho_0, \rho_1, \ldots, \rho_{k-1}$ *са изпълнени следните равенства*

$$\rho_i = \frac{1}{c^{1,0}(1-\alpha_i)T_{k-1}^{1,0}(\alpha_i, \alpha_i), \quad i = 0, 1, \ldots, k-1},$$

$$\rho_k = -\frac{Q_k(s)}{T_{k-1}(s,1) - Q_k(s)T_{k-1}(1,1)},$$

т.е. те са еднозначно определени от n *и* s*, като е изпълнено равенството* $\rho_k = 1/L_{2k-1}(n,s)$*.*

За четния случай $\tau = 2k$ е в сила аналогична теорема.

Теорема 1.3.10 *[38, 39] Нека* $m = 2k$*,* $z_k^{1,0} \leq s < 1, 1 \leq n+1$*. Тогава полиномът* $(1-t^2)T_{k-1}^{1,1}(t,s)$ *има* $k+2$ *прости реални корени*

$$-1 = \beta_0 < \beta_1, \ldots, \beta_k = s < \beta_{k+1} = 1.$$

Нещо повече, съществуват положителни числа (тегла) $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{k+1}$*, такива че за всеки полином* $f(t)$ *от степен, ненадминаваща* $2k$ *е в сила следната квадратурна формула:*

$$f_0 = \gamma_{k+1} f(1) + \sum_{i=0}^{k} \gamma_i f(\beta_i).$$

Числата $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{k+1}$ *са еднозначно определени от* n *и* s*, като е изпълнено равенството* $\gamma_{k+1} = 1/L_{2k}(n,s)$*.*

Твърдение 1.3.11 *[38], [39]*

а) Числата $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}$ *са корени на уравнението*

$$Q_k^{1,0}(t)Q_{k-1}^{1,0}(s) - Q_k^{1,0}(s)Q_{k-1}^{1,0}(t) = 0.$$

б) Числата $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_k$ *са корени на уравнението*

$$Q_k^{1,1}(t)Q_{k-1}^{1,1}(s) - Q_k^{1,1}(s)Q_{k-1}^{1,1}(t) = 0.$$

В контекста на горните означения, получаваме следната граница.

Накрая да отбележим, че Левенщейн получава [38, 37] и долна граница за мощността на даден ортогонален масив. Тя е в сила само за крайномерни полиномиални метрични пространства, каквото е Хеминговото пространство $H(n,q)$, докато горната граница е в сила във всяко полиномиално метрично пространство, заествайки разсъжденията върху полиномите на Кравчук с аналогични върху съответните зонални полиноми на разглежданото пространство.

Теорема 1.3.12 *(Долна граница на Левенщейн)*

$$\frac{q^n}{L_\tau(n,\sigma(\tau+1))} \le |C|$$

като равенство се достига тогава и само тогава, когато $d(C) > \max(2s'(C) - \delta'(C), 2)$.

1.4 Алгоритъм за генериране на възможностите за спектри на (n, M, q, τ) ортогонален масив

Нека се върнем отново на Дефиниция 1.2.2 за спектър на ортогонален масив спрямо точка $c \in H(n,q)$ и съответната $(n+1)$-орка

$$W = W(c) = (w_0, w_1, \ldots, w_n).$$

За удобство в настоящата работа ще използваме различни означения в зависимост от това дали точката c принадлежи на масива C или не. По-точно, за вътрешна за масива точка $c \in C$ ще означаваме спектъра на C по отношение на точката c с

$$P = P(c) = (p_0 \ge 1, p_1, \ldots, p_n),$$

докато за външна за масива точка $c \in H(n,q) \setminus C$ ще означаваме спектъра на C относно точката c с

$$Q = Q(c) = (q_0 = 0, q_1, \ldots, q_n).$$

Намирането на всички възможности за различни характеристики на един код е стандартен похват в теория на кодирането и в комбинаториката. Идеята за намирането на спектрите на оптималните кодове и дизайни е въведена за пръв път от Делсарт в неговата дисертация [21]. Ние ще приложим един от начините за пресмятане на всички възможности за спектри на (n, M, q, τ) ортогонален масив, който е следствие от по-общ подход, предложен от Бойваленков [9]. Съществено значение има фактът, че Хеминговото пространство $H(n,q)$, над което работим, е крайномерно полиномиално метрично пространство.

По-точно следващата теорема дава необходимия апарат за първоначално намиране на всички възможности за спектри относно вътрешна или външна точка за даден ортогонален масив (виж [13], [14]).

Теорема 1.4.1 *Нека $C \subset H(n,q)$ е (n,M,q,τ) ортогонален масив и $c \in H(n,q)$ е фиксирана точка. Тогава:*

(а) ако $c \in C$, спектърът на C относно точката c удовлетворява системата

$$\sum_{i=0}^{n} p_i \left(1 - \frac{2i}{n}\right)^k = b_k|C|, k = 0, 1, \ldots, \tau, \tag{1.1}$$

(б) ако $c \notin C$, спектърът на C относно точката c удовлетворява системата

$$\sum_{i=1}^{n} q_i \left(1 - \frac{2i}{n}\right)^k = b_k|C|, k = 0, 1, \ldots, \tau, \tag{1.2}$$

където b_k е първият коефициент в развитието на полинома t^k по нормализираните полиноми на Кравчук, т.е. $t^k = b_k + \sum_{i=1}^{k} P_i^{(n)}(t)$.

Следствие 1.4.2 *Един ортогонален масив $C \subset H(n,q)$ с параметри $(\tau, \lambda q^\tau, q, \tau)$ съществува и има единствен спектър (относно вътрешна за него точка $c \in C$) от вида $P = (p_0, p_1, \ldots, p_\tau)$, където*

$$p_i = \lambda \binom{\tau}{i} (q-1)^i, \text{ за } i = 0, 1, \ldots, \tau.$$

Доказателство: Системата (1.4.1) се състои от $n - \tau$ свободни параметъра, а в този случай $n = \tau$, което означава, че имаме единствено решение. Това решение е търсеният спектър на масива C относно вътрешни за него точки. Нещо повече в този случай всички точки от пространството са точки и от масива, т.е. имаме единствен спектър на масива C.

От дефиницията на ортогонален масив с параметри (n, M, q, τ) имаме, че във всеки подмасив $M \times \tau$ всяка τ-орка се среща точно $\lambda = M/q^\tau$ пъти. От факта, че $n = \tau$ и $M = \lambda q^\tau$ с комбинаторни съображения, лесно се съобразява, че търсеното единствено решение на система ((1.4.1), т.е. единственият спектър на C спрямо коя да е (вътрешна) за масива точка $c \in C$ е точно от вида: $p_i = p_i(c) = \lambda \binom{\tau}{i} (q-1)^i$, за $i = 0, 1, \ldots, \tau$. □

Следствие 1.4.3 *Нека $C \subset H(n,q)$ е $(\tau + 1, \lambda q^\tau, q, \tau)$ ортогонален масив. Тогава всички възможности за спектри на масива спрямо вътрешна за масива точка за C са точно λ на брой.*

Доказателство: Нека относно вътрешната за масива точка $c \in C$ ортогоналният масив C има спектър $P = P(c) = (p_0, p_1, \ldots, p_{\tau+1})$. От Свойство 5 на ортогоналните масиви следва, че при премахване на един стълб от масива C се получава ортогонален масив C' с параметри $(\tau, \lambda q^\tau, q, \tau)$. Нека ортогоналният масив C' спрямо вътрешната за него точка c' има спектър $(p'_0, p'_1, \ldots, p'_\tau)$. От една страна знаем, че $p'_0 \geq p_0$, а от Следствие 1.4.2 имаме, че $p'_0 = \lambda$. Тогава $p_0 \in \{1, 2, \ldots, \lambda\}$. Замествайки p_0 с всяка една от тези стойности в система (1.4.1), получаваме системи от Вандермондов тип с

$\tau+1$ реда и $\tau+1$ неизвестни. Всяка една от тези λ системи има единствено решение, следователно и всички възможности за спектри на ортогоналния масив C относно вътрешна за него точка са точно λ на брой. $\square$

В общия случай, системата (1.1) се състои от $\tau+1$ уравнения и има $n+1$ неизвестни. Нейната матрица е от Вандермондов тип и има пълен ранг $\tau+1$. Следователно множеството от интересуващите ни решения на системата се определя от $(n+1)-(\tau+1)=n-\tau$ свободни параметъра. Аналогично, за външна точка на масива C, системата (1.2) се състои от $\tau+1$ уравнения и има n неизвестни, като множеството от нейните решения се определя от $n-(\tau+1)=n-\tau-1$ свободни параметъра. Ясно е, че и в двата случая можем да оставим свободните параметри да пробягват множеството $\{0,\ldots,|C|\}$ и по този начин да получим всички възможности за спектри на (n,M,q,τ) ортогонален масив относно вътрешни и външни за него точки. Разбира се, решенията, в които има недопустими (нецели или отрицателни) стойности на променливите, се отхвърлят.

Нека n, M, $\tau\leq n$ и q са фиксирани. Ще означаваме с $P(n,M,q,\tau)$ множеството от всички възможности за спектри на ортогонален масив с параметри (n,M,q,τ) относно вътрешна за масива точка, а с $Q(n,M,q,\tau)$ - множеството от възможностите за спектри на (n,M,q,τ) ортогоналния масив, относно външна за масива точка. Първоначално множествата $P(n,M,q,\tau)$ и $Q(n,M,q,\tau)$ съвпадат съответно с множествата от решенията на системата (1.1) и системата (1.2), получени по описания по-горе начин. Множеството от всички възможности за спектри на (n,M,q,τ) ортогонален масив в $H(n,q)$, относно коя да е произволна точка от пространството, ще означаваме с $W(n,M,q,\tau)$. Ясно е, че

$$W(n,M,q,\tau)=P(n,M,q,\tau)\cup Q(n,M,q,\tau).$$

За по-лесен анализ на множествата $W(n,M,q,\tau)$, $P(n,M,q,\tau)$ и $Q(n,M,q,\tau)$ са представени три теореми, благодарение на които доказателствата в следващите глави могат да бъдат значително опростени без да се губи ограничение на общността. Освен това те ни дават възможност да представим редица конструкции по по-разбираем и достъпен за читателите начин.

Теорема 1.4.4 *Множеството $W(n,M,q,\tau)$ е точно множеството от спектри на ортогонални масиви с параметри (n,M,q,τ) спрямо точката $\mathbf{0}\in H(n,q)$.*

Доказателство: Нека да означим множеството от спектри на ортогонални масиви с параметри (n,M,q,τ) спрямо точката $\mathbf{0}\in H(n,q)$ с $W_0(n,M,q,\tau)$. От дефиницията на $W(n,M,q,\tau)$ е ясно, че $W_0(n,M,q,\tau)\subset W(n,M,q,\tau)$.

От друга страна нека $W\in W(n,M,q,\tau)$, т.е. да допуснем, че съществуват ортогонален масив C с параметри (n,M,q,τ) и точка $c=(c_0,c_1,\ldots,c_n)\in H(n,q)$, такива че W е спектър на C относно точката c. Нека да трансформираме ортогоналния масив по следния начин: за всяко i, такова че $c_i\neq 0$, в i-тия стълб на C извършваме пермутация на елементите 0 и c_i. От Свойство 5 на ортогоналните масиви знаем, че новополученият масив също е ортогонален масив с параметри (n,M,q,τ). Да разгледаме спектъра на този масив спрямо точката $\mathbf{0}\in H(n,q)$. Да отбележим, че нулевата дума на пространството $H(n,q)$ се получава от думата c чрез същата пермутация $(c_i, 0)$ за ненулевите координати c_i. Това означава, че се запазват всички разстояния между думите на ортогоналния масив и нулевата дума, с което достигаме до заключението, че новополученият масив има спектър точно W. По този начин показахме, че всеки спектър от $W(n,M,q,\tau)$ може да бъде разгледан и като спектър от $W_0(n,M,q,\tau)$, т.е. $W(n,M,q,\tau) \subset W_0(n,M,q,\tau)$, с което теоремата е доказана. $\square$

Следствие 1.4.5 *$W(n,M,q,\tau)$ е точно множеството от спектри на ортогонални масиви с параметри (n,M,q,τ) спрямо фиксирана точка $c \in H(n,q)$.*

Доказателство: Доказателството се извършва по аналогичен на горното доказателство начин като се използва пермутация по ненулевите координати на фиксираната точка c и прилагайки факта, че $W_0(n,M,q,\tau) = W(n,M,q,\tau)$. $\square$

За да можем да ограничим нашите разглеждания само върху множествата от възможности за спектри $P(n,M,q,\tau)$ и $Q(n,M,q,\tau)$ са ни нужни аналогични теореми за съответните множества. Използваме факта, че в доказателството на Теорема 1.4.4 едната посока е ясна. За обратната посока е показано, че при фиксиран ортогонален масив и спектър W спрямо коя да е точка съществува ортогонален масив, чиито спектър е W спрямо нулевата дума $\mathbf{0} \in H(n,q)$. Разграничаваме спектър на масив относно вътрешна за него точка от спектър на масива относно външна за него точка по първата координата w_0, което означава, че ако изходната точка е била вътрешна, след извършената пермутация, нулевата дума се оказва вътрешна за масива. Ако изходната точка е била външна, след пермутацията нулевата дума също така ще бъде външна за новополучения ортогонален масив. Благодарение на това са в сила следните две теореми и техните следствия.

Теорема 1.4.6 *$P(n,M,q,\tau)$ е точно множеството от всички вътрешни спектри на ортогонални масиви с параметри (n,M,q,τ) спрямо точката $\mathbf{0} \in H(n,q)$.*

Следствие 1.4.7 *$P(n,M,q,\tau)$ е точно множеството от всички вътрешни спектри на ортогонални масиви с параметри (n,M,q,τ) относно фиксирана точка $c \in H(n,q)$.*

Теорема 1.4.8 *$Q(n,M,q,\tau)$ е точно множеството от всички външни спектри на ортогонални масиви с параметри (n,M,q,τ) спрямо точката $\mathbf{0} \in H(n,q)$.*

Следствие 1.4.9 *$Q(n,M,q,\tau)$ е точно множеството от всички външни спектри на ортогонални масиви с параметри (n,M,q,τ) спрямо фиксирана точка $c \in H(n,q)$.*

Основната цел в следващите две глави е да генерираме и анализираме множествата $P(n,M,q,\tau)$, $Q(n,M,\tau,q)$ и $W(n,M,q,\tau)$, съответно. Една от основните ни задачи е да се опитаме да организираме алгоритми за редуциране на броя на възможностите за спектри на даден ортогонален масив, т.е. да намалим броя на елементите в горните множества. Ако успеем да покажем, че множеството $P(n,M,q,\tau)$ или множеството

$W(n,M,q,\tau)$ съвпадат с празното множество, тогава получаваме, че не съществува ортогонален масив с фиксираните параметри (n,M,q,τ).

Фокусът на настоящия труд е основно върху масиви за първите два случая на q, т.е. когато $q=2$ и $q=3$. Ще представим редица условия, на които трябва да отговарят спектрите от множествата $W(n,M,q,\tau)$, $P(n,M,q,\tau)$ и $Q(n,M,q,\tau)$. Всеки спектър, който не отговаря на тези условия, ще бъде отхвърлян от съответното множество.

Да отбележим, че в тази насока се работи активно [28], [54], [52], [2], [19], [51] като с различни подходи и алгоритми са получени редица както конструктивни резултати на неизоморфни класове от ортогонални масиви със съответни параметри, така и резултати за несъществуване.

В дисертацията ще бъдат представени няколко алгоритъма за редуциране на множествата $W(n,M,q,\tau)$, $P(n,M,q,\tau)$ и $Q(n,M,q,\tau)$, съответно.

Глава 2

Спектри на двоични ортогонални масиви

Във втора глава е разгледан случаят $q = 2$, т.е. ортогонални масиви в двоичното Хемингово пространство $H(n, 2)$. За простота и удобство в тази глава вместо $(n, M, \tau, 2)$ е използвано означението (n, M, τ) ортогонален масив. Аналогично множествата от спектри $W(n, M, \tau, 2)$, $P(n, M, \tau, 2)$ и $Q(n, M, \tau, 2)$ ще означаваме съответно с $W(n, M, \tau)$, $P(n, M, \tau)$ и $Q(n, M, \tau)$.

В параграф 2.1 са разгледани някои важни характеристики на двоичното Хемингово пространство. В параграф 2.2 е описана конструкция за получаване на някои производни ортогонални масиви от даден ортогонален масив. В параграф 2.3 са получени зависимости между спектрите на вътрешни точки за двоични ортогонални масиви с параметри съответно (n, M, τ), $(n-1, M, \tau)$ и $(n-1, M/2, \tau-1)$. След прилагането на някои свойства на ортогоналните масиви са намерени допълнителни ограничения върху възможностите за спектри на ортогонални масиви в $H(n, 2)$. Представен е алгоритъм за редуциране на спектрите на двоичен ортогонален масив относно вътрешна точка за масива. В Параграф 2.4 е представен алгоритъм за редуциране на броя на възможните спектри на даден (n, M, τ) ортогонален масив при отрязване на един произволен стълб от него. В параграф 2.5 методът е разширен с нови ограничения, получени в резултат на премахване на два стълба от разглеждания ортогонален масив. В следващите два параграфа са коментирани някои оптимизации на алгоритмите, като за по-голяма яснота е описано и приложението им върху един съществуващ ортогонален масив. В последния параграф са представени получените от нас резултати за несъществуване на двоични ортогонални масиви, в следствие от прилагането на описаните в тази глава алгоритми.

2.1 Двоични ортогонални масиви

Да обърнем внимание, че двоичното Хемингово пространство $H(n, 2)$ е антиподално полиномиално метрично пространство. От Дефиниция 1.1.3 следва, че за всяка точка $x \in H(n, 2)$ съществува единствена точка $\bar{x} \in H(n, 2)$, за която е изпълнено условието $d(x, \bar{x}) = n$. Точката $\bar{x}$ се нарича допълнителна (диаметрално противоположна) на точката $x \in H(n, 2)$. Това и Свойство 5 на ортогоналните масиви са предпоставка в $H(n, 2)$ да е в сила следната теорема.

Теорема 2.1.1 *[28] Един ортогонален масив $C \subset H(n, 2)$ с параметри $(n, M, 2u)$ съществува тогава и само тогава, когато съществува ортогонален $(n+1, 2M, 2u+1)$ масив в $H(n, 2)$.*

Доказателство: Свойство 7 на ортогоналните масиви показва лесен начин как от даден $(n+1, 2M, 2u+1)$ ортогонален масив да получим нов ортогонален масив с параметри $(n, M, 2u)$. Следователно ако $(n+1, 2M, 2u+1)$ ортогонален масив съществува, то следва и съществуването на ортогонален масив с параметри $(n, M, 2u)$.

Обратно, нека C е ортогонален масив с параметри $(n, M, 2u)$ и индекс λ и да означим с $\overline{C}$ ортогоналния масив, образуван от множеството от допълнителните на точките от масива C точки от пространството $H(n, 2)$. По-точно, $\overline{C}$ се получава от C при пермутацията $(0 \to 1, 1 \to 0)$ във всеки стълб на C. От Свойство 5 на ортогоналните масиви знаем, че $\overline{C}$ е ортогонален масив, изоморфен на първоначалния масив, в частност със същите параметри $(n, M, 2u)$.

Да построим ортогонален масив B по следния начин: поставяме масива C, последван от стълб с нули, заедно с допълнението $\overline{C}$, като към него е добавен стълб от единици. Ще покажем, че получената матрица B образува ортогонален масив с параметри $(n + 1, 2M, 2u + 1)$. За целта нека означим с $\tau = 2u + 1$ и да разгледаме произволни τ стълба на B. Целта е да се покаже, че всяка двоична τ-орка се среща точно λ пъти като редове в коя да е избрана $2M \times \tau$ подматрица.

Наистина, ако последният стълб участва в избраните τ стълба, то горният факт е налице, защото C има сила точно $2u$.

В противен случай, е ясно, че $n \geq \tau$. Да изберем произволни τ стълба от масива B. За удобство и без ограничение на общността можем да считаме, че това са първите τ стълба. За всяка τ-орка $c = c_1, c_2, \ldots, c_\tau$ на точката $(c_1, c_2, \ldots, c_n) \in C$, да означим с $v(c)$ броя на редовете от C, които започват с τ-орката c. Тогава броят на редовете на B, започващи с c, е $v(c) + v(\overline{c})$. Целта е да покажем, че този брой е точно λ за всяко c.

За τ-орка c', която се различава от c в точно една позиция, е в сила, че

$$v(c) + v(c') = \lambda.$$

Това следва от факта, че C е със сила $\tau - 1$. Ако вземем τ-орка c'', която се различава от c в две позиции, то за нея получаваме:

$$v(c) - v(c'') = v(c) + v(c') - v(c') - v(c'') = (v(c) + v(c')) - (v(c') + v(c'')) = \lambda - \lambda = 0,$$

където c' е τ-орка, която се намира на разстояние 1 както от c, така и от c''. Повтаряйки това наблюдение, забелязваме, че когато τ-орка a се намира на четно разстояние от τ-орка c, то $v(c) - v(a) = 0$ или с други думи $v(c) = v(a)$. От друга страна, c и $\overline{c}$ се намират на разстояние $\tau = 2u+1$, а c' и $\overline{c}$ на разстояние $2u$. Следователно $v(c') = v(\overline{c})$ и

$$v(c) + v(\overline{c}) = v(c) + v(c') = \lambda$$

за всяка τ-орка c. С това теоремата е доказана. $\square$

Нека C е (n, M, τ) ортогонален масив и спрямо фиксирана точка $c \in H(n,2)$ спектърът на масива C е $W = W(c) = (w_0, w_1, \ldots, w_n)$. Ясно е, че броят на точките, които са на разстояние i от точката $\overline{c} \in H(n,2)$, е точно w_{n-i}. Тогава спектърът на масива C спрямо точката $\overline{c}$ е съответно $\overline{W} = W(\overline{c}) = (w_n, w_{n-1}, \ldots, w_0)$. От това следва, че двойката спектри $W = (w_0, w_1, \ldots, w_n)$ и $\overline{W} = (w_n, w_{n-1}, \ldots, w_0)$ принадлежат едновременно на множеството $W(n, M, \tau)$.

Да напомним, че за генерирането на всички възможности за спектри на даден ортогонален масив, т.е. на множествата $W(n, M, \tau)$, $P(n, M, \tau)$ и $Q(n, M, \tau)$, е необходимо да пресметнем свободните коефициенти $b_k = f_{0,k}$ в развитието на полиномите t^k $(k = 0, \ldots, n)$ по нормализираните полиноми на Кравчук. За тези коефициенти в двоичния случай, т.е. в $H(n,2)$ (виж [22, 37, 26]) са налице следните зависимости:

$$b_0 = 1; \quad b_{2j+1} = 0; \quad b_{2j} = \frac{1}{2^n} \sum_{d=0}^{n} \left(1 - \frac{2d}{n}\right)^{2j} \binom{n}{d}.$$

В настоящата глава ще изследваме следната основна задача.

Задача 2.1.2 *За фиксирани сила τ и брой стълбове (размерност) n да се намери минималната възможна мощност M, за която съществува (n, M, τ) двоичен ортогонален масив (τ-дизайн) C в $H(n,2)$, т.е. да се оцени величината*

$$B(n, \tau) = min\{M = |C| : \ \textit{съществува } \tau - \textit{дизайн } \ C \subset H(n,2)\}.$$

От тъждеството $M = \lambda 2^\tau$, Задача 2.1.2 е еквивалентна на следния проблем.

Задача 2.1.3 *За фиксирани сила τ и брой стълбове (размерност) n да се намери минималният възможен индекс λ, за който съществува $(n, \lambda 2^\tau, \tau)$ двоичен ортогонален масив (τ-дизайн) C в $H(n,2)$, т.е. да се оцени величината*

$$\Lambda(n, \tau) = min\{\lambda = |C|/2^\tau : \ \textit{съществува } \tau - \textit{дизайн } \ C \subset H(n,2)\}.$$

Отправна точка за нашата работа върху двоични ортогонални масиви бяха известните резултати, обобщени в книгата "Orthogonals Arrays (Theory and Applications)" на A.S. Hedayat, N.J.A. Sloane, John Stufken ([28], Table 12.1), както и актуализациите им, поддържани от Sloane на уеб страницата [58]. Резултатите в представената по-долу Таблица 2.1 са част от Таблица 12.1 в [28]. Те са допълнени в Таблица 2.1 с получените от Khalyavin [32] резултати за несъществуване.

n \ τ	2^{Hd}	3^{Hd}	4	5	6	7	8	9	10
4	2	1	1						
5	2	2	1	1					
6	2	2	2	1	1				
7	2	2	${}^{SZ}4$	2	1	1			
8	3	2	4^c	${}^{SZ}4$	2	1	1		
9	3	3	6–8	4^c	4	2	1	1	
10	3	3	6–8	6–8	8^{Kh}	4	2	1	1
11	3	3	6–8	6–8	8^c	8^{Kh}	4	2	1
12	4	3	7–8	6–8	12–16	8^c	8^{Kh}	4	2
13	4	4	8	7–8	16	12–16	16^{Kh}	8^{Kh}	4
14	4	4	8	8	16	16	16^c	16^{Kh}	8^{Kh}
15	4	4	8^{NR}	8	16^{RH}	16	26–32	16^c	16^{Kh}
16	5	4	10–16	8^{NR}	21–32	16^{RH}	39–64	26–32	32^{Kh}
17	5	5	12–16	10–16	26–32	21–32	$52–64^{jx}$	39–64	32^c
18	5	5	13–16	12–16	29–32	26–32	52–128	$52–64^{jx}$	54–64
19	5	5	$14–16^{X4}$	13–16	29–32	29–32	52–128	52–128	86–128
20	6	5	15–32	$14–16^{X4}$	29–32	29–32	$64–128^c$	52–128	128^c

Таблица 2.1. Стойности на $\Lambda(n,\tau)$, за $4 \leq n \leq 20$ и $2 \leq \tau \leq 10$.

Легенда:

c	цикличен код
Hd	точна стойност, получена от Адамарови масиви
jx	слепваща конструкция
Kh	конструкция на Халявин
NR	код на Нордстром-Робинсън (1967)
RH	конструкция на Рао-Хеминг
SZ	граница на Зайден и Земаш (1966)
$X4$	конструкция $X4$

2.2 Производни ортогонални масиви

В този параграф е разгледана конструкция за получаване на така наречените производни ортогонални масиви от ортогонален масив със зададени параметри (n, M, τ). Тази конструкция представлява мощен апарат за намиране на различни връзки между спектрите на даден масив и на производните му (получени от него) ортогонални масиви. Благодарение на тези зависимости в следващите параграфи са разработени алгоритми за редуциране на броя на възможностите за спектри на изходния ортогонален масив.

Нека n, M и $2 \leq \tau < n$ са фиксирани и C е (n, M, τ) ортогонален масив в $H(n, 2)$. Нека $c \in H(n, 2)$ е произволна точка от двоичното Хемингово пространство, относно която спектърът на масива C е $W = (w_0, w_1, \ldots, w_n) \in W(n, M, \tau)$. Да премахнем произволен стълб от масива C и да приемем, че е премахнат ℓ-тият стълб, $1 \leq \ell \leq n$. Получената матрица да означим с C'. От Свойство 6 на ортогоналните масиви знаем, че C' е ортогонален масив с параметри $(n-1, M, \tau)$. Едновременно с премахването на

ℓ-тия стълб на масива C е премахната и ℓ-тата координата на точката $c \in H(n,2)$. Да означим получената точка $c' \in H(n-1,2)$ и спектъра на масива C' относно нея с $W' = (w'_0, w'_1, \ldots, w'_{n-1}) \in W(n-1,M,\tau)$. Една от основните цели в следващите параграфи е да се получат закономерности между спектрите W и W' на ортогоналните масиви C и C' относно точките c и c', съответно.

За изследванията в настоящата глава е важно да разгледаме каква е ролята на съответната точка c относно която се пресмята спектъра на масива C. Ще разгледаме двете възможности за нея спрямо това дали тя принадлежи на масива C или е извън него. Лесно се съобразява, че когато c е вътрешна точка за масива C, то новополучената точка c' също е вътрешна за масива C'. Когато c е външна за C точка, не знаем дали новополучената точка c' е вътрешна или е външна за C'. Ако съществува дума от ортогоналния масив C, която се различава единствено в ℓ-тата си координата от думата $c \in H(n,2)$, тогава новополучената точка c' е вътрешна за C'. В противен случай думата c' няма как да бъде част от производния масив C', т.е. тя е външна за него дума.

Формално записано горните разсъждения изглеждат по следния начин: Ако $W \in P(n,M,\tau)$, то винаги $W' \in P(n-1,M,\tau)$, докато ако $W \in Q(n,M,\tau)$, то $W' \in W(n-1,M,\tau) = P(n-1,M,\tau) \cup Q(n-1,M,\tau)$. В следващия параграф са получени зависимости между множествата $P(n,M,\tau)$ и $P(n-1,M,\tau)$, а в параграфи 2.4 и 2.5 са изследвани множествата от всички възможности за спектри $W(n,M,\tau)$ и $W(n-1,M,\tau)$. Доказани са теореми, които показват при какви обстоятелства даден елемент от $P(n,M,\tau)$ или $W(n,M,\tau)$ може да бъде отхвърлен като възможен спектър за съответното множество. В резултат на това са представени алгоритми за редуциране на броя на елементите в двете множества.

Нека пренаредим редовете на ортогоналния масив, така че в първите $M/2$ реда ℓ-тите координати да са 0, а в останалите $M/2$ реда на ℓ-та позиция да е символът 1 (виж Конструкция 2.2, по-долу). След премахване на ℓ-тия стълб на C от Свойство 7 на ортогоналните масиви следва, че първите M/2 реда образуват ортогонален масив с параметри $(n-1, M/2, \tau-1)$, който ще означаваме C_0. Аналогично, останалите $M/2$ реда също образуват $(n-1, M/2, \tau-1)$ ортогонален масив, който ще бележим C_1. Тогава спектрите на C_0 и C_1 спрямо точката c' трябва да принадлежат на множеството $W(n-1, M/2, \tau-1)$.

За по-голяма яснота описаната по-горе схема е визуализирана в Конструкция 2.2, като без ограничение на общността може да считаме, че сме премахнали първия стълб, т.е. $\ell = 1$.

По-долу е въведено понятието *i-блок* в даден ортогонален масив, което ще играе важна роля при охарактеризирането на структурата на изследваните ортогонални масиви.

Определение 2.2.1 *Нека C е ортогонален масив с параметри (n,M,τ) и c е произволна точка от $H(n,2)$. За всяко фиксирано число $i \in \{0,1,\ldots,n\}$ ще наричаме i-блок спрямо точката c подматрицата на масива C с размери $w_i \times n$, която се състои от всички редове на C на разстояние i от точката c.*

Да означим с x_i (y_i) броя на единиците (нулите) във фиксиран стълб на масива C, които принадлежат на i-блока спрямо точката c за $i \in \{0,1,\ldots,n\}$.

$$
\begin{array}{c}
C' - (n-1, M, \tau)\\
W' = (w'_0, \dots, w'_{n-1})\\
\overbrace{\hspace{10em}}
\end{array}
$$

$$
\underbrace{\begin{array}{|c|c|}
\hline
0 & \\
0 & \\
\vdots & C_0 - (n-1, M/2, \tau - 1)\\
0 & \\
\hline
1 & \\
1 & \\
\vdots & C_1 - (n-1, M/2, \tau - 1)\\
1 & \\
\hline
\end{array}}_{\begin{array}{c} C - (n, M, \tau)\\ W = (w_0 \dots, w_n)\end{array}}
$$

Конструкция 2.2.

Да припомним, че Теорема 1.4.4 дава възможност да разглеждаме $W(n, M, \tau)$ като множеството от всички спектри на ортогонален масив със съответните параметри спрямо коя да е една фиксирана точка, в частност спрямо нулевата дума $c = \mathbf{0} \in H(n, 2)$. При това след премахване на произволна координата от $c = \mathbf{0}$ достигаме винаги до нулевата дума $c' = \mathbf{0} \in H(n-1, 2)$. От тук до края на Параграф 2.3 за по-голяма яснота (когато разглеждаме вътрешна точка от масива) ще описваме спектрите на ортогоналните масиви относно $c = \mathbf{0} \in H(n, 2)$.

2.3 Алгоритъм за редуциране на спектрите на двоичен ортогонален масив относно вътрешна за него точка

Нека е даден (n, M, τ) ортогонален масив и да разгледаме първата дума от него. От Свойство 5 на ортогоналните масиви можем да извършим пермутация $0 \to 1$, $1 \to 0$ във всеки стълб с ненулева координата в първата дума на масива. Така получаваме масив C със същите параметри, който е изоморфен на първоначалния ортогонален масив. При това нулевата дума $c = \mathbf{0}$ винаги е вътрешна за масива C, т.е. спектърът на C спрямо нея принадлежи на множеството $P(n, M, \tau)$ и ще го бележим с $P = (p_0, p_1, \dots, p_n)$. При това при премахване на ℓ-тия стълб на масива C, точката $c' = \mathbf{0}$ е вътрешна за масива C'. Спектърът на C' относно точката $c' = \mathbf{0}$ принадлежи на множеството $P(n-1, M, \tau)$ и ще го бележим с $P' = (p'_0, p'_1, \dots, p'_{n-1})$. Следователно можем да ограничим търсенето на зависимости върху множествата от спектри на разглежданите ортогонални масиви само относно вътрешни точки, в частност спрямо точките $c = \mathbf{0} \in C$ и $c' = \mathbf{0} \in C'$.

Идеята за следващите две теореми първоначално е изследвана от Бойваленков и Кулина в [14]. За пълнота и по-голяма яснота на изложението тук са представени и доказателствата им. През 2015 година идеята за изследване на връзките между спектрите на даден ортогонален масив и спектрите на получените от него производни ортогонални масиви бе доразвита от нас в съвместната ни работа [15], [16]. По-долу са представени тези резултати, формулирани с използваните от нас означения.

Теорема 2.3.1 *Нека $C \subset H(n,2)$ е (n,M,τ) ортогонален масив, за който $P \in P(n,M,\tau)$ е спектър на C спрямо точката $c = \mathbf{0} \in C$. Нека c' и C' са получени съответно от c и C съгласно Конструкция 2.2, а $P' \in P(n-1,M,\tau)$ е спектър на C' относно точката c'. Тогава системата линейни уравнения*

$$\left|\begin{array}{l} x_i + y_i = p_i,\ i = 1,2,\dots,n-1 \\ x_{i+1} + y_i = p'_i,\ i = 0,1,\dots,n-1 \\ y_0 = p_0 \\ x_n = p_n \\ x_i, y_i \in \mathbb{Z},\ x_i \geq 0,\ y_i \geq 0,\ i = 0,1,\dots,n \end{array}\right. \tag{2.1}$$

с неизвестни x_i, y_i, $i = 0,\dots,n$ има решение.

