Софийски университет „Св. Климент Охридски“
Факултет по математика и информатика

Живко Христов Петров

Върху някои диофантови уравнения и неравенства

Дисертация
за присъждане на образователна и научна степен
„доктор“ по професионално направление 4.5
„Математика“, докторска програма
„Математически анализ“

Научен ръководител
проф. д.м.н. Дойчин Толев

26.05.2019

Съдържание

1 Увод **3**
1.1 Дефиниции и означения . . . 3
1.2 Исторически бележки и описание на основните резултати . . . 4
1.2.1 Класически проблеми от теория на числата и някои техни анализи и обобщения . . . 4
1.2.2 Получени резултати . . . 11

2 Помощни твърдения **15**
2.1 Известни леми от анализа и теория на числата . . . 15
2.2 Леми за експоненциални суми и интеграли . . . 18
2.3 Леми за суми по прости числа . . . 21
2.4 Леми от теория на решетото . . . 23
2.5 Други леми . . . 24

3 Върху едно диофантово уравнение с едно просто и едно почти просто неизвестни **32**
3.1 Формулировка на резултата . . . 32
3.2 Доказателство на Теорема 3.1.1 . . . 32
3.2.1 Начало на доказателството . . . 32
3.2.2 Оценки за сумите Σ_1 и Σ_2 . . . 36
3.2.3 Оценяване на сумите Ω_1 и Ω_2 . . . 42
3.2.4 Оценяване на сумите Ω_3 и Ω_4 и завършване на доказателството 47

4 Едно уравнение с прости числа от специален вид **55**
4.1 Формулировка на резултата . . . 55
4.2 Доказателство на Теорема 4.1.1 . . . 55
4.2.1 Начало на доказателството . . . 55
4.2.2 Интегралите Γ_1' и Γ_4' . . . 58
4.2.3 Оценка на интегралите Γ_1'' и Γ_4'' и завършване на доказателството 65

5 Неравенството на Пятецкий-Шапиро с прости числа от вида на Пятецкий-Шапиро **68**
5.1 Формулировка на резултата . . . 68
5.2 Означения и помощни леми . . . 69
5.3 Доказателство на Теорема 5.1.1 . . . 81
5.3.1 Начало на доказателството . . . 81
5.3.2 Тривиална област . . . 82

5.3.3 Малки дъги 83
5.3.4 Голяма дъга 84
5.4 Доказателство на Теорема 5.1.2 и Теорема 5.1.3 85
5.5 Доказателство на Теорема 5.1.4 86

Глава 1

Увод

1.1 Дефиниции и означения

С буквите $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ ще означаваме съответно множествата на естествените, целите, реалните и комплексните числа. С k, l, m, n, r, s ще означаваме цели числа, с p ще означаваме просто число. Ще казваме, че естественото число n е почти просто от ред r, ако n има не повече от r на брой прости множители, броени с техните кратности. Множеството от почти простите числа от ред r означаваме с $\mathcal{P}_r$. (Така например $\mathcal{P}_1$ се състои от числото 1 и всички прости числа, $\mathcal{P}_2$ – от числата с най-много два прости множителя.) Очевидно имаме $\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}_2 \subset \mathcal{P}_3 \subset \dots$.

Както обикновено $[x]$ ще означава цялата част на числото x (т. е. най-голямото цяло число, ненадминаващо x). Дробната част на x ще означаваме с $\{x\}$ (имаме $\{x\} = x - [x]$). Ще използваме и означението $\lfloor x \rfloor = [x]$. Нека също $\lceil x \rceil$ означава най-малкото цяло число по-голямо или равно на x. С $||x||$ ще означаваме разстоянието от x до най-близкото цяло число.

За естествени числа a и b ще означаваме с (a, b) и $[a, b]$ най-големия общ делител и, съответно, най-малкото общо кратно на a и b. В същото време за реални α и β, както обикновено, (α, β) и $[\alpha, \beta]$ означават отворен, съответно, затворен интервал с краища α и β. При всяко използване на тези означения точният смисъл става ясен от контекста.

Определяме $e(x) = e^{2\pi i x}$, а с $\log x$ означаваме натурален логаритъм от x.