Доказателство: От Дефиниция 2.2.1 са изпълнени тъждествата:

$$x_i + y_i = p_i, \quad i = 1,\dots,n-1, \quad x_n = p_n, \quad y_0 = p_0.$$

От начина на получаване на C' е ясно, че редовете, които са на разстояние i от точката $c' = \mathbf{0} \in C'$, са съвкупност от точките на разстояние i в C относно $c = \mathbf{0}$ и нулева координата на съответния премахнат стълб, заедно с тези на разстояние $i+1$ в C спрямо $c = \mathbf{0}$ и координата 1 в премахнатия стълб. С други думи, в сила са равенствата

$$x_{i+1} + y_i = p'_i, \quad i = 0,1,\dots,n-1,$$

с което теоремата е доказана. □

За да бъде $P \in P(n,M,\tau)$ спектър на ортогонален (n,M,τ) масив, е необходимо системата (2.1) от Теорема 2.3.1 да има решение за поне един спектър $P' \in P(n-1,M,\tau)$.

Следствие 2.3.2 *За фиксиран възможен спектър P на двоичен (n,M,τ) ортогонален масив C, ако система (2.1) няма решение за нито един спектър $P' \in P(n-1,M,\tau)$, тогава спектърът P следва да бъде отхвърлен от множеството $P(n,M,\tau)$, т.е. $P \notin P(n,M,\tau)$.*

В противен случай, за даден спектър $P \in P(n,M,\tau)$ събираме всички възможни двойки (P,P'), които удовлетворяват системата (2.1), когато P' пробягва множеството $P(n-1,M,\tau)$, т.е. при всевъзможните отрязвания на някой стълб от масива C. За всяка двойка имаме и съответното решение на системата (2.1).

В описаните в Теорема 2.3.1 означения нека

$$(x_0^{(r)} = 0, x_1^{(r)}, \dots, x_n^{(r)}; y_0^{(r)}, y_1^{(r)}, \dots, y_{n-1}^{(r)}, y_n^{(r)} = 0), \quad r = 1,\dots,s,$$

са всички s на брой решения на системата (2.1) за всевъзможните C', получени от C при премахване на някой негов стълб. За всяко $r = 1,\dots,s$ да означим с k_r броя на стълбовете на C, след премахването на които получаваме r-тото решение на системата (2.1).

Теорема 2.3.3 *Нека $P \in P(n, M, \tau)$ да е възможност за спектър на ортогонален масив с параметри (n, M, τ) и P' пробягва множеството $P(n-1, M, \tau)$. Ако системата линейни уравнения*

$$\left|\begin{array}{lllll} k_1 & +k_2 & +\dots & +k_s & = n \\ k_1 x_1^{(1)} & +k_2 x_1^{(2)} & +\dots & +k_s x_1^{(s)} & = p_1 \\ k_1 x_2^{(1)} & +k_2 x_2^{(2)} & +\dots & +k_s x_2^{(s)} & = 2p_2 \\ \vdots & & & & \\ k_1 x_n^{(1)} & +k_2 x_n^{(2)} & +\dots & +k_s x_n^{(s)} & = np_n \\ k_r \in \mathbb{Z}, & k_r \geq 0, & r = 1, 2 & \dots, s & \end{array}\right. \tag{2.2}$$

спрямо неизвестните $k_1, k_2, \dots, k_s$ няма решение, тогава P следва да бъде отхвърлен като възможен спектър, т.е. $P \notin P(n, M, \tau)$.

Доказателство: За фиксирано i да разгледаме i-блока спрямо точката $c = \mathbf{0}$. Съгласно Дефиниция 2.2.1 броят на единиците в него е точно ip_i. От друга страна за всеки фиксиран стълб на масива, като вземем предвид, че x_i е точно броят на думите от i-блока, които имат 1 в този стълб, то броят на единиците в i-блока е равен също така на $k_1 x_i^{(1)} + k_2 x_i^{(2)} + \dots + k_s x_i^{(s)}$. Следователно, системата (2.2) трябва да има решение поне за една двойка от спектри (P, P'). Ако няма решение, тогава P следва да бъде отхвърлен като възможен спектър, т.е. $P \notin P(n, M, \tau)$. □

Гореописаните две теореми [14] определят зависимостите между спектрите P и P' на ортогоналните масиви C и C' относно вътрешни за масивите точки. След прилагането им, за всеки фиксиран спектър $P \in P(n, M, \tau)$ са намерени възможните двойки (P, P'), където P' пробягва множеството $P(n-1, M, \tau)$. Целта на прилагането им бе да се достигне до празното множество, с което бихме показали несъществуване на ортогонални масиви с фиксирани параметри. За съжаление получените в горните теореми ограничения не се оказаха достатъчни, за да се достигне до празното множество в нито един от отворените случаи към момента. Въпреки това благодарение на прилагането им беше значително намалена мощността на множеството $P(n, M, \tau)$. Както по-горе бе споменато в [16] ние заедно доразвихме тези изследвания като анализирахме вида на спектрите на някои други производни ортогонални масиви, получени от C. В резултат, доказахме описаните по-долу нови ограничения, на които трябва да отговарят двойките от спектри (P, P') и които вече се оказаха достатъчни, за да получим нови резултати за несъществуване (описани в Параграф 2.8) на някои от отворените случаи на възможни параметри за двоични ортогонални масиви.

Да разгледаме отново Конструкция 2.2 и получените от ортогоналния масив C производни масиви C_0 и C_1. Тъй като нулевата дума е от ортогоналния масив C, то $c' = \mathbf{0} \in C_0$ е вътрешна точка за ортогоналния масив C_0 и следователно спектърът на масива C_0 относно точката c' трябва да е от множеството $P(n-1, M/2, \tau-1)$. От друга страна, спектърът на ортогоналния масив C_1 спрямо нулевата дума на пространството $H(n-1, 2)$ не е еднозначно определен, т.е. имаме само, че този спектър е от множеството $W(n-1, M/2, \tau-1)$. Затова се налага да проверим дали съответното

$w_0 \geq 1$ или $w_0 = 0$, за да можем да конкретизираме кога спектърът на ортогоналния масив C_1 е относно вътрешна за него точка.

Следващите две теореми ни дават спектрите на C_0 и C_1 спрямо точката $c' = \mathbf{0} \in H(n-1, 2)$, разглеждани единствено в контекста на множеството от вътрешни точки $P(n-1, M/2, \tau-1)$. За по-голяма яснота, резултатите първо са визуализирани в Конструкция 2.3.

$$
\begin{array}{c}
C' - (n-1, M, \tau)\\
W' = (w'_0, w'_1, \ldots, w'_{n-1})\\
\begin{array}{|c|c|}
\hline
0 & \\
0 & Y = (y_0, y_1, \ldots, y_{n-1})\\
\vdots & C_0 - (n-1, M/2, \tau-1)\\
0 & \\
\hline
1 & \\
1 & X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)\\
\vdots & C_1 - (n-1, M/2, \tau-1)\\
1 & \\
\hline
\end{array}\\
C - (n, M, \tau)\\
W = (w_0, w_1, \ldots, w_n)
\end{array}
$$

Конструкция 2.3.

Теорема 2.3.4 *В означенията на Теорема 2.3.1 са в сила следните твърдения:*

(а) Векторът $Y = (y_0, y_1, \ldots, y_{n-1})$ е спектър на C_0 спрямо вътрешната за масива точка c', т.е. $Y \in P(n-1, M/2, \tau-1)$.

(б) Ако $y_{n-1} \geq 1$, то векторът $\overline{Y} = (y_{n-1}, y_{n-2}, \ldots, y_0)$ е спектър на C_0 относно вътрешна за масива точка, т.е. $\overline{Y} \in P(n-1, M/2, \tau-1)$.

Доказателство:

(а) Тъй като нулевият вектор с дължина $n-1$ принадлежи на C_0, то спектърът на този масив на i-та позиция съдържа точно y_i на брой думи на разстояние i от нулевата дума (виж Дефиниция 2.2.1). Тогава векторът $Y = (y_0, y_1, \ldots, y_{n-1})$ е този спектър, т.е. $Y \in P(n-1, M/2, \tau-1)$.

(б) Условието $y_{n-1} \geq 1$ означава, че C_0 съдържа думата с дължина $n-1$, която се състои само от единици $\mathbf{1} = (11\ldots1) \in H(n-1, 2)$, т.е. допълнителната на нулевата дума. Спрямо тази точка $\mathbf{1}$ лесно можем да пресметнем спектъра на C_0. Наистина, нека $a \in C_0$ е произволна точка с точно i на брой 1 за свои координати. Тогава разстоянието между $\mathbf{1}$ и точката $a \in C_0$ е точно $(n-1)-i$. Това показва, че спектърът на $\mathbf{1}$ спрямо C_0 е именно $\overline{Y} = (y_{n-1}, y_{n-2}, \ldots, y_0)$, т.е. $\overline{Y} \in P(n-1, M/2, \tau-1)$. $\square$

Благодарение на тази теорема получаваме първото ново условие една двойка от спектри (P, P') да е възможна комбинация за спектри на ортогонален масив C и на неговия производен C'.

Следствие 2.3.5 *В означенията на Теорема 2.3.1 са в сила следните твърдения:*

(а) Ако $Y = (y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}) \notin P(n-1, M/2, \tau-1)$*, то двойката* (P, P') *следва да бъде отхвърлена.*

(б) Ако $y_{n-1} \geq 1$ *и векторът* $\overline{Y} = (y_{n-1}, y_{n-2}, \ldots, y_0) \notin P(n-1, M/2, \tau-1)$*, то двойката* (P, P') *следва да бъде отхвърлена.*

Разглеждайки ортогоналния масив C_1, е в сила подобна теорема. Благодарение на нея успяваме да получим нови условия кога двойката (P, P') ще бъде възможна комбинация за спектри на C и C', съответно.

Теорема 2.3.6 *В означенията на Теорема 2.3.1 са в сила следните твърдения:*

(а) Ако $x_1 \geq 1$*, то векторът* $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *е спектър на някоя вътрешна точка на ортогоналния масив* C_1*, т.е.* $X \in P(n-1, M/2, \tau-1)$.

(б) Ако $x_n \geq 1$*, то векторът* $\overline{X} = (x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1)$ *е спектър на вътрешна точка на ортогоналния масив* C_1*, т.е.* $\overline{X} \in P(n-1, M/2, \tau-1)$.

Доказателство:

(а) Условието $x_1 \geq 1$ означава, че C_1 съдържа нулевата дума $c' = \mathbf{0} \in H(n-1, 2)$. Тогава съответният спектър на ортогоналния масив C_1 на i-та позиция съдържа броя на думите на разстояние i от нулевата дума c', което съгласно Дефиниция 2.2.1 показва, че този спектър е $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, т.е. $X \in P(n-1, M/2, \tau-1)$.

(б) Нека имаме $x_n \geq 1$. Да разгледаме отново C_1. В този случай C_1 съдържа вектора $\mathbf{1} \in H(n-1, 2)$. Спектърът на масива C_1 относно думата $\mathbf{1}$ лесно може да бъде пресметнат по аналогичен начин както бе направено в доказателството на подусловие (б) на Теорема 2.3.4. По-точно, нека $a \in C_1$ е произволна точка с точно i на брой 1 за свои координати. Тогава разстоянието между $\mathbf{1}$ и точката $a \in C_1$ е точно $(n-1) - i$. Следователно спектърът на C_1 относно точката $\mathbf{1}$ е точно $\overline{X} = (x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1)$, т.е. $\overline{X} \in P(n-1, M/2, \tau-1)$. □

Твърденията от Теорема 2.3.6 водят до следващите ограничения върху двойката (P, P'), кога тя ще бъде възможна комбинация за спектри на C и C', съответно.

Следствие 2.3.7 *В означенията на Теорема 2.3.1 са в сила следните твърдения:*

(а) Ако $x_1 \geq 1$ *и векторът* $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \notin P(n-1, M/2, \tau-1)$*, то двойката* (P, P') *следва да бъде отхвърлена.*

(б) Ако $x_n \geq 1$ *и векторът* $\overline{X} = (x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1) \notin P(n-1, M/2, \tau-1)$*, то двойката* (P, P') *следва да бъде отхвърлена.*

Въз основа на теоремите и следствията, описани по-горе в този параграф, е разработен алгоритъм за редуциране на броя на елементите (възможностите за спектри) в множеството $P(n, M, \tau)$. Показахме, че това множество е пряко свързано с множествата от спектри $P(n-1, M, \tau)$ и $P(n-1, M/2, \tau-1)$. Ако успеем да изключим всички възможности за спектри от множеството $P(n, M, \tau)$, т.е. покажем, че това множество е празното, то можем да заключим, че двоичен ортогонален масив с параметри (n, M, τ) не съществува. Алгоритъмът е описан подробно, като навсякъде е отбелязано конкретната използвана теоретична обосновка.

Algorithm 1 – Алгоритъм за редуциране на множеството от спектри $P(n, M, \tau)$ относно вътрешни точки на двоичен ортогонален (n, M, τ) масив:

1. Генерираме посредством Теорема 1.4.1 последователно множествата от спектри $P(\tau, M, \tau)$, $P(\tau+1, M, \tau)$, …, $P(n, M, \tau)$ и $P(\tau-1, M/2, \tau-1)$, $P(\tau, M/2, \tau-1)$, …, $P(n-1, M/2, \tau-1)$.

2. Нека $i = \tau+1, \dots, n$ и за всяко фиксирано i изследваме множеството $P(i, M, \tau)$.

3. Фиксираме спектър P от множеството $P(i, M, \tau)$ и разглеждаме Конструкция 2.3.

4. За всяка двойка (P, P'), където P' пробягва множеството $P(i-1, M, \tau)$, прилагаме Теорема (2.3.1) и в резултат отсяваме възможните двойки (P, P').

5. Ако не съществуват възможни двойки (P, P'), от Следствие 2.3.2 заключаваме, че $P \notin P(i, M, \tau)$ и алгоритъмът продължава със стъпка 3.

6. За всяка една възможна двойка (P, P') проверяваме условията от Следствие 2.3.5 и Следствие 2.3.7 и в резултат редуцираме множеството от възможните двойки.

7. Ако не съществуват възможни двойки (P, P'), следва, че $P \notin P(i, M, \tau)$.

8. За останалите след стъпка 7 възможни двойки (P, P') прилагаме Теорема 2.3.3. Ако системата (2.2) от Теорема 2.3.3 няма нито едно решение, тогава изключваме спектъра P от множеството $P(i, M, \tau)$.

   В противен случай P е възможен спектър и заедно с него са получени всички възможни двойки спектри (P, P'), за $P' \in P(n-1, M, \tau)$.

Този алгоритъм е достатъчно добър при относително малки стойности на (n, M, τ). Когато прилагането му води до $P(n, M, \tau) = \emptyset$, имаме, че ортогонален масив със зададените параметри не съществува. В останалите случаи получаваме множеството $P(n, M, \tau)$ от възможностите за спектри на (n, M, τ) ортогонален масив относно вътрешните за масива точки. Всички резултати за несъществуване, както и някои конкретни примери са показани в Параграф 2.8.

Този параграф е написан въз основа на следните две публикации [16].

2.4 Основен алгоритъм за редуциране на спектрите на двоичен ортогонален масив

В Алгоритъм 1 от Параграф 2.3 се разглежда единствено множеството от спектри спрямо вътрешна точка за даден ортогонален масив. Това е предимство, когато се работи върху множества с относително малка мощност, при което алгоритъмът е с достатъчно добро бързодействие. От друга страна, при изследването единствено на множеството $P(n, M, \tau)$ и получените от него по Конструкция 2.3 множества от спектри на производните му масиви само относно вътрешна точка, е ясно, че не се използват всички налични зависимости между спектрите на изследваните масиви. По този начин се губят част от отсяванията в алгоритъма, тъй като не се проверяват всички ограничения, които на практика вече сме получили.

В параграф 2.4 са обобщени нашите изследванията върху множеството $W(n, M, \tau) = P(n, M, \tau) \cup Q(n, M, \tau)$ от всички възможности за спектри на даден двоичен ортогонален (n, M, τ) масив C (относно вътрешни и външни за масива точки). В резултат е разработен разширен алгоритъм за редуциране на броя на елементите на множеството $W(n, M, \tau)$, подробно описан в края на този параграф.

Да отбележим, че първоначалното множество $W(n, M, \tau)$, което се получава чрез решаване на системите от Теорема 1.4.1, притежава значително по-голяма мощност спрямо изследваното в Параграф 2.3 множество $P(n, M, \tau)$. При по-голям брой стълбове n, както и при стойности на n, значително по-големи от стойността на τ, мощността на множеството $W(n, M, \tau)$ расте прекалено бързо. Това прави алгоритмите, описани в този и в следващия параграф, да не са приложими винаги на практика. Затова тези алгоритми ще бъдат използвани за изследване на по-къси редици от множества от спектри $W(\tau, M, \tau)$, $W(\tau + 1, M, \tau)$, $\ldots$, $W(n, M, \tau)$, както и за множества с относително по-малка мощност $|W(n, M, \tau)|$.

Забележка 2.4.1 *Да забележим, че в Дефиниция 2.2.1 на i-блок няма ограничение точката c да бъде вътрешна за изследвания ортогонален масив. Това ни дава възможност да използваме всички факти, свързани с разглеждане на точките от даден i-блок, работейки относно произволна точка $c \in H(n, 2)$, т.е. да изследваме множеството $W(n, M, \tau)$ от всички възможности за спектри на даден $W(n, M, \tau)$ ортогонален масив.*

Нека C е (n, M, τ) двоичен ортогонален масив, $c \in H(n, 2)$ е произволна точка и от тях са получени съответният ортогонален масив C' с параметри $(n - 1, M, \tau)$ и точка $c' \in H(n-1, 2)$. Забележка 2.4.1 ни дава възможност да обобщим Теорема 2.3.1 и Теорема 2.3.3 като разглеждаме спектрите на изследваните ортогонални масиви C и C' относно произволните точки c и c' (съответно), т.е. да изследваме съответните множества от възможности за спектри $W(n, M, \tau)$ и $W(n - 1, M, \tau)$.

В сила е следното твърдение, което обобщава Теорема 2.3.1 относно произволна точка $c \in H(n, 2)$.

Теорема 2.4.2 *Нека $C \subset H(n, 2)$ е (n, M, τ) двоичен ортогонален масив, за който $W \in W(n, M, \tau)$ е спектър на C спрямо произволна точката $c \in H(n, 2)$. Нека*

$c' \in H(n-1,2)$ и C' са получени съответно от c и C съгласно Конструкция 2.3, а $W' \in W(n-1,M,\tau)$ е спектър на масива C' относно точката c'. Тогава системата линейни уравнения

$$\left| \begin{array}{l} x_i + y_i = w_i, \ i = 1,2,\ldots,n-1 \\ x_{i+1} + y_i = w'_i, \ i = 0,1,\ldots,n-1 \\ y_0 = w_0 \\ x_n = w_n \\ x_i, y_i \in \mathbb{Z}, \ x_i \geq 0, \ y_i \geq 0, \ i = 0,1,\ldots,n \end{array} \right. . \tag{2.3}$$

с неизвестни $X = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)$ и $Y = (y_0, y_1, \ldots, y_{n-1})$ има единствено решение от вида

$$X = (w'_0 - w_0, \sum_{j=0}^{1}(w'_j - w_j), \ldots, \sum_{j=0}^{n-2}(w'_j - w_j), w_n),$$

$$Y = (w_0, w_1 - (w'_0 - w_0), w_2 - \sum_{j=0}^{1}(w'_j - w_j), \ldots, w_{n-1} - \sum_{j=0}^{n-2}(w'_j - w_j)).$$

Доказателство: Доказателството, че векторите X и Y удовлетворяват уравненията на системата (2.3) и са нейно решение, е аналогично на доказателството на Теорема 2.3.1 като отчетем Забележка 2.4.1 и работим съответно със спектрите W и W'. Да напомним още, че от дефинициите на x_i и y_i е ясно, че са в сила равенствата $x_0 = 0$ и $y_n = 0$. По-нататък, да забележим, че системата (2.3) може да се запише в следния еквивалентен вид

$$\left| \begin{array}{l} y_i = w_i - x_i, \ i = 1,2,\ldots,n-1 \\ x_{i+1} = w'_i - y_i, \ i = 0,1,\ldots,n-1 \\ y_0 = w_0 \\ x_n = w_n \\ x_i, y_i \in \mathbb{Z}, \ x_i \geq 0, \ y_i \geq 0, \ i = 0,1,\ldots,n \end{array} \right. . \tag{2.4}$$

и след заместване на y_i получаваме

$$\left| \begin{array}{l} y_i = w_i - x_i, \ i = 1,2,\ldots,n-1 \\ x_{i+1} = w'_i - w_i - x_i, \ i = 0,1,\ldots,n-1 \\ y_0 = w_0 \\ x_n = w_n \\ x_i, y_i \in \mathbb{Z}, \ x_i \geq 0, \ y_i \geq 0, \ i = 0,1,\ldots,n \end{array} \right. . \tag{2.5}$$

Сега доказателството за вида на $x_i = \sum_{j=0}^{i-1}(w'_j - w_j)$, $i = 1,2,\ldots,n$ ще получим с индукция. Действително, от второто уравнение на (2.5) имаме, че $x_1 = w'_0 - w_0$, тъй като $x_0 = 0$. Нека допуснем, че твърдението е в сила за x_i за $i < n$ и да разгледаме x_{i+1}. Отново от второто уравнение на система (2.5) знаем, че $x_{i+1} = w'_i - w_i - x_i$ и от индукционното предположение получаваме:

$$x_{i+1} = (w'_i - w_i) - \sum_{j=0}^{i-1}(w'_j - w_j) = \sum_{j=0}^{i}(w'_j - w_j).$$

Да забележим, че като използваме очевидните равенства $\sum_{j=0}^{n-1} w'_j = M$ и $\sum_{j=0}^{n} w_j = M$, за вида на x_n получаваме още, че

$$x_n = \sum_{j=0}^{n-1}(w'_j - w_j) = M - (M - w_n) = w_n.$$

Следователно, $X = (w'_0 - w_0, \sum_{j=0}^{1}(w'_j - w_j), \ldots, \sum_{j=0}^{n-2}(w'_j - w_j), w_n)$. Като заместим получените x_i в съответните y_i, за $i = 1, 2, \ldots, n-1$, еднозначно получаваме, че $Y = (w_0, w_1 - (w'_0 - w_0), w_2 - \sum_{j=0}^{1}(w'_j - w_j), \ldots, w_{n-1} - \sum_{j=0}^{n-2}(w'_j - w_j))$. Следователно, системата (2.3) има единствено решение. □

Да отбележим, че при фиксирани спектри $W \in W(n, M, \tau)$ и $W' \in W(n-1, M, \tau)$ на ортогоналните масиви C и C' съответно, системата (2.3) може да бъде записана и в следния еквивалентен векторен вариант относно неизвестните вектори X и Y:

$$\left| \begin{array}{l} X + Y = W' \\ (0, X) + (Y, 0) = W \end{array} \right. . \tag{2.6}$$

В сила е следното твърдение, от прилагането на което можем отново да редуцираме елементите на множеството $W(n, M, \tau)$.

Следствие 2.4.3 *За фиксиран възможен спектър W на (n, M, τ) ортогонален масив C, ако системата (2.3) няма решение за нито един спектър $W' \in W(n-1, M, \tau)$, тогава елементът W следва да бъде отхвърлен от множеството $W(n, M, \tau)$, т.е. $W \notin W(n, M, \tau)$.*

От Теорема 2.4.2 и Следствие 2.4.3 освен, че се отхвърлят част от елементите от множеството от спектри $W(n, M, \tau)$, се получават и всички възможни двойки спектри (W, W'), когато W' пробягва множеството $W(n-1, M, \tau)$. Тези двойки подлежат на по-нататъшна проверка кои от тях удовлетворяват ограниченията, получени при изследване на спектрите на други масиви, които могат да се получат в Конструкция 2.3.

Да напомним, че ако $C \subset H(n, 2)$ е ортогонален масив с параметри (n, M, τ) и спектър W относно произволна точка $c \in H(n, 2)$, то с $\overline{C}$ означихме ортогоналния (n, M, τ) масив, получен от C при пермутацията $(0 \to 1, 1 \to 0)$ във всеки стълб на C. Нарекохме масива $\overline{C}$ допълнителен на масива C и означихме спектъра на $\overline{C}$ относно точката $c \in H(n, 2)$ с $\overline{W}$. В сила е следното твърдение.

Теорема 2.4.4 *Ако $W = (w_0, w_1, \ldots, w_n)$ е спектър на (n, M, τ) двоичен ортогонален масив C относно коя да е точка $c \in H(n, 2)$, тогава $\overline{W} = (w_n, w_{n-1}, \ldots, w_0)$ е спектърът на $\overline{C}$ относно точката c, т.е. векторите W и $\overline{W}$ едновременно принадлежат на множеството $W(n, M, \tau)$.*

Доказателство: Нека $W = (w_0, w_1, \ldots, w_n)$ е спектър на ортогоналния масив C относно точката $c \in H(n, 2)$. При конструирането на $\overline{C}$ всяка дума от C, която е на разстояние i спрямо точката c, се преобразува до дума от $\overline{C}$ на разстояние $n - i$ относно c. Това означава, че спектърът на $\overline{C}$ относно $c \in H(n, 2)$ има вида $\overline{W} = (w_n, w_{n-1}, \ldots, w_0)$. Следователно, векторите W и $\overline{W}$ едновременно принадлежат на множеството $W(n, M, \tau)$. □

Следствие 2.4.5 *Ако спектър $W = (w_0, w_1, \dots, w_n)$ е такъв, че векторът $\overline{W} = (w_n, w_{n-1}, \dots, w_0) \notin W(n, M, \tau)$, то W следва да бъде отхвърлен от множеството $W(n, M, \tau)$, т.е. $W \notin W(n, M, \tau)$.*

Прилагането на Следствие 2.4.5 поетапно в разширения ни алгоритъм, води не само до по-лесно отхвърляне на възможности за спектри от множеството $W(n, M, \tau)$, но и до по-голямо бързодействие на новия алгоритъм, тъй като по този начин се спестяват част от конструиранията на решенията на системата (2.3) и анализирането на съответните двойки при прилагане на Теорема 2.4.2.

Както вече отбелязахме в края на параграф 2.1 имаме, че от своя страна векторът $\overline{W} = (w_n, w_{n-1}, \dots, w_0)$ може да бъде разглеждан и като спектър на масива C относно допълнителната на $c \in H(n, 2)$ точка, а именно относно точката $\overline{c} \in H(n, 2)$. Аналогично, векторът W е спектър на $\overline{C}$ относно точката $\overline{c}$.

Върху ортогоналния $(n-1, M, \tau)$ масив C', получен от Конструкция 2.3, могат да бъдат доказани съответни аналози на Теорема 2.4.4 и Следствие 2.4.5 за множеството $W(n-1, M, \tau)$. В резултат на това са в сила следните твърдения.

Следствие 2.4.6 *Ако $W' = (w'_0, w'_1, \dots, w'_{n-1})$ е спектър на C', тогава и съответният му $\overline{W'} = (w'_{n-1}, w'_{n-2}, \dots, w'_0)$ е спектър на $\overline{C'}$, т.е. W' и $\overline{W'}$ принадлежат едновременно на множеството $W(n-1, M, \tau)$.*

Следствие 2.4.7 *Ако спектър W' е такъв, че векторът $\overline{W'} \notin W(n-1, M, \tau)$, то W' следва да бъде отхвърлен от множеството $W(n-1, M, \tau)$, т.е. $W \notin W(n-1, M, \tau)$.*

В предишния параграф разгледахме производните на ортогоналния масив C ортогонални $(n-1, M/2, \tau-1)$ масиви C_0 и C_1. В Теореми 2.3.4 и 2.3.6 беше еднозначно намерен видът на спектрите им спрямо вътрешна точка c. По-долу са представени обобщения за вида на спектрите на C_0 и C_1 относно произволна точка от $H(n, 2)$, базирани на решенията на система (2.3).

Теорема 2.4.8 *В означенията на Теорема 2.4.2, векторът*

$$\begin{aligned} Y &= (y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) \\ &= (w_0, w_1 - (w'_0 - w_0), w_2 - \sum_{j=0}^{1}(w'_j - w_j), \dots, w_{n-1} - \sum_{j=0}^{n-2}(w'_j - w_j)) \\ &= (w_0, \sum_{j=0}^{n-2}(w'_{n-1-j} - w_{n-j}), \dots, \sum_{j=0}^{1}(w'_{n-1-j} - w_{n-j}), w'_{n-1} - w_n) \end{aligned}$$

е спектър на ортогоналния масив C_0 относно точката $c' \in H(n-1, 2)$, т.е. $Y \in W(n-1, M/2, \tau-1)$.

Доказателство: След премахването на първия стълб на C са налице следните две възможности:

или $y_0 \geq 1$, т. е. точката c' е вътрешна за ортогоналния масив C_0, и следователно $Y \in P(n-1, M/2, \tau-1)$ (това е Теорема 2.3.4 (а));

или $y_0 = 0$, т. е. точката c' е външна за масива C_0 и по аналогичен начин следва, че $Y \in Q(n-1, M/2, \tau-1)$.

В двата случая накрая прилагаме Теорема 2.4.2, откъдето имаме първото представяне на вектора Y. Второто еквивалентно представяне на вектора Y е в резултат на заместване на следните две очевидни тъждества $\sum_{j=0}^{n-1} w'_j = M$, $\sum_{j=0}^{n} w_j = M$ и кратки преобразувания. $\square$

Теорема 2.4.9 *Векторът* $\overline{Y} = (y_{n-1}, y_{n-2}, \ldots, y_0)$ *е спектър на ортогоналния масив* $\overline{C_0}$ *относно* c', *т.е.* $\overline{Y} \in W(n-1, M/2, \tau-1)$.

Доказателство: Тази теорема е директно следствие от Теорема 2.4.8 и Теорема 2.4.4, приложени върху ортогоналния масив $\overline{C_0}$, който е получен от ортогоналния масив $\overline{C}$ (виж Конструкция 2.3). $\square$

Забележка 2.4.10 *В Теорема 2.4.9 са налице следните две възможности:*
или $y_{n-1} \geq 1$ *и тогава* $\overline{Y} \in P(n-1, M/2, \tau-1)$ *(това е Теорема 2.3.4 (б));*
или $y_{n-1} = 0$ *и тогава* $\overline{Y} \in Q(n-1, M/2, \tau-1)$.

Следствие 2.4.11 *Ако* $Y \notin W(n-1, M/2, \tau-1)$ *или* $\overline{Y} \notin W(n-1, M/2, \tau-1)$ *двойката* (W, W'), *от която са получени по Теорема 2.4.2, следва да бъде отхвърлена.*

Аналогично за ортогоналния масив C_1 получаваме следните твърдения.

Теорема 2.4.12 *В означенията на Теорема 2.4.2, векторът*

$$\begin{aligned}
X &= (x_1, x_2, \ldots, x_n) \\
&= (w'_0 - w_0, \sum_{j=0}^{1}(w'_j - w_j), \ldots, \sum_{j=0}^{n-2}(w'_j - w_j), w_n) \\
&= (w_1 - \sum_{j=0}^{n-2}(w'_{n-1-j} - w_{n-j}), \ldots, w_{n-1} - (w'_{n-1} - w_n), w_n)
\end{aligned}$$

е спектър на масива C_1 *относно точката* c', *т.е.* $X \in W(n-1, M/2, \tau-1)$.

Доказателство: След премахването на първия стълб на C са налице следните две възможности:

или $x_1 \geq 1$, т. е. точката c' е вътрешна за масива C_1 и следователно $X \in P(n-1, M/2, \tau-1)$ (това е Теорема 2.3.6 (а));

или $x_1 = 0$, т. е. точката c' е външна за ортогоналния масив C_1 и следователно $X \in Q(n-1, M/2, \tau-1)$;

В двата случая накрая прилагаме Теорема 2.4.2, откъдето имаме първото представяне на вектора X. Второто еквивалентно представяне на вектора X е в резултат на прилагането на Теорема 2.4.8, т.е. заместването на координатите на вектора Y (от второто му представяне) в равенствата $x_i = w_i - y_i$, за $i = 1, ..., n-2$ и кратки преобразувания. $\square$

Теорема 2.4.13 *Векторът* $\overline{X} = (x_n, x_{n-1}, \dots, x_1)$ *е спектър на масива* $\overline{C_1}$ *относно точката* c'*, т.е.* $\overline{X} \in W(n-1, M/2, \tau-1)$.

Доказателство: Тази теорема е директно следствие от Теорема 2.4.12 и Теорема 2.4.4, приложени върху ортогоналния масив $\overline{C_1}$, който е получен от ортогоналния масив $\overline{C}$ (виж Конструкция 2.3). $\square$

Забележка 2.4.14 *В Теорема 2.4.13 са налице следните две възможности:*
или $x_n \geq 1$ *и тогава* $\overline{X} \in P(n-1, M/2, \tau-1)$ *(това е Теорема 2.3.6 (б));*
или $x_n = 0$ *и тогава* $\overline{X} \in Q(n-1, M/2, \tau-1)$.

Благодарение на последните две теореми получаваме следващо необходимо условие една двойка спектри (W, W') да бъде възможна съгласно Конструкция 2.3.

Следствие 2.4.15 *Ако* $X \notin W(n-1, M/2, \tau-1)$ *или* $\overline{X} \notin W(n-1, M/2, \tau-1)$ *двойката* (W, W')*, от която са получени по Теорема 2.4.2, следва да бъде отхвърлена.*

В контекста на Конструкция 2.3 да извършим пермутация $0 \to 1$, $1 \to 0$ в ℓ-тия стълб на ортогоналния масив C. Получаваме ортогонален (n, M, τ) масив $C^{1,0}$, изоморфен на C. Резултатът е илюстриран чрез Конструкция 2.4.

$$\underbrace{\begin{array}{|c|c|}
\multicolumn{2}{c}{\overbrace{\begin{array}{c} C' - (n-1, M, \tau) \\ W' = (w'_0, w'_1, \dots, w'_{n-1}) \end{array}}} \\
\hline
0 & \\
0 & Y = (y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) \\
\vdots & C_0 - (n-1, M/2, \tau-1) \\
0 & \\
\hline
1 & \\
1 & X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \\
\vdots & C_1 - (n-1, M/2, \tau-1) \\
1 & \\
\hline
\end{array}}_{\begin{array}{c} C - (n, M, \tau) \\ W = (w_0, w_1, \dots, w_n) \end{array}}
\qquad
\underbrace{\begin{array}{|c|c|}
\multicolumn{2}{c}{\overbrace{\begin{array}{c} C' - (n-1, M, \tau) \\ W' = (w'_0, w'_1, \dots, w'_{n-1}) \end{array}}} \\
\hline
1 & \\
1 & Y = (y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) \\
\vdots & C_0 - (n-1, M/2, \tau-1) \\
1 & \\
\hline
0 & \\
0 & X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \\
\vdots & C_1 - (n-1, M/2, \tau-1) \\
0 & \\
\hline
\end{array}}_{\begin{array}{c} C^{1,0} - (n, M, \tau) \\ W^{1,0} = (w^{1,0}_0, w^{1,0}_1, \dots, w^{1,0}_n) \end{array}}$$

Конструкция 2.4.