С $\varphi(n)$ ще означаваме функцията на Ойлер – броят на естествените числа, по-малки или равни на n и взаимно прости с n. Също така с $\mu(n)$ ще бележим функцията на Мьобиус, определена като

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{ако } n = 1, \\ (-1)^k & \text{ако } n \text{ е произведение на } k \text{ различни прости числа}, \\ 0 & \text{в противен случай.} \end{cases}$$

За $n \in \mathbb{N}$ с $\tau(n)$ ще означаваме броя на положителните делители на числото n. С $\Lambda(n)$ означаваме функцията на Манголд, дефинирана като

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & \text{ако } n = p^k, k \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{в противен случай.} \end{cases}$$

Ще използваме и следните означения за функциите на Чебишев

$$\pi(x) = \sum_{p \le x} 1, \qquad \theta(x) = \sum_{p \le x} \log p, \qquad \psi(x) = \sum_{n \le x} \Lambda(n). \tag{1.1}$$

С буквата G ще бележим константата на Ойлер, която се определя чрез равенството

$$G = \lim_{N \to \infty} \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \log N \right). \tag{1.2}$$

Ще използваме означението $\operatorname{sign} \alpha$, което показва знака на α:

$$\operatorname{sign} \alpha = \begin{cases} 1 & \text{ако } \alpha > 0, \\ -1 & \text{ако } \alpha < 0, \\ 0 & \text{ако } \alpha = 0. \end{cases}$$

При някои изчисления често се среща израз от вида $\min\left(A, \frac{1}{\alpha}\right)$, където $A, \alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \ge 0$. За да не разглеждаме случая $\alpha = 0$ отделно, ще считаме, че $\min\left(A, \frac{1}{0}\right) = A$.

Ще използваме и означенията $f = O(g)$ и $f \ll g$, като и двете означават, че съществува константа $c > 0$, такава че $|f| \le cg$. Ако константата c зависи от други параметри, например α и β, то ще означаваме $f = O_{\alpha,\beta}(g)$, съответно $f \ll_{\alpha,\beta} g$. Ако пък константите в знаците $\ll$ и O не зависят от никакви параметри, ще казваме, че тези константи са абсолютни. Ако $f \ll g$ и $g \ll f$, ще пишем $f \asymp g$. Ако пък имаме

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0,$$

то ще записваме $f(x) = o(g(x))$ при $x \to \infty$. По аналогичен начин определяме означението „o“ когато аргументът на функциите клони към някакво число.

Ще пишем $x \sim X$ вместо $x \in (X/2, X]$.

1.2 Исторически бележки и описание на основните резултати

1.2.1 Класически проблеми от теория на числата и някои техни аналози и обобщения

Проблеми на Голдбах

През 1742 г. в кореспонденция между Голдбах и Ойлер възникват следните хипотези:

Хипотеза 1.2.1. *(Бинарна хипотеза) Всяко четно число по-голямо от* 2 *може да се представи като сума на две прости числа.*

Хипотеза 1.2.2. *(Тернарна хипотеза) Всяко нечетно число по-голямо от* 5 *може да се представи като сума на три прости числа.*

Бинарната хипотеза към настоящия момент не е доказана (или опровергана). Въпреки това има установени голям брой резултати, които в известен смисъл се приближават към нея. Например през 1919 г. Брун [21] доказва следната

Теорема 1.2.3. *Всяко достатъчно голямо четно число може да се представи като сума от две почти прости числа от ред 9.*

Най-добрият резултат в тази насока е получен през 1973 г. от Чен [29]. Той доказва

Теорема 1.2.4. *Всяко достатъчно голямо четно число може да се представи като сума от едно просто и едно почти просто число от ред* 2.

В доказателствата на теоремите си Брун и Чен използват методи на решето-то. Тези методи се състоят в това, от дадена редица от естествени числа да се „отсяват“ елементи със зададени свойства (например почти прости числа). Още в древността Ератостен е използвал решето за намиране на простите числа, ненадминаващи дадена константа. През миналия век много математици успяват да намерят по-усъвършенствани методи на решето (1919 г. Брун [21], 1950 г. Селберг [74], [75] и други). През 1977 г. Иваниец [53] създава векторното решето. Това е метод, с помощта на който от дадена редица от крайномерни вектори с целочислени координати се отсяват вектори, координатите на които са почти прости числа от зададен ред. След това този метод е прилаган от много автори към различни задачи от теория на числата. (Виж например [22], [23], [44], [76], [77].)

От друга страна, тернарната хипотеза вече е доказана. През 1937 г. И. М. Виноградов [4] доказва, че съществува константа N_0, такава че всяко нечетно число $N \geq N_0$ може да се представи като сума на три прости числа. Чрез метода на Виноградов може да се изчисли ефективно константата N_0, но тя е много голяма. Впоследствие стойността на N_0 е намалявана многократно и последната стъпка е направена от Хелфгот [47] през 2014 г. Той използва нови методи и с тяхна помощ установява, че N_0 може да се вземе равно на 10^{27}. За числата по-малки от 10^{27}, проверката се извършва с компютър, с което тернарната хипотеза на Голдбах вече е напълно доказана.