Да разгледаме спектрите W и W' съответно на ортогоналните масиви C и C' относно точката $c \in H(n, 2)$ и получената от нея точка $c' \in H(n-1, 2)$. От Теореми 2.4.8 и 2.4.12 имаме вече намерени спектрите Y и X на C_0 и C_1 относно точката c', съответно. В следващата теорема е получен видът на спектър $W^{1,0}$ на ортогоналния масив $C^{1,0}$ (виж Конструкция 2.4).

Теорема 2.4.16 *Ако* $W = (w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}, w_n) = (y_0, x_1 + y_1, \ldots, x_{n-1} + y_{n-1}, x_n)$ *е спектър на ортогоналния масив* C *относно произволна точка* $c \in H(n, 2)$, *то*

$$\begin{aligned} W^{1,0} &= (w_0^{1,0}, w_1^{1,0}, \ldots, w_n^{1,0}) = (x_1, x_2 + y_0, \ldots, x_n + y_{n-2}, y_{n-1}) \\ &= (w'_0 - w_0, w'_0 + w'_1 - w_1, w'_1 + w'_2 - w_2, \ldots, w'_{n-2} + w'_{n-1} - w_{n-1}, w'_{n-1} - w_n) \end{aligned}$$

е спектърът на $C^{1,0}$ *относно същата точка* c, *т.е.* $W^{1,0} \in W(n, M, \tau)$.

Доказателство: Да разгледаме спектъра $W^{1,0}$ на ортогоналния масив $C^{1,0}$ относно точката $c \in H(n, 2)$. В него числото x_i е точно броят на точките, които са част от масива C_1 и са на разстояние $i - 1$ относно точката c'. Тъй като първата им координата в $C^{1,0}$ е нулева, то разстоянието им до точката c се запазва. Аналогично получаваме, че съществуват y_i точки, съдържащи се в C_0, които са на разстояние i от c', които в $C^{1,0}$, имайки единица на първа позиция, са на разстояние $i + 1$ спрямо точката c.

Следователно, точките от $C^{1,0}$ на разстояние 0 до точката c са точно x_1 на брой. Точките на разстояние i спрямо c за $1 \leq i \leq n - 1$, са $y_{i-1} + x_{i+1}$ на брой. Броят на точките на разстояние n от точката c е точно y_{n-1}, т.е. векторът $W^{1,0} = (x_1, x_2 + y_0, \ldots, x_n + y_{n-2}, y_{n-1})$ е спектър на $C^{1,0}$ относно $c \in H(n, 2)$ и тъй като ортогоналния масив $C^{1,0}$ е изоморфен на масива C, то $W^{1,0} \in W(n, M, \tau)$.

Накрая, използвайки Теорема 2.4.12 и Теорема 2.4.8, пресмятаме съответните елементи $w_j^{1,0}$, $j = 0, 1, \ldots, n$, на спектъра $W^{1,0}$. □

Да отбележим, че при фиксирани спектри $W \in W(n, M, \tau)$ и $W' \in W(n - 1, M, \tau)$ на C и C' съответно, координатите на спектрите X, Y и $W^{1,0}$ удовлетворяват следната записана във векторен вариант система:

$$\left| \begin{array}{l} X + Y = W' \\ (X, 0) + (0, Y) = W^{1,0} \end{array} \right. . \tag{2.7}$$

Следствие 2.4.17 *Ако* $W^{1,0} \notin W(n, M, \tau)$ *или* $\overline{W^{1,0}} \notin W(n, M, \tau)$, *тогава двойката спектри* (W, W'), *от които са получени по Теорема 2.4.2, следва да бъде отхвърлена.*

Теорема 2.4.16 и Следствие 2.4.17 са съществени подобрения в разширения ни алгоритъм, тъй като за пръв път се анализира кога един спектър от $W(n, M, \tau)$ зависи пряко от друг спектър на масива от същото множество от спектри. Действително, когато спектърът на масив C пробягва множеството $W(n, M, \tau)$, често се оказва, че спектърът $C^{1,0}$ в дадения момент не е бил все още обект на анализиране. Нещо повече, не можем да бъдем напълно сигурни, че двойката (W, W') няма да бъде отхвърлена при повторна проверка на всички елементи от множеството $W(n, M, \tau)$. Това означава, че за да изключим всички възможни двойки (W, W') и съответно всички възможни спектри W след прилагане на Следствие 2.4.17, множеството $W(n, M, \tau)$ трябва да бъде обхождано, докато алгоритъмът, приложен върху него, успява да премахва спектри от него. Ако се достигне до итерация, в която никой спектър от множеството $W(n, M, \tau)$ не може да бъде премахнат въз основа на Следствие 2.4.17, алгоритъмът приключва за съответната стъпка.

В резултат на гореописаните твърдения и конструкции, приложени върху даден ортогонален масив, отхвърляме неудовлетворяващите Теореми 2.4.8, 2.4.12 и 2.4.16 и следствията им двойки (W, W') като възможности за спектри на изследваните C и C' ортогонални масиви.

В противен случай, нека

$$(x_0^{(r)} = 0, x_1^{(r)}, \dots, x_n^{(r)}; y_0^{(r)}, y_1^{(r)}, \dots, y_{n-1}^{(r)}, y_n^{(r)} = 0),\ r = 1, \dots, s$$

са всички различни решения на система (2.3) от Теорема 2.4.2, които са останали след горните проверки за всевъзможните C', получени от C при премахване на някой негов стълб. Да означим с k_r броя на стълбове, които съответстват на r-тото решение на системата (2.3) за $r = 1, \dots, s$. Теорема 2.3.3 може да бъде обобщена върху множеството $W(n, M, \tau)$.

Теорема 2.4.18 *Нека $W \in W(n, M, \tau)$ е възможност за спектър на ортогонален масив с параметри (n, M, τ) и W' пробягва множеството $W(n-1, M, \tau)$. Ако системата линейни уравнения*

$$\left|\begin{array}{lllll} k_1 & +k_2 & +\dots & +k_s & = n \\ k_1 x_1^{(1)} & +k_2 x_1^{(2)} & +\dots & +k_s x_1^{(s)} & = w_1 \\ k_1 x_2^{(1)} & +k_2 x_2^{(2)} & +\dots & +k_s x_2^{(s)} & = 2w_2 \\ \vdots & & & & \\ k_1 x_n^{(1)} & +k_2 x_n^{(2)} & +\dots & +k_s x_n^{(s)} & = n w_n \\ k_r \in \mathbb{Z}, & k_r \geq 0, & r = 1, & \dots, s & \end{array}\right. . \tag{2.8}$$

спрямо неизвестните $k_1, k_2, \dots, k_s$ няма решение, тогава W следва да бъде отхвърлен като възможен спектър, т.е. $W \notin W(n, M, \tau)$.

Доказателство: В доказателството на Теорема 2.3.3 никъде не се използва, че точката c е вътрешна, т.е. тук можем да повторим разсъжденията от доказателството на Теорема 2.3.3 относно произволна точка $c \in H(n, 2)$. □

За да си представим как точно би изглеждал един ортогонален масив C, когато отрежем кой да е негов стълб и за пълнота на изложението, ще формулираме и следващото следствие.

Следствие 2.4.19 *Нека $r \in 1, 2, \dots, s$ е такова, че за всички решения на системата (2.8) получаваме $k_r = 0$. Тогава двойката (W, W'), която отговаря на r-тото решение, следва да бъде отхвърлена.*

Ако системата (2.8) има решение, то за двоичните ортогонални масиви с параметри (n, M, τ) и $(n-1, M, \tau)$ сме получили текущите множествата $W(n, M, \tau)$ и $W(n-1, M, \tau)$ от редуцираните им възможности за спектри. Останали са за изследване двойки (W, W'), като за всяка такава двойка са налице и съответните единствени решения X и Y на системата (2.3), т.е. при фиксиран спектър $W \in W(n, M, \tau)$ всяка двойка (W, W') ще се разглежда заедно с еднозначно генерираната от нея двойка

(X, Y). По-точно, за фиксиран спектър $W \in W(n, M, \tau)$ трябва да се разгледат всички останали за изследване еднозначно определени тройки (W', X, Y).

Въз основа на описаните в този параграф теореми и следствия е организиран (така нареченият от нас) основен алгоритъм (Algorithm 2) за редуциране на спектрите в множеството $W(n, M, \tau)$ за фиксиран двоичен ортогонален (n, M, τ) масив. За по-голяма яснота и пълнота на изложението първо е представен псевдокод на алгоритъма, а след това са указани въз основа на кои теореми или следствия е извършена всяка една проверка в този алгоритъм.

Algorithm 2 (Основен алгоритъм) – Алгоритъм за редуциране на множеството от спектри $W(n, M, \tau)$ на двоичен ортогонален (n, M, τ) масив:

---

procedure MDDA($W(n, M, \tau)$, $W(n-1, M, \tau)$, $W(n-1, M/2, \tau-1)$)
    Input: n, M, τ, $W(n, M, \tau)$, $W(n-1, M, \tau)$, $W(n-1, M/2, \tau-1)$
    filteredW $\leftarrow$ empty set
    for $W \in W(n, M, \tau)$ **do**
        if W in *filteredW* **then** continue with next W
        allXY $\leftarrow$ empty set
        for $W' \in W(n-1, M, \tau)$ **do**
            $X, Y \leftarrow$ solve system (2.3) for integer nonnegative solutions
            if $X, \overline{X} \in W(n-1, M/2, \tau-1)$ and $Y, \overline{Y} \in W(n-1, M/2, \tau-1)$ and $W^{1,0}, \overline{W^{1,0}} \in W(n, M, \tau)$ and $W^{1,0}, \overline{W^{1,0}} \notin filteredW$ **then**
                add X, Y to $allXY$
        if allXY is empty **then**
            add W and $\overline{W}$ to $filteredW$
        else
            if system (2.8) has no integer nonnegative solutions **then**
                add W and $\overline{W}$ to $filteredW$
    if $filteredW$ is nonempty **then**
        MDDA($W(n, M, \tau) \setminus filteredW$, $W(n-1, M, \tau)$, $W(n-1, M/2, \tau-1)$)
    else
        return $W(n, M, \tau)$
    Output: $W(n, M, \tau)$

В представения псевдокод се набляга както на схемата, по която се елиминират спектри, така и на принадлежащите към всеки евентуален спектър двойки (W, W'). Затова в псевдокода не е описано подробно получаването на първоначалните множества $W(n, M, \tau)$, $W(n-1, M, \tau)$ и $W(n-1, M/2, \tau-1)$. В действителност се започва с генерирането на съответните редици от спектри на ортогонални масиви посредством Теорема 1.4.1. По-точно, тъй като можем да забележим, че множеството $W(n, M, \tau)$ зависи пряко от множествата $W(n-1, M, \tau)$ и $W(n-1, M/2, \tau-1)$, естествено стигаме до заключението, че преди да започнем да разглеждаме основното множество $W(n, M, \tau)$, трябва да редуцираме възможните спектри в другите две множества. От своя страна за редуцирането на множеството $W(n-1, M, \tau)$ при $\tau < n-1$ трябва да разгледаме множествата $W(n-2, M, \tau)$ и $W(n-2, M/2, \tau-1)$, докато за редуцирането на $W(n-1, M/2, \tau-1)$ и $\tau < n$ са необходими множествата $W(n-2, M/2, \tau-1)$ и $W(n-2, M/4, \tau-2)$. Тези разсъждения могат да бъдат продължени докато достигнем до ортогонален масив със сила 1 и докато броят на стълбовете n е по-голям или равен на силата τ. В табличен вид са записани всички множества, от които пряко или непряко зависи множеството $W(n, M, \tau)$.

$W(n, M, \tau)$	$W(n-1, M, \tau)$	$\dots$	$W(\tau, M, \tau)$
$W(n-1, M/2, \tau-1)$	$W(n-2, M/2, \tau-1)$	$\dots$	$W(\tau-1, M/2, \tau-1)$
$W(n-2, M/4, \tau-2)$	$W(n-3, M/4, \tau-2)$	$\dots$	$W(\tau-2, M/4, \tau-2)$
$\vdots$			
$W(n-\tau+1, M/2^{\tau-1}, 1)$	$W(n-\tau, M/2^{\tau-1}, 1)$	$\dots$	$W(1, M/2^{\tau-1}, 1)$

Започваме да прилагаме алгоритъма от долу на горе, считано от последния и предпоследния редове, и от дясно на ляво, считано от последната и предпоследната колони. Така успяваме да постигнем оптимален резултат върху първоначално разглежданото множество $W(n, M, \tau)$.

До края на параграфа ще разгледаме отново псевдокода, с цел подробно да обосновем кои теореми и следствия са използвани и по какъв начин. В началото е въведено поле $filteredW$, което е множеството от всички текущо премахнати спектри $W \in W(n, M, \tau)$. Това множество може да нараства през целия алгоритъм. Благодарение на Следствие 2.4.5 на ред е направена проверка дали спектърът W не е бил вече отхвърлен, когато сме разглеждали неговото допълнение $\overline{W}$. Това ускорява алгоритъма значително, защото спестява конструирането на решението или решаването на съответните системи, както и проверката на останалите условия. Множеството $filteredW$ винаги се поддържа симетрично, защото всеки път, когато отхвърлим спектър W, отхвърляме и неговия противоположен $\overline{W}$. Това се случва на редове 12 и 15. В общия случай, отхвърляме по два различни спектъра, освен когато самият W не съвпада със своя противоположен.

На осми ред в псевдокода намираме възможните според Теорема 2.4.2 спектри W'. Разгледани са само тези W', за които система (2.3) има решение. На ред 9 използваме Следствия 2.4.15, 2.4.11 и 2.4.17, за да преценим дали разглежданата двойка (W, W') следва да бъде отхвърляна или не. В множеството $allXY$ се събират всички решения на система (2.3) за всички възможни двойки (W, W'). Ако няма възможни двойки, от Следствие 2.4.3 (ред 12), получаваме премахване на спектъра W. В противен случай, пресмятаме система (2.8) – и ако тя няма целочислено решение в неотрицателни числа, използваме Теорема 2.4.18, за да да отхвърлим W (ред 15).

Вече споменахме, че спектърът W зависи от спектрите в множеството $W(n, M, \tau)$ (Следствие 2.4.17). Затова се налага да се направи проверка върху стойността на множеството от филтрирани на тази стъпка спектри $filteredW$. Когато са били отхвърлени някои спектри и множеството е непразно, се налага да се повтори алгоритъмът с обновената съвкупност от елементи на множеството $W(n, M, \tau)$, т.е. когато от $W(n, M, \tau)$ са премахнати всички спектри от множеството $filteredW$. Алгоритъмът приключва, когато не могат да се отхвърлят за дадена стъпка никакви спектри.

Понеже множеството $W(n, M, \tau)$ е крайно, няма как да получим безкрайна рекурсия, извиквайки същата функция с обновените параметри.

Получените от нас резултати за несъществуване на някои двоични ортогонални масиви след прилагането на основния алгоритъм (Algorithm 2) са подробно описани в Параграф 2.8.

Параграф 2.4 е написан въз основа на публикация [17] като допълнително са намерени координатите на спектрите на получените производни масиви в хода на изследването на първоначално фиксираният двоичен (n, M, τ) ортогонален масив C.

2.5 Алгоритъм за редуциране на спектрите на ортогонални масиви чрез премахване на два стълба

В предишните параграфи разгледахме връзките между спектрите на ортогонални масиви с параметри (n, M, τ), $(n-1, M, \tau)$ и $(n-1, M/2, \tau-1)$. В Конструкция 2.3 показахме как един ортогонален $(n-1, M, \tau)$ масив се разделя на половина на два по-малки ортогонални масиви с по-ниска сила (C_0 и C_1, съответно). Съвсем естествено изниква въпроса при какви обстоятелства обединение на два ортогонални масива от сила $\tau-1$ е ортогонален масив, чиято сила е по-висока, в частност със сила τ. Знаем, че, един от начините е да се добавят нули пред точките на ортогоналния масив C_0 и единици пред точките на ортогоналния масив C_1 и тогава новообразуваният ортогонален масив ще има сила τ в $H(n, 2)$. Това е едната посока, в която в този параграф ще бъдат изследвани разглежданите ортогонални масиви.

От друга страна е доразвит методът от Параграф 2.4 като се изследва какви нови ограничения можем да получим при премахване на кои да са два стълба на дадения ортогонален масив C. В резултат е разработен обобщен алгоритъм за редуциране на броя на възможностите за спектри на изследваните ортогонални масиви.

Нека n, M, $\tau \geq 3$ и точката $c \in H(n, 2)$ са фиксирани, а основният алгоритъм (Algorithm 2) е приложен върху множеството от спектри $W(n, M, \tau)$. За фиксиран спектър от редуцираното множество $W \in W(n, M, \tau)$ вече са получени множеството от тройки (W', X, Y), които ще са обект на нашето изследване в този параграф. За целта се налага да се разгледат ортогоналните масиви с параметри $(n-1, M/2, \tau-1)$, като за стойности на $n > \tau - 1$, масивите C_0 и C_1 могат да бъдат разглеждани поотделно в ролята на първоначалния масив C.

Да припомним, че спектрите на ортогоналните масиви C_0 и C_1 спрямо точката $c' \in H(n-1, 2)$ са $Y = (y_0, y_1, \ldots, y_{n-1})$ и $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Те са елементи на множеството $W(n-1, M/2, \tau-1)$ и вече са намерени в явен вид съответно в Теорема 2.4.8 и Теорема 2.4.12. Сега нашата цел е да отрежем едновременно j-тия стълб в ортогоналните масиви C_0 и C_1 и да получим нови ограничения върху изследваните (тройки) спектри. На практика това е премахване на произволен втори стълб от ортогоналния масив C. Без ограничение на общността можем да приемем, че сме премахнали първия стълб на C_0 и C_1, т.е. $j = 1$, като получените $(n-2, M/2, \tau-1)$ ортогонални масиви означаваме съответно с C_0' и C_1'.

Нека $c'' \in H(n-2, 2)$ е точката, получена от c' при премахване на първата ѝ координата и да пренаредим редовете на ортогоналните масиви C_0 и C_1 така, че в първия им стълб да имат нули в първите си $M/4$ реда и единици в останалите $M/4$ реда. Да означим с $Y' = (y'_0, y'_1, \ldots, y'_{n-2})$ спектъра на ортогоналния масив C'_0 относно точката c'', а с $X' = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n-1})$ да означим спектъра на ортогоналния масив C'_1 относно същата точка c''. Да напомним, че основният алгоритъм се изпълнява върху редица от множества от спектри, т.е. множеството $W(n-2, M/2, \tau - 1)$, в което принадлежат новополучените спектри Y' и X', вече е било редуцирано.

Да разгледаме какъв е резултатът от отрязването на j-тия стълб от масивите C_0 и C_1 върху масивите C и C'. От една страна ортогоналните масиви C_0 и C_1 можем да ги разглеждаме като производни на C масиви. В този случай се получава нов ортогонален масив с $n-2$ стълба, M реда и сила τ, който ще означаваме с C'', а неговия спектър относно точката $c'' \in H(n-2, 2)$ ще бележим с $W'' = (w''_0, w''_1, \ldots, w''_{n-2}) \in W(n-2, M, \tau)$. Конструкцията е еквивалентна на това да премахнем кои да са два стълба (например, първите два стълба) от изходния ортогонален масив C. От друга страна масивът C' е обединение на C_0 и C_1 и тогава може да се приеме, че Конструкция 2.3 е приложена върху него, т.е. отрязан е първият стълб на C'. Това ни позволява да приложим голяма част от теоремите, формулирани в предишния параграф върху ортогоналния масив C'. От Теорема 2.4.4, приложена за спектрите на ортогоналния масив C'', получаваме, че са в сила следните твърдения.

Следствие 2.5.1 *Ако $W'' = (w''_0, w''_1, \ldots, w''_{n-2}) \in W(n-2, M, \tau)$, т.е. е спектър на C'' относно точката c'', то $\overline{W''} = (w''_{n-2}, w''_{n-3}, \ldots, w''_0) \in W(n-2, M, \tau)$ като спектър на $\overline{C''}$ относно същата точка c''.*

Следствие 2.5.2 *Ако възможният спектър W'' е такъв, че $\overline{W''} \notin W(n-2, M, \tau)$, то W'' следва да бъде отхвърлен, т.е. $W'' \notin W(n-2, M, \tau)$.*

Да отбележим още, че ако към получения ортогонален масив C'' прибавим първи стълб с нули пред редовете, получени от C_0 и единици пред редовете дошли от C_1, т.е. все едно в изходния масив C, е отрязан само вторият стълб, то се получава ортогонален масив със същите параметри $(n-1, M, \tau)$. Върху този новополучен масив може да се приложи Следствие 2.4.5. Аналогично, ако към получения масив C'' прибавим първи стълб с единици пред редовете, получени от C_0, и нули пред редовете от C_1. т.е. все едно в ортогоналния масив $C^{1,0}$ е премахнат вторият стълб, отново се получава ортогонален масив с параметри $(n-1, M, \tau)$ и за него също е в сила Следствие 2.4.5.

Нека сега опишем какви производни ортогонални масиви се получават от ортогоналния (n, M, τ) масив C при премахване на кои да са два негови стълба (първо ℓ-ти стълб както бе описано в Параграф 2.4 и след това произволен j-ти стълб).

За целта, при фиксиран спектър $W \in W(n, M, \tau)$ ще изследваме съответното получено от него множество от тройки спектри (W', X, Y). При премахването на първия стълб на C_0 ако в по-горе описания начин предварително са подредени елементите в този стълб, получаваме нови два ортогонални масива. Получените ортогонални масиви с параметри $(n-2, M/4, \tau-2)$ ще означаваме с A_0 и A_1, а техните спектри спрямо точката c'' ще означаваме съответно с $R = (r_0, r_1, \ldots, r_{n-2})$ и $Z = (z_1, z_2, \ldots, z_{n-1})$, съгласувайки означения със Теорема 2.4.2. Аналогично, получените от C_1 ортогонални масиви с параметри $(n-2, M/4, \tau-2)$ ще означаваме с B_0 и B_1, а спектрите им относно точката c'' - съответно с $U = (u_0, u_1, \dots, u_{n-2})$ и $V = (v_1, v_2, \dots, v_{n-1})$. Конструкцията с премахване на един стълб от C_0 и C_1, както и новополучените ортогонални масиви са илюстрирани на Конструкция 2.5 (Фигура 1).

$$\overbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}^{C' - (n-1, M, \tau),\ W'}$$

$$\overbrace{\qquad\qquad\qquad}^{C'' - (n-2, M, \tau),\ W''}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c}
\hline
0 & 0 & & \\
0 & \vdots & R = (r_0, r_1, \dots, r_{n-2}) & \\
\vdots & 0 & A_0 - (n-2, M/4, \tau-2) & C_0,\ C_0' \\
\cline{2-3}
\vdots & 1 & & Y,\ Y' \\
0 & \vdots & Z = (z_1, z_2, \dots, z_{n-1}) & \\
0 & 1 & A_1 - (n-2, M/4, \tau-2) & \\
\hline
1 & 0 & & \\
1 & \vdots & U = (u_0, u_1, \dots, u_{n-2}) & \\
\vdots & 0 & B_0 - (n-2, M/4, \tau-2) & C_1,\ C_1' \\
\cline{2-3}
\vdots & 1 & & X,\ X' \\
1 & \vdots & V = (v_1, v_2, \dots, v_{n-1}) & \\
1 & 1 & B_1 - (n-2, M/4, \tau-2) & \\
\hline
\end{array}$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{C - (n, M, \tau),\ W}$$

Конструкция 2.5 (Фигура 1).

В контекста на описаните и илюстрирани в Конструкция 2.5 (Фигура 1) означения, получаваме валидността на следните аналози на Теорема 2.4.2.

Теорема 2.5.3 *В означенията на Конструкция 2.5 (Фигура 1) са в сила следните твърдения:*

(a) Системата линейни уравнения

$$\left| \begin{array}{l} z_i + r_i = y_i,\ i = 1, 2, \dots, n-2 \\ z_{i+1} + r_i = y_i',\ i = 0, 1, \dots, n-2 \\ r_0 = y_0 \\ z_{n-1} = y_{n-1} \\ z_i, r_i \in \mathbb{Z},\ z_i \geq 0,\ r_i \geq 0,\ i = 0, \dots, n-1 \end{array} \right. , \tag{2.9}$$

с неизвестни $Z = (z_1, z_2, \dots, z_{n-1})$ и $R = (r_0, r_1, \dots, r_{n-2})$ има единствено решение от вида

$$Z = (y_0' - y_0, \sum_{j=0}^{1}(y_j' - y_j), \dots, \sum_{j=0}^{n-3}(y_j' - y_j), y_{n-1}),$$

$$R = (y_0, y_1 - (y'_0 - y_0), y_2 - \sum_{j=0}^{1}(y'_j - y_j), \ldots, y_{n-2} - \sum_{j=0}^{n-3}(y'_j - y_j)).$$

(б) Системата линейни уравнения

$$\left| \begin{array}{l} v_i + u_i = x_{i+1},\ i = 1, 2, \ldots, n-2 \\ v_{i+1} + u_i = x'_{i+1},\ i = 0, 1, \ldots, n-2 \\ u_0 = x_1 \\ v_{n-1} = x_n \\ v_i, u_i \in \mathbb{Z},\ v_i \geq 0,\ u_i \geq 0,\ i = 0, \ldots, n-1 \end{array} \right. . \tag{2.10}$$

с неизвестни $V = (v_1, v_2, \ldots, v_{n-1})$ *и* $U = (u_0, u_1, \ldots, u_{n-2})$ *има единствено решение от вида*

$$V = (x'_1 - x_1, \sum_{j=1}^{2}(x'_j - x_j), \ldots, \sum_{j=1}^{n-2}(x'_j - x_j), x_n),$$

$$U = (x_1, x_2 - (x'_1 - x_1), x_3 - \sum_{j=1}^{2}(x'_j - x_j), \ldots, x_{n-1} - \sum_{j=1}^{n-2}(x'_j - x_j)).$$

Доказателство: Да разгледаме масивите C'_0 и C_0 в ролята на C' и C в Конструкция 2.3. Върху тях прилагането на Теорема 2.4.2 отговаря точно на системата линейни уравнения (2.9). Аналогично, можем да разглеждаме двойката ортогонални масиви C'_1 и C_1 в ролята на C' и C и отново прилагайки Теорема 2.4.2 за тях получаваме системата линейни уравнения (2.10). Накрая, единственото решение на всяка от двете системи получаваме като заместим елементи на векторите X и Y в Теорема 2.4.2 и елементите на спектрите X' и Y', съответно в ролите на W и W'. □

Системата (2.9) може да бъде записана и в следния еквивалентен векторен вариант относно неизвестните вектори Z и R:

$$\left| \begin{array}{l} Z + R = Y' \\ (0, Z) + (R, 0) = Y \end{array} \right. . \tag{2.11}$$

Аналогично, системата (2.10) може да бъде записана и в следния еквивалентен векторен вариант относно неизвестните вектори V и U:

$$\left| \begin{array}{l} V + U = X' \\ (0, V) + (U, 0) = X \end{array} \right. . \tag{2.12}$$

Следствие 2.5.4 *Ако при фиксиран спектър $W \in W(n, M, \tau)$ системата (2.9) или системата (2.10) няма решение за нито една тройка (W', X, Y), то елементът $W \in W(n, M, \tau)$ следва да бъде отхвърлен, т.е. $W \notin W(n, M, \tau)$.*

Следващата теорема е логично продължение на получаване на ограничения върху спектрите на изследваните масиви. Нека да разгледаме двойките ортогонални масиви (C'_0, C_0) и (C'_1, C_1) като част от Конструкция 2.5 (Фигура 1).

Теорема 2.5.5 *Ортогоналните масиви A_0, A_1, B_0 и B_1 в Конструкция 2.5 (Фигура 1) са с параметри $(n-2, M/4, \tau-2)$, т.е. спектрите им R, Z, U и V, относно точката $c'' \in H(n-2,2)$, са елементи на множеството $W(n-2, M/4, \tau-2)$ и всеки от тях има следното еднозначно представяне:*

$$\begin{aligned}
R &= (r_0, r_1, \dots, r_{n-2}) \\
&= (y_0, y_1 - (y'_0 - y_0), y_2 - \sum_{j=0}^{1}(y'_j - y_j), \dots, y_{n-2} - \sum_{j=0}^{n-3}(y'_j - y_j)) \\
&= (y_0, \sum_{j=0}^{n-3}(y'_{n-2-j} - y_{n-1-j}), \dots, \sum_{j=0}^{1}(y'_{n-2-j} - y_{n-1-j}), y'_{n-2} - y_{n-1});
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z &= (z_1, z_2, \dots, z_{n-1}) \\
&= (y'_0 - y_0, \sum_{j=0}^{1}(y'_j - y_j), \dots, \sum_{j=0}^{n-3}(y'_j - y_j), y_{n-1}) \\
&= (y_1 - \sum_{j=0}^{n-3}(y'_{n-2-j} - y_{n-1-j}), \dots, y_{n-2} - (y'_{n-2} - y_{n-1}), y_{n-1});
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U &= (u_0, u_1, \dots, u_{n-2}) \\
&= (x_1, x_2 - (x'_1 - x_1), x_3 - \sum_{j=1}^{2}(x'_j - x_j), \dots, x_{n-1} - \sum_{j=1}^{n-2}(x'_j - x_j)) \\
&= (x_1, \sum_{j=0}^{n-3}(x'_{n-1-j} - x_{n-j}), \dots, \sum_{j=0}^{1}(x'_{n-1-j} - x_{n-j}), x'_{n-1} - x_n);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V &= (v_1, v_2, \dots, v_{n-1}) \\
&= (x'_1 - x_1, \sum_{j=1}^{2}(x'_j - x_j), \dots, \sum_{j=1}^{n-2}(x'_j - x_j), x_n) \\
&= (x_2 - \sum_{j=0}^{n-3}(x'_{n-1-j} - x_{n-j}), \dots, x_{n-1} - (x'_{n-1} - x_n), x_n).
\end{aligned}$$

Доказателство: От свойствата на ортогоналните масиви и начина на получаване на масивите A_0, A_1, B_0 и B_1 е ясно, че те са ортогонални масиви с параметри $(n-2, M/4, \tau-2)$, т.е. спектрите им са елементи на множеството $W(n-2, M/4, \tau-2)$. В Теорема 2.5.3 получихме координатите на векторите R, Z, U, V, както и че тези вектори са спектрите съответно на производните ортогонални масиви A_0, A_1, B_0 и B_1, получени в Конструкция 2.5 (Фигура 1). Еквивалентните представяния на векторите R, Z, U и V получаваме като използваме аналогични разсъждения на тези от доказателството на Теорема 2.4.8. □

Забележка 2.5.6 *Да отбележим, че ако W е фиксиран спектър на изходния ортогонален масив C и са получени от него еднозначно определените спектри W' и W'' на ортогоналните масиви C' и C'', съответно в резултат на отрязване от C на един и два стълба, то спектрите R, Z, U, V на ортогоналните масиви A_0, A_1, B_0 и B_1 могат да се изразят директно само чрез координатите на векторите W, W' и W''. Това обаче е изпуснато в този параграф, тъй като по-надолу тези разсъждения се продължават с изследване на спектрите на още производни ортогонални масиви, получени от ортогоналните масиви C_0 и C_1 (идващи от масива C) като съответните означения на спектрите все повече се усложняват. Затова предпочетохме да описваме стъпка по стъпка как еднозначно се изразяват новополучените спектри чрез предходно получените такива, което води както до по-ясно изложение, така и до по-добра представа за метода на получаване на съответните ограничения върху спектрите на изследваните ортогонални масиви.*

Теорема 2.5.5 предоставя първото ново необходимо условие една тройка (W', X, Y) да бъде възможна тройка, получена от решенията на системата (2.3) за фиксиран спектър W на изходния ортогонален масив. Да напомним, че като намерим ограничение върху спектъра на даден ортогонален масив (например A_0) имаме получено и ограничение върху спектъра на така наречения допълнителен му масив (т.е. върху ортогоналния масив $\overline{A_0}$).

Следствие 2.5.7 *Ако някой от спектрите R, Z, U, V, $\overline{R}$, $\overline{Z}$, $\overline{U}$, $\overline{V}$ не принадлежи на множеството $W(n-2, M/4, \tau-2)$, то за фиксиран спектър $W \in W(n, M, \tau)$ тройката (W', X, Y), от която те са получени, следва да бъде отхвърлена.*

Доказателство: Прилагаме Теореми 2.4.8, 2.4.9, 2.4.12 и 2.4.13 за масивите A_0, A_1, B_0, B_1, $\overline{A_0}$, $\overline{A_1}$, $\overline{B_0}$ и $\overline{B_1}$, съответно. □

Нека (W', X, Y) е фиксирана възможна тройка за Конструкция 2.4. На всяка такава тройка да сме съпоставили множеството от възможни четворки (R, Z, U, V), съгласно Конструкция 2.5 (Фигура 1). По-долу са намерени нови допълнителни условия, на които трябва да отговаря една такава четворка, за да бъде тя възможна четворка, получена от изходния ортогонален масив C.

Да припомним, че от Свойство 5 на двоичните ортогонални масиви след пермутация на елементите 0 и 1 във фиксиран стълб на един ортогонален масив C, получихме ортогоналния масив $C^{1,0}$ със същите параметри. Разглеждайки масивите C_0 и C_1, по аналогичен начин, от тях можем да получим ортогоналните масиви $C_0^{1,0}$ и $C_1^{1,0}$ след пермутация на елементите 0 и 1 в първия стълб. Нещо повече, при така извършената пермутация е ясно, че от масива C' получаваме и съответен $(n-1, M, \tau)$ ортогонален масив $C'^{1,0}$.

Описаните ортогонални масиви, както и съответните получени производни от тях масиви са илюстрирани в Конструкция 2.5 (Фигура 2).

$\overbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}^{C' - (n-1, M, \tau),\ \ W'}$

$\overbrace{\qquad\qquad\qquad}^{C'' - (n-2, M, \tau),\ \ W''}$

0	0		
0	$\vdots$	$R = (r_0, r_1, \ldots, r_{n-2})$	
$\vdots$	0	$A_0 - (n-2, M/4, \tau - 2)$	$C_0,\ C_0'$
$\vdots$	1		$Y,\ Y'$
0	$\vdots$	$Z = (z_1, z_2, \ldots, z_{n-1})$	
0	1	$A_1 - (n-2, M/4, \tau - 2)$	
1	0		
1	$\vdots$	$U = (u_0, u_1, \ldots, u_{n-2})$	
$\vdots$	0	$B_0 - (n-2, M/4, \tau - 2)$	$C_1,\ C_1'$
$\vdots$	1		$X,\ X'$
1	$\vdots$	$V = (v_1, v_2, \ldots, v_{n-1})$	
1	1	$B_1 - (n-2, M/4, \tau - 2)$	

$\overbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}^{C'^{1,0} - (n-1, M, \tau),\ \ W'^{1,0}}$

$\overbrace{\qquad\qquad\qquad}^{C'',\ \ W''}$

0	1		
0	$\vdots$	$R = (r_0, r_1, \ldots, r_{n-2})$	
$\vdots$	1	$A_0 - (n-2, M/4, \tau - 2)$	$C_0^{1,0},\ C_0'$
$\vdots$	0		$Y^{1,0},\ Y'$
0	$\vdots$	$Z = (z_1, z_2, \ldots, z_{n-1})$	
0	0	$A_1 - (n-2, M/4, \tau - 2)$	
1	1		
1	$\vdots$	$U = (u_0, u_1, \ldots, u_{n-2})$	
$\vdots$	1	$B_0 - (n-2, M/4, \tau - 2)$	$C_1^{1,0},\ C_1'$
$\vdots$	0		$X^{1,0},\ X'$
1	$\vdots$	$V = (v_1, v_2, \ldots, v_{n-1})$	
1	0	$B_1 - (n-2, M/4, \tau - 2)$	

Конструкция 2.5 (Фигура 2).

За ортогоналните масиви $C_0^{1,0}$ и $C_1^{1,0}$ е в сила следното твърдение.

Теорема 2.5.8 *Ортогоналните масиви $C_0{}^{1,0}$ и $C_1{}^{1,0}$ са с параметри $(n-1, M/2, \tau - 1)$, т.е. спектрите им $Y^{1,0}$ и $X^{1,0}$, относно точката $c' \in H(n-1, 2)$, са елементи на множеството $W(n-1, M/2, \tau - 1)$ и всеки от тях има следното еднозначно представяне:*

$$\begin{aligned} Y^{1,0} &= (y_0^{1,0}, y_1^{1,0}, \ldots, y_{n-1}^{1,0}) = (z_1, z_2 + r_0, \ldots, z_{n-1} + r_{n-3}, r_{n-2}) \\ &= (y_0' - y_0, y_0' + y_1' - y_1, y_1' + y_2' - y_2, \ldots, y_{n-3}' + y_{n-2}' - y_{n-2}, y_{n-2}' - y_{n-1}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X^{1,0} &= (x_1^{1,0}, x_2^{1,0}, \ldots, x_n^{1,0}) = (v_1, v_2 + u_0, \ldots, v_{n-1} + u_{n-3}, u_{n-2}) \\ &= (x_1' - x_1, x_1' + x_2' - x_2, x_2' + x_3' - x_3, \ldots, x_{n-2}' + x_{n-1}' - x_{n-1}, x_{n-1}' - x_n). \end{aligned}$$

Доказателство: Прилагаме Теорема 2.4.16 първо за спектрите на двойката ортогонални масиви C_0 и $C_0^{1,0}$ и достигаме до вида на спектъра $Y^{1,0}$. Аналогично, прилагаме Теорема 2.4.16 върху спектрите на двойката масиви C_1 и $C_1^{1,0}$ със спектри X и $X^{1,0}$, съответно. След заместване на съответните координати на векторите R, Z, U и V от Теорема 2.5.5 и преобразувания се получават точно координатите на векторите $Y^{1,0}$ и $X^{1,0}$, с което теоремата е доказана. □

Следствие 2.5.9 *Ако някой от възможностите за спектри $Y^{1,0}$, $X^{1,0}$, $\overline{Y^{1,0}}$, $\overline{X^{1,0}} \notin W(n-1, M/2, \tau - 1)$, и са резултат от фиксиран спектър $W \in W(n, M, \tau)$ и получената от него тройка спектри (W', X, Y), то четворката възможности за спектри (R, Z, U, V), получена от тях, следва да бъде отхвърлена.*

Доказателство: Прилагаме Теореми 2.4.8, 2.4.9, 2.4.12 и 2.4.13 за ортогоналните масиви $C_0^{1,0}$, $\overline{C_0^{1,0}}$ и $C_1^{1,0}$, $\overline{C_1^{1,0}}$, съответно. □

Да напомним, че от Теорема 2.4.2 знаем вида на спектъра на ортогоналния масив C' относно точката c', в който (съгласно Теорема 2.5.3) след като заместим координати на векторите $X = (U,0) + (0,V)$ и $Y = (R,0) + (0,Z)$ получаваме

$$\begin{aligned} W' &= (w'_0, w'_1, \ldots, w'_{n-1}) = (y_0 + x_1, y_1 + x_2, y_2 + x_3, \ldots, y_{n-2} + x_{n-1}, y_{n-1} + x_n) \\ &= (r_0 + u_0, r_1 + z_1 + u_1 + v_1, \ldots, r_{n-2} + z_{n-2} + u_{n-2} + v_{n-2}, z_{n-1} + v_{n-1}). \end{aligned}$$

Тогава за спектърът $W'^{1,0}$ на $(n-1, M, \tau)$ ортогоналния масив $C'^{1,0}$ е в сила следното твърдение.

Теорема 2.5.10 *Спектърът $W'^{1,0}$ на $(n-1, M, \tau)$ ортогоналния масив $C'^{1,0}$, относно точката $c' \in H(n-1,2)$, е елемент на множеството $W(n-1, M, \tau)$ и има следното еднозначно представяне:*

$$\begin{aligned} W'^{1,0} &= (w'^{1,0}_0, w'^{1,0}_1, \ldots, w'^{1,0}_{n-1}) = (y^{1,0}_0 + x^{1,0}_1, y^{1,0}_1 + x^{1,0}_2, \ldots, y^{1,0}_{n-2} + x^{1,0}_{n-1}, y^{1,0}_{n-1} + x^{1,0}_n) \\ &= (z_1 + v_1, r_0 + u_0 + z_2 + v_2, \ldots, r_{n-3} + u_{n-3} + z_{n-1} + v_{n-1}, r_{n-2} + u_{n-2}) \\ &= (y'_0 - y_0 + x'_1 - x_1, y'_1 - y_1 + y'_0 + x'_2 - x_2 + x'_1, \ldots, y'_{n-2} - y_{n-1} + x'_{n-1} - x_n). \end{aligned}$$

Доказателство: Прилагаме аналози на Теорема 2.4.2 и Теорема 2.4.16 за спектрите на двойката ортогонални масиви C' и $C'^{1,0}$ за да достигнем до вида на спектъра $W'^{1,0}$. След заместване на координатите на векторите X и Y от Теорема 2.5.3 се получават координатите на вектора $W'^{1,0}$ изразени чрез координатите на векторите R, Z, U и V. Сега като заместим координатите на последните четири вектора от Теорема 2.5.5 се получава точно представянето на вектора $W'^{1,0}$. □

Следствие 2.5.11 *Ако някой от възможностите за спектри $W'^{1,0}$, $\overline{W'^{1,0}} \notin W(n-1, M, \tau)$, и са резултат от фиксиран спектър $W \in W(n, M, \tau)$ и получената от него тройка спектри (W', X, Y), то тройката възможности за спектри (W', X, Y) следва да бъде отхвърлена.*

За пълнота на изложението да отбележим, че имаме спектрите Y' и X' на ортогоналните масиви C'_0 и C'_1, разгледани съответно като обединение на масивите A_0, A_1 и B_0, B_1, т.е. можем да ги изразим чрез спектрите на тези масиви.

Теорема 2.5.12 *Спектрите $Y' = (y'_0, y'_1, \ldots, y'_{n-2})$ и $X' = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n-1})$ на ортогоналните масиви C'_0 и C'_1 удовлетворяват следната система линейни уравнения*

$$\left| \begin{array}{l} r_i + z_{i+1} = y'_i, \ i = 0, 1, \ldots, n-2 \\ u_i + v_{i+1} = x'_{i+1}, \ i = 0, 1, \ldots, n-2 \\ r_i, u_i \in \mathbb{Z}, \ r_i \geq 0, \ u_i \geq 0, \ i = 0, \ldots, n-2 \\ z_i, v_i \in \mathbb{Z}, \ z_i \geq 0, \ v_i \geq 0, \ i = 1, \ldots, n-1 \end{array} \right. , \qquad (2.13)$$

т.е. за техните координати са в сила следните еднозначни представяния:

$$Y' = (y'_0, y'_1, \ldots, y'_{n-2}) = (r_0 + z_1, r_1 + z_2, \ldots, r_{n-2} + z_{n-1}),$$

$$X' = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n-1}) = (u_0 + v_1, u_1 + v_2, \ldots, u_{n-2} + v_{n-1}).$$

Доказателство: Ортогоналният масив C'_0 е множеството от редовете на масива A_0 заедно с множеството от редовете на масива A_1. Тогава спрямо c'' за спектъра на ортогоналния масив C'_0 са в сила равенствата $r_i + z_{i+1} = y'_i,\ i = 0, 1, \ldots, n-2$. С аналогични съображения, ортогоналният масив C'_1 се получава от множеството от редовете на масива B_0 и множеството от редовете на масива B_1, откъдето получаваме, че са в сила равенствата $u_i + v_{i+1} = x'_{i+1},\ i = 0, 1, \ldots, n-2$. □

Следствие 2.5.13 *Ако някой от спектрите Y', X', $\overline{Y'}$, $\overline{X'} \notin W(n-2, M/2, \tau-1)$, то четворката от възможности за спектри (R, Z, U, V), от която те се получават, следва да бъде отхвърлена.*

Да отбележим, че отсяванията по Следствие 2.5.11 и Следствие 2.5.13 вече са направени в основния алгоритъм, тъй като алгоритмите се прилагат върху съответните редици от множества от спектри, но съответните еднозначни представяния на спектрите на тези ортогонални масиви се използват в нашите анализи върху спектрите на някои производни ортогонални масиви, получени и изследвани по-надолу.

Да разгледаме отново първоначалния ортогонален (n, M, τ) масив C, който относно произволно фиксирана точка $c \in H(n, 2)$ има спектър W. Нека в масива C да пренаредим първо втория му стълб, което от своя страна е да пренаредим първия стълб на ортогоналния масив C', както е показано в Конструкция 2.5 (Фигура 3) по-долу. При отрязването на втория стълб на ортогоналния масив C се получава нов ортогонален $(n-1, M, \tau)$ масив, изоморфен на масива C'. За удобство и за да различаваме този ортогонален масив от масива C', въвеждаме следните уточняващи означения.

Ще означаваме с $C'_{\ell=s}$, за $s = 1, \ldots, n$, ортогоналния $(n-1, M, \tau)$ масив, който се получава от масива C при премахване на s-тия му стълб, а точката съответно получена от точката $c \in H(n, 2)$ при премахване на нейната s-та координата ще означаваме с $c'_{\ell=s} \in H(n-1, 2)$, за $s = 1, \ldots, n$. Ще означаваме още с $W'_{\ell=s}$, за $s = 1, \ldots, n$, спектъра на ортогоналния масив $C'_{\ell=s}$ относно точката $c'_{\ell=s}$.

В така въведените означения дотук в този параграф сме изследвали спектрите на редица производни масиви, получени от ортогоналния (n, M, τ) масив C при отрязването му на първия стълб, т. е. полученият ортогонален $(n-1, M, \tau)$ масив $C' = C'_{\ell=1}$, в който отново е отрязан първият стълб (т.е. вторият стълб на изходния масив C) и е получен ортогонален $(n-2, M, \tau)$ масив C'', съгласно Конструкция 2.5 (Фигура 1 и Фигура 2).

Да разгледаме сега аналогична конструкция с премахване последователно на два стълба от ортогоналния масив C, като този път първо премахваме втория му стълб и получаваме ортогоналния $(n-1, M, \tau)$ масив $C'_{\ell=2}$, а след това премахваме и изходния първи стълб на масива C, който в случая се явява първи стълб и за ортогоналния масив $C'_{\ell=2}$. Ясно е, че достигаме отново до същия $(n-2, M, \tau)$ ортогонален масив C''.

Лесно се забелязва, че масивите с параметри $(n-1, M/2, \tau-1)$, които се получават чрез Конструкция 2.4 от двойката масиви C и $C'_{\ell=2}$, са различни от изследваните по-горе ортогонални масиви C_0 и C_1, получени от двойката C и $C' = C'_{\ell=1}$. Да означим новополучените от двойката C и $C'_{\ell=2}$ съответни $(n-1, M/2, \tau-1)$ ортогонални масиви с D_0 и D_1, а техните спектрите относно точката $c'_{\ell=2} \in H(n-1,2)$ да означим съответно с $G = (g_0, g_1, \ldots, g_{n-1})$ и $H = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$.

Сега да премахнем изходния първи стълб на ортогоналния масив C, който както вече отбелязахме е всъщност първи стълб за ортогоналния $(n-1, M, \tau)$ масив $C'_{\ell=2}$ и достигаме отново до вече разглежданият ортогонален масив C''. Тогава чрез Конструкция 2.4 ортогоналният масив D_0 се разбива на два ортогонални масива с параметри $(n-2, M/4, \tau-2)$, които са точно ортогоналните масиви A_0 и B_0. Аналогично, от ортогоналния масив D_1 се получават други два ортогонални масива с параметри $(n-2, M/4, \tau-2)$, а именно ортогоналните масиви A_1 и B_1. Всички производни ортогонални масиви, получени от масивите C и $C'_{\ell=2}$, са илюстрирани в Конструкция 2.5 (Фигура 3).

От свойствата на двоичните ортогонални масиви след пермутация на елементите 0 и 1 във фиксиран стълб на един ортогонален масив C получихме, изоморфен на него ортогонален масив $C^{1,0}$. Разглеждайки масивите D_0 и D_1 по аналогичен начин от тях можем да получим ортогоналните масиви $D_0^{1,0}$ и $D_1^{1,0}$ и да означим спектрите им относно точката $c'_{\ell=2}$ съответно с $H^{1,0}$ и $G^{1,0}$. Тези ортогонални масиви, както и съответните производни от тях ортогонални масиви за по-голяма яснота отново са илюстрирани в Конструкция 2.5 (Фигура 3).

$C'_{\ell=2} - (n-1, M, \tau)$, $W'_{\ell=2}$

$C'' - (n-2, M, \tau)$, W''

0	0		
$\vdots$	0	$R = (r_0, r_1, \ldots, r_{n-2})$	
0	$\vdots$	$A_0 - (n-2, M/4, \tau-2)$	D_0, D'_0
1	$\vdots$		G, G'
$\vdots$	0	$U = (u_0, u_1, \ldots, u_{n-2})$	
1	0	$B_0 - (n-2, M/4, \tau-2)$	
0	1		
$\vdots$	1	$Z = (z_1, z_2, \ldots, z_{n-1})$	
0	$\vdots$	$A_1 - (n-2, M/4, \tau-2)$	D_1, D'_1
1	$\vdots$		H, H'
$\vdots$	1	$V = (v_1, v_2, \ldots, v_{n-1})$	
1	1	$B_1 - (n-2, M/4, \tau-2)$	

$C - (n, M, \tau)$, W

$C'^{1,0}_{\ell=2}$, $W'^{1,0}_{\ell=2}$

C'', W''

1	0		
$\vdots$	0	$R = (r_0, r_1, \ldots, r_{n-2})$	
1	$\vdots$	$A_0 - (n-2, M/4, \tau-2)$	$D_0^{1,0}$, D'_0
0	$\vdots$		$G^{1,0}$, G'
$\vdots$	0	$U = (u_0, u_1, \ldots, u_{n-2})$	
0	0	$B_0 - (n-2, M/4, \tau-2)$	
1	1		
$\vdots$	1	$Z = (z_1, z_2, \ldots, z_{n-1})$	
1	$\vdots$	$A_1 - (n-2, M/4, \tau-2)$	$D_1{}^{1,0}$, D'_1
0	$\vdots$		$H^{1,0}$, H'
$\vdots$	1	$V = (v_1, v_2, \ldots, v_{n-1})$	
0	1	$B_1 - (n-2, M/4, \tau-2)$	

$C^{1,0}_{\ell=2} - (n, M, \tau)$, $W^{1,0}_{\ell=2}$

Конструкция 2.5 (Фигура 3).

Нека сега се върнем към първоначалното за Параграф 2.5 множество от тройки спектри (W', X, Y) за всеки фиксиран спектър $W \in W(n, M, \tau)$ на ортогоналния масив C относно точката c. Нека сме направили всички възможни отсявания в множество от тройки спектри (W', X, Y) за фиксиран спектър W до разглеждането на Конструкция 2.5 (Фигура 2), включително. По този начин към момента за всяка неотсята тройка (W', X, Y) имаме определени всевъзможните четворки спектри (R, Z, U, V). Като вземем под внимание начина на образуване на всички производни ортогонални масиви от Конструкция 2.5 (Фигура 3), както и аналогичния път на получаването им спрямо Конструкция 2.5 (Фигура 2), достигаме до верността на следващите няколко твърдения, в които са получени еднозначни представяния на спектрите на получените производни ортогонални масиви.

Теорема 2.5.14 *Спектрите G и H на ортогоналните масиви D_0 и D_1, относно точката $c'_{\ell=2} \in H(n-1, 2)$, са елементи на множеството $W(n-1, M/2, \tau - 1)$. Те удовлетворяват следната (във векторен вариант) система линейни уравнения:*

$$\left| \begin{array}{l} G + H = W'_{\ell=2} \\ (G, 0) + (0, H) = W \end{array} \right. \tag{2.14}$$

и за тях са в сила следните еднозначни представяния:

$$\begin{aligned} G &= (g_0, g_1, \dots, g_{n-1}) \\ &= (w_0, w_1 - (w'_{\ell=2,0} - w_0), w_2 - \sum_{j=0}^{1}(w'_{\ell=2,j} - w_j), \dots, w_{n-1} - \sum_{j=0}^{n-2}(w'_{\ell=2,j} - w_j)) \\ &= (w_0, \sum_{j=0}^{n-2}(w'_{\ell=2,n-1-j} - w_{n-j}), \dots, \sum_{j=0}^{1}(w'_{\ell=2,n-1-j} - w_{n-j}), w'_{\ell=2,n-1} - w_n), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H &= (h_1, h_2, \dots, h_n) \\ &= (w'_{\ell=2,0} - w_0, \sum_{j=0}^{1}(w'_{\ell=2,j} - w_j), \dots, \sum_{j=0}^{n-2}(w'_{\ell=2,j} - w_j), w_n) \\ &= (w_1 - \sum_{j=0}^{n-2}(w'_{\ell=2,n-1-j} - w_{n-j}), \dots, w_{n-1} - (w'_{\ell=2,n-1} - w_n), w_n). \end{aligned}$$

Доказателство: От свойствата на ортогоналните масиви и начина на получаване на масивите D_0 и D_1 е ясно, че те са $(n-1, M/2, \tau-1)$ ортогонални масиви, т.е. относно точката $c'_{\ell=2}$ спектрите им G, $H \in W(n-1, M/2, \tau - 1)$. Еднозначните представяния на спектрите G и H са резултат от прилагането на аналог на Теорема 2.4.8 и Теорема 2.4.12 за спектрите съответно на ортогоналните масиви C, $C'_{\ell=2}$ и C''. □

За спектърът $W^{1,0}_{\ell=2}$ на ортогоналния масив $C^{1,0}_{\ell=2}$ е в сила следното твърдение.

Теорема 2.5.15 *Спектърът $W^{1,0}_{\ell=2}$ на (n, M, τ) ортогоналния масив $C^{1,0}_{\ell=2}$, относно точката c, е елемент на множеството $W(n, M, \tau)$ и има следното еднозначно представяне:*

$$\begin{aligned} W^{1,0}_{\ell=2} &= (h_1, h_2 + g_0, \dots, h_n + g_{n-2}, g_{n-1}) = (w'_{\ell=2,0} - w_0, \\ &\quad w'_{\ell=2,0} + w'_{\ell=2,1} - w_1, \dots, w'_{\ell=2,n-2} + w'_{\ell=2,n-1} - w_{n-1}, w'_{\ell=2,n-1} - w_n), \end{aligned}$$

Доказателство: Прилагаме Теорема 2.4.16 за спектрите на двойката ортогонални масиви C и $C^{1,0}_{\ell=2}$ и достигаме до вида на спектъра $W^{1,0}_{\ell=2}$. След заместване на съответните координати на векторите G и H от Теорема 2.5.14 и преобразувания се получават точно координатите на вектора $W^{1,0}_{\ell=2}$, с което теоремата е доказана. $\square$

Следствие 2.5.16 *Ако някой от спектрите $W^{1,0}_{\ell=2}$, $\overline{W^{1,0}_{\ell=2}} \notin W(n,M,\tau)$, и са резултат от фиксиран спектър $W \in W(n,M,\tau)$ и получената от него тройка спектри $(W'_{\ell=2},G,H)$, то тройката възможности за спектри $(W'_{\ell=2},G,H)$ следва да бъде отхвърлена.*

От друга страна, в сила е следното твърдение, задаващо вида на спектрите G и H на ортогоналните масиви D_0 и D_1, изразени съответно чрез спектрите на производните им масиви R, Z, U и V.

Теорема 2.5.17 *Спектрите G и H на ортогоналните масиви D_0 и D_1 относно точката $c'_{\ell=2} \in H(n-1,2)$ удовлетворяват следните еднозначни представяния:*

$$\begin{aligned}
G &= (g_0,g_1,\ldots,g_{n-1}) = (r_0, r_1+u_0,\ldots,r_{n-2}+u_{n-3},u_{n-2})\\
&= (y_0, y_1-(y'_0-y_0)+x_1,\ldots,x_{n-1}-\sum_{j=1}^{n-2}(x'_j-x_j))\\
&= (y_0, x_1+\sum_{j=0}^{n-3}(y'_{n-2-j}-y_{n-1-j}),\ldots,y'_{n-2}-y_{n-1}+\sum_{j=0}^{1}(x'_{n-1-j}-x_{n-j}),x'_{n-1}-x_n);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H &= (h_1,h_2,\ldots,h_n) = (z_1, z_2+v_1,\ldots,z_{n-1}+v_{n-2},v_{n-1})\\
&= (y'_0-y_0,\sum_{j=0}^{1}(y'_j-y_j)+x'_1-x_1,\ldots,y_{n-1}+\sum_{j=1}^{n-2}(x'_j-x_j),x_n)\\
&= (y_1-\sum_{j=0}^{n-3}(y'_{n-2-j}-y_{n-1-j}),\ldots,y_{n-1}+x_{n-1}-(x'_{n-1}-x_n),x_n).
\end{aligned}$$

Доказателство: Броят на думите на разстояние $1 \le i < n-1$ от точката $c'_{\ell=2}$ в ортогоналния масив D_0 може да бъде пресметнат като обединение на думите в масива A_0 на разстояние i от $c'_{\ell=2}$ и думите в масива B_0 на разстояние $i+1$, т.е. координатите на спектъра G са именно $G = (r_0, r_1+u_0,\ldots,r_{n-2}+u_{n-3},u_{n-2})$, за които накрая прилагаме Теорема 2.5.5. Аналогично се получава, че спектърът H на ортогоналния масив D_1 има вида $H = (z_1,z_2+v_1,\ldots,z_{n-1}+v_{n-2},v_{n-1})$. $\square$

Следствие 2.5.18 *Ако някой от спектрите G, H, $\overline{G}$, $\overline{H} \notin W(n-1,M/2,\tau-1)$, то четворката от възможности за спектри (R,Z,U,V), от която те се получават, следва да бъде отхвърлена.*

За ортогоналните масиви $D^{1,0}_0$ и $D^{1,0}_1$ е в сила следното твърдение.

Теорема 2.5.19 *Ортогоналните масиви $D_0^{1,0}$ и $D_1^{1,0}$ са с параметри $(n-1, M/2, \tau-1)$, т.е. спектрите им $G^{1,0}$ и $H^{1,0}$, относно точката $c'_{\ell=2} \in H(n-1,2)$, са елементи на множеството $W(n-1, M/2, \tau-1)$ и всеки от тях има следното еднозначно представяне:*

$$\begin{aligned} G^{1,0} &= (g_0^{1,0}, g_1^{1,0}, \ldots, g_{n-1}^{1,0}) = (u_0, u_1 + r_0, \ldots, u_{n-2} + r_{n-3}, r_{n-2}) \\ &= (y'_0 - y_0, y'_0 + y'_1 - y_1, y'_1 + y'_2 - y_2, \ldots, y'_{n-3} + y'_{n-2} - y_{n-2}, y'_{n-2} - y_{n-1}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H^{1,0} &= (h_1^{1,0}, h_2^{1,0}, \ldots, h_n^{1,0}) = (v_1, v_2 + z_1, \ldots, v_{n-1} + z_{n-2}, z_{n-1}) \\ &= (x'_1 - x_1, x'_1 + x'_2 - x_2, x'_2 + x'_3 - x_3, \ldots, x'_{n-2} + x'_{n-1} - x_{n-1}, x'_{n-1} - x_n). \end{aligned}$$

Доказателство: Прилагаме Теорема 2.4.16 първо за спектрите на двойката ортогонални масиви D_0 и $D_0^{1,0}$ и достигаме до вида на спектъра $G^{1,0}$. Аналогично, прилагаме Теорема 2.4.16 върху спектрите на двойката масиви D_1 и $D_1^{1,0}$ със спектри H и $H^{1,0}$, съответно. След заместване на съответните координати на векторите R, Z, U и V от Теорема 2.5.5 и преобразувания се получават точно координатите на векторите $G^{1,0}$ и $H^{1,0}$, с което теоремата е доказана. □

Следствие 2.5.20 *Ако някой от възможностите за спектри $G^{1,0}$, $H^{1,0}$, $\overline{G^{1,0}}$, $\overline{H^{1,0}} \notin W(n-1, M/2, \tau-1)$, и са резултат от фиксиран спектър $W \in W(n, M, \tau)$ и получената от него тройка спектри (W', X, Y), то четворката възможности за спектри (R, Z, U, V), получена от тях, следва да бъде отхвърлена.*

От Теорема 2.5.14 лесно се съобразява, че спектърът на ортогоналния масив $C'_{\ell=2}$ относно точката $c'_{\ell=2}$ има вида

$$\begin{aligned} W'_{\ell=2} &= (g_0 + h_1, g_1 + h_2, \ldots, g_{n-2} + h_{n-1}, g_{n-1} + h_n) \\ &= (r_0 + z_1, r_1 + u_0 + z_2 + v_1, \ldots, r_{n-2} + u_{n-3} + z_{n-1} + v_{n-2}, u_{n-2} + v_{n-1}) \\ &= (y'_0, y'_1 + x'_1, \ldots, y'_{n-2} + x'_{n-2}, x'_{n-1}). \end{aligned}$$

Тогава за спектъра $W'^{1,0}_{\ell=2}$ на ортогоналния масив $C'^{1,0}_{\ell=2}$ е в сила следното твърдение.

Теорема 2.5.21 *Спектърът $W'^{1,0}_{\ell=2}$ на $(n-1, M, \tau)$ ортогоналния масив $C'^{1,0}_{\ell=2}$, относно точката $c'_{\ell=2}$, е елемент на множеството $W(n-1, M, \tau)$ и има следното еднозначно представяне:*

$$\begin{aligned} W'^{1,0}_{\ell=2} &= (g_0^{1,0} + h_1^{1,0}, g_1^{1,0} + h_2^{1,0}, \ldots, g_{n-2}^{1,0} + h_{n-1}^{1,0}, g_{n-1}^{1,0} + h_n^{1,0}) \\ &= (u_0 + v_1, r_0 + u_1 + z_1 + v_2, \ldots, r_{n-3} + u_{n-2} + z_{n-2} + v_{n-1}, r_{n-2} + z_{n-1}) \\ &= (y'_0 - y_0 + x'_1 - x_1, y'_1 - y_1 + y'_0 + x'_2 - x_2 + x'_1, \ldots, y'_{n-2} - y_{n-1} + x'_{n-1} - x_n). \end{aligned}$$

Доказателство: Прилагаме Теорема 2.4.16 за спектрите на двойката ортогонални масиви $C'_{\ell=2}$ и $C'^{1,0}_{\ell=2}$ и достигаме до вида на спектъра $W'^{1,0}_{\ell=2}$. След заместване на съответните координати на векторите R, Z, U и V от Теорема 2.5.5 и преобразувания се получават точно координатите на вектора $W'^{1,0}_{\ell=2}$, с което теоремата е доказана. □

Следствие 2.5.22 *Ако някой от спектрите* $W'^{1,0}_{\ell=2}$, $\overline{W'^{1,0}_{\ell=2}} \notin W(n-1, M, \tau)$, *и са резултат от фиксиран спектър* $W \in W(n, M, \tau)$ *и получената от него тройка спектри* $(W'_{\ell=2}, G, H)$, *то тройката възможности за спектри* $(W'_{\ell=2}, G, H)$ *следва да бъде отхвърлена.*

Да отбележим още, че имаме спектрите G' и H' на ортогоналните масиви D'_0 и D'_1, разгледани съответно като обединение на масивите A_0, B_0 и A_1, B_1, т.е. можем да ги изразим чрез спектрите на тези масиви.

Теорема 2.5.23 *Спектрите* $G' = (g'_0, g'_1, \ldots, g'_{n-2})$ *и* $H' = (h'_1, h'_2, \ldots, h'_{n-1})$ *на ортогоналните масиви* D'_0 *и* D'_1 *удовлетворяват следната система линейни уравнения*

$$\left| \begin{array}{l} r_i + u_i = g'_i, \ i = 0, 1, \ldots, n-2 \\ z_i + v_i = h'_i, \ i = 1, 2, \ldots, n-1 \\ r_i, u_i \in \mathbb{Z}, \ r_i \geq 0, \ u_i \geq 0, \ i = 0, \ldots, n-2 \\ z_i, v_i \in \mathbb{Z}, \ z_i \geq 0, \ v_i \geq 0, \ i = 1, \ldots, n-1 \end{array} \right. . \tag{2.15}$$

и за техните координати са в сила следните еднозначни представяния:

$$\begin{aligned} G' &= (g'_0, g'_1, \ldots, g'_{n-2}) = (r_0 + u_0, r_1 + u_1, \ldots, r_{n-2} + u_{n-2}) = (y_0 + x_1, \\ & \quad y_0 + y_1 - y'_0 + x_1 + x_2 - x'_1, \ldots, y_{n-2} - \sum_{j=0}^{n-3}(y'_j - y_j) + x_{n-1} + \sum_{j=1}^{n-2}(x'_j - x_j)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H' &= (h'_1, h'_2, \ldots, h'_{n-1}) = (z_1 + v_1, z_2 + v_2, \ldots, z_{n-1} + v_{n-1}) \\ &= (y'_0 - y_0 + x'_1 - x_1, \sum_{j=0}^{1}(y'_j - y_j) + \sum_{j=1}^{2}(x'_j - x_j), \ldots, y_{n-1} + x_n). \end{aligned}$$

.

Доказателство: Ортогоналният масив D'_0 е множеството от редовете на A_0 заедно с множеството от редовете на B_0. Тогава спрямо c'' за спектъра на ортогоналния масив D'_0 са в сила равенствата $r_i + u_i = g'_i, \ i = 0, 1, \ldots, n-2$. С аналогични съображения, ортогоналният масив $D'1$ се получава от обединението на множествата от редовете на ортогоналните масиви A_1 и B_1, откъдето получаваме, че са в сила равенствата $z_i + v_i = h'_i, \ i = 1, 2, \ldots, n-1$. Накрая прилагаме Теорема 2.5.5, за да получим еднозначните представяния на спектрите G' и H' на ортогоналните масиви D'_0 и D'_1. □

Следствие 2.5.24 *Ако някой от спектрите* G', H', $\overline{G'}$, $\overline{H'} \notin W(n-2, M/2, \tau-1)$, *то четворката от възможности за спектри* (R, Z, U, V), *от която те се получават, следва да бъде отхвърлена.*

При разглеждане на ортогоналните масиви от Конструкция 2.5 (Фигура 2), можем да разгледаме и ортогоналния масив, който се получава при пермутиране на елементите 0 и 1 едновременно в първия и във втория стълб на масива C. От Свойство 5 на ортогоналните масиви знаем, че това е ортогонален масив с параметри (n, M, τ). Да означим този масив с $\tilde{C}$, а неговия спектър относно точката $c \in H(n,2)$ да означим с $\tilde{W}$. Да отбележим, че ако в Конструкция 2.5 (Фигура 3) направим пермутиране на елементите 0 и 1 едновременно в първия и във втория стълб на масива C достигаме отново до ортогоналния масив $\tilde{C}$. Ако в ортогоналния масив направим пермутиране на елементите 0 и 1 в първия стълб на масива $\tilde{C}$, то полученият ортогонален масив $\tilde{C}^{1,0}$ е вече разгледан, тъй като това е еквивалентно на това да направим пермутиране на елементите 0 и 1 само във втория стълб на масива C, т.е. имаме, че $\tilde{W}^{1,0} = W^{1,0}_{\ell=2}$.

Теорема 2.5.25 *Спектърът $\tilde{W} \in W(n,M,\tau)$ на ортогоналния масив $\tilde{C}$ спрямо точката $c \in H(n,2)$ има вида*

$$\begin{aligned}\tilde{W} &= (\tilde{w}_0, \tilde{w}_1, \ldots, \tilde{w}_n) = (v_1, u_0 + z_1 + v_2,\\ &\quad r_0 + u_1 + z_2 + v_3, \ldots, r_{n-4} + u_{n-3} + z_{n-2} + v_{n-1}, r_{n-3} + u_{n-2} + z_{n-1}, r_{n-2}).\end{aligned}$$

Доказателство: От Теорема 2.5.8 имаме вида на спектрите $X^{1,0}$ и $Y^{1,0}$ на ортогоналните масиви $C_0^{1,0}$ и $C_1^{1,0}$. Те играят ролята на ортогоналните масиви C_0 и C_1 за ортогоналния масив $\tilde{C}$ в означенията на Конструкция 2.5 (Фигура 2). Следователно можем да приложим Теорема 2.4.16 върху ортогоналния масив $\tilde{C}$ и по този начин да получим неговия спектър $\tilde{W}$ относно точката c, изразен чрез спектрите на масивите A_0, A_1, B_0 и B_1 точно в търсения вид. $\square$

Следствие 2.5.26 *Ако някой от спектрите $\tilde{W}$ или $\overline{\tilde{W}}$ не принадлежи на множеството $W(n,M,\tau)$, четворката (R,Z,U,V), от която те се получават, следва да бъде отхвърлена.*

За пълнота на изложението и по-голяма яснота по-долу са представени спектрите W, $W^{1,0}$ и W'' на ортогоналните масиви C, $C^{1,0}$ и C'', изразени чрез координатите на спектрите R, Z, U и V.