Проблем за простите числа близнаци

Известна е следната хипотеза за простите числа близнаци:

Хипотеза 1.2.5. *Ако p_n е $n-$тото просто число, то $p_{n+1} - p_n = 2$ за безбройно много n.*

Тази хипотеза не е доказана, но има редица резултати, приближаващи се до нея. Например Чен [29] доказва следната

Теорема 1.2.6. *Съществуват безбройно много прости числа p, такива че $p + 2$ е почти просто от ред* 2.

През 2013 г. Джанг [88] установява, че съществуват безбройно много съседни прости числа, такива че разликата им се ограничава от константа. Джанг доказва следната

Теорема 1.2.7. *Съществува константа $c > 0$, такава че $p_{n+1} - p_n \leq c$ за безбройно много n.*

В работата си Джанг показва, че такава константа е $c = 7.10^7$. Следват поредица от подобрения на този резултат, които оптимизират работата на Джанг. Значителен напредък в това направление е направен от Мейнард [66] и Тао (в неговия блог[1]) през 2013 г. Независимо един от друг, те доказват горното твърдение при $c = 600$, като при това методът им до голяма степен е елементарен.

Теорема 1.2.8. *(Мейнард-Тао) Съществуват безбройно много n, такива че*

$$p_{n+1} - p_n \leq 600.$$

Чрез метода на Мейнард и Тао може да се докаже не само съществуването на безбройно много двойки прости числа в интервали с ограничена дължина, но и при произволно $m \in \mathbb{N}$ съществуването на безбройно много m-орки от прости числа в интервали с ограничена дължина. По-конкретно, те доказват следната

Теорема 1.2.9. *(Мейнард-Тао) Нека е дадено произволно $m \in \mathbb{N}$. Съществува константа $C > 0$, такава че за безбройно много $n \in \mathbb{N}$ имаме*

$$p_{n+m} - p_n < Cm^3 e^{4m}.$$

Подробно доказателство на тази теорема може да се намери също в Глава 22 от [17].

През 2014 г. колективът от математици *Polymath* публикува статия [71], в която са изложени резултати, подобряващи тези на Мейнард-Тао. Те доказват

Теорема 1.2.10. *(Polymath) Съществуват безбройно много $n \in \mathbb{N}$, такива че*

$$p_{n+1} - p_n \leq 246.$$

Теорема 1.2.11. *(Polymath) Нека е дадено произволно $m \in \mathbb{N}$. Съществува константа $C > 0$, такава че за безбройно много $n \in \mathbb{N}$ имаме*

$$p_{n+m} - p_n < Cme^{\left(4 - \frac{52}{283}\right)m}.$$

Проблем на Варинг

Лагранж разглежда уравнението

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = N \tag{1.3}$$

и през 1770 г. доказва, че за всяко естествено число N то има решение в цели числа.

През 1834 г. Якоби намира точна формула за броя на решенията на уравнението (1.3) в цели числа. По-точно, той доказва, че този брой е равен на

$$8 \sum_{\substack{d \mid N \\ d \not\equiv 0 \pmod 4}} d.$$

[1] Виж страницата http://terrytao.wordpress.com/

През 1770 г. Варинг разглежда обобщение на теоремата на Лагранж за четирите квадрата. Той изказва хипотезата, че за всяко цяло $k \geq 2$ може да се намери $n = n(k)$, такова че за всяко естествено число N, уравнението

$$x_1^k + \cdots + x_n^k = N \tag{1.4}$$

има решение в естествени числа $x_1, \ldots, x_n$.

Пълно доказателство на това твърдение е намерено едва през 1909 г. от Хилберт [48]. По-късно Харди и Литлууд в поредица от статии „Partitio Numerorum“ от 1919–1925 г. ([36] – [41]) предлагат нов метод за доказване на разрешимост на диофантови уравнения. Техният метод е известен като кръгов метод и е наречен по-късно метод на Харди-Литлууд (подробно описание на метода може да се намери например в монографията на Вон [82]). Чрез техния метод те намират по-просто решение на задачата на Варинг. През 1943 г. Линник [64] намира и елементарно решение на проблема на Варинг.

Интересен е въпросът за оценяването на функцията $G(k)$, която е дефинирана като най-малкото n, такова че уравнението (1.4) има решение в естествени числа при достатъчно големи N. Тази функция е въведена от Харди и Литлууд, които получават оценката

$$G(k) \leq (k-2)2^{k-1} + 5.$$

През 1959 г. И. М. Виноградов [3], чрез направените от него подобрения на кръговия метод, успява да докаже, че

$$G(k) \leq 2k(\log k + O(\log\log k)).$$

През 1992 г. тази горна граница е съществено подобрена от Вули [84], който доказва, че

$$G(k) \leq k(\log k + \log\log k + O(1)).$$

Тази оценка е най-добрата известна при големи стойности на k. Известни са също оценки на $G(k)$ при малки стойности на k. Например $G(3) \leq 7$ (Линник [63]), $G(4) = 16$ (Девънпорт [30]) и други.