Следствие 2.5.27 *За координатите на спектрите W, $W^{1,0}$ и W'', Y, X, G, H, R, Z, U и V са в сила следните представяния:*

$$\begin{aligned}W &= (w_0, w_1, \ldots, w_n) = (y_0, y_1 + x_1, y_2 + x_2, \ldots, y_{n-1} + x_{n-1}, x_n)\\ &= (g_0, g_1 + h_1, g_2 + h_2, \ldots, g_{n-1} + h_{n-1}, h_n) = (r_0, r_1 + z_1 + u_0,\\ &\quad r_2 + z_2 + u_1 + v_1, \ldots, r_{n-2} + z_{n-2} + u_{n-3} + v_{n-3}, z_{n-1} + u_{n-2} + v_{n-2}, v_{n-1});\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}W^{1,0} &= (w_0^{1,0}, w_1^{1,0}, \ldots, w_n^{1,0}) = (x_1, x_2 + y_0, \ldots, x_n + y_{n-2}, y_{n-1}) = (u_0, u_1 + v_1 + r_0,\\ &\quad u_2 + v_2 + r_1 + z_1, \ldots, u_{n-2} + v_{n-2} + r_{n-3} + z_{n-3}, v_{n-1} + r_{n-2} + z_{n-2}, z_{n-1});\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}W'' &= (w_0'', w_1'', \ldots, w_{n-2}'')\\ &= (y_0' + x_1', y_1' + x_2', \ldots, y_{n-2}' + x_{n-1}') = (g_0' + h_1', g_1' + h_2', \ldots, g_{n-2}' + h_{n-1}')\\ &= r_0 + u_0 + z_1 + v_1, r_1 + u_1 + z_2 + v_2, \ldots, r_{n-2} + u_{n-2} + z_{n-1} + v_{n-1}).\end{aligned}$$

Доказателство: Ако заместим y'_i и x'_i от Теорема 2.5.12 в аналог на системата линейни уравнения от Теорема 2.4.2 или g'_i и h'_i от Теорема 2.5.23 в аналог на системата линейни уравнения на Теорема 2.5.14, получаваме равенствата $z_{i+1}+r_i+v_{i+1}+u_i = w''_i$, за $i = 0, 1, \dots, n-2$. От Теорема 2.4.2, приложена върху масива C и производните му масиви C_0 и C_1 като използваме вида на техните спектри от Теорема 2.5.3, получаваме вида на спектрите W и $W^{1,0}$. □

По този начин от една страна всички спектри на производни масиви са изразени чрез спектрите на ортогоналните масиви, от които те са получени. От друга страна, при фиксиран спектър W на масива C имаме съответните тройки спектри (W', X, Y) и $(W'_{\ell=2}, G, H)$, водещи до спектър W'' и до четворката от възможности за спектри (R, Z, U, V) на получените съответно по Конструкция 2.5 (Фигури от 1 до 3) ортогонални масиви. Спектрите на всички получени ортогонални масиви са представени чрез координатите на спектрите R, Z, U и V.

Всички описани по-горе ограничения върху спектрите на разгледаните ортогонални масиви могат да се обобщят накратко по следния начин. За даден (n, M, τ) ортогонален масив C със спектър $W \in W(n, M, \tau)$ относно точката $c \in H(n, 2)$ са пресметнати всички възможни тройки (W', X, Y). След прилагане на основния алгоритъм част от тези тройки са били отхвърлени. За останалите възможности за тройки е получено множеството от еднозначно определените четворки (R, Z, U, V). Прилагането на описаните в този параграф теореми и получените от тях следствия води до редуциране на множеството от възможните четворки (R, Z, U, V), получени от първоначално фиксирания спектър W и съответната му тройка спектри (W', X, Y).

По-точно, нека за ортогоналния масив C с фиксиран спектър $W \in W(n, M, \tau)$ да разгледаме множеството от съответните на него останали след отсяванията възможни тройки (W', X, Y) и еднозначно определените от тях тройки (Y', R, Z) и (X', U, V). С други думи за фиксиран спектър W и съответните получени от него масиви C_0 и C_1 нека

$$(z_0^{(i)} = 0, z_1^{(i)}, \dots, z_{n-1}^{(i)}; r_0^{(i)}, r_1^{(i)}, \dots, r_{n-2}^{(i)}, r_{n-1}^{(i)} = 0), \quad i = 1, 2, \dots, s,$$

са всички s различни решения на системата (2.9), които са останали след всички гореописани проверки и отсявания за всички възможни ортогонални масиви C'_0, получени от масива C_0 при премахване на кой да е негов стълб, а

$$(v_0^{(j)} = 0, v_1^{(j)}, \dots, v_{n-1}^{(j)}; u_0^{(j)}, u_1^{(j)}, \dots, u_{n-2}^{(j)}, u_{n-1}^{(j)} = 0), \quad j = 1, 2, \dots, t.$$

са всички останали t различни решения на системата (2.10) за всички възможни ортогонални масиви C'_1, получени от C_1 при премахване на някой негов стълб.

Образуваме всевъзможните двойки $(z^{(i)}, v^{(j)})$, за $i = 1, 2, \dots, s$; $j = 1, 2, \dots, t$, и нека да означим с $k_{i,j}$ броя на стълбовете, при които се получават съответно i-тото решение на системата (2.9) за C_0 и j-тото решение на системата (2.10) за C_1. В сила е следното твърдение.

Теорема 2.5.28 *Нека $W \in W(n, M, \tau)$ е възможност за спектър на ортогонален масив C с параметри (n, M, τ) и нека (W', X, Y) е възможна тройка спектри на съответните производни на масива C ортогонални масиви, от които еднозначно* *са определени съответни тройки спектри* (Y', R, Z) *и* (X', U, V). *В описаните погоре означения, ако системата линейни уравнения*

$$\left|\begin{array}{ll} \sum_{j=1}^{t}\sum_{i=1}^{s} k_{i,j} & = n \\ \sum_{j=1}^{t}\sum_{i=1}^{s} k_{i,j} z_1^{(i)} & = y_1 \\ \sum_{j=1}^{t}\sum_{i=1}^{s} k_{i,j} z_2^{(i)} & = 2y_2 \\ \vdots & \\ \sum_{j=1}^{t}\sum_{i=1}^{s} k_{i,j} z_{n-1}^{(i)} & = ny_{n-1} \\ \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t} k_{i,j} & = n \\ \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t} k_{i,j} v_1^{(j)} & = x_2 \\ \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t} k_{i,j} v_2^{(j)} & = 2x_3 \\ \vdots & \\ \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t} k_{i,j} v_{n-1}^{(j)} & = nx_n \\ k_{i,j} \in \mathbb{Z},\ k_{i,j} \geq 0, & i = 1, 2, \ldots, s;\ j = 1, 2, \ldots, t \end{array}\right. \tag{2.16}$$

спрямо неизвестните $k_{i,j}$, *за* $i = 1, 2, \ldots, s$, $j = 1, 2, \ldots, t$, *няма решение, тогава тройката* (W', X, Y) *не е възможна тройка за спектъра* W *на ортогоналния масив* C, *т.е. двойката* (W, W') *следва да бъде отхвърлена.*

Доказателство: Имаме, че неизвестните $k_{i,j}$ съответстват на броя на стълбовете, при които се получават i-тото решение на системата (2.9) за C_0 и j-тото решение на системата (2.10) за C_1 и нека да преброим единиците едновременно в ортогоналните масиви C_0 и C_1.

Нека за фиксирано ℓ, $0 \leq \ell \leq n-1$, да разгледаме ℓ-блока на C_0. Броят на единиците в него е точно ℓy_ℓ. От друга страна, като вземем предвид, че z_ℓ е точно броят на думите от ℓ-блока, които имат 1 в съответния стълб, то броят на единиците в ℓ-блока е равен също така на $\sum_{j=1}^{t}(k_{1,j}z_\ell^{(1)} + k_{2,j}z_\ell^{(2)} + \ldots + k_{s,j}z_\ell^{(s)})$.

Да разгледаме ℓ-блока и на C_1. Броят на единиците в него е точно $\ell x_{\ell+1}$. От друга страна, като вземем предвид, че v_ℓ е точно броят на думите от ℓ-блока на C_1, които имат ℓ в съответния стълб, то броят на единиците в ℓ-блока е равен също така на $\sum_{i=1}^{s}(k_{i,1}v_\ell^{(1)} + k_{i,2}v_\ell^{(2)} + \ldots + k_{i,t}v_\ell^{(t)})$.

Следователно за всяко $i = 1, 2, \ldots, s$ и $j = 1, 2, \ldots, t$ са изпълнени равенствата в система (2.16). □

Въз основа на описаните и доказани в този параграф теореми и следствия може да създадем нов алгоритъм за редуциране на възможните спектри на даден (n, M, τ)

ортогонален масив C. Този алгоритъм изследва по-обстойно структурата на ортогоналните масиви, поради което той се изпълнява по-бавно спрямо предишните алгоритми. Това налага да се опитаме да оптимизираме процесите, където е възможно. За целта първо се изпълнява основния алгоритъм като от него се извличат не само оставащите възможни спектри в множеството $W(n, M, \tau)$, но също така в резултат на прилагането на Алгоритъм 2 можем да запазим директно възможните тройки (W', X, Y) заедно с техните производни (X, Z_i, R_i) и (Y, U_j, V_j). По този начин в новия Алгоритъм 3 се избягват излишни проверки и се набляга на проверките само на новополучените в този параграф ограничения върху спектрите и съответни зависимости между различните спектри.

За начало ще бъде изложено кратко описание на обобщения алгоритъм (Алгоритъм 3), а след това ще бъде предоставен и псевдокод на алгоритъма както и помощна процедура, която се основава изцяло на зависимостите между спектрите, описани в настоящия параграф.

- Нека C е фиксиран (n, M, τ) ортогонален масив и от него е получен съответен $(n-1, M, \tau)$ ортогонален масив C', със спектри W и W', съответно. Нека с помощта на Теорема 2.4.2 са получени спектрите Y и X съответно на производните $(n-1, M/2, \tau-1)$ ортогонални масиви C_0 и C_1.

- Проверяваме за всеки получен ортогонален масив C' с параметри $(n-1, M, \tau)$ дали може да се получи от двата ортогонални масива C_0 и C_1. За всеки получен C' вече сме проверили, че C_0 и C_1 са ортогонални масиви, така че тази проверка я пропускаме.

- Фиксираме $C' = \boxed{\begin{array}{c} C_0 \\ \hline C_1 \end{array}}$ и да отрежем един стълб на C'. Тъй като вече сме конструирали за C_0 и C_1 всевъзможните решения на система (2.2), то може да ги използваме на готово. За всяко получено решение проверяваме дали отговаря на съответните условия на теоремите от настоящия параграф. Прилагането на проверките от всички получените в този параграф следствия дава възможност да отхвърлим несъвместимите четворки (R, Z, U, V), получени от спектъра W и съответната му тройка спектри (W', X, Y).

- Останалите възможни четворки събираме в списък, върху който решаваме система (2.16). Проверяваме дали тя има решение. Ако има, това означава, че ортогонален масив C' със спектър W е възможно да се получи при отрязване на стълб на ортогоналния масив C. В противен случай, премахваме съответните тройки (W', X, Y) от възможностите за C (Теорема 2.5.28), а с тях и двойките (W, W').

- Решаваме система (2.8) върху останалите двойки (W, W') и проверяваме дали има решение. Ако няма решение, съответният спектър W за изходния ортогонален масив C с параметри (n, M, τ) се отхвърля (виж Теорема 2.4.18).

- Ако система (2.8) има решение, се запазват останалите възможни решения (X, Y), за да могат да се използват отново на следващата стъпка, т.е. за фиксиран спектър W имаме съответстващото му редуцирано множество от тройки спектри (W', X, y).

- Както и в Основния алгоритъм, ако има филтрирани елементи на текущата стъпка, изпълняваме отново новият алгоритъм върху неотсятите множества от спектри. Действието се повтаря докато няма ново отсяване на елементи в изследваните множества от спектри. Тук се използва, че спектърът W на ортогоналния масив C зависи от спектрите на ортогоналните масиви $C^{1,0}$, $C^{1,0}_{\ell=2}$ и $\tilde{C}$, а те също трябва да принадлежат на изследваното множество $W(n, M, \tau)$, т.е. спектрите W, $W^{1,0}$, $W^{1,0}_{\ell=2}$, $\tilde{W}$ както и спектрите $\overline{W}$, $\overline{W}^{1,0}$, $\overline{W^{1,0}}_{\ell=2}$, $\overline{\tilde{W}}$ трябва да са елементи на множеството $W(n, M, \tau)$.

Всичко гореописано показва, че сложността на настоящия алгоритъм е по-голяма отколкото на Основния алгоритъм от Параграф 2.4. От своя страна, новият обобщен алгоритъм е по-добър за прилагане при относително малък брой елементи в множеството $W(n, M, \tau)$, като разбира се е доста по-мощен от основния алгоритъм и благодарение на това се получават и нови по-добри резултати.

Съответният псевдокод на обобщения алгоритъм (Алгоритъм 3) е представен по-долу на страница 59.

В този псевдокод е използвана помощната процедура $TestCouple$, която е представена на страница 60. Именно тя определя кои двойки (X, Y) биха могли заедно да формират един ортогонален масив W' с параметри $(n-1, M, \tau)$.

За по-добра оптималност и този алгоритъм, също както и основния алгоритъм се изпълнява върху редици от ортогонални масиви с параметри $(n-i, M/2^i, \tau-i)$, за $i = 0 \ldots n-\tau$. Да обърнем внимание, че на всяка стъпка обобщеният алгоритъм се изпълнява независимо, което ни дава възможност да редуваме алгоритмите, ако се достигне до подобна необходимост. В реална ситуация обаче това почти не се случва.

Получените от нас резултати за несъществуване на някои двоични ортогонални масиви след прилагането на обобщения алгоритъм (Алгоритъм 3) са подробно описани в Параграф 2.8.

Параграф 2.5 е написан въз основа на публикация [43] като допълнително са намерени координатите на спектрите на редица производни масиви, получени в хода на разработването на Алгоритъм 3.

2.6 Някои оптимизации върху бързодействието на алгоритмите

Основен момент в гореописаните алгоритми е конструирането на решенията или решаването на системите линейни уравнения (2.1), (2.2), (2.3), (2.8), (2.16). В система (2.1) на дадена стъпка се пресмятат $|P(n, M, \tau)| * |P(n-1, M, \tau)|$ на брой решения. Ясно е, че броят на конструиранията на решенията на система (2.3) зависи от мощността на множествата $W(n, M, \tau)$ и $W(n-1, M, \tau)$. От своя страна още при първоначалното генериране на множествата $P(n, M, \tau)$ и $W(n, M, \tau) = P(n, M, \tau) \cup Q(n, M, \tau)$ е

Algorithm 3 (Обобщен алгоритъм) – Алгоритъм за редуциране на множеството от спектри $W(n, M, \tau)$ на двоичен ортогонален (n, M, τ) масив чрез премахване на два стълба:

procedure GENERAL($W(n, M, \tau)$, $W(n-1, M, \tau)$, $W(n-1, M/2, \tau-1)$, $W(n-2, M/2, \tau-1)$)
  filteredW $\leftarrow$ empty set
  for $W \in W(n, M, \tau)$ **do**
    if $W \in filteredW$ **then**
      continue
    allXY $\leftarrow$ empty set
    for $W' \in W(n-1, M, \tau)$ **do**
      $X, Y \leftarrow$ solve system (2.3) for integer nonnegative solutions
      if $X, \overline{X} \in W(n-1, M/2, \tau-1)$ and
        $Y, \overline{Y} \in W(n-1, M/2, \tau-1)$ and
        $W^{1,0}, \overline{W^{1,0}} \in W(n, M, \tau)$ and
        $W^{1,0}, \overline{W^{1,0}} \notin filteredW$ and
        TESTCOUPLE(X, Y, $W(n, M, \tau) \setminus filteredW$, $W(n-1, M, \tau)$, $W(n-1, M/2, \tau-1)$, $W(n-2, M/2, \tau-1)$) **then**
        add (X, Y) to *allXY*
    if allXY is empty **then**
      add W and $\overline{W}$ to *filteredW*
    else
      if system (2.8) has no integer nonnegative solutions **then**
        add W and $\overline{W}$ to *filteredW*
  if *filteredW* has at least 1 element **then**
    return GENERAL($W(n, M, \tau) \setminus filteredW$, $W(n-1, M, \tau)$, $W(n-1, M/2, \tau-1)$, $W(n-2, M/2, \tau-1)$)
  else
    return $W(n, M, \tau)$

Algorithm 4 (Test Couple)

procedure TEST COUPLE(X, Y, $W(n, M, \tau)$, $W(n-1, M, \tau)$, $W(n-1, M/2, \tau-1)$, $W(n-2, M/2, \tau-1)$)
    get all possible $allR, allU, allZ, allV$ from the algorithm NDDA
    $allRZUV \leftarrow$ empty set
    for $R \in allR$ **do**
        compute Z from Y and R
        if $Z \notin allZ$ **then**
            continue with next R
        for $U \in allU$ **do**
            compute V from X and U
            if $V \notin allV$ **then**
                continue with next U
            if $D_0 \in W(n-1, M/2, \tau-1)$ and
                $D_0^{1,0} \in W(n-1, M/2, \tau-1)$ and
                $D_1 \in W(n-1, M/2, \tau-1)$ and
                $D_1^{1,0} \in W(n-1, M/2, \tau-1)$ and
                $C_0 \in W(n-1, M/2, \tau-1)$ and
                $C_0^{1,0} \in W(n-1, M/2, \tau-1)$ and
                $C_1 \in W(n-1, M/2, \tau-1)$ and
                $C_1^{1,0} \in W(n-1, M/2, \tau-1)$ and
                $C'_{\ell=1} \in W(n-1, M, \tau)$ and
                ${C'}^{1,0}_{\ell=1} \in W(n-1, M, \tau)$ and
                $C'_{\ell=2} \in W(n-1, M, \tau)$ and
                ${C'}^{1,0}_{\ell=2} \in W(n-1, M, \tau)$ and
                ${C''}^{1,0} \in W(n-2, M, \tau)$ and
                $D'_0 \in W(n-2, M/2, \tau-1)$ and
                $D'_1 \in W(n-2, M/2, \tau-1)$ and
                $C'_0 \in W(n-2, M/2, \tau-1)$ and
                $C'_1 \in W(n-2, M/2, \tau-1)$ **then**
                add the couple R, Z, U, V to $allRZUV$
    if $allRZUV$ is not empty and system (2.16) has an integer nonnegative solution **then**
        return $true$
    else
        return $false$

ясно, че броят на елементите във вторите множества е значително по-голям. Тогава ако успеем да намалим броя на системите, на които трябва да бъдат конструирани решенията (или самите системи да бъдат решавани), то ще си гарантираме по-бързо изпълнение на алгоритмите.

На първо място можем да разгледаме системата (2.3). Тъй като без ограничение на общността можем да считаме, че думата, спрямо която разглеждаме е $\mathbf{0} \in H(n, 2)$, то тогава да разгледаме броя на нулевите думи в изходния масив C и неговия производен C'. Този брой можем да видим съответно в w_0 и w'_0, където W и W' са спектрите съответно на ортогоналните масиви C и C'. С просто око може да се види, че ако в ортогоналния масив C има w_0 нулеви думи, то при премахването на кой да е негов стълб броят на нулевите думи в масива C' не може да бъде по-малък от този в изходния масив C. Това ни дава възможност да не конструираме решенията на система (2.3) в случаите, когато $w_0 > w'_0$.

Аналогични разсъждения можем да направим и ако разгледаме броя на думите, които се състоят само от единици, т.е. думите, които са на разстояние n от нулевата дума за масива C, т.е. w_n. В $H(n-1, 2)$ това са думите, които са на разстояние $n-1$ от нулевата дума и в спектъра на ортогоналния масив C' са точно w'_{n-1} на брой. Отново броят на думите, съставени единствено от единици в изходния масив C, не може да бъде по-малък от броя им в производния му ортогонален масив C'. Така получаваме ново условие, при което не е необходимо да конструираме решенията на системата (2.3), а именно при условие, че $w_n > w'_{n-1}$.

Има още едно място, където бихме могли да спестим конструирането на решенията на някои от системите линейни уравнения. Нека да разгледаме основния алгоритъм от Параграф 2.4 и обобщения алгоритъм от Параграф 2.5. Когато отхвърляме спектър на един ортогонален масив в $W(i, M, \tau)$, това може да доведе до премахване на някой друг, вече разглеждан и неохвърлен спектър. Затова тези алгоритми изпълняват i-тата стъпка, докато множеството $W(i, M, \tau)$ остане непроменено. Ако на първа стъпка от алгоритъма сме намерили всички възможни двойки (X, Y) за даден ортогонален масив C със спектър W, то е удачно да ги запазим заедно и да ги подаваме като параметри в повторното разглеждане на същото множество $W(i, M, \tau)$. Това ни позволява да имаме всички решения на система (2.3). Още повече, ако при проверката за съществуване на тройка (W, X, Y) не отхвърлим нито една двойка (X, Y) за фиксиран спектър W, то решението на системата (2.8) няма смисъл да бъде проверявано отново, защото това вече е направено в предишната стъпка на алгоритъма. По този начин успяваме на минимизираме драстично броя на системите, чиито решения трябва да бъдат конструирани. Това от своя страна води до ускоряване на бързодействието както на основния алгоритъм от Параграф 2.4, така и на обобщения алгоритъм от Параграф 2.5.

Разбира се има и други места, където може да се мисли в посока за оптимизиране на нашите алгоритми, но това няма да го дискутираме тук, а ще остане като предмет за по-нататъшната ни изследователска работа върху охарактеризирането на двоичните ортогонални масиви.

2.7 Илюстрация на алгоритмите върху съществуващия $(20, 40, 3)$ ортогонален масив

Да разгледаме действието на алгоритмите върху ортогоналните масиви с параметри $(20, 40, 3)$. За масиви с такива параметри от [58] знаем, че съществуват. Ще приложим първо по-слабите алгоритми и ще преминаваме към по-мощните. За изпълнението на Алгоритъм 1 е необходимо първо последователно да генерираме множествата $P(n, 10, 1)$, за $n = 1 \dots 18$; $P(n, 20, 2)$, за $n = 2 \dots 19$ и $P(n, 40, 3)$, за $n = 3, \dots, 20$. Броят на елементите в тези множества е представен в следващата таблица, като $|P(3, 40, 3)| = 1$, $|P(4, 40, 3)| = 5$, $|P(5, 40, 3)| = 9$ и така нататък.

$\lvert P(n, 40, 3)\rvert$:	1	5	9	19	28	43	52	62	56
	53	39	26	13	10	4	4	1	1
$\lvert P(n, 20, 2)\rvert$:	1	5	9	17	26	33	37	42	42
	37	33	28	21	14	9	4	1	1
$\lvert P(n, 10, 1)\rvert$:	1	5	15	41	98	217	441	851	1555
	2724	4591	7500	11888	18384	27775	41121	59745	85375

Понеже $(20, 40, 3)$ двоични ортогонални масиви съществуват, то след прилагането на алгоритмите се очаква единственият възможен спектър за ортогоналния $(20, 40, 3)$ масив (относно вътрешна за него точка) да се запази. Въпреки това след прилагането на Алгоритъм 1 от средата на редицата получаваме известно редуциране на броя на възможностите за спектри на $(n, 20, 2)$ ортогонални масиви. За редицата при $\tau = 3$ редукцията е значителна. Например, за ортогоналните масиви с параметри $(10, 40, 3)$ от 62 спектъра остават само 15. Става ясно, че освен $(19, 40, 3)$ и $(20, 40, 3)$ ортогоналните масиви, то и ортогоналните $(18, 40, 3)$ и $(17, 40, 3)$ масиви притежават по единствен спектър относно вътрешна за тях точка. Мощността на всички редуцирани посредством Алгоритъм 1 множества от редиците са представени в таблицата по-долу.

$\lvert P(n, 40, 3)\rvert$:	1	5	8	10	13	18	11	15	6
	10	5	6	3	4	1	1	1	1
$\lvert P(n, 20, 2)\rvert$:	1	5	9	14	22	30	33	35	31
	28	25	19	13	9	4	1	1	1
$\lvert P(n, 10, 1)\rvert$:	1	5	15	41	98	217	441	851	1555
	2724	4591	7500	11888	18384	27775	41121	59745	85375

За пълнота на изложението, множествата с по един елемент, т.е. видът на спектрите (относно вътрешна за масивите точка) на двоичните ортогонални масиви с параметри $(n, 40, 3)$, за $n = 17, 18, 19, 20$, са представени и в явен вид:

$$
\begin{aligned}
P(17, 40, 3) &= \{[1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 4, 15, 15, 4, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1]\},\\
P(18, 40, 3) &= \{[1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 9, 20, 9, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1]\},\\
P(19, 40, 3) &= \{[1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 19, 19, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1]\},\\
P(20, 40, 3) &= \{[1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 38, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1]\}.
\end{aligned}
$$

За да приложим по-мощните алгоритми върху ортогоналния $(20, 40, 3)$ масив, са ни нужни не само спектрите спрямо вътрешните точки, но и тези спрямо външните. Благодарение на Теорема 1.4.1 пресмятаме елементите в редиците от ортогонални масиви $W(n, 40, 3)$, $W(n, 20, 2)$ и $W(n, 10, 1)$ за гореспоменатите редици. Не е неочаквано, че броят на елементите в тези множества е значително по-голям спрямо елементите в множествата $P(n, 40, 3)$, $P(n, 20, 2)$ и $P(n, 10, 1)$, съответно. Броят на елементите в тях са описани в следващата таблица.

$\lvert W(n, 40, 3)\rvert$:	1	6	12	28	54	106	177	286	415
	644	895	1276	1722	2417	3236	4313	5607	7563
$\lvert W(n, 20, 2)\rvert$:	1	6	13	28	60	108	167	269	403
	546	752	1036	1347	1734	2284	2862	3547	4490
$\lvert W(n, 10, 1)\rvert$:	1	6	18	55	141	338	734	1514	2934
	5448	9686	16660	27218	44916	70922	109583	165821	246448

След като разполагаме с генерираните множества, можем да преминем към прилагането на Алгоритъм 2. Редицата спрямо τ не е голяма, но въпреки това резултатите са подобрени. Резултатите след изпълнението на Алгоритъм 2 са описани в таблицата по-долу.

$\lvert W(n, 40, 3)\rvert$:	1	6	10	14	24	34	23	50	37
	79	55	91	80	137	102	58	29	15
$\lvert W(n, 20, 2)\rvert$:	1	6	12	24	50	98	153	230	318
	466	563	758	962	1264	1546	772	213	52
$\lvert W(n, 10, 1)\rvert$:	1	6	18	55	141	338	734	1514	2934
	5448	9686	16660	27218	44916	70922	109583	165821	246448

За по-добро сравнение да разгледаме спектрите само спрямо вътрешна точка, които са останали след прилагането на Алгоритъм 2. За $P(n, 20, 2)$ има разлика единствено за $n = 9, 10$ и за $n = 12$. В първите два случая е премахната по една възможност за спектър. Така вместо 35 (съответно 31) спектъра са останали 34 (съответно 30). При $n = 12$ нови 3 възможности за спектри са били елиминирани като невъзможни. Така вместо 25 са останали 22 възможности за спектри. Това обаче не е променило редицата на следващите стъпки.

За $P(n, 40, 3)$ Алгоритъм 2 води до редукция единствено в средата. Това го отдаваме на факта, че при дълга редица Алгоритъм 1 се справя достатъчно добре. За по-къси редици обаче могат да се очакват последващи редукции. Всичките спектри спрямо вътрешна точка след редукцията от прилагането на Алгоритъм 2 са представени в следващата таблица.

$\lvert P(n, 40, 3)\rvert$:	1	5	8	10	12	15	8	12	6
	10	5	6	3	4	1	1	1	1
$\lvert P(n, 20, 2)\rvert$:	1	5	9	14	22	30	33	34	30
	28	22	19	13	9	4	1	1	1
$\lvert P(n, 10, 1)\rvert$:	1	5	15	41	98	217	441	851	1555
	2724	4591	7500	11888	18384	27775	41121	59745	85375

Любопитно е да се отбележи, че изпълнението на Алгоритъм 3 е възможно само върху множеството $W(20,40,3)$, като единствената разлика е, че броят на елементите в едно единствено множество - $W(7,40,3)$, е сведен от 24 до 16. За вътрешните спектри за същите параметри редукцията е от 12 до 8. Това от своя страна се оказва достатъчно недостатъчно силен резултат, за да доведе след себе си до редукция за последващите множества от спектри в редицата. Така всички останали множества остават непроменени.

2.8 Резултати за несъществуване на някои двоични ортогонални масиви

Една от основните мотивации да започнем изследванията върху спектрите на двоични ортогонални масиви бе относително малките стойности на параметрите, за които в [28] се виждаше, че са първите открити случаи, т.е. да се даде отговор на въпроса съществуват ли двоични ортогонални масиви съответно с параметри $(9,96,4)$, $(10,96,4)$ и $(11,96,4)$.

За целта първо с помощта на Теорема 1.4.1 генерирахме множествата от всички възможни спектри относно вътрешна за съответните масиви точка, т.е. редицата от множества $P(i,96,4)$, за $i=4\dots11$, както и всички необходими редици от множества от спектри на ортогонални масиви с по-ниска сила $\tau=1,2,3$. Всички спектри в тези редици могат да бъдат намерени в поддържаната от нас База от данни (BOA Library), която е достъпна на следния уеб-адрес [59]. За по-голяма яснота, тук представяме само броя на елементите във всяко множество от спектри за изследваните редици, а именно:

$\lvert P(11,96,4)\rvert$:	1	6	12	20	34	37	37	24
$\lvert P(10,48,3)\rvert$:	1	6	13	31	53	96	133	189
$\lvert P(9,24,2)\rvert$:	1	6	13	30	49	74	92	111
$\lvert P(8,12,1)\rvert$:	1	6	21	67	184	464	1069	2313

Нека първо да отбележим, че в резултат на прилагането само на Теорема 2.3.1 и Теорема 2.3.3 имаме редуциране на този брой, както е показано по-долу (виж [14]).

$\lvert P(11,96,4)\rvert$:	1	6	12	13	16	18	17	10
$\lvert P(10,48,3)\rvert$:	1	6	13	25	41	65	71	89
$\lvert P(9,24,2)\rvert$:	1	6	13	28	47	69	86	104
$\lvert P(8,12,1)\rvert$:	1	6	21	67	184	464	1069	2313

Когато приложим Алгоритъм 1 върху тези редици, получаваме следните отсявания на възможностите за спектри в разглежданите множества.

$\lvert P(11,96,4)\rvert$:	1	6	12	10	12	10	3	0
$\lvert P(10,48,3)\rvert$:	1	6	13	25	41	65	69	89
$\lvert P(9,24,2)\rvert$:	1	6	13	28	47	69	86	104
$\lvert P(8,12,1)\rvert$:	1	6	21	67	184	464	1069	2313

В следствие от прилагането на Алгоритъм 1 [16] получаваме, че са в сила следните твърдения.

Теорема 2.8.1 *Не съществува двоичен ортогонален масив с параметри* $(11, 96, 4)$.

Получаваме още, че броят на елементите в множеството $P(10, 96, 4)$ е само 3. Това ни навежда на мисълта, че може да се опитаме да анализираме тези три спектъра и благодарение на известни свойства на ортогоналните масиви да се опитаме да докажем, че $(10, 96, 4)$ ортогонален масив не съществува.

Теорема 2.8.2 *Не съществува двоичен ортогонален масив с параметри* $(10, 96, 4)$.

Доказателство: След като приложим Алгоритъм 1 от първоначалните 72 възможностите за спектри на $(10, 96, 4)$ ортогонални масиви остават единствено следните три спектъра:

$$\begin{aligned} P^1 &= (1,\ 0,\ 0,\ 17,\ 24,\ 15,\ 20,\ 15,\ 3,\ 1,\ 0) \\ P^2 &= (1,\ 0,\ 0,\ 18,\ 19,\ 25,\ 10,\ 20,\ 2,\ 1,\ 0) \\ P^3 &= (1,\ 0,\ 0,\ 18,\ 20,\ 20,\ 20,\ 10,\ 7,\ 0,\ 0) \end{aligned}$$

Може да забележим, че и в трите случая съответния ортогонален масив ще съдържа всяка дума (в частност нулевата дума) точно по веднъж, тъй като $p_0^i = 1$ за $i = 1, 2, 3$. Това означава, че ортогоналният масив C с параметри $(10, 96, 4)$ е прост, т.е. не съдържа повтарящи се думи. От друга страна и за трите масива е в сила, че $p_1^i = p_2^i = 0$, от което можем да заключим, че $(10, 96, 4)$ ортогоналния масив притежава минимално разстояние $d = 3$. За двоичните кодове е известен фактът, че код с минимално разстояние $d = 3$ и дължина $n = 10$ има не повече от 72 елемента [45]. В конкретния случай дори и по-слабата горна Хемингова граница е достатъчна - тя гласи, че двоичен код с минимално разстояние $d = 3$ и дължина $n = 10$ не може да има повече от 93 елемента. Следователно, ортогонален масив с параметри $(10, 96, 4)$ в $H(10, 2)$ не съществува. □

Ясно е, че Теорема 2.8.1 може да бъде доказана и като следствие от Теорема 2.8.2.

Следствие 2.8.3 *Не съществуват двоични ортогонални масиви (съответно) с параметри* $(11, 192, 5)$ *и* $(12, 192, 5)$.

Доказателство: От Теорема 2.1.1 знаем, че ортогоналните масиви $(10, 96, 4)$ и $(11, 192, 5)$ съществуват едновременно. Тогава от Теорема 2.8.3 получаваме, че не съществува $(11, 192, 5)$ двоичен ортогонален масив. Аналогично, използвайки Теорема 2.1.1 върху несъществуващия $(11, 96, 4)$ двоичен ортогонален масив, получаваме, че не съществува и двоичен ортогонален масив с параметри $(12, 192, 5)$. □

Да разгледаме отново ортогоналния масив с параметри $(9, 96, 4)$. След прилагането на Алгоритъм 1 върху изследваните по-горе редици, за $(9, 96, 4)$ ортогоналния масив остават 10 възможности за спектри от първоначалните 37. Въпреки, че сме намалили значително броя на възможните спектри, това не е достатъчно, за да успеем да докажем несъществуване на такива масиви. Затова продължаваме с прилагане на основния алгоритъм (Алгоритъм 2).

За тази цел първо трябва да генерираме съответните редици от спектри (съгласно Теорема 1.4.1) спрямо произволна точка, вътрешна или външна. Резултатите за мощностите на съответните множества са показани в следващата таблица.

$\|W(11,96,4)\|$:	1	7	16	32	75	134	240	406
$\|W(10,48,3)\|$:	1	7	17	44	94	206	376	699
$\|W(9,24,2)\|$:	1	7	18	49	103	204	358	590
$\|W(8,12,1)\|$:	1	7	25	86	252	676	1656	3788

Да отбележим, че и в този случай множествата $W(i, 96, 4)$ са много по-големи спрямо множествата $P(i, 96, 4)$. Освен това броят на елементите в тях нараства значително с нарастването на размерността n. След прилагане на редукцията от Алгоритъм 2 [17] получаваме следните резултати.

$\|W(11,96,4)\|$:	1	7	16	16	20	0	0	0
$\|W(10,48,3)\|$:	1	7	17	34	68	147	203	374
$\|W(9,24,2)\|$:	1	7	18	45	99	194	342	560
$\|W(8,12,1)\|$:	1	7	25	86	252	676	1656	3788

Последните три нули съответстват на броя на елементите съответно в множествата $W(9, 96, 4)$, $W(10, 96, 4)$ и $W(11, 96, 4)$, т.е. последните две нули потвърждават отново получените по-горе резултати за несъществуване, а фактът, че за множеството имаме $|W(9, 96, 4)| = 0$, ни дава основание да формулираме следващата теорема и непосредствено произлизащото от нея следствие.

Теорема 2.8.4 *Двоичен ортогонален масив с параметри* $(9, 96, 4)$ *не съществува.*

Следствие 2.8.5 *Двоичен ортогонален масив с параметри* $(10, 192, 5)$ *не съществува.*

Доказателство: Отново прибягваме до Теорема 2.1.1. В комбинация с Теорема 2.8.4 получаваме несъществуване на ортогонални масиви в двоичното Хемингово пространство с параметри $(10, 192, 5)$. □

По този начин успяхме да отсеем всички отворени случаи в разглежданата от нас редицата. Трябва да отбележим, че заедно с нашата работа независимо и по различни начини Bulutoglu и Margot [19] както и Schoen, Eendebak и Nguyen [51] успяват да получат тези, дори и някои по-силни резултати. Техният подход е базиран на генериране на класовете неизоморфни ортогонални масиви със зададени параметри. В разглежданите случаи се оказва, че техните методи дават по-силни резултати, но когато изследваните редици са по-дълги, прилагането на нашите алгоритми е по-бързо и води до по-добри резултати.

След това приложихме нашите алгоритми, стремейки се да отговорим на откритите въпроси дали съществуват двоични ортогонални масиви съответно с параметри $(n, 224, 5)$, за $n = 10, 11, 12$ и 13, както и с параметри $(n, 112, 4)$, за $n = 9, 10, 11$ и 12.

Първите резултати върху тези редици можем да получим като приложим Алгоритъм 1. За целта, първо генерираме съответните изходни множества от всички възможности за спектри относно вътрешни за масивите точки за всички ортогонални масиви от необходимите за разглеждане редици. След като приложим Алгоритъм 1, съответните редуцирани бройки в редиците са указани по следния начин: $a \to b$, т.е. a е първоначалния брой възможности за спектри, а b е броят след прилагането на алгоритъма. Резултатите са представени в следващата таблица.

$\lvert P(n,224,5)\rvert$:	$1 \to 1$	$7 \to 7$	$15 \to 11$	$32 \to 19$	$63 \to 15$
	$74 \to 11$	$108 \to 6$	$85 \to 3$	$24 \to 0$	
$\lvert P(n,112,4)\rvert$:	$1 \to 1$	$7 \to 7$	$15 \to 13$	$31 \to 20$	$58 \to 25$
	$72 \to 28$	$88 \to 31$	$81 \to 15$	$36 \to 2$	
$\lvert P(n,56,3)\rvert$:	$1 \to 1$	$7 \to 7$	$17 \to 16$	$49 \to 40$	$95 \to 71$
	$199 \to 137$	$311 \to 205$	$494 \to 276$	$635 \to 307$	
$\lvert P(n,28,2)\rvert$:	$1 \to 1$	$7 \to 7$	$17 \to 17$	$46 \to 43$	$87 \to 82$
	$145 \to 137$	$208 \to 196$	$278 \to 251$	$334 \to 303$	

Получаваме, че $|P(13,224,5)| = 0$, т.е. в сила е следното твърдение.

Теорема 2.8.6 *Двоичен ортогонален масив с параметри* $(13,224,5)$ *не съществува.*

Благодарение на тази теорема достигаме до още един резултат.

Следствие 2.8.7 *Двоичен ортогонален масив с параметри* $(12,112,4)$ *не съществува.*

Доказателство: Използвайки Теорема 2.1.1 за $n = 4$, $2u = 12$ и $M = 112$ получаваме, че ортогонален масив с параметри $(12,112,4)$ съществува тогава и само тогава когато съществува ортогонален масив с параметри $(13,224,5)$. В Теорема 2.8.6 показахме, че ортогонален масив с параметри $(13,224,5)$ не съществува, следователно и $(12,112,4)$ двоичен ортогонален масив не съществува. □

Не можем да извлечем повече информация от прилагането на Алгоритъм 1. Затова се налага да използваме някой от по-мощните алгоритми. За тази цел, първо генерираме (съгласно Теорема 1.4.1) множествата с всички възможни спектри спрямо вътрешни и външни точки. Разбира се, понеже вече сме отхвърлили случая $(13,224,5)$, то редицата я разглеждаме само до $(12,224,5)$. За генерираните множества от всички възможности за спектри в таблицата по-долу са представени техните мощности, като отново първо е показан първоначалният брой, а след това и какъв е редуцираният брой след прилагането на Алгоритъм 2.

$\lvert W(5,224,\tau)\rvert$:	$1 \to 1$	$8 \to 8$	$19 \to 13$	$48 \to 6$
	$110 \to 9$	$215 \to 6$	$445 \to 0$	$815 \to 0$
$\lvert W(4,112,\tau)\rvert$:	$1 \to 1$	$8 \to 8$	$20 \to 16$	$48 \to 18$
	$117 \to 34$	$230 \to 33$	$461 \to 0$	$846 \to 0$
$\lvert W(3,56,\tau)\rvert$:	$1 \to 1$	$8 \to 8$	$21 \to 19$	$64 \to 54$
	$154 \to 112$	$380 \to 264$	$762 \to 506$	$1517 \to 883$
$\lvert W(2,28,\tau)\rvert$:	$1 \to 1$	$8 \to 8$	$22 \to 21$	$69 \to 65$
	$166 \to 158$	$350 \to 332$	$667 \to 646$	$1211 \to 1120$

Трябва да отбележим, че прилагането на Алгоритъм 2 за редицата до $(11, 112, 4)$ приключва, още на стъпка $(10, 112, 4)$, но за пълнота на схемата, с която илюстрираме прилагането на Алгоритъм 2, е добавена и последната 0. За редицата до $(12, 224, 5)$ Алгоритъм 2 също приключва една стъпка преди края. Получените резултати за несъществуване на ортогонални масиви с параметри от горните две редици са представени по-долу.

Теорема 2.8.8 *Двоичен ортогонален масив с параметри* $(10, 112, 4)$ *не съществува.*

Следствие 2.8.9 *Двоичен ортогонален масив с параметри* $(11, 112, 4)$ *не съществува.*

Следствие 2.8.10 *Двоичен ортогонален масив с параметри* $(11, 224, 5)$ *не съществува.*

Следствие 2.8.11 *Двоичен ортогонален масив с параметри* $(12, 224, 5)$ *не съществува.*

Случаите за параметри $(9, 112, 4)$ и $(10, 224, 5)$ остават отворени. След прилагането на Алгоритъм 2 остават 33 елемента в множеството $W(9, 112, 4)$, а в множеството $W(10, 112, 5)$ остават 6 елемента. Това е първата ситуация, при която ни се налага да приложим най-бавния, но най-мощен Алгоритъм 3 с премахване на два стълба върху останалите елементи в изследваните от нас редици. След прилагането на Алгоритъм 3 най-горните два реда от горната таблица придобиват следния вид.

$$\begin{array}{lcccccc} |W(5,224,\tau)|: & 1 \to 1 & 8 \to 8 & 13 \to 13 & 6 \to 6 & 9 \to 9 & 6 \to 0 \\ |W(4,112,\tau)|: & 1 \to 1 & 8 \to 8 & 16 \to 16 & 18 \to 18 & 34 \to 34 & 33 \to 0 \end{array}$$

Така достигаме и до последните два резултата върху разглежданата редица.

Теорема 2.8.12 *Двоичен ортогонален масив с параметри* $(9, 112, 4)$ *не съществува.*

Следствие 2.8.13 *Двоичен ортогонален масив с параметри* $(10, 224, 5)$ *не съществува.*

За пълнота на изложението по-долу са представени някои (по-съществени) резултати за несъществуване на двоични ортогонални масиви, получени след прилагането на разработените от нас алгоритми. Тези резултати потвърждават вече известни резултати (съгласно Таблица 2.1) за несъществуване.

Да отбележим, че след прилагането на нашите алгоритми достигаме до заключения, които са известни като следствие от долната граница на Халявин [32], получена през 2010 година. Представената по-долу Теорема 2.8.14 е преформулирана в използваната от нас терминология.

Теорема 2.8.14 *[32] Ако* $3\tau \geq 2n - 2$, *тогава имаме, че* $\Lambda(n, \tau) \geq 2^{n-\tau-1}$.

От Теорема 2.8.14, както и в резултат на прилагането на нашите алгоритми са налице следните резултати за несъществуване.

Теорема 2.8.15 *Двоични ортогонални масиви със следните параметри* $(12, 1536, 8)$, $(12, 1792, 8)$ *и* $(15, 11264, 10)$ *не съществуват.*

След изпълнението на Алгоритъм 2 получаваме представените в следващата теорема (вече известни) резултати, подредени по изследваните за целта редици от двоични ортогонални масиви или съответните им мощности.

Теорема 2.8.16 *Двоични ортогонални масиви със следните параметри*

- $(11, 1536, 8)$, $(12, 3072, 9)$, $(13, 6144, 10)$;
- $(9, 448, 6)$, $(10, 896, 7)$;
- $(10, 1792, 8)$, $(11, 1792, 8)$;
- $(11, 3584, 9)$, $(12, 3584, 9)$;
- $(12, 7168, 10)$, $(13, 7168, 10)$;
- $(12, 2560, 8)$, $(13, 2560, 8)$;
- $(13, 5120, 9)$, $(14, 5120, 9)$;
- $(14, 10240, 10)$, $(15, 10240, 10)$;
- $(11, 2816, 8)$, $(12, 5632, 9)$, $(13, 11264, 10)$;
- $(13, 13312, 10)$, $(14, 13312, 10)$ *и* $(15, 13312, 10)$

не съществуват.

След прилагането на Алгоритъм 3 достигаме и до следните (вече известни) резултати за несъществуване.

Теорема 2.8.17 *Двоични ортогонални масиви с параметри* $(10, 384, 6)$ *и* $(11, 768, 7)$ *не съществуват.*

Нека да отбележим, че с прилагането на нашите алгоритми са генерирани всички възможности за спектри на съществуващи двоични ортогонални масиви (съгласно [28], [58]). Освен това сме проверили, че всички конструирани и експлицитно дадени на страницата на Слоен [58] двоични ортогонални масиви са със спектри измежду елементи на получените от нас съответни множества $W(n, M, \tau)$.

На база на получените в тази глава резултати, по-долу е представена актуализирана версия на Таблица 2.1 [28], а именно Таблица 2.2 с възможния минимален индекс за ортогонален масив с фиксирани сила τ и брой стълбове n.

n \ τ	2^{Hd}	3^{Hd}	4	5	6	7	8	9	10
4	2	1	1						
5	2	2	1	1					
6	2	2	2	1	1				
7	2	2	${}^{SZ}4$	2	1	1			
8	3	2	4^{c}	${}^{SZ}4$	2	1	1		
9	3	3	8^{ms}	4^{c}	4	2	1	1	
10	3	3	8^{bms}	8^{ms}	8^{Kh}	4	2	1	1
11	3	3	8^{bms}	8^{bms}	8^{c}	8^{Kh}	4	2	1
12	4	3	8^{bkms}	8^{bms}	12–16	8^{c}	8^{Kh}	4	2
13	4	4	8	8^{bkms}	16	12–16	16^{Kh}	8^{Kh}	4
14	4	4	8	8	16	16	16^{c}	16^{Kh}	8^{Kh}
15	4	4	8^{NR}	8	16^{RH}	16	26–32	16^{c}	16^{Kh}
16	5	4	10–16	8^{NR}	21–32	16^{RH}	39–64	26–32	32^{Kh}
17	5	5	12–16	10–16	26–32	21–32	$52–64^{jx}$	39–64	32^{c}
18	5	5	13–16	12–16	29–32	26–32	52–128	$52–64^{jx}$	54–64
19	5	5	$14–16^{X4}$	13–16	29–32	29–32	52–128	52–128	86–128
20	6	5	15–32	$14–16^{X4}$	29–32	29–32	$64–128^{c}$	52–128	128^{c}

Таблица 2.2. Стойности на $\Lambda(n,\tau)$, за $4 \le n \le 20$ и $2 \le \tau \le 10$.

Легенда:

$bkms$	Бойваленков, Кулина, Маринова, Стоянова (2015)
bms	Бойваленков, Маринова, Стоянова (2016)
c	цикличен код
Hd	точна стойност, получена от Адамарови масиви
jx	слепваща конструкция
Kh	конструкция на Халявин
ms	Маринова, Стоянова (2016)
NR	код на Нордстром-Робинсън (1967)
RH	конструкция на Рао-Хеминг
SZ	граница на Зайден и Земаш (1966)
$X4$	конструкция $X4$

Тази глава е написана въз основа на следните публикации: [16, 17, 43].

Глава 3

Спектри на троични ортогонални масиви

В трета глава е разгледан случаят $q = 3$, т.е. на ортогонални масиви в Хемингово-то пространство $H(n, 3)$ над азбука с три елемента 0, 1 и 2. Използва се означението $C \subset H(n, 3)$ е (n, M, τ) троичен ортогонален масив или $C - OA(n, M, 3, \tau)$, за да е ясна разликата с двоичните ортогонални масиви от втора глава. В Глава 3 са описани някои факти, които са доказани по аналогичен начин на двоичния случай, но в нововъведените тук означения. По този начин е налице пълнота на изложението и възможността за разглеждане на троичния случай, независимо от фактите и алгоритмите за двоични ортогонални масиви.

В параграф 3.1 се акцентира на някои важни и специфични характеристики на ортогоналните масиви в троичното Хемингово пространство. Формулирана е основната задача, която се разглежда в тази глава, както и базата от данни, от която започнахме охарактеризирането на спектрите на ортогоналните масиви в $H(n, 3)$. В параграф 3.2 е описана съответна конструкция за получаване на някои производни троични ортогонални масиви от даден (n, M, τ) троичен ортогонален масив. Получени са зависимости между спектрите на (вътрешни) точки за троични ортогонални масиви съответно с параметри (n, M, τ), $(n-1, M, \tau)$, $(n-1, M/3, \tau-1)$ и $(n-1, 2M/3, \tau-1)$. Представен е (основен) алгоритъм за редуциране на броя на възможните спектри на даден (n, M, τ) троичен ортогонален масив при отрязване на един произволен стълб от него. В последния параграф на тази глава е приложена модификация на основния алгоритъм, в която проверките са ограничени само върху множествата от спектри относно вътрешни за разглежданите масиви точки. В резултат на прилагането на този алгоритъм е доказано, че троичен ортогонален масив с параметри $(17, 108, 3)$ не съществува.

3.1 Троични ортогонални масиви

Да напомним, че свойствата на ортогоналните масиви, представени в първа глава, са в сила независимо от избора на q, в частност с помощта на Теорема 1.4.1 се генерират всички възможности за спектри на даден троичен ортогонален масив. Тази теорема обаче за $q = 3$ е приложима на практика за относително малки стойности на n и M, тъй като първоначалният брой на всички възможности за спектри относно произволна точка е много голям. Това налага да се ограничим в прилагането на нашите алгоритми основно само върху вътрешни точки за масива, независимо от факта, че повечето от получените ограничения върху спектрите са налице относно произволна за масива точка.

Да отбележим също, че успоредно с нашите изследвания, Bulutoglu и Margot [19] получават резултати върху ортогонални масиви за различни параметри n, M и τ. Техният подход за генериране на неизоморфните класове от масиви се оказва неподходящ в троичния случай при голяма сила τ и най-вече при по-голям брой на стълбовете n в ортогоналния масив. Това (както те споменават) се дължи именно на по-голямото множество, върху което трябва да се работи.

Важно е да се отбележи, че троичното Хемингово пространство не е антиподално, т.е. в общия случай за троичен ортогонален масив не е ясно дали двойката спектри $W = (w_0, w_1, \ldots, w_n)$ и $\overline{W} = (w_n, w_{n-1}, \ldots, w_0)$ принадлежат едновременно на множеството $W(n, M, \tau)$ или само един от тези спектри е елемент от това множество. Също така не е в сила теорема, аналогична на Теорема 2.1.1.

В тази глава ще изследваме следната основна задача.

Задача 3.1.1 *За фиксирани сила τ и брой стълбове (размерност) n да се намери минималната възможна мощност M, за която съществува (n, M, τ) троичен ортогонален масив (τ-дизайн) C в $H(n, 3)$, т.е. да се оцени величината*

$$B(n, \tau) = min\{M = |C| : \text{ съществува } \tau - \text{дизайн } \ C \subset H(n, 3)\}.$$

От тъждеството $M = \lambda 3^\tau$, можем да преформулираме Задача 3.1.1 и по следния еквивалентен начин.

Задача 3.1.2 *За фиксирани сила τ и брой стълбове (размерност) n да се намери минималният възможен индекс λ, за който съществува $(n, \lambda 3^\tau, \tau)$ троичен ортогонален масив (τ-дизайн) C в $H(n, 3)$, т.е. да се оцени величината*

$$\Lambda(n, \tau) = min\{\lambda = |C|/3^\tau : \text{ съществува } \tau - \text{дизайн } \ C \subset H(n, 3)\}.$$

Нашата работа върху троичните ортогонални масиви стартира на базата на резултатите в книгата "Orthogonals Arrays (Theory and Applications)" на A.S. Hedayat, N.J.A. Sloane, John Stufken [28] и поддържаните от Sloane на уеб страницата [58] съответни таблици.

Резултатите в представената по-долу Таблица 3.1 са част от Таблица 12.2 в [28] като описаните по-надолу в тази глава алгоритми са прилагани върху троични ортогонални масиви за брой стълбове $4 \leq n \leq 25$, сила $2 \leq \tau \leq 10$ до индекс $1 \leq \lambda \leq 7$.

За пълнота в Таблица 3.1 е отразен и доказаният в последния параграф на тази глава нов резултат, а именно, че $5 \leq \Lambda(17, 3) \leq 9$, тъй като не съществува $(17, 108, 3)$ троичен ортогонален масив [7].

n \ τ	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4	1^{B1}	1	1						
5	2	2^{FN}	1	1					
6	2	${}^{HS}3$	${}^{HU}3$	1	1				
7	2^{AK}	3	3	${}^{HU}3$	1	1			
8	3	3	3	3	3	1	1		
9	3	3	3	3	4–9	3	1	1	
10	3	3	3	3	4–9	5–9	3	1	1
11	3	${}^{Se}4$–9	3	3	4–9	7–9	5–9	3	1
12	3	4–9	5–9	3^{Go}	6–27	7–9	9	6–9	3
13	3^{RH}	4–9	5–9	5–9	7–27	8–27	9^{RH}	11–27	6–9
14	4–6	4–9	6–9^{KP}	6–9^{qr}	8–27	10–27	9–27	17–27	13–27
15	4–6	4–9	6–27	6–27	9–27^{LZ}	10–27	14–27	17–81	23–27^{HN}
16	4–6	4–9	7–27	6–27	9–81	10–81	15–27^{HN}	18–81	23–81
17	5–6	${}^{bmrs}5$–9	9–27	7–27	10–81	11–81	15–81	25–81	23–81
18	5–6	5–9	9–27	9–27	12–81	11–81	20–81	25–81	34–81
19	5–6	5–9	10–27	9–27	14–81	12–81	26–81	25–243	40–81^{GB}
20	${}^{Z2}6$	5–9^{KP}	11–27	10–27	16–81	15–81	27–81	31–243	40–243^{N3}
21	${}^{Z2}6$	5–27	12–27	11–27	18–81	16–81	29–81	32–243^{GB}	46–243^{KP}
22	${}^{Z1}6$	${}^{B0}6$–27	13–27	12–27	21–81	19–81	35–81	33–729	55-729
23	6	${}^{B0}6$–27	15–27	13–27	24–243	22–81	39–81	37–729	66–729
24	6	6–27	16–27	15–27	25–243	24–243	41–81^{qr}	40–729	71–729^{KP}
25	6^{AK}	6–27	17–27	16–27	31–243	25–729	45–243	43–729^{BE}	83–2187

Таблица 3.1. Стойности на $\Lambda(n,\tau)$, за $4 \le n \le 25$ и $2 \le \tau \le 10$.

Легенда:

AK	конструкция на Addelman и Kempthorne (1961)
$B0$	граница на Bose и Bush (1952)
$B1$	Bush (1952) или конструкция на Reed-Solomon (1960)
BE	код на Bierbrauer и Edel (1997)
$bmrs$	Бумова, Маринова, Рамай, Стоянова (2019)
FN	конструкция на Fujii, Namikawa и Yamamoto (1987)
GB	код на Gulliver и Bhargava (1992)
Go	код на Голей
HN	код на Hill и Newton (1988)
HS	граница на Hedayat, Seiden и Stufken (1997)
HU	граница на Hedayat, Stufken и Su (1997)
KP	код на Kschischang и Pasupathy (1992)

$N3$	$OA(3^{15}, 20, 3, 11)$, получен от код на Gulliver и Ostergard (1998)
RH	конструкция на Рао-Хеминг
qr	квадратично остатъчен код
S	граница на Seiden (1955)
SZ	граница на Зайден и Земаш (1966)
$Z1$	код на Вагнер (1965)
$Z2$	конструкция на Shrikhande и Singhi (1979)

3.2 Алгоритъм за редуциране на спектрите на троичен ортогонален масив

В този параграф ще разгледаме какви ограничения се получават при конструкцията с премахване на един произволен стълб от даден троичен ортогонален масив. Нека n, M и $\tau < n$ са фиксирани. Нека $C \subset H(n,3)$ е троичен ортогонален масив с параметри (n, M, τ) и $c \in H(n,3)$ е произволна точка от троичното Хемингово пространство, относно която спектърът на масива C е $W = (w_0, w_1, \ldots, w_n) \in W(n, M, \tau)$. Да премахнем произволен стълб от масива C и да приемем, че е премахнат ℓ-тият стълб, $1 \le \ell \le n$. Да означим с C' получения $(n-1, M, \tau)$ троичен ортогонален масив, а точката $c' \in H(n-1,3)$ да е получена след премахването на ℓ-тата координата на точката c. Нека $W' = (w'_0, w'_1, \ldots, w'_{n-1}) \in W(n-1, M, \tau)$ е спектърът на ортогоналния масив C' относно точката c'.

Да напомним, че въз основа на Теорема 1.4.4 можем да разглеждаме $W(n, M, \tau)$ като множеството от всички спектри на троичен ортогонален масив със съответните параметри спрямо коя да е фиксирана точка от пространството, в частност спрямо нулевата дума $c = \mathbf{0} \in H(n,3)$. По този начин след премахване на една произволна координата от $c = \mathbf{0}$ достигаме отново до нулевата дума $c' = \mathbf{0} \in H(n-1,3)$, относно която ще разглеждаме спектъра W' на троичния ортогонален масив C'.

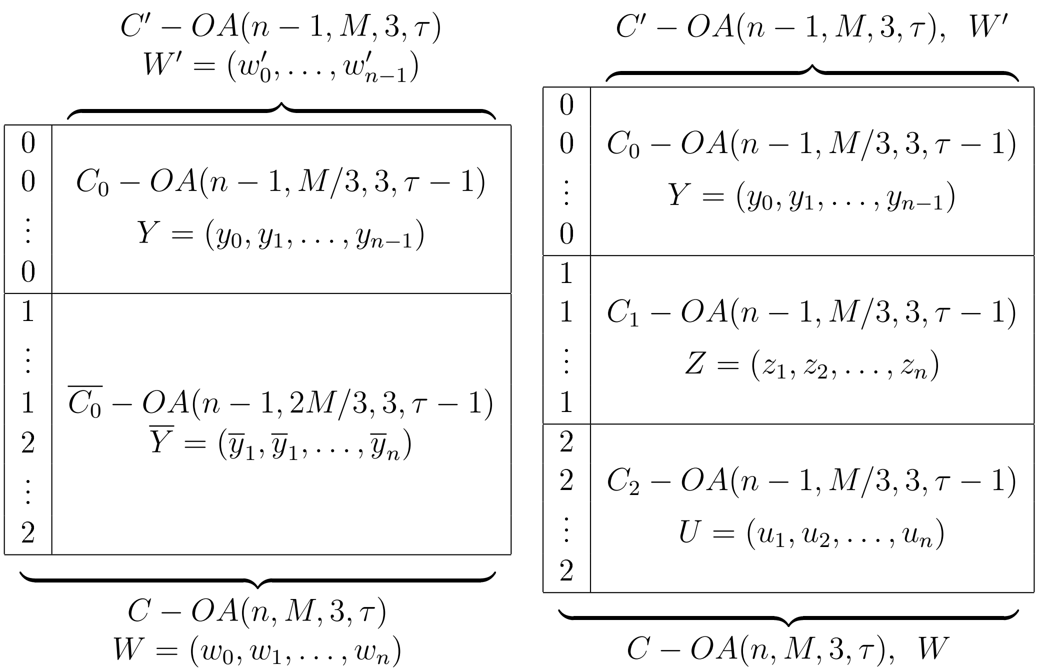
За пълнота на изложението тук отново ще напомним дефиницията на понятието *i-блок* в даден ортогонален масив. При това в троичния случай са въведени нови поподходящи означения за броя на нулевите и ненулевите елементи, принадлежащи на даден стълб от масива и съответен i-блок относно разглежданата точка $c = \mathbf{0}$, както и допълнителни означения, разграничаващи броя на символите 1 и 2, съответно.

Определение 3.2.1 *Нека C е (n, M, τ) троичен ортогонален масив и c е произволна точка от $H(n,3)$. За всяко фиксирано число $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ ще наричаме i-блок спрямо точката c подматрицата на масива C с размери $w_i \times n$, която се състои от всички редове на C на разстояние i от точката c.*

Нека фиксираме даден стълб на ортогоналния масив C. Да означим с $\overline{y}_i$ (y_i) броя на ненулевите елементи (нулите) в този стълб, които принадлежат на i-блока спрямо точката c за $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Освен това да означим с z_i броя на единиците, които са от съответния стълб и i-блока, а с u_i да означим броя на символите 2, които са от фиксирания стълб и принадлежат на i-блока спрямо точката c за $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

Нека пренаредим редовете на троичния ортогонален масив C, така че в първите $M/3$ реда ℓ-тите координати да са 0, в следващите $M/3$ реда на ℓ-та позиция да е символът 1, а в последните $M/3$ реда на ℓ-та позиция да е символът 2. Съгласно Свойство 7 на ортогоналните масиви следва, че след премахване на ℓ-тия стълб на C от всяка третина получаваме три производни троични ортогонални масива с параметри $(n-1, M/3, \tau-1)$, който ще означаваме съответно с C_0, C_1 и C_2. Спектрите на тези масиви относно точката c' ще означаваме съответно с $Y = (y_0, y_1, \ldots, y_{n-1})$, $Z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ и $U = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ като е ясно, че спектрите Y, Z и U трябва да принадлежат на множеството $W(n-1, M/3, \tau-1)$. При това от Свойство 2 на ортогоналните масиви следва, че редовете от C', оставащите след като отделим редовете на масива C_0, т.е. съвкупността от редовете на C', получени от редовете с единици и двойки в ℓ-ти стълб на масива C, образуват производен ортогонален масив с параметри $(n-1, 2M/3, \tau-1)$. Този троичен ортогонален масив ще означаваме с $\overline{C}$, а спектъра му относно точката c' ще означаваме с $\overline{Y} = (\overline{y}_1, \overline{y}_2, \ldots, \overline{y}_n)$ като $\overline{Y} \in W(n-1, 2M/3, \tau-1)$.

За по-голяма яснота всички описани по-горе производни троични ортогонални масиви, получени от масива C, са визуализирани в Конструкция 3.2 (Фигура 1), като без ограничение на общността може да считаме, че сме премахнали първия стълб, т.е. $\ell = 1$.



Конструкция 3.2 (Фигура 1).

В сила е следната теорема, в която са получени в явен вид спектрите на троичните ортогонални масиви от Конструкция 3.2 (Фигура 1) по аналогичен начин на двоичния случай (виж Теорема 2.4.2, Теорема 2.4.8 и Теорема 2.4.12). Както вече споменахме в началото на тази глава, за пълнота на изложението и възможността за по-лесно разбиране на получените резултати в троичния случай, независимо от фактите във втора глава, е представено накратко доказателството на теоремата в означенията на Конструкция 3.2 (Фигура 1).

Теорема 3.2.2 *Нека $C \subset H(n,3)$ е (n,M,τ) троичен ортогонален масив, за който $W \in W(n,M,\tau)$ е спектър на C спрямо произволна точката $c \in H(n,3)$. Нека $c' \in H(n-1,3)$ и C' са получени съответно от c и C съгласно Конструкция 3.2 (Фигура 1), а $W' \in W(n-1,M,\tau)$ е спектър на масива C' относно точката c'. Тогава системата линейни уравнения*

$$\left| \begin{array}{l} y_i + \overline{y}_i = w_i,\ i = 1,2,\ldots,n-1 \\ y_i + \overline{y}_{i+1} = w'_i,\ i = 0,1,\ldots,n-1 \\ y_0 = w_0 \\ \overline{y}_n = w_n \\ y_i, \overline{y}_i \in \mathbb{Z},\ y_i \geq 0,\ \overline{y}_i \geq 0,\ i = 0,1,\ldots,n \end{array} \right. . \tag{3.1}$$

с неизвестни $Y = (y_0, y_1, \ldots, y_{n-1})$ и $\overline{Y} = (\overline{y}_1, \overline{y}_2, \ldots, \overline{y}_n)$ има единствено решение от вида

$$\begin{aligned} Y &= (y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}) \\ &= (w_0, w_1 - (w'_0 - w_0), w_2 - \sum_{j=0}^{1}(w'_j - w_j), \ldots, w_{n-1} - \sum_{j=0}^{n-2}(w'_j - w_j)) \\ &= (w_0, \sum_{j=0}^{n-2}(w'_{n-1-j} - w_{n-j}), \ldots, \sum_{j=0}^{1}(w'_{n-1-j} - w_{n-j}), w'_{n-1} - w_n); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{Y} &= (\overline{y}_1, \overline{y}_2, \ldots, \overline{y}_n) \\ &= (w'_0 - w_0, \sum_{j=0}^{1}(w'_j - w_j), \ldots, \sum_{j=0}^{n-2}(w'_j - w_j), w_n) \\ &= (w_1 - \sum_{j=0}^{n-2}(w'_{n-1-j} - w_{n-j}), \ldots, w_{n-1} - (w'_{n-1} - w_n), w_n). \end{aligned}$$

При това векторът Y е спектър на ортогоналния масив C_0 относно точката $c' \in H(n-1,3)$, т.е. $Y \in W(n-1, M/3, \tau-1)$, а векторът $\overline{Y}$ е спектър на масива $\overline{C}_0$ относно точката c', т.е. $\overline{Y} \in W(n-1, 2M/3, \tau-1)$.

Доказателство: От дефинициите на $\overline{y}_i$ и y_i е ясно, че са в сила равенствата $\overline{y}_0 = 0$ и $y_n = 0$, а от Дефиниция 3.2.1 следва, че са изпълнени тъждествата:

$$y_i + \overline{y}_i = w_i, \quad i = 1, \ldots, n-1, \quad \overline{y}_n = w_n, \quad y_0 = w_0.$$

Да разгледаме елемента w'_i от спектъра W' на масива C' спрямо точката c'. В w'_i броим точките, които се получат от редовете на оригиналния масив C на разстояние i и ℓ-та координата 0, заедно с редовете на масива C, които на ℓ-та координата имат ненулева стойност (1 или 2) и разстояние $i+1$ спрямо думата c. Броят на редове от първия вид е точно y_i, а тези от втория вид са точно $\overline{y}_{i+1}$ на брой. Следователно, са в сила и равенствата

$$y_i + \overline{y}_{i+1} = w'_i$$

за всяко $i = 0, 1, \ldots, n-1$.

По-нататък, да забележим, че системата (3.1) може да се запише в следния еквивалентен вид

$$\left| \begin{array}{l} y_i = w_i - \overline{y}_i,\ i = 1, 2, \ldots, n-1 \\ \overline{y}_{i+1} = w'_i - w_i - \overline{y}_i,\ i = 0, 1, \ldots, n-1 \\ y_0 = w_0 \\ \overline{y}_n = w_n \\ y_i, \overline{y}_i \in \mathbb{Z},\ y_i \geq 0,\ \overline{y}_i \geq 0,\ i = 0, 1, \ldots, n \end{array} \right. . \tag{3.2}$$

Доказателството за вида на $\overline{y}_i = \sum_{j=0}^{i-1}(w'_j - w_j)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ е в резултат на индукция и използване на равенствата $\sum_{j=0}^{n-1} w'_j = M$ и $\sum_{j=0}^{n} w_j = M$. Като заместим получените $\overline{y}_i$ в съответните y_i, за $i = 1, 2, \ldots, n-1$, еднозначно получаваме, че $Y = (w_0, w_1 - (w'_0 - w_0), w_2 - \sum_{j=0}^{1}(w'_j - w_j), \ldots, w_{n-1} - \sum_{j=0}^{n-2}(w'_j - w_j))$. Следователно, системата (3.1) има единствено решение.

За да получим C_0, сме премахнали нулите от ℓ-тия стълб на C и сме взели само съответните редове. От дефиницията на i-блок имаме, че y_i е точно броят на думите в C на разстояние i спрямо $c \in H(n, 3)$. Следователно, броят на точките в C_0 на разстояние i е точно y'. Налице са следните две възможности: или $y_0 \geq 1$, т. е. точката c' е вътрешна за ортогоналния масив C_0, и следователно $Y \in P(n-1, M/3, \tau - 1)$; или $y_0 = 0$, т. е. точката c' е външна за масива C_0 и по аналогичен начин следва, че $Y \in Q(n-1, M/3, \tau-1)$. Следователно, Y е спектър на ортогоналния масив C_0 относно точката $c' \in H(n-1, 3)$, т.е. $Y \in W(n-1, M/3, \tau-1)$. По аналогичен начин се показва, че векторът $\overline{Y}$ е спектър на масива $\overline{C}_0$ относно точката c', т.е. $\overline{Y} \in W(n-1, 2M/3, \tau-1)$. □

Да отбележим, че при фиксирани спектри $W \in W(n, M, \tau)$ и $W' \in W(n-1, M, \tau)$ съответно на троичните ортогонални масиви C и C', системата (3.1) може да бъде записана и в следния еквивалентен векторен вариант относно неизвестните вектори Y и $\overline{Y}$:

$$\left| \begin{array}{l} Y + \overline{Y} = W' \\ (Y, 0) + (0, \overline{Y}) = W \end{array} \right. . \tag{3.3}$$

В сила са следните твърдения, от прилагането на които можем да редуцираме възможностите за спектри на разглежданите троични ортогонални масиви, в частност да редуцираме елементите на множеството $W(n, M, \tau)$.