Проблем на Варинг-Голдбах

През 40-те години на миналия век И. М. Виноградов [81] и Хуа [50] изучават проблема на Варинг с прости числа.

Въвеждаме следните означения. Нека $k \in \mathbb{N}$ и p е просто число. Нека с $\theta = \theta(k,p)$ означим цялото неотрицателно число такова, че $p^\theta | k$ и $p^{\theta+1} \nmid k$. Дефинираме

$$\mu = \mu(k,p) = \begin{cases} \theta + 2 & \text{ако } p = 2,\ 2|k, \\ \theta + 1 & \text{в противен случай} \end{cases}$$

и

$$K(k) = \prod_{(p-1)|k} p^\mu.$$

С $H(k)$ означаваме най-малкото естествено число n такова, че за всяко достатъчно голямо естествено число N, сравнимо с n по модул $K(k)$, уравнението

$$p_1^k + \cdots + p_n^k = N$$

има решение в прости числа $p_1, \ldots, p_n$. През 1938 г. Хуа [50] доказва, че

$$H(k) \leq 2^k + 1.$$

По-късно през 1965 г. Хуа [49] подобрява резултата и доказва, че за големи стойности на k е изпълнено

$$H(k) \leq k(4 \log k + 2 \log \log k + O(1)).$$

Използвайки неотдавнашни подобрения на теоремата на И. М. Виноградов за средните стойности (виж [85], [86]), Кумчев и Вули [60] доказват, че за големи стойности на k е изпълнено

$$H(k) \leq (4k - 2) \log k - (2 \log 2 - 1)k - 3.$$

Както при проблемите на Голдбах, при проблема на Варинг-Голдбах също може да се търси разрешимост в почти прости числа. Например Брюдерн и Фуври [22] доказват, че за всяко достатъчно голямо естествено число $N \equiv 4 \pmod{24}$ уравнението (1.3) има решение в числа $x_i \in \mathcal{P}_{34}$. Хийт-Браун и Толев [44] доказват, че при същите ограничения, уравнението (1.3) има решение при x_1 – просто и $x_2, x_3, x_4 \in \mathcal{P}_{101}$. През 2010 г. Цай [26] подобрява резултата и доказва разрешимост при x_1 – просто и $x_2, x_3, x_4 \in \mathcal{P}_{42}$.

Аналози на проблема на Варинг

Естествено възниква въпросът дали може да се разглежда аналог на проблема на Варинг, когато степента k в уравнението (1.4) е нецяло число.

Възможни са два варианта: В първия разглеждаме неравенството

$$|x_1^c + \cdots + x_n^c - N| < \varepsilon,$$

където $c > 1$ е нецяло число, $\varepsilon > 0$ е произволно малко и N е достатъчно голямо реално число. Сегал [14], [15] и други математици през 30-те години на миналия век установяват, че ако n е достатъчно голямо число, което зависи от c, то горното неравенство е разрешимо в естествени числа $x_1, \ldots, x_n$.

Другата възможност е да се разгледа уравнението

$$[x_1^c] + \cdots + [x_n^c] = N,$$

където $c > 1$ е нецяло число, N е достатъчно голямо естествено число и $[t]$ означава цялата част на t. През 70-те години на миналия век Дезуйе [31], Архипов и Житков [1] и други изследват горното уравнение и установяват, че ако n е достатъчно голямо число, което зависи от c, то горното уравнение притежава решение в естествени числа $x_1, \ldots, x_n$. Също така Дезуйе [32], Гриценко [5] и Конягин [9] разглеждат случая $n = 2$, т. е.

$$[x_1^c] + [x_2^c] = N. \tag{1.5}$$

През 1974 г. Дезуйе [32] доказва, че ако $1 < c < \frac{4}{3}$, то за всяко достатъчно голямо естествено число N, уравнението (1.5) има решение в естествени числа x_1 и x_2. По-късно резултатът е подобряван неколкократно, като най-силният резултат е получен от Конягин [9], който доказва, че уравнението (1.5) има решение в естествени числа x_1 и x_2 за $1 < c < \frac{3}{2}$ и N достатъчно голямо естествено число.

Аналози на проблема на Варинг-Голдбах

Както при аналогичните задачи, свързани с проблема на Варинг, и тук могат да се разглеждат два варианта за аналог на проблема на Варинг-Голдбах – диофантови неравенства, или диофантови уравнения с цели части.

1. Диофантови неравенства с прости числа.

През 1952 г. И. И. Пятецкий-Шапиро [11] разглежда неравенството

$$|p_1^c + p_2^c + \cdots + p_n^c - N| < \varepsilon, \tag{1.6}$$

където $c > 1$, $c \notin \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$ е фиксирано. Нека с $H(c)$ означим най-малкото n, такова че неравенството (1.6) има решение в прости числа за достатъчно голямо реално N. Пятецкий-Шапиро доказва, че

$$\limsup_{c\to\infty} \frac{H(c)}{c\log c} \le 4.$$

Той също така установява, че $H(c) \le 5$ при $1 < c < \frac{3}{2}$.

През 1992 г. Толев [78] доказва, че ако $1 < c < \frac{15}{14}$ и N е достатъчно голямо, то диофантовото неравенство

$$|p_1^c + p_2^c + p_3^c - N| < N^{1-15/(14c)} \log^9 N \tag{1.7}$$

има решение в прости числа p_1, p_2, p_3.

Направени са няколко подобрения на този резултат. Например, Кумчев [56], използвайки решетото на Харман [42], [43], доказва, че неравенство от вида (1.7) има решение в прости числа при $1 < c < \frac{61}{55}$. През 2014 г. Бейкър и Вайнгартнар [19] разширяват интервала за c до $1 < c < \frac{10}{9}$. Най-добрият резултат от този вид в момента принадлежи на Цай [25], който доказва резултата за $1 < c < \frac{43}{36}$.

През 2017 г. Толев [79] доказва, че ако N е достатъчно голямо реално число, $E > 0$ е произволно голяма константа и $1 < c < \frac{15}{14}$, то неравенството

$$|p_1^c + p_2^c + p_3^c - N| < (\log N)^{-E}$$

има решение в прости числа p_1, p_2, p_3, такива че всяко от числата p_1+2, p_2+2, p_3+2 има не повече от $\left[\frac{369}{180-168c}\right]$ прости делителя, броени с техните кратности.

През 1999 г. Лапорта разглежда неравенството (1.6) при $n = 2$ и доказва, че ако $1 < c < \frac{15}{14}$, Z е голямо реално число и $\varepsilon = Z^{1-15/(14c)} \log^8 Z$, то (1.6) има решение за $N \in (Z, 2Z] \setminus \mathcal{B}$, където $\mathcal{B}$ е подмножество на $(Z, 2Z]$ с лебегова мярка $\ll Z \exp\left(-\frac{1}{3}\left(\frac{\log Z}{c}\right)^{1/5}\right)$ (което означава, че за почти всички $N \in (Z, 2Z]$ неравенството има решение в прости числа). Този резултат е подобрен от Кумчев и Лапорта [58] и по-късно от Цао и Джай [28].

2. Диофантови уравнения с цели части и с прости неизвестни.

Разглеждаме уравнението

$$[p_1^c] + \cdots + [p_n^c] = N,$$

където $c > 1$ е нецяло число и N е достатъчно голямо естествено число. Търсим решения в прости числа $p_1, \ldots, p_n$.

През 1995 г. Лапорта и Толев [10] разглеждат уравнението

$$[p_1^c] + [p_2^c] + [p_3^c] = N, \tag{1.8}$$

където $c \in \mathbb{R}$, $c > 1$ и $N \in \mathbb{N}$. Те показват, че ако $1 < c < \frac{17}{16}$ и N е достатъчно голямо цяло число, то уравнението (1.8) има решение в прости числа p_1, p_2, p_3.

Кумчев [55] доказва, че ако $1 < c < \frac{16}{15}$, то за всяко достатъчно голямо естествено число N уравнението

$$[p^c] + [m^c] = N \tag{1.9}$$

има решение за просто число p и естествено число m.

От друга страна, от теоремата на Чен (Теорема 1.2.4) знаем, че всяко достатъчно голямо четно число може да се представи като сума от едно просто и едно почти просто число с не повече от два прости делителя. Имайки предвид този резултат, може да се предположи, че съществува константа c_0, такава, че ако $1 < c < c_0$, то за всяко достатъчно голямо N уравнението (1.9) има решение за просто p и почти просто m с не повече от два прости делителя. Тази хипотеза не е доказана, но в настоящата дисертация се изследва задача от този вид (виж Глава 3).

Редки множества от прости числа

Множество от прости числа S се нарича рядко, ако

$$\sum_{\substack{p \le X \\ p \in S}} 1 = o(\pi(X)) \quad \text{при } X \to \infty.$$

Интересен пример за рядко множество от прости числа през 1953 г. дава Пятецкий-Шапиро [12]. Той разглежда редицата

$$\mathcal{N}_\gamma = \left\{ n \in \mathbb{N} : n = \left[m^{1/\gamma} \right] \text{ за някое } m \in \mathbb{N} \right\} \tag{1.10}$$

и доказва, че при $11/12 < \gamma < 1$ е в сила следната асимптотична формула

$$\pi_\gamma(N) := \sum_{\substack{p \le N \\ p \in \mathcal{N}_\gamma}} 1 = \frac{N^\gamma}{\log N} \left(1 + O\left((\log N)^{-1} \right) \right).$$

Простите числа $p \in \mathcal{N}_\gamma$ наричаме прости числа на Пятецкий-Шапиро с индекс γ.