Следствие 3.2.3 *За фиксиран възможен спектър W на (n, M, τ) троичен ортогонален масив C, ако системата (3.1) няма решение за нито един спектър $W' \in W(n-1, M, \tau)$, тогава елементът W следва да бъде отхвърлен от множеството $W(n, M, \tau)$, т.е. $W \notin W(n, M, \tau)$.*

Следствие 3.2.4 *Ако $Y \notin W(n-1, M/3, \tau-1)$ или $\overline{Y} \notin W(n-1, 2M/3, \tau-1)$ двойката (W, W'), от която са получени по Теорема 3.2.2, следва да бъде отхвърлена.*

От Теорема 3.2.2 и следствията след нея освен че се отхвърлят част от елементите от множеството от спектри $W(n, M, \tau)$, се получават и всички възможни двойки спектри (W, W'), когато W' пробягва множеството $W(n-1, M, \tau)$. Тези двойки подлежат на по-нататъшна проверка дали удовлетворяват ограниченията за спектрите на другите масиви, получени в Конструкция 3.2 (Фигура 1).

Когато прилагаме алгоритмите ни само и единствено върху множествата от вътрешни точки за изследваните редици от троични ортогонални масиви, се налагат някои допълнителни проверки. Нека да разгледаме спектър $W = P$ на даден троичен ортогонален масив C спрямо точка $c \in C$. Ясно е, че спектрите $W' = P' \in P(n-1, M, \tau)$ и $Y \in P(n-1, M/3, \tau-1)$ на троичните ортогонални масиви C' и C_0, съответно, също са относно вътрешната за тях точка c'. Докато, спектърът $\overline{Y}$ на масива $\overline{C}$ може да се окаже както относно вътрешна за масива C' точка (когато $\overline{y}_1 > 0$), така и относно външна за него точка (при $\overline{y}_1 = 0$). В този случай, за да се ограничим само върху множествата от спектри относно вътрешни за масивите точки, трябва да проверяваме дали е в сила следната модификация на Следствие 3.2.4.

Следствие 3.2.5 *Ако $Y \notin P(n-1, M/3, \tau-1)$ или $\overline{y}_1 > 0$ и $\overline{Y} \notin P(n-1, 2M/3, \tau-1)$ двойката (P, P'), от която са получени по Теорема 3.2.2, следва да бъде отхвърлена.*

Да напомним, че троичният ортогонален масив $\overline{C}_0$ е обединение на масивите C_1 и C_2 със спектри съответно $Z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ и $U = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$. Тогава спектърът $\overline{Y}$ на $\overline{C}_0$ може да бъде изразен чрез спектрите Z и U по следния начин:

$$\overline{Y} = (\overline{y}_1, \overline{y}_2, \ldots, \overline{y}_n) = (z_1 + u_1, z_2 + u_2, \ldots, z_n + u_n) \in W(n-1, 2M/3, \tau-1).$$

По аналогичен начин, можем да получим още два троични ортогонални масива, а именно $\overline{C_1} = C_0 \cup C_2 \in W(n-1, 2M/3, \tau-1)$ и $\overline{C_2} = C_0 \cup C_1 \in W(n-1, 2M/3, \tau-1)$. Техните спектри ще означаваме съответно с $\overline{Z}$ и $\overline{U}$. Тогава можем да разглеждаме съответно двойките C_1 и $\overline{C_1}$ или C_2 и $\overline{C_2}$, вместо двойката ортогонални масиви C_0 и $\overline{C_0}$ в горните разсъждения. По-точно, ако знаем спектрите Y, Z и U, лесно получаваме, че за спектрите $\overline{Z}$ и $\overline{U}$ на ортогоналните масиви $\overline{C_1}$ и $\overline{C_2}$ са в сила следните равенства:

$$\begin{aligned}
\overline{Z} &= (\overline{z}_0, \overline{z}_1, \ldots, \overline{z}_{n-1}) = (y_0 + u_1, y_1 + u_2, \ldots, y_{n-1} + u_n), \\
\overline{U} &= (\overline{u}_0, \overline{u}_1, \ldots, \overline{u}_{n-1}) = (y_0 + z_1, y_1 + z_2, \ldots, y_{n-1} + z_n).
\end{aligned}$$

За по-голяма яснота и пълнота на изложението в следващото твърдение са събрани и описани като система всички налични до момента зависимости между спектрите на даден троичен ортогонален масив C и производните му масиви: C', C_0, C_1, C_2, $\overline{C_0}$, $\overline{C_1}$ и $\overline{C_2}$.

Теорема 3.2.6 *Нека $C \subset H(n, 3)$ е (n, M, τ) троичен ортогонален масив, за който $W \in W(n, M, \tau)$ е спектър на C спрямо произволна точката $c \in H(n, 3)$. Нека $c' \in H(n-1, 3)$ и C' са получени съответно от c и C съгласно Конструкция 3.2 (Фигура 1), а $W' \in W(n-1, M, \tau)$ е спектър на масива C' относно точката c'.*

Тогава спектрите Y, Z, U, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$ и $\overline{U}$ на производните ортогонални масиви C_0, C_1, C_2, $\overline{C_0}$, $\overline{C_1}$ и $\overline{C_2}$ удовлетворяват следната система линейни уравнения

$$\left|\begin{array}{l} y_i + z_i + u_i = w_i,\ i = 1, 2, \ldots, n-1; \\ z_i + u_i = \overline{y}_i,\ i = 1, 2, \ldots, n; \\ y_i + u_{i+1} = \overline{z}_i,\ i = 0, 1, \ldots, n-1; \\ y_i + z_{i+1} = \overline{u}_i,\ i = 0, 1, \ldots, n-1; \\ y_i + \overline{y}_{i+1} = w'_i,\ i = 0, 1, \ldots, n-1; \\ z_{i+1} + \overline{z}_i = w'_i,\ i = 0, 1, \ldots, n-1; \\ u_{i+1} + \overline{u}_i = w'_i,\ i = 0, 1, \ldots, n-1; \\ y_0 = w_0,\ \overline{y}_n = z_n + u_n = w_n; \\ y_i,\ \overline{y}_i \in \mathbb{Z},\ y_i \geq 0,\ \overline{y}_i \geq 0,\ i = 0, \ldots, n; \\ z_i,\ \overline{z}_i \in \mathbb{Z},\ z_i \geq 0,\ \overline{z}_i \geq 0,\ i = 0, \ldots, n; \\ u_i,\ \overline{u}_i \in \mathbb{Z},\ u_i \geq 0,\ \overline{u}_i \geq 0,\ \ i = 0, \ldots, n. \end{array}\right. \tag{3.4}$$

Освен зависимостите от предходната теорема можем да получим нови ограничения върху спектрите на разглежданите троични ортогонални масиви като използваме Свойство 5 на ортогоналните масиви. По-точно, каквато и пермутация на символите 0, 1 и 2 от симетричната група S_3 да извършим във фиксиран стълб на разглеждания (n, M, τ) троичен ортогонален масив C, се образува нов (n, M, τ) троичен ортогонален масив, изоморфен на изходния масив C. Нека да означим трите транспозиции от симетричната група S_3 съответно със $\sigma_0 = (12)$, $\sigma_1 = (20)$ и $\sigma_2 = (01)$, а двата тройни цикъла съответно с $\rho = (012)$ и $\rho^2 = (021)$. Да извършим първо трите транспозиции върху фиксирания и разглеждан от нас до момента ℓ-ти стълб на ортогоналния масив C със спектър $W \in W(n, M, \tau)$ относно произволна точка $c \in H(n, 3)$. По този начин получаваме три, изоморфни на масива C, троични ортогонални масива с параметри (n, M, τ). Да означим тези масиви съответно с C^{σ_0}, C^{σ_1} и C^{σ_2}. Резултатът от приложението на пермутацията $\sigma_0 = (12)$ върху C води до ортогонален масив, чиито спектър спрямо точката c съвпада със спектъра W на C, поради което ще "отъждествяваме" двата изоморфни масива, т.е. $C^{\sigma_0} = C$. Спектрите на масивите C^{σ_1} и C^{σ_2}, получени при пермутациите σ_1, σ_2 ще означаваме с W^{σ_1} и W^{σ_2}, съответно. Ако извършим двата тройни цикъла от S_3 върху ℓ-тия стълб на ортогоналния масив C със спектър $W \in W(n, M, \tau)$ относно произволна точка $c \in H(n, 3)$, получаваме съответно два изоморфни на масива C, троични ортогонални масива (C^{ρ} и C^{ρ^2}) с параметри (n, M, τ), чиито спектри ще съвпадат съответно с $W^{\rho} = W^{\sigma_1}$ и $W^{\rho^2} = W^{\sigma_2}$, поради което ще "отъждествяваме" и следните двойки изоморфни масиви $C^{\rho} = C^{\sigma_1}$ и $C^{\rho^2} = C^{\sigma_2}$.

В сила е следната теорема, задаваща връзките между спектрите W, W^{σ_1} и W^{σ_2} на троичните ортогонални масиви C, C^{σ_1} и C^{σ_2}, съответно.

Теорема 3.2.7 *Нека $C \subset H(n, 3)$ е (n, M, τ) троичен ортогонален масив, за който*

$$\begin{aligned} W &= (w_0, w_1, \ldots, w_n) = (y_0, y_1 + \overline{y}_1, \ldots, y_{n-1} + \overline{y}_{n-1}, \overline{y}_n) \\ &= (y_0, y_1 + z_1 + u_1, \ldots, y_{n-1} + z_{n-1} + u_{n-1}, z_n + u_n) \in W(n, M, \tau), \end{aligned}$$

е спектърът на C спрямо произволна точка $c \in H(n, 3)$. Тогава:

(а) *Спектърът* $W^{\sigma_1} \in W(n, M, \tau)$ *на троичния ортогонален масив* C^{σ_1} *относно точката с има вида*

$$W^{\sigma_1} = (u_1, y_0 + z_1 + u_2, \ldots, y_{n-2} + z_{n-1} + u_n, y_{n-1} + z_n);$$

(б) *Спектърът* $W^{\sigma_2} \in W(n, M, \tau)$ *на троичния ортогонален масив* C^{σ_2} *относно точката с има вида*

$$W^{\sigma_2} = (z_1, y_0 + u_1 + z_2, \ldots, y_{n-2} + u_{n-1} + z_n, y_{n-1} + u_n).$$

Преди да докажем теоремата нека да илюстрираме на Конструкция 3.2 (Фигура 2) описаните по-горе троични ортогонални масиви C^{σ_1} и C^{σ_2}, получени от ортогоналния масив C.

$$
\begin{array}{cc}
\overbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}^{C' - OA(n-1, M, 3, \tau),\ W'} & \overbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}^{C' - OA(n-1, M, 3, \tau),\ W'} \\
\underbrace{\begin{array}{|c|c|}
\hline
2 & \\
2 & C_0 - OA(n-1, M/3, 3, \tau-1) \\
\vdots & Y = (y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}) \\
2 & \\
\hline
1 & \\
1 & C_1 - OA(n-1, M/3, 3, \tau-1) \\
\vdots & Z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \\
1 & \\
\hline
0 & \\
0 & C_2 - OA(n-1, M/3, 3, \tau-1) \\
\vdots & U = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \\
0 & \\
\hline
\end{array}}_{C^{\sigma_1} - OA(n, M, 3, \tau),\ W^{\sigma_1}}
&
\underbrace{\begin{array}{|c|c|}
\hline
1 & \\
1 & C_0 - OA(n-1, M/3, 3, \tau-1) \\
\vdots & Y = (y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}) \\
1 & \\
\hline
0 & \\
0 & C_1 - OA(n-1, M/3, 3, \tau-1) \\
\vdots & Z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \\
0 & \\
\hline
2 & \\
2 & C_2 - OA(n-1, M/3, 3, \tau-1) \\
\vdots & U = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \\
2 & \\
\hline
\end{array}}_{C^{\sigma_2} - OA(n, M, 3, \tau),\ W^{\sigma_2}}
\end{array}
$$

Конструкция 3.2 (Фигура 2).

Доказателство: Нека да преброим думите в ортогоналния масив C^{σ_1}, които са на разстояние i, за $1 \leq i \leq n-1$, спрямо точката $c \in H(n, 3)$. Без ограничение на общността, но за простота на доказателството можем да приемем, че $\ell = 1$, а точката $c = \mathbf{0} \in H(n, 3)$. Тогава в масива C^{σ_1} имаме:

– y_{i-1} точки, които идват от C_0, тъй като са разменени местата на нулите и двойките в първия стълб.

– u_{i+1} точки, които идват от C_2 и са на разстояние i от точката c, тъй като те съдържат нули в своите първи позиции.

– z_i точки, които идват от C_1 и са на разстояние i от точката c, защото пермутацията σ_1 не размества единиците и съответно в C_1 думите не променят своето разстояние до точката c.

Така получихме, че за $1 \leq i \leq n-1$ броя $w_i^{\sigma_1}$ на точките в ортогоналния масив C^{σ_1}, които са на разстояние i от точката c е точно $y_{i-1} + z_i + u_{i+1}$.

Броят $w_0^{\sigma_1}$ на думите на разстояние 0 могат да се получат единствено от масива C_2, където сме добавили нула на първа позиция.

Броят $w_n^{\sigma_1}$ на думите в ортогоналния масив C^{σ_1}, които са на разстояние n от точката c, могат да се получат както от думите на разстояние $n-1$ в масива C_1, пред които в първа позиция има единица, така и от думите в масива C_0, пред които в първа позиция има двойка, т.е. този брой е точно $y_{n-1} + z_n$.

Следователно, $W^{\sigma_1} = (u_1, y_0 + z_1 + u_2, \ldots, y_{n-2} + z_{n-1} + u_n, y_{n-1} + z_n)$ е спектърът на C^{σ_1} спрямо точката $c \in H(n,3)$, т.е. $W^{\sigma_1} \in W(n, M, \tau)$. По аналогичен начин получаваме, че $W^{\sigma_2} = (z_1, y_0 + u_1 + z_2, \ldots, y_{n-2} + u_{n-1} + z_n, y_{n-1} + u_n)$ е спектърът на C^{σ_2} спрямо точката $c \in H(n,3)$, т.е. имаме, че $W^{\sigma_2} \in W(n, M, \tau)$. $\square$

В сила са следните следствия от Теорема 3.2.7, след прилагането на които достигаме до нови редукции на възможностите за спектри на изследваните троични ортогонални масиви.

Следствие 3.2.8 *Ако $W^{\sigma_1} \notin W(n, M, \tau)$ или $W^{\sigma_2} \notin W(n, M, \tau)$, то двойката (W, W'), от която са получени по Теорема 3.2.7, следва да бъде отхвърлена.*

Следствие 3.2.9 *Спектърът W на даден троичен ортогонален масив C следва да бъде отхвърлен, ако за всяка възможна двойка (W, W'), получена от Система 3.1, тази двойка е отхвърлена.*

Нека съществува поне една възможна двойка (W, W') спектри на изследваните троични ортогонални масиви C и C', която не е отхвърлена след като сме приложили Теорема 3.2.2, Теорема 3.2.6, Теорема 3.2.7 и всички произлизащи от тях следствия. Нека да означим с

$$(\overline{y}_0^{(r)} = 0, \overline{y}_1^{(r)}, \ldots, \overline{y}_n^{(r)}; y_0^{(r)}, y_1^{(r)}, \ldots, y_{n-1}^{(r)}, y_n^{(r)} = 0), \quad r = 1, \ldots, s.$$

всички различни решения на система (3.1) от Теорема 3.2.2, които са останали след горните проверки за всевъзможните масиви C', получени от масива C при премахване на някой негов стълб. Да означим с k_r броя на стълбове, които съответстват на r-тото решение на системата (3.1) за $r = 1, \ldots, s$. В сила е следната теорема.

Теорема 3.2.10 *Нека $W \in W(n, M, \tau)$ е възможност за спектър на троичен ортогонален масив с параметри (n, M, τ) и W' пробягва множеството $W(n-1, M, \tau)$. Ако системата линейни уравнения*

$$\left| \begin{array}{lllll} k_1 & +k_2 & +\ldots & +k_s & = n \\ k_1\overline{y}_1^{(1)} & +k_2\overline{y}_1^{(2)} & +\ldots & +k_s\overline{y}_1^{(s)} & = w_1 \\ k_1\overline{y}_2^{(1)} & +k_2\overline{y}_2^{(2)} & +\ldots & +k_s\overline{y}_2^{(s)} & = 2w_2 \\ \vdots & & & & \\ k_1\overline{y}_n^{(1)} & +k_2\overline{y}_n^{(2)} & +\ldots & +k_s\overline{y}_n^{(s)} & = nw_n \\ k_r \in \mathbb{Z}, & k_r \geq 0, & r = 1, & \ldots, s & \end{array} \right. . \qquad (3.5)$$

спрямо неизвестните $k_1, k_2, \ldots, k_s$ няма решение, тогава W следва да бъде отхвърлен като възможен спектър, т.е. $W \notin W(n, M, \tau)$.

Доказателство: Нека за всички възможни отрязвания на някой стълб, т.е. за всички възможни W', системата (3.1) има s решения, които съгласно условието са

$$(\overline{y}_0^{(r)} = 0, \overline{y}_1^{(r)}, \ldots, \overline{y}_n^{(r)}; y_0^{(r)}, y_1^{(r)}, \ldots, y_{n-1}^{(r)}, y_n^{(r)} = 0), \quad r = 1, 2, \ldots, s.$$

Означаваме с k_r броя на стълбовете, които съответстват на r-тото решение на системата, $r = 1, \ldots, s$. Вече споменахме, че без ограничение на общността можем да считаме, че точката $c = \mathbf{0} \in H(n, 3)$. Ако за фиксирано i разгледаме i-блока спрямо точката c, можем да забележим, че броят на ненулевите елементи в него е точно iw_i. От друга страна, като вземем предвид факта, че $\overline{y}_i$ е точно броят на думите от i-блока, които имат символ 1 или 2 на съответния стълб, получаваме, че броят на ненулевите елементи в i-блока е равен също така на $k_1\overline{y}_i^{(1)} + k_2\overline{y}_i^{(2)} + \ldots + k_s\overline{y}_i^{(s)}$. Следователно, за всяко $i = 0, \ldots, s$ са изпълнени равенствата в система (3.5). $\square$

Въз основа на описаните в този параграф теореми и следствия е организиран основен алгоритъм (Algorithm 5) за редуциране на елементите в множеството $W(n, M, \tau)$ като спектри на даден (n, M, τ) троичен ортогонален масив. За по-голяма яснота и пълнота на изложението е представен псевдокод на алгоритъма, като е указано въз основа на кои теореми или следствия са извършени проверките в него.

Стартира се с генерирането на съответните редици от спектри на ортогонални масиви посредством Теорема 1.4.1. По-точно, тъй като множеството $W(n, M, \tau)$ зависи пряко от множествата $W(n-1, M, \tau)$, $W(n-1, M/3, \tau-1)$ и $W(n-1, 2M/3, \tau-1)$, естествено стигаме до заключението, че преди да започнем да разглеждаме основното множество $W(n, M, \tau)$, трябва да редуцираме възможните спектри в другите три множества и така нататък, докато достигнем до ортогонален масив със сила 1 и докато броят на стълбовете n е по-голям или равен на силата τ. В табличен вид е описана идеята как се образуват редиците от множества, които се отразяват върху изследването на елементите на основното множество $W(n, M, \tau)$.

$W(n, M, \tau)$	$W(n-1, M, \tau)$	$\ldots$	$W(\tau, M, \tau)$
$W(n-1, M/3, \tau-1)$ $W(n-1, 2M/3, \tau-1)$	$W(n-2, M/3, \tau-1)$ $W(n-2, 2M/3, \tau-1)$	$\ldots$ $\ldots$	$W(\tau-1, M/3, \tau-1)$ $W(\tau-1, 2M/3, \tau-1)$
$W(n-2, M/9, \tau-2)$ $W(n-2, 2M/9, \tau-2)$ $W(n-2, 4M/9, \tau-2)$	$W(n-3, M/9, \tau-2)$ $W(n-3, 2M/9, \tau-2)$ $W(n-3, 4M/9, \tau-2)$	$\ldots$ $\ldots$ $\ldots$	$W(\tau-2, M/9, \tau-2)$ $W(\tau-2, 2M/9, \tau-2)$ $W(\tau-2, 4M/9, \tau-2)$
$\vdots$			
$W(n-\tau+1, M/3^{\tau-1}, 1)$ $W(n-\tau+1, 2M/3^{\tau-1}, 1)$ $\vdots$	$W(n-\tau, M/3^{\tau-1}, 1)$ $W(n-\tau, 2M/3^{\tau-1}, 1)$	$\ldots$ $\ldots$	$W(1, M/3^{\tau-1}, 1)$ $W(1, 2M/3^{\tau-1}, 1)$

Започваме да прилагаме алгоритъма от долу на горе, считано от последния и предпоследния редове, и от дясно на ляво, считано от последната и предпоследната

Algorithm 5 (Основен алгоритъм) – Алгоритъм за редуциране на множеството от спектри $W(n, M, \tau)$ на троичен ортогонален (n, M, τ) масив:

procedure MDDA($W(n, M, \tau)$, $W(n-1, M, \tau)$, $W(n-1, M/3, \tau-1)$, $W(n-1, 2M/3, \tau-1)$)
    Input: n, M, τ, $W(n, M, \tau)$, $W(n-1, M, \tau)$, $W(n-1, M/3, \tau-1)$, $W(n-1, 2M/3, \tau-1)$
    filteredW $\leftarrow$ empty set
    for $W \in W(n, M, \tau)$ **do**
        allXY $\leftarrow$ empty set
        for $W' \in W(n-1, M, \tau)$ **do**
            $Y, \overline{Y}$ $\leftarrow$ solve system (3.1) for integer nonnegative solutions
            if $Y \in W(n-1, M/3, \tau-1)$ and
                $\overline{Y} \in W(n-1, 2M/3, \tau-1)$ and
                $W^{\sigma_1}, W^{\sigma_2} \in W(n, M, \tau)$ and
                $W^{\sigma_1}, W^{\sigma_2} \notin filteredW$ **then**
                 add $\overline{Y}, Y$ to $allY\overline{Y}$
        if allXY is empty **then**
            add W to $filteredW$
        else
            if system (3.5) has no integer nonnegative solutions **then**
                add W to $filteredW$
    if $filteredW$ is nonempty **then**
        MDDA($W(n, M, \tau) \setminus filteredW$, $W(n-1, M, \tau)$, $W(n-1, M/3, \tau-1)$, $W(n-1, 2M/3, \tau-1)$)
    else
        return $W(n, M, \tau)$
    Output: $W(n, M, \tau)$

колони. Така успяваме да постигнем оптимален резултат върху първоначално разглежданото множество $W(n, M, \tau)$.

Както и в основния алгоритъм във втора глава, и тук в началото на псевдокода е въведено поле $filteredW$, което е множеството от всички текущо премахнати спектри $W \in W(n, M, \tau)$. Това множество може да нараства през целия алгоритъм. В псевдокода се намират възможните според Теорема 3.2.2 спектри W'. Разгледани са само тези W', за които система (3.1) има решение и са проверени Следствия 3.2.3, 3.2.4 и Теорема 3.2.6, както и Теорема 3.2.7, Следствие 3.2.8 и Следствие 3.2.9, за да се прецени дали разглежданата двойка (W, W'), следва да бъде отхвърляна или не. В множеството $allY\overline{Y}$ се събират всички решения на система (3.1) за всички възможни двойки (W, W'). Ако няма възможни двойки, съгласно Следствие 3.2.3, премахваме спектъра W. В противен случай, пресмятаме система (3.5). Ако тя няма целочислено решение в неотрицателни числа, използваме Теорема 3.2.10, за да отхвърлим W като възможен спектър на изследвания троичен ортогонален масив.

Вече споменахме, че спектърът W зависи от спектрите в множеството $W(n, M, \tau)$ (Следствие 3.2.8). Затова се налага да се направи проверка върху стойността на множеството от филтрирани на тази стъпка спектри $filteredW$. По-точно, ако са били отхвърлени спектри и множеството $filteredW$ е непразно, се налага да се повтори алгоритъмът с обновената съвкупност от елементи на множеството $W(n, M, \tau)$, т.е. докато от $W(n, M, \tau)$ се премахнат всички спектри от множеството $filteredW$. Тъй като множеството $W(n, M, \tau)$ е крайно, няма как да получим безкрайна рекурсия, извиквайки същата функция с обновените параметри, т.е. алгоритъмът приключва, когато не могат да се отхвърлят на дадена стъпка никакви спектри.

Този алгоритъм е приложим само за относително много малки размерности (брой стълбове) n и мощности (брой редове) M, поради големия брой елементи в първоначално генерираните множества $W(n, M, \tau)$. По-точно, прилагайки Теорема 1.4.1 успяхме да генерираме множеството от всички възможности за спектри $W(n, M, \tau, q)$ относно вътрешни и външни точки за троични ортогонални масиви, чиито индекс не е по-голям от 8. Съответна база от резултати се поддържа и продължава да се актуализира на [59]. При тези пресмятания забелязахме, че броят на спектрите при по-големите индекси, както и при по-дългите редици, започва да расте прекалено много. Мощността на множествата в един момент достига няколко милиона. От своя страна, в конструкцията с премахване на един стълб трябва да се пробягат всички възможни двойки от спектри (W, W'), т.е. говорим за над 10^{12} брой конструирания на решения на съответните системи и последващите от тях проверки. За наше съжаление върху множества с толкова голям брой елементи алгоритъмът не може да приключи за обозримо време поради ниските възможности на използваните от нас компютри и софтуер. Затова в такива случаи се налага да прилагаме алгоритъма само относно вътрешни за изследваните масиви точки. Модифицираният за тази цел алгоритъм е описан и приложен в следващия параграф. С помощта на основния алгоритъм са проверени и потвърдени всички известни резултати за троични ортогонални масиви от Таблица 3.1 за индекс $1 \leq \lambda \leq 3$. За по-голям индекс се проверява алгоритъмът докъдето е възможно, след което прилагането му се ограничава само върху множествата от спектри относно вътрешни за масивите точки.

3.3 Несъществуване на (17, 108, 3) троичен ортогонален масив

В този параграф целта е да приложим модификация на описания в Параграф 3.2 алгоритъм в един от отворените случаи от Таблица 12.2 в [28] за индекс $\lambda = 4$, а именно за размерност (брой стълбове) $n = 17$, мощност (брой редове) $M = 108$ и сила $\tau = 3$. По този начин ще докажем, че троичен ортогонален масив с тези параметри не съществува, откъдето следва, че $5 \leq \Lambda(17,3) \leq 9$. Полученият резултат е вече отбелязан в Таблица 3.1.

Благодарение на Теорема 1.4.1 можем да генерираме множеството от всички възможности за спектри $W(n,M,\tau)$ относно вътрешни и външни точки за троични ортогонални масиви, необходими за да достигнем до множеството $W(17,108,3)$. Броят на елементите в тези множества е представен в следващата таблица, като напомняме, че сме означили $|W(3,108,3)| = 1$, $|W(4,108,3)| = 5$, $|W(5,108,3)| = 29$ и така нататък. От таблицата се вижда докъде сме успели да получим съответните множества, поради бързото нарастване на броя на елементите в тях, особено когато пресмятаме спектрите относно външни за масива точки. За някои от празните места в таблицата имаме налична информация само за множествата от спектри относно вътрешни за масивите точки, като данните ще бъдат представени по-надолу.

$\|W(n,108,3)\|$:	1	5	29	113	395	1314	3782	10115
	26525	629442	141332	311881	648005			–
$\|W(n,36,2)\|$:	1	5	25	69	174	419	886	1686
	3118	5474	9029	14608	23047	34836	51900	–
$\|W(n,72,2)\|$:	1	9	81	390	1599	6111	18746	51674
	134380	313144	687127					–
$\|W(n,12,1)\|$:	1	5	19	57	154	382	871	1870
	3798	7363	13703	24620	42841	72490	119576	–
$\|W(n,24,1)\|$:	1	9	61	320	1452	5868	21396	71658
	233037	651180	1797033					–
$\|W(n,48,1)\|$:	1	17	217	2106	17237	123120	781017	
								–

Важно е да отбележим също, че прилагайки Теорема 1.4.1 в общия случай, дори за относително малки параметри на (n,M,τ) троични ортогонални масиви C, се оказва, че мощността на съответните множества $P(n-1, 2M/3, \tau-1)$ на производните им масиви от вида $\overline{C}_0$ (виж Конструкция 3.2 (Фигура 1)) е прекалено голяма. Освен това при големи τ се налага самото множество $P(n-1, 2M/3, \tau-1)$ да бъде редуцирано, което от своя страна налага пресмятането и евентуално редуцирането на нови множества от възможни спектри с голяма мощност.

В разглеждания от нас случай при опит да генерираме съответните множества $W(n-1, 2M/3, \tau-1)$, нещо повече дори при пресмятането на подмножествата им $P(n-1, 2M/3, \tau-1)$ относно вътрешни за масивите точки, се оказва, че със сегашните ни компютърни изчислителни мощности това не винаги е възможно. По-точно, поради голямата мощност (над милион възможности за спектри) в горната таблица не бяха получени дори множествата $P(n, 24, 1)$, за $12 \leq n \leq 15$; $P(n, 48, 1)$, за $8 \leq n \leq 15$, както и множествата $P(n, 72, 2)$, за $12 \leq n \leq 15$.

Горните наблюдения доведоха до идеята да организираме модификация на основния алгоритъм (Algorithm 5), в която да ограничим проверките на получените в Параграф 3.2 ограничения върху спектрите на изследваните масиви само относно вътрешни за масивите точки. Освен това алгоритъмът се прилага само върху редици от производни ортогонални масиви с параметри $(n-1, M/3, \tau-1)$, получени от разглежданите (n, M, τ) троични ортогонални масиви.

От своя страна всички теореми от предния параграф коректно могат да бъдат приложени при наложеното ограничение за работа със спектри само относно вътрешни за масивите точки, т.е. само върху множеството $P(n, M, \tau)$ за фиксирани параметри n, M и τ. Когато се проверяват следствията от тези теореми, на места се налагат допълнителни проверки, за да сме сигурни, че отново е получен спектър относно вътрешна за съответния масив точка. Ако постигнем, че $P(n, M, \tau)$ е празното множество, можем да заключим, че ортогонален масив със съответните параметри не съществува.

Алгоритъмът започва с генерирането (с помощта на Теорема 1.4.1) на следните редици от множества от възможности за спектри на съответните троични ортогонални масиви относно вътрешни за тези масиви точки:

$$P(\tau, M, \tau), P(\tau+1, M, \tau), \ldots, P(n, M, \tau)$$
$$P(\tau-1, M/3, \tau-1), P(\tau, M/3, \tau-1), \ldots, P(n-1, M/3, \tau-1)$$
$$\ldots$$

Резултатите за разглеждания от нас $(17, 108, 3)$ троичен ортогонален масив са представени в таблицата по-долу, като отново са дадени само броят на елементите в съответните множества.

$\lvert P(n,108,3)\rvert$:	1	4	18	48	113	271	440	701
	1002	879	901	631	119	49	10	–
$\lvert P(n,36,2)\rvert$:	1	4	16	31	52	85	109	121
	127	108	85	62	28	12	6	–
$\lvert P(n,12,1)\rvert$:	1	4	12	33	77	170	346	673
	1241	2208	3782	6300	10194	16125	24935	–

Ще извършаваме редукцията на възможностите от спектри върху множеството $P(j, M, \tau)$, като започнем от $j = \tau + 1$ и продължим до $j = n$, което е основната цел на нашите разглеждания.

За фиксиран спектър от множеството $P(j, M, \tau)$ и за всеки спектър P' от множеството $P(j-1, M, \tau)$, конструираме решенията на системата 3.1. Ако нямаме решение за нито един спектър P', спектърът P се изключва от множеството $P(j, M, \tau)$ (съгласно Следствие 3.2.3).

В противен случай, за всяка от спектри (P, P'), получаваме съответните спектри $(Y, \overline{Y})$ и проверяваме условието от Теорема 3.2.10. Ако то не е изпълнено, двойката спектри (P, P') не е възможна (съгласно Следствие 3.2.4) и се отхвърля.

Така получаваме всички възможна двойки (P, P'), като за всяка такава двойка имаме и запазено решението $(Y, \overline{Y})$.

По-нататък, за всички възможни решения за фиксирания спектър P решаваме системата (3.5). Ако тази системата няма решение, съгласно Теорема 3.2.10 спектърът P се отхвърля от множеството $P(j, M, \tau)$.

След обхождане на всички спектри от множеството $P(j, M, \tau)$, продължаваме със следващото множество $P(j+1, M, \tau)$, ако $j < n$.

За по-добра яснота и пълнота на изложението е представен псевдокод на модифицирания алгоритъм (Algorithm 6).

Algorithm 6 – Алгоритъм за редуциране на множеството от спектри $P(n, M, \tau)$ относно вътрешни точки на (n, M, τ) троичен ортогонален масив:

procedure NDDA($P(n, M, \tau)$, $P(n-1, M, \tau)$, $P(n-1, M/3, \tau-1)$)
    Input: n, M, τ, $P(n, M, \tau)$, $P(n-1, M, \tau)$, $P(n-1, M/3, \tau-1)$
    filteredP ← empty set
    for $P \in P(n, M, \tau)$ **do**
        all$\overline{Y}$ ← empty set
        for $P' \in P(n-1, M, \tau)$ **do**
            $Y, \overline{Y}$ ← solve system (3.1) for nonnegative integer solutions
            if no integer solutions **then**
                next;
            if $Y \in P(n-1, M/3, \tau-1)$ **then**
                add $\overline{Y}$ to all$\overline{Y}$
        if all$\overline{Y}$ is empty **then**
            add P to $filteredP$
        else
            if system (3.5) has no nonnegative integer solutions **then**
                add P to $filteredP$
    Output: $P(n, M, \tau) \setminus filteredP$

Нека да приложим Algorithm 6 за изследваните по-горе редици от множества от спектри, $P(n, 108, 3)$ и $P(n, 36, 2)$. Тъй като троичните ортогонални масиви от редицата $P(n, 12, 1)$ съществуват и няма да имаме никакви редукции, ще ги изпуснем в представената по-долу таблица. Да напомним от втора глава, че съответните редуцирани бройки в изследваните редици са указани по следния начин: $a \to b$, т.е. a е първоначалния брой възможности за спектри, а b е броят след прилагането на алгоритъма. Резултатите са представени в следващата таблица.

$\lvert P(n, 108, 3)\rvert$:	$1 \to 1$	$4 \to 4$	$18 \to 16$	$48 \to 43$	$113 \to 89$
	$271 \to 208$	$440 \to 368$	$701 \to 540$	$1002 \to 702$	$879 \to 699$
	$901 \to 660$	$631 \to 337$	$119 \to 29$	$49 \to 6$	$10 \to 0$

$$
\begin{array}{llllll}
|P(n,36,2)|: & 1 \to 1 & 4 \to 4 & 16 \to 14 & 31 \to 30 & 52 \to 49 \\
 & 85 \to 79 & 109 \to 105 & 121 \to 109 & 127 \to 111 & 108 \to 100 \\
 & 85 \to 79 & 62 \to 50 & 28 \to 26 & 12 \to 11 & 6 \to 4
\end{array}
$$

По този начин получаваме, че $|P(17,108,3)| = 0$, т.е. в сила е следната теорема.