Долната граница за γ в резултата на Пятецкий-Шапиро е подобрявана многократно, като в настоящия момент най-силният резултат е за $205/243 < \gamma < 1$ и е получен от Риват и Ву [73] през 2001 г.

През 1986 г. Вирзинг [83], мотивиран от работа на Ердьош и Натансон [33], разглежда въпроса дали може да се намери рядко подмножество S на простите числа, такова че всяко достатъчно голямо нечетно естествено число да може да се представи като сума от три прости числа от S. Вирзинг доказва, че съществува такова множество със свойството

$$\sum_{\substack{p \le X \\ p \in S}} 1 \ll (X \log X)^{\frac{1}{3}}.$$

Този резултат се основава на вероятностен метод и множеството S не може да бъде явно конструирано.

Възниква въпросът дали различни адитивни задачи, свързани с прости числа, могат да бъдат решени в прости числа от редки множества. Получени са множество резултати, в които рядкото множество са простите числа на Пятецкий-Шапиро (виж например [18], [20], [54], [57], [62], [67], [87]). Един от най-интересните резултати от този вид е получен през 1992 г. от Балог и Фридлендър [20]. Те доказват, че ако $\frac{20}{21} < \gamma < 1$ и N е достатъчно голямо, то уравнението

$$p_1 + p_2 + p_3 = N \tag{1.11}$$

има решение в прости числа $p_1, p_2, p_3 \in \mathcal{N}_\gamma$.

Друга възможност е да се разглеждат проблемите на Голдбах с допълнителни условия за някои от променливите. През 2000 г. Пенева [68] разглежда уравнението (1.11), където p_1, p_2, p_3 са прости числа и доказва, че ако N е достатъчно голямо и $N \equiv 3 \pmod 6$, то уравнението (1.11) има решение в прости числа, такива че

$$p_1 + 2 \in \mathcal{P}_5, \quad p_2 + 2 \in \mathcal{P}_5, \quad p_3 + 2 \in \mathcal{P}_8.$$

Този резултат е подобрен от Толев [76], Цай и Лу [27], а през 2015 г. Матомаки и Шао [65] успяват да докажат, че при същите условия за N уравнението (1.11) има решение в прости числа, удовлетворяващи

$$p_1 + 2 \in \mathcal{P}_2, \quad p_2 + 2 \in \mathcal{P}_2, \quad p_3 + 2 \in \mathcal{P}_2.$$

1.2.2 Получени резултати

Покрай всички по-горе описани задачи възникват многобройни техни аналози и обобщения. Интерес представляват и следните задачи, които са разгледани в настоящата дисертация:

1. Диофантово уравнение с едно просто и едно почти просто неизвестни
В Глава 3 от дисертацията доказваме следната

Теорема 1.2.12. *(Ж. Петров, Д. Толев [70], 2016)*
Нека $1 < c < \frac{29}{28}$. Тогава всяко достатъчно голямо естествено число N може да се представи във вида

$$[p^c] + [m^c] = N,$$

където p е просто и m е почти просто с не повече от $\left[\frac{52}{29-28c}\right] + 1$ прости делителя.

Числото $\left[\frac{52}{29-28c}\right] + 1$ е равно на 53, ако c е близко до 1 и е голямо, ако c е близко до $\frac{29}{28}$.

За доказателството на горната теорема първо използваме линейно решето (виж Лема 2.4.1). След като приложим решетото се налага да бъдат оценени експоненциални суми, които съдържат в експонентите си израза $[p^c]$. Директната оценка на тези суми е трудна, затова ние ги разделяме на части в зависимост от стойността на дробната част на p^c. За тази цел използваме лемата на Виноградов (Лема 2.5.3). След това използваме метода на Виноградов за оценка на експоненциални суми с

прости числа в по-опростения вариант чрез тъждеството на Вон (Лема 2.3.1). За оценяване на получените експоненциални суми използваме Лема 2.2.5.

2. Уравнение, включващо нецели степени с прости числа от специален вид

В Глава 4 доказваме следната

Теорема 1.2.13. *(Ж. Петров [69], 2017)*

Нека $1 < c < \frac{17}{16}$. *Тогава за всяко достатъчно голямо естествено число* N *уравнението*

$$[p_1^c] + [p_2^c] + [p_3^c] = N,$$

има решение в прости числа p_1, p_2, p_3, *такива че всяко от числата* $p_1 + 2$, $p_2 + 2$, $p_3 + 2$ *има не повече от* $\left[\frac{95}{17-16c}\right]$ *прости делителя, броени с техните кратности.*

Нека отбележим, че $\left[\frac{95}{17-16c}\right]$ е равно на 95, ако c е близко до 1 и е голямо, ако c е близко до $\frac{17}{16}$.

За доказателството на тази теорема комбинираме идеи от работите на Лапорта и Толев [10] и на Толев [79]. Първо използваме вариант на векторното решето. След това прилагаме метода на Девънпорт-Хейлброн, който е вариант на кръговия метод на Харди-Литлууд.

3. Неравенството на Пятецкий-Шапиро с прости числа от вида на Пятецкий - Шапиро

Съвместно с А. Кумчев разглеждаме неравенството на Пятецкий-Шапиро (виж (1.6)) и търсим решения в прости числа от вида на Пятецкий-Шапиро (виж (1.10)). Ние доказваме следната

Теорема 1.2.14. *(А. Кумчев, Ж. Петров [59], 2018)*

Нека $c > 5$, $c \notin \mathbb{N}$ *и* $1 - \rho < \gamma < 1$, *където* $\rho = (8c^2 + 12c + 12)^{-1}$. *Тогава, ако* $s \geq 4c \log c + \frac{4}{3}c + 10$ *и* N *е достатъчно голямо, то неравенството*

$$|p_1^c + p_2^c + \cdots + p_s^c - N| < (\log N)^{-1}$$

има решение в прости числа $p_1, p_2, \ldots, p_s \in \mathcal{N}_\gamma$.

Доказателството на горната теорема е изложено в Глава 5 от тази дисертация.

В Глава 5 ще докажем и резултат, аналогичен на този на Толев в [78], но вече с прости числа на Пятецкий-Шапиро. Доказваме следната

Теорема 1.2.15. *(А. Кумчев, Ж. Петров [59], 2018)*

Нека $\gamma < 1 < c$ *и* $15(c-1) + 28(1-\gamma) < 1$. *Тогава при достатъчно големи* N *неравенството*

$$|p_1^c + p_2^c + p_3^c - N| < (\log N)^{-1}$$

има решение в прости числа $p_1, p_2, p_3 \in \mathcal{N}_\gamma$.

Също така доказваме и аналогични теореми за случаите $s = 4$ и $s = 2$.

Теорема 1.2.16. *(А. Кумчев, Ж. Петров [59], 2018)*

Нека $\gamma < 1 < c$ и $8(c-1) + 21(1-\gamma) < 1$. Тогава при достатъчно големи N неравенството

$$|p_1^c + p_2^c + p_3^c + p_4^c - N| < (\log N)^{-1}$$

има решение в прости числа $p_1, p_2, p_3, p_4 \in \mathcal{N}_\gamma$.

Теорема 1.2.17. *(А. Кумчев, Ж. Петров [59], 2018)*

Нека $\gamma < 1 < c$ и $8(c-1) + 21(1-\gamma) < 1$. Тогава при големи Z, нека с $\mathcal{E}(Z)$ означим множеството от тези $N \in (Z/2, Z]$, за които неравенството

$$|p_1^c + p_2^c - N| < (\log N)^{-1}$$

няма решение в прости числа $p_1, p_2 \in \mathcal{N}_\gamma$. Тогава, ако $|\mathcal{E}(Z)|$ означава лебеговата мярка на $\mathcal{E}(Z)$, то

$$|\mathcal{E}(Z)| \ll Z \exp\left(-\left(\frac{\log\left(\frac{2Z}{3}\right)}{c}\right)^{\frac{1}{4}}\right).$$

Благодарности

Благодаря на научния си ръководител - проф. д.м.н. Дойчин Толев за това, че ме въведе в тази област на математиката. Благодаря за предложените интересни задачи, както и за напътствията и подкрепата при създаването на този дисертационен труд.

Изключително съм благодарен и на проф. А. Кумчев и гл. ас. д-р Т. Тодорова.

Бих искал да изкажа и благодарността си към всички колеги от катедра „Математически Анализ“ на ФМИ, СУ.

Глава 2

Помощни твърдения

За доказателството на основните теореми ще са ни необходими някои леми, които тук ще формулираме. Някои от тях ще бъдат доказани, а за останалите ще бъде цитирано място, където може да бъде намерено тяхно доказателство.

2.1 Известни леми от анализа и теория на числата

Твърдението в първата лема е неравенството на Коши.