Теорема 3.3.1 *Троичен ортогонален масив с параметри* $(17,108,3)$ *не съществува.*

С прилагането на модифицирания алгоритъм бяха редуцирани множествата от възможности за спектри на всички съществуващи троични ортогонални масиви до индекс $\lambda = 7$, но не се достигна до други резултати за несъществуване. Затова обичайно първо се прилага основния алгоритъм (Algorithm 5) докъдето е възможно, след което прилагането му се ограничава само върху множествата от спектри относно вътрешни за масивите точки, т.е. се продължава с модифицирания алгоритъм (Algorithm 6).

Работата ни върху изследването на троичните ортогонални масиви продължава и в момента. От една страна, целта е да се получат нови ограничения, които да доведат до подобряване на гореописаните алгоритми за редуциране на множествата от възможности за спектри на разглежданите троични масиви. От друга страна, алгоритмите се прилагат върху други отворени към момента случаи от Таблица 3.1 с цел получаване на нови резултати.

Да отбележим, че през 2020 година Манев в [42] представи друг метод за генериране на всички възможности за спектрите на даден ортогонален масив, с помощта на който в [8] бяха потвърдени получените от нас резултати в тази глава.

Тази глава е написана въз основа на следните две публикации: [6, 7].

Глава 4

Енергии на ортогонални масиви

В тази глава се разглеждат задачи за изследване на енергиите на ортогонални масиви в q-ично Хемингово пространство.

Да напомним, че в първа глава показахме как всеки ортогонален масив може да се разглежда и като τ-дизайн в $H(n,q)$.

Определение 4.0.1 *Нека C е ортогонален масив (дизайн) в $H(n,q)$ с параметри (n,M,q,τ). За всяка функция (потенциал) $h(t) : [-1,1] \to (0,+\infty)$ ще дефинираме h-енергията (или потенциалната енергия) на ортогоналния масив C по следния начин:*

$$\mathcal{E}(n,C;h) := \frac{1}{|C|} \sum_{x,y \in C, x \neq y} h(\langle x,y \rangle).$$

В общия случай ние разглеждаме произволни потенциали h. От друга страна понякога е удачно или необходимо потенциалите да са абсолютно монотонни върху интервала $[-1,1)$, т.е. функцията h и всички нейни производни $h^{(i)}$ - дискретни и непрекъснати, да бъдат $h^{(i)} \geq 0$ неотрицателни за всяко $t \in [-1,1)$.

Естествен въпрос, който произлиза от съществуването на енергии, е да се намерят минималната и максималната възможна стойност на енергията на даден ортогонален масив при фиксирани функция h и параметри на ортогоналния масив. По-точно в тази глава се разглеждат следните две основни задачи.

Задача 4.0.2 *За фиксирани потенциал h, дължина на векторите n, сила τ и мощност $|C| = M = \lambda q^\tau$ да се намери минималната възможна енергия $\mathcal{L}(n,M;\tau;h)$, за която съществува (n,M,q,τ) ортогонален масив (τ-дизайн) C в $H(n,q)$, т.е. да се оцени величината*

$$\mathcal{L}(n,M;\tau;h) := \min\{\mathcal{E}(n,C;h) \ : \ |C| = M, \ C \subset H(n,q) \text{ е } \tau\text{-дизайн}\}.$$

Задача 4.0.3 *За фиксирани потенциал h, дължина на векторите n, сила τ и мощност $|C| = M = \lambda q^\tau$ да се намери максималната възможна енергия $\mathcal{U}(n,M;\tau;h)$, за която съществува (n,M,q,τ) ортогонален масив (τ-дизайн) C в $H(n,q)$, т.е. да се оцени величината*

$$\mathcal{U}(n,M;\tau;h) := \max\{\mathcal{E}(n,C;h) \ : \ |C| = M, \ C \subset H(n,q) \text{ е } \tau\text{-дизайн}\}.$$

В Параграф 1.4 разгледахме метод за намиране на множествата $W(n, M, q, \tau)$ от всички възможности за спектри на даден ортогонален масив с параметри (n, M, q, τ). Разбира се във втора и трета глава за $q = 2$ и $q = 3$ тези множества $W(n, M, \tau)$ от всички възможности за спектри на даден двоичен или троичен ортогонален масив бяха редуцирани, съответно. В тази глава благодарение на пресметнатите възможности за спектри на даден ортогонален масив ще получим (така наречените от нас) комбинаторни граници за енергията му. По-точно долна граница за минималната възможна енергия $\mathcal{L}(n, M, \tau; h)$ и горна градина за максималната възможна енергия $\mathcal{U}(n, M, \tau; h)$ на (n, M, q, τ) ортогонален масив (τ-дизайн).

4.1 Зависимости между спектрите на ортогонални масиви и техните енергии

Стойностите на $\mathcal{L}(n, M; \tau; h)$ и $\mathcal{U}(n, M; \tau; h)$ разбира се зависят както от избора на потенциала h, така и от структурата на ортогоналните масиви. За целта да разгледаме какво ни дава множеството от възможности за спектри $P(n, M, q, \tau)$ относно вътрешна за ортогоналния масив точка и как това множество влияе върху вътрешната структура на изследваните ортогонални масиви. За целта да въведем следната дефиниция, задаваща енергията на точка x от ортогоналния масив (дизайна) C.

Определение 4.1.1 *Нека $C \subset H(n, q)$ е (n, M, q, τ) ортогонален масив и $x \in C$ е точка относно която масивът C има спектър $P(x) = (p_0(x), p_1(x), \ldots, p_n(x))$. Енергия на спектъра $P(x)$ на даден ортогонален масив C, относно вътрешната му точка x ще наричаме стойността*

$$\mathcal{E}(x, C; h) := \frac{1}{|C|} \sum_{i=1}^{n} p_i(x) h(t_i),$$

където $t_i = 1 - \frac{2i}{n}$, т.е. t_i пробягва множеството T_n от скаларни произведения в $H(n, q)$. Тази енергия понякога ще наричаме също енергия на точката x от дизайна C.

Последната дефиниция дава възможност да изразим енергията на даден ортогонален масив чрез енергиите на спектрите на този масив относно неговите точки.

Теорема 4.1.2 *Нека C е (n, M, q, τ) ортогонален масив в $H(n, q)$, за който $P_1(x_1)$, $P_2(x_2)$, ..., $P_s(x_s)$ са всички различни спектри за някоя вътрешна точка на C, които се появяват с кратности $k_1, k_2, \ldots, k_s$ пъти, съответно. Тогава енергията на ортогоналния масив C може да се пресметне по следния начин:*

$$\mathcal{E}(n, C; h) = \sum_{i=1}^{s} k_i \mathcal{E}(x_i, C; h).$$

По-точно в сила е следното равенството

$$\mathcal{E}(n, C; h) \in \mathcal{E}(M) := \Big\{ \sum_{k_1+k_2+\cdots+k_s=M} k_i \mathcal{E}(x_i, C; h) \Big\}.$$

Доказателство: Твърдението е непосредствено следствие от Дефиниция 4.1.1, според която имаме равенството

$$\mathcal{E}(n, C; h) = \sum_{x \in C} \mathcal{E}(x, C; h),$$

в което сме отчели съответните кратности на спектрите. □

За по-добра илюстрация на всички разгледани енергии по-долу е представен пример върху $(4, 8, 2, 3)$ двоични ортогонални масиви.

Пример 4.1.3 *С алгоритмите от Параграф 1.4 и втора глава получаваме, че всеки* $(4, 8, 2, 3)$ *двоичен ортогонален масив (или еквивалентно 3-дизайн в* $H(4, 2)$*) съответното множество от спектри относно вътрешна за масива точка е*

$$P(4, 8, 2, 3) = \{P_1 = (1, 0, 6, 0, 1), P_2 = (1, 1, 3, 3, 0)\}.$$

Кодът

$$C_1 = \{0000, 0011, 1010, 0101, 1001, 0110, 1100, 1111\} \subset H(4, 2)$$

е $(4, 8, 2, 3)$ *двоичен ортогонален масив (еквивалентно 3-дизайн с 8 точки) с индекс* $\lambda = 1$*. Спектърът му относно коя да е негова точка* $x \in C_1$ *е един и същ, а именно* $P(x) = P_1 = (1, 0, 6, 0, 1)$*. От своя страна, кодът*

$$C_2 = \{0000, 1011, 0010, 0101, 1001, 1110, 0111, 1100\} \subset H(4, 2)$$

е също $(4, 8, 2, 3)$ *двоичен ортогонален масив (еквивалентно 3-дизайн с 8 точки) с индекс* $\lambda = 1$*, като* $P(x) = P_2 = (1, 1, 3, 3, 0)$ *е спектър на масива* C_2 *относно коя да е негова точка* $x \in C_2$*. При това масивите* C_1 *и* C_2 *са неизоморфни. От Теорема 4.1.2 получаваме съответно, че* $\mathcal{E}(4, C_1; h) = 8\mathcal{E}(x, C_1; h)$*, където* $x \in C_1$ *и* $\mathcal{E}(4, C_2; h) = 8\mathcal{E}(x, C_2; h)$*, където* $x \in C_2$*.*

В следващия параграф ще покажем, че енергиите на тези два масива са съответно точните стойности на $\mathcal{L}(4, 8; 3; h)$ и $\mathcal{U}(4, 8; 3; h)$ за кой да е потенциал h.

4.2 Комбинаторни долни граници за $\mathcal{L}(n, M, \tau; h)$ и горни граници за $\mathcal{U}(n, M, \tau; h)$

В целия параграф нека h е фиксирана потенциална функция. Нека размерността (броят на стълбовете) n, мощността $M = |C|$ и силата τ са фиксирани. Нека с помощта на Теорема 1.4.1 сме получили множеството $P(n, M, q, \tau)$ от всички възможности за спектри относно вътрешни точки за (n, M, q, τ) ортогонален масив (τ-дизайн) C, в което да допуснем, че имаме s различни възможности за спектри, т.е.

$$P(n, M, q, \tau) = \{P_1(x_1), P_2(x_2), \ldots, P_s(x_s)\}.$$

Да отбележим, че в общия случай не е задължително всички възможности за спектри от намереното множество $P(n, M, q, \tau)$ да са реализируеми.

Да означим с

$$p := \min\{\mathcal{E}(x_i, C; h) \ : \ i \in \{1, 2, \ldots, s\}\}$$

минималната възможна енергия на точка x от дизайна C, а с

$$P := \max\{\mathcal{E}(x_i, C; h) \ : \ i \in \{1, 2, \ldots, s\}\}$$

да означим максималната възможна енергия на точка x от дизайна C.

В сила са следните (така наречени от нас) комбинаторни граници за енергиите на (n, M, q, τ) ортогонални масиви (τ-дизайни) в $H(n, q)$.

Теорема 4.2.1 *Нека p и P са съответно минималната и максималната възможна енергия на точка x от (n, M, q, τ) ортогонален масив (τ-дизайн) $C \subset H(n, q)$. Тогава са в сила следните зависимости*

$$Mp \leq \mathcal{L}(n, M, \tau; h) \leq \mathcal{U}(n, M, \tau; h) \leq MP.$$

Доказателство: Нека C е (n, M, q, τ) ортогонален масив в $H(n, q)$ с описаното по-горе множеството $P(n, M, q, \tau)$ от всички възможности за спектри относно вътрешните му точки.

Тогава за енергията на произволния масив C имаме, че

$$\mathcal{E}(n, C; h) = \sum_{i=1}^{s} k_s \mathcal{E}(x_i, C; h) \geq Mp.$$

Следователно $\mathcal{L}(n, M, \tau; h) \geq Mp$.

Аналогично, за C знаем, че

$$\mathcal{E}(n, C; h) = \sum_{i=1}^{s} k_s \mathcal{E}(x_i, C; h) \leq MP.$$

Следователно $\mathcal{U}(n, M, \tau; h) \leq MP$, с което теоремата е доказана. $\square$

Пример 4.2.2 *(продължение на Пример 4.1.3) Да разгледаме отново ортогоналните масиви C_1 и C_2 в $H(4, 2)$ и да допуснем, че $\mathcal{E}(4, C_1; h) < \mathcal{E}(4, C_2; h)$. Тогава имаме, че*

$$\mathcal{L}(4, 8, 3; h) = \mathcal{E}(4, C_1; h) = 8\mathcal{E}(x, C_1; h) = 8p,$$

както и

$$\mathcal{U}(4, 8, 3; h) = \mathcal{E}(4, C_2; h) = \mathcal{E}E(x, C_2; h) = 8P,$$

където p и P са енергиите на спектрите P_1 и P_2 съответно на масивите C_1 и C_2 относно коя да е тяхна вътрешна точка.

Да отбележим, че е известно, че съществуват два неизоморфни $(5, 16, 2, 4)$ двоични ортогонални масиви (виж [13, 14]), т.е. за тях имаме ситуация, подобна на тази в разгледания от нас пример.

В следващото следствие е представен частния случай, когато двете комбинаторни граници за енергиите на (n, M, q, τ) ортогонални масиви (τ-дизайни) в $H(n, q)$ съвпадат, т.е. оптималния случай.

Следствие 4.2.3 *Нека параметрите q, n, M и τ са такива, че всеки (n, M, q, τ) ортогонален масив в $H(n, q)$ има единствен възможен спектър $P = P(x)$, относно вътрешна за него точка, което е еквивалентно на факта, че за всяко $x \in C$ енергия на точката x от дизайна C е точно $ME(x, C; h)$. Тогава за всеки потенциал h такива ортогонални масиви притежават оптимална енергия, т.е.*

$$\mathcal{E}(n, C; h) = \mathcal{L}(n, M, \tau; h) = \mathcal{U}(n, M, \tau; h) = M\mathcal{E}(x, C; h).$$

Важно е да отбележим, че в [20, 10] е необходимо разглежданите потенциали да са абсолютно монотонни функции в интервала $[-1, 1)$, докато комбинаторните граници, получени от нас са валидни за произволен потенциал.

От друга страна, ние разгледахме и получихме енергиите за известни (в явен вид) ортогонални масиви или за масиви, за които са ни известни множествата от възможности за спектри относно вътрешни за тях точки (виж [59]), т.е. за относително малки размерности n и сила τ.

4.3 Сравнение между известните граници за енергиите на ортогонални масиви

В последния параграф на тази глава ще направим сравнение между комбинаторните граници за енергиите от Параграф 4.2 и точните стойности на енергиите или други получени граници за енергиите на (n, M, q, τ) ортогонални масиви (τ-дизайни) в $H(n, q)$. Такива граници са получените от Бойваленков, Драгнев, Хардин, Саф и Стоянова в [10] универсални долни граници за енергията на кодове в $H(n, q)$.

За да формулираме универсалните долни граници за енергията на кодове в $H(n, q)$, получени в [10], е необходимо да напомним някои основни факти от първа глава.

При фиксирани q, n и τ, границата на Рао [49]

$$B(n, \tau) \geq R(n, \tau) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{k} \binom{n}{i}, & \text{когато } \tau = 2k - 1, \\ q\sum_{i=1}^{k} \binom{n-1}{i}, & \text{когато } \tau = 2k. \end{cases}$$

задава минималната възможна мощност $M = |C|$, за която съществува τ-дизайн $C \subset H(n, q)$.

Нека първо силата $\tau = 2k-1$ е нечетна. За всяка мощност $\in [R(n, 2k-1), R(n, 2k))$ е необходимо да се пресметнат корените на уравнението

$$Q_k^{(1,0)}(t)Q_{k-1}^{(1,0)}(s) - Q_k^{(1,0)}(s)Q_{k-1}^{(1,0)}(t) = 0, \tag{4.1}$$

където

$$Q_i^{(1,0)}(t) = \frac{K_i^{(n-1,q)}(-1 + n(1-t)/2)}{\sum_{j=0}^{i} \binom{n}{j}(q-1)^j}, \ i = k, k-1$$

са присъединените полиноми на полиномите на Кравчук. Параметърът s е максимално скаларно произведение s, т.е. е определен от равенството $M = L_\tau(n, s)$, където $L_\tau(n,s)$ е границата на Левенщейн [37, 38] за максималната мощност на кодове при фиксирани дължина и минимално разстояние (максимално скаларно произведение s). Всъщност, уравнението (4.3) има същите корени като на уравнението $M = L_\tau(n,s)$.

При това уравнението (4.3) има k на брой различни корена, които нека да означим съответно с α_0, α_1, ..., $\alpha_{k-1} = s$ и да приемем, че имаме $-1 < \alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_{k-1} = s < 1$. Тогава универсалната долна граница за енергията на код [10] при нечетна сила $\tau = 2k-1$ има следния вид:

$$\mathcal{L}(n, M, 2k-1; h) \geq N^2 \sum_{i=0}^{k-1} \rho_i h(\alpha_i), \tag{4.2}$$

където положителните числа (теглата) ρ_i, за $i = 0, 1, \ldots, k-1$ са определени от формулата

$$\rho_i = -\frac{(1-\alpha_0^2)(1-\alpha_1^2)\cdots(1-\alpha_{i-1}^2)(1-\alpha_{i+1}^2)\cdots(1-\alpha_{k-1}^2)}{M\alpha_i(\alpha_i^2-\alpha_0^2)(\alpha_i^2-\alpha_1^2)\cdots(\alpha_i^2-\alpha_{i-1}^2)(\alpha_i^2-\alpha_{i+1}^2)\cdots(\alpha_i^2-\alpha_{k-1}^2)}.$$

По аналогичен начин при четни стойности на силата $\tau = 2k$, за всяка мощност $\in [R(n,2k), R(n,2k+1))$ е необходимо да се пресметнат корените на уравнението

$$(1+t)(Q_k^{(1,1)}(t)Q_{k-1}^{(1,1)}(s) - Q_k^{(1,1)}(s)Q_{k-1}^{(1,1)}(t)) = 0, \tag{4.3}$$

където

$$Q_i^{(1,1)}(t) = \frac{K_i^{(n-2,q)}(-1+n(1-t)/2)}{\sum_{j=0}^{i}\binom{n-1}{j}(q-1)^j} \quad i = k, k-1$$

също са присъединените полиноми на полиномите на Кравчук. Параметърът s отново е максимално скаларно произведение s, т.е. е определен от равенството $M = L_\tau(n,s)$ и уравнението (4.3) има същите корени като на уравнението $M = L_\tau(n,s)$ без най-малкия корен на (4.3).

Уравнението (4.3) има $k+1$ на брой различни корена, които означаваме съответно с $\beta_0 = -1, \beta_1, \ldots, \beta_k = s < 1$. Тогава универсалната долна граница за енергията на код [10] при четна сила $\tau = 2k$ има следния вид:

$$\mathcal{L}(n, M, 2k; h) \geq N^2 \sum_{i=0}^{k} \gamma_i h(\beta_i), \tag{4.4}$$

където за положителните тегла γ_i, за $i = 0, 1, \ldots, k$, са налице аналогични формули за пресмятането им.

За да сравним комбинаторните граници за енергиите от Параграф 4.2 и представените по-горе универсални долни граници за енергиите на кодове в $H(n,q)$ разгледахме следните три потенциални функции:

$$h_1(t) = \frac{q}{n(1-t)}, \tag{4.5}$$

$$h_n(t) = \left(\frac{q}{n(1-t)}\right)^{(n-2)/2}, \tag{4.6}$$

$$h_{n,\tau}(t) = \binom{n-n(1-t)/2}{\tau+1}, \tag{4.7}$$

където $\binom{x}{k} := \frac{x(x-1)\dots(x-k+1)}{k!}$ за цяло число $k \geq 0$ и реално число x.

От числените резултати при всички разгледани случаи (пресметнатите чрез алгоритмите на Maple) се вижда, че комбинаторните долни граници от Теорема 4.2.1 са по-добри долни граници за енергиите на разгледаните ортогонални масиви спрямо стойностите на универсалните долни граници за тях.

Нещо повече когато сравним комбинаторните долни граници от Теорема 4.2.1, универсалните долни граници и точните стойности на енергията на съществуващи ортогонални масиви са налице подобни наблюдения. Ще илюстрираме този факт за съществуващия $(9, 128, 2, 4)$ двоичен ортогонален масив.

Пример 4.3.1 *Известно е, че съществува* $(9, 128, 2, 4)$ *двоичен ортогонален масив (виж [28, Table 12.1], [58]). Експлицитната версия на този масив има енергия* $\mathcal{E}(9, C; h_1) \approx 31.644$ *която е близка до комбинаторната долна граница от Теорема 4.2.1. По-точно, имаме*

$$31.493 < \mathcal{L}(9, 128; 4; h_1) \leq \mathcal{U}(9, 128; 4; h_1) < 32.245. \tag{4.8}$$

Универсалната долна граница за енергията идва от четния случай и е равна на $\mathcal{L}(9, 128; 4; h_1) > 31.303$. *Да отбележим още, че въпреки наличието на много различни спектри за разглеждания ортогонален масив относно вътрешните за него точки, то долните и горните граници за енергията му са достатъчно близки като стойности.*

Горното сравнение показва, че комбинаторните долни граници могат да бъдат достатъчно добри в някои случаи. При това след редуциране на възможностите за спектри на изследваните ортогонални масиви, т.е. след редуциране на елементите на съответното множество $P(n, M, q, \tau)$ още повече се подобряват комбинаторните граници за енергиите на тези масиви.

В следващата Таблица 4.3 са дадени примери за граници за h-енергиите на някои съществуващи ортогонални масиви (за $q = 2$ или $q = 3$), съответно за разглежданите три потенциални функции (4.5).

	$(8, 12, 2, 2)$ ортогонални масиви			
$h(t)$	Границата (4.2) or (4.4)	Теорема 4.2.1 долна	Енергията на съществуващ масив	Теорема 4.2.1 горна
h_1	2.575	2.600	2.605	2.616
h_n	0.1430	0.1594	0.1625	0.1689
$h_{n,\tau}$	33.6	37	37.333	38
	$(12, 24, 2, 3)$ ортогонални масиви			
$h(t)$	Границата (4.2) or (4.4)	Теорема 4.2.1 долна	Енергията на съществуващ масив	Теорема 4.2.1 горна
h_1	3.75	3.75	3.75	3.75
h_n	0.2833	0.2833	0.2833	0.2833
$h_{n,\tau}$	330	330	330	330

	$(12, 128, 2, 4)$ ортогонални масиви			
$h(t)$	Границата (4.2) or (4.4)	Теорема 4.2.1 долна	Енергията на съществуващ масив	Теорема 4.2.1 горна
h_1	22.627	22.665	22.695, 22.705	22.727
h_n	0.039	0.043	0.048, 0.050	0.054
$h_{n,\tau}$	2381.08	2410	2420, 2424	2429
	$(13, 256, 2, 5)$ ортогонални масиви			
$h(t)$	Границата (4.2) or (4.4)	Теорема 4.2.1 долна	Енергията на съществуващ масив	Теорема 4.2.1 горна
h_1	42.2553	42.29	42.3114	42.3217
h_n	0.0293	0.032	0.0358	0.0376
$h_{n,\tau}$	5190.55	5236	5244	5248
	$(12, 729, 3, 5)$ ортогонални масиви			
$h(t)$	Границата (4.2) or (4.4)	Теорема 4.2.1 долна	Енергията на съществуващ масив	Теорема 4.2.1 горна
h_1	142.3333	142.3333	142.3333	142.3333
h_n	0.3151	0.3151	0.3151	0.3151
$h_{n,\tau}$	264.0	264.0	264.0	264.0

Таблица 4. Граници за енергиите на някои ортогонални масиви (τ-дизайни).

За пълнота на изложението в края на тази глава е представен съвсем общо алгоритъмът, по който пресмятаме границите за енергиите на ортогоналните масиви за разглежданите от нас три потенциални функции (4.5).

Algorithm 7 – Алгоритъм за пресмятане границите за енергиите на ортогоналните масиви при фиксиран потенциал :

- Пресмятане на всички възможности за спектри на даден (n, M, q, τ) ортогонален масив в $H(n, q)$ относно вътрешни за него точки, т.е. след прилагане на Теорема 1.4.1 е генерирано първоначалното множество $P(n, M, q, \tau)$;

- Редуциране на елементите на множеството $P(n, M, q, \tau)$, когато е наличен съответен алгоритъм за разглежданите параметри на масива;

- Пресмятане на универсалните долни граници за енергиите на тези масиви съгласно (4.2) или (4.4), както и комбинаторните граници от Теорема 4.2.1, т.е. множеството $\mathcal{E}(M)$;

- Пресмятане на точните стойности на енергиите за съществуващи (известни в явен вид) ортогонални масиви.

Тази глава е написана въз основа на публикация [18].

Библиография

[1] Abramowitz M., Stegun I.A., Handbook of Mathematical Functions, with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables, *National Bureau of Standards*, Applied Mathematics Series, Vol. 55 (1964).

[2] Angelopoulos P., Evangalaras H., Koukouvinos C.,Lappas E., An effective step-down algorithm for the construction and the identification of non-isomorphic orthogonal arrays, *Metrika*, Vol. 66 (2), 139-149 (2007).

[3] Alon N., Goldreich O., Hastad J., Peralta R., Simple construction of almost k-wise independent random variables, *Random Struct. Algor.*, Vol. 3, 289-304 (1992).

[4] Bierbrauer J., Gopalakrishan K., Stinson D. R., Bounds for resilient functions and orthogonal arrays, *Lecture Notes in Computer Sciences*, Vol. 839, 247-256 (1994).

[5] Bierbrauer J., Gopalakrishan K., Stinson D. R., Orthogonal arrays, resilient functions, error-correcting codes and linear programming bounds, *SIAM J. Discrete Math.*, Vol. 9, 424-452 (1996).

[6] Boumova S., Marinova T., Stoyanova M., On ternary orthogonal arrays, *Proc. Sixteenth International Workshop on Algebraic and Combinatorial Coding Theory, ACCT–16*, September 2-9, 2018, Svetlogorsk (Kaliningrad region), Russia, 102-105 (2018).

[7] Boumova S., Marinova T., Ramaj T., Stoyanova M., Nonexistence of $(17, 108, 3)$ ternary orthogonal array, *Ann. Sofia Univ., Fac. Math and Inf.*, Vol. 106, 117-126 (2019).

[8] Boumova S., Ramaj T., Stoyanova M., Computing distance distributions of ternary orthogonal arrays, *Compt. rend. Acad. bulg. Sci.*, 2020, accepted.

[9] Boyvalenkov P., Computing distance distributions of spherical designs, *Linear Algebra and Its Applications*, Vol. 226/228, 277-286 (1995).

[10] P. G. Boyvalenkov, P. D. Dragnev, D. P. Hardin, E. B. Saff, M. M. Stoyanova, Energy bounds for codes and designs in Hamming spaces, *Designs, Codes and Cryptography*, Vol. 82, Issue I, pp. 411–433 (2017).

[11] P. Boyvalenkov, D. Danev, On linear programming bounds for codes in polynomial metric spaces, *Problems of Information Transmission*, Vol. 34, No. 2, pp. 108-120 (1998).

[12] Peter Boyvalenkov, Danyo Danev, Maya Stoyanova, Refinements of Levenshtein bounds in q-ary Hamming spaces, *Problems of Information Transmission*, Vol. 54, No. 4, pp. 329–342 (2018).

[13] Boyvalenkov P., Kulina H., Computing distance distributions of orthogonal arrays, *Proc. Intern. Workshop ACCT2010*, Novosibirsk, Sept., 82-85 (2010).

[14] Boyvalenkov P., Kulina H., Investigation of binary orthogonal arrays via their distance distributions, *Problems of Information Transmission*, Vol. 49(4), 320-330 (2013). (Original Russian text: Problemy Peredachi Informatsii, Vol. 49, No. 4, 28–40, 2013).

[15] Boyvalenkov P., Kulina H., Stoyanova M., Nonexistence of certain binary orthogonal arrays, *Proc. 7th Intern. Workshop on Optimal Codes and Related Topics*, Sep. 6-12, 2013, Albena, Bulgaria, 65-70 (2013).

[16] Boyvalenkov P., Kulina H., Marinova T., Stoyanova M., Nonexistence of binary orthogonal arrays via their distance distributions, *Problems of Information Transmission*, Vol. 51(4), 326-334 (2015).

[17] Boyvalenkov P., Marinova T., Stoyanova M., Nonexistence of a few binary orthogonal arrays, *Discrete Applied Mathematics*, Vol. 217(2), 144-150 (2017).

[18] Peter Boyvalenkov, Tanya Marinova, Maya Stoyanova, Mila Sukalinska, Distance distributions and energy of designs in Hamming spaces, *Serdica Journal of Computing*, Vol. 9, No. 2, 139–150 (2015).

[19] Bulutoglu D.A., Margot F., Classification of orthogonal arrays by integer programming, *Jornal of Statistical Planning and Inference*, Vol. 138, 654-666 (2008).

[20] Cohn H., Zhao Y., Energy-minimizing error-correcting codes, *IEEE Transactions on Information Theory*, Vol. 60, 7442-7450. (2014).

[21] Delsarte P., An Algebraic Approach to the Association Schemes in Coding Theory, *Philips Res. Rep. Suppl.*, Vol. 10, 1973.

[22] Delsarte P., Four fundamental parameters of a code and their combinatorial signficance, *Information and Control*, Vol. 23, 407-438 (1973).

[23] Delsarte P., Levenshtein L.I., Association schemes and coding theory, *IEEE Transactions on Information Theory*, Vol. 44, 2477-2504 (1998).

[24] Delsarte P., Bounds for Unrestricted Codes by Linear Programming, *Philips Research Reports*, Vol. 27, 272-289 (1972).

[25] Dunkl C.F., Discrete quadrature and bounds on t-designs, *Michigan Math. J.*, Vol. 26, 81-102 (1979).

[26] Fazekas G., Lenvestein V.I., On Upper Bounds for Code Distance and Covering Radius of Designs in Polynomial Metric Spaces, *Journal of combinatorial theory*, Series A, Vol. 70, 267-288 (1995).

[27] Hamming, R. W., Error detecting and error correcting codes, *Bell System Technical Journal*, Vol. 29, 147–160 (1950).

[28] Hedayat A., Sloane N. J. A., Stufken J., Orthogonal Arrays: Theory and Applications, *Springer Verlag*, New York (1999).

[29] Helleseth T., Kløve T., Lenvestein V.I., A bound for codes with given minimum and maximum distances,‘ *IEEE International Symposium on Information Theory* Seattle, USA, 292–296 (2006).

[30] Jackson W. A., Martin K., A combinatorial interpretation of ramp schemes, *Australasian Journal of Combinatorics*, Vol. 14, 51–60 (1996).

[31] Petteri Kaski, Patric R.J. Östergård, Classification Algorithms for Codes and Designs, *Springer Verlag*, Berlin Heidelberg (2006).

[32] Khalyavin A. V., Estimates of the capacity of orthogonal arrays of large strength, *Moscow Univ. Math. Bull.*, Vol. 65, 130-131 (2010).

[33] Kleinberg, Jon; Tardos, Éva, Algorithm Design (2nd ed.), *Addison-Wesley*, ISBN 0-321-37291-3 (2006).

[34] I.Krasikov, S.Litsyn, On integral zeros of Krawtchouk polynomials, Journal of Combinatorial Theory, *Ser. A*, 74(1), 71-99 (1996).

[35] I.Krasikov, S.Litsyn, Linear programming bounds for codes of small codes, *Europ. J. Comb.*, Vol.18, 647-656 (1997).

[36] Kurosawa K., Johannsson T., Stinson D. R., Almost k-wise independent sample spaces and their cryptologic applications, *Journal of Cryptology*, Vol. 14, 231–253 (2001).

[37] Levenshtein V.I., Krawtchouk polynomials and universal bounds for codes and designs in Hamming spaces, *IEEE Transactions on Information Theory*, Vol. 41, 1303-1321 (1995).

[38] Levenshtein V.I., Universal bounds for codes and designs, *Handbook of Coding Theory*, V. S. Pless and W. C. Huffman, Eds., Elsevier, Amsterdam, Ch. 6, 499-648 (1998).

[39] Levenshtein V.I., Designs as maximum codes in polynomial metric spaces, *Acta Applicandae Mathematica*, Vol. 29, 1-82 (1992).

[40] Levenshtein V.I., Bounds for packings in metric spaces and certain applications, *Probl. Kibern.*, Vol. 40, 44-110 (1983) (in Russian).

[41] MacWilliams F. J. , Sloane N. J. A., The Theory of Error-Correcring Codes, Amsterdam, The Netherlands: North Holland, 1977.

[42] Manev, N. L., On the distance distributions of Orthogonal Arrays, *Problems of Information Transmission*, Vol. 56, 45–55 (2020).

[43] Marinova T., Stoyanova M., Nonexistence of $(9, 112, 4)$ and $(10, 224, 5)$ binary orthogonal arrays, *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, containing the Proceedings of ACCT XV, Vol. 57, 153–159 (2017).

[44] Nikiforov A. F., Suslov S. K., Uvarov V. B. , Classical Orthogonal Polynomials of a Discrete Variable *Springer Series in Computational Physics*, Berlin: Springer-Verlag (1991).

[45] Ostergard P.R.J., Baicheva T., Kolev E., Optimal binary one-error-correcting codes of length 10 have 72 codewords, *IEEE Transactions on Information Theory*, Vol. 45, 1229-1231 (1999).

[46] A. Perttula, Bounds for binary and nonbinary codes slightly outside of the Plotkin range, *Tampere University of Technology Publ.*, 14 (1982).

[47] Plotkin M., Binary codes with specified minimum distance, *IRE Transactions on Information Theory*, Vol. 6, 445–450 (1960).

[48] Raghavarao D., Constructions and Combinatorial Problems in Design of Experiments, New York : Wiley, 1971.

[49] Rao C. R., Factorial experiments derivable from combinatorial arrangements of arrays, *J. Royal Stat. Soc.*, Vol. 89, 128-139 (1947).

[50] A. Samorodnitsky, On the optimum of Delsarte's linear program, *J. Combin. Theory*, Ser. A 96, 261-287 (2001).

[51] Schoen E. D., Eendebak P. T., Nguyen M. V. M., Complete enumeration of pure-level and mixed-level orthogonal arrays, *Journal of Combinatorial Designs*, Vol. 18, 123-140 (2009).

[52] Seiden E., Zemach R., On orthogonal arrays, *Ann. Math. Statist.*, Vol. 37, 1355-1370 (1996).

[53] Singleton R. C., Maximum distance q-ary codes, *IEEE Transactions on Information Theory*, Vol. 10, 116-118 (1964).

[54] J. Stuffken, B. Tang, Complete enumeration of two-level orthogonal arrays of strength *d*, *The Annals of Statistics*, Vol. 35, 793–814 (2007).

[55] Szegő G., *Orthogonal Polynomials*, American Mathematical Society Colloquium Publications 23, Providence, RI, 1939.

[56] Taguchi, G., System of Experimental Design: Engineering Methods to Optimize Quality and Minimize Costs, *UNIPUB/Kraus International Publications*, 1987.

[57] Vaudenay S., Decorrelation: A theory for block cipher security, *Journal of Cryptology*, Vol. 16, 249–286 (2003).

[58] http://neilsloane.com/oadir/index.html

[59] https://store.fmi.uni-sofia.bg/fmi/algebra/mstoyanova.shtml