Лема 2.1.1. *(Неравенство на Коши)*
Нека $a_n, b_n \in \mathbb{C}$, $1 \leq n \leq N$. Тогава е в сила неравенството

$$\left|\sum_{n=1}^{N} a_n b_n\right| \leq \left(\sum_{n=1}^{N} |a_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{N} |b_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Доказателство. Виж Лема 2 от Глава 6 в [8]. □

Следват леми за преобразованието на Абел и за равенството на Планшерел.

Лема 2.1.2. *(Преобразование на Абел)*
Нека $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е произволна редица, $a_n \in \mathbb{C}$ и $f(x)$ е непрекъснато диференцируема функция в интервала $[a, b]$. Тогава

$$\sum_{a<n\leq b} a_n f(n) = f(b) \sum_{a<n\leq b} a_n - \int_a^b \left(\sum_{a<n\leq t} a_n\right) f'(t)dt.$$

Доказателство. Това е Лема 27.2.1 в [17]. □

Лема 2.1.3. *(Равенство на Планшерел)*
Нека $F(x) \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ и $\widehat{F}(y)$ е преобразованието на Фурие за $F(x)$, определено като

$$\widehat{F}(y) = \int_{\mathbb{R}} F(x)e(-xy)dx.$$

Тогава

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |F(x)|^2 dx = \int\limits_{\mathbb{R}} \left|\widehat{F}(y)\right|^2 dy.$$

Доказателство. Виж Теорема 9.13 в [13]. □

В следващата лема е конструирана функция със специални свойства.

Лема 2.1.4. *Нека $A > 0$ е фиксирана константа. Съществува четна реалнозначна функция $K \in L^1(\mathbb{R})$ със следните свойства:*

1. *Съществува константа $C(A) > 0$, зависеща само от A, такава че*

$$|K(x)| \leq \frac{C(A)}{(1+|x|)^A}.$$

2. *Функцията $K(x)$ и нейното преобразование на Фурие*

$$\widehat{K}(y) = \int\limits_{\mathbb{R}} K(x) e(-xy) dx$$

са неотрицателни.

3. *Ако χ е характеристичната функция на интервала $[-1, 1]$, то за всяко реално x е изпълнено*

$$\frac{1}{4}\chi(4x) \leq \widehat{K}(x) \leq \chi(x).$$

Доказателство. Това е Лема 1 в [24]. □

Следващата лема е от теория на интегралите, зависещи от параметър.

Лема 2.1.5. *За всяко реално число α е в сила равенството*

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin(\alpha x)}{x} dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} \alpha.$$

Доказателство. Виж стр. 287 в [7]. □

Следва едно елементарно твърдение от анализа.

Лема 2.1.6. *Границата*

$$\lim_{\substack{H \to 0 \\ H > 0}} \frac{1}{H} \iiint\limits_{\substack{|x_i|<1,\ i=1,2,3 \\ -H \leq x_1+x_2+x_3 \leq H}} 1 \, dx_1 dx_2 dx_3$$

съществува и е положително число.

Доказателство. Виж например Лема 2.2.12 от [16]. □

Чрез следващата лема можем да сведем задачата за оценяване на експоненциални суми от вида $\sum_{a<n\leq b} e(f(n))$ към задачата за оценка на суми, в които в експонентата стоят функциите $g_q(n) = f(n+q) - f(n)$ вместо $f(n)$.

Лема 2.1.7. *(Ван-дер-Корпут)*
Нека $Q \in \mathbb{N}$ и $a, b \in \mathbb{R}$ са такива, че $1 \leq b - a$. Нека също така $\xi(m)$ е комплекснозначна функция, дефинирана за целите числа от интервала $(a, b]$. Тогава е в сила неравенството

$$\left|\sum_{a<m\leq b} \xi(m)\right|^2 \leq \frac{b-a+Q}{Q} \sum_{|q|<Q} \left(1 - \frac{|q|}{Q}\right) \sum_{m\in I_q} \xi(m+q)\overline{\xi(m)},$$

където $I_q = (a, b] \cap (a - q, b - q]$.

Доказателство. Виж Лема 5.4.7 в [17]. □

Следващата лема ни дава основно свойство на функцията на Мьобиус.

Лема 2.1.8. *Ако $\mu(n)$ е функцията на Мьобиус, то за всяко $n \in \mathbb{N}$ е изпълнено*

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 1, \\ 0 & \text{при } n > 1. \end{cases}$$

Доказателство. Виж Лема 2.2.25 в [17]. □

Следва лема за оценка на сума от функцията $\tau(n)$.

Лема 2.1.9. *Нека $x \geq 2$. Тогава за всяко $k \in \mathbb{N}$ е в сила неравенството*

$$\sum_{n\leq X} \tau^k(n) \ll_k X(\log X)^{2^k-1}.$$

Доказателство. Виж Лема 2.6.6 в [17]. □

Следващата лема ни дава една от формулите на Мертенс.

Лема 2.1.10. *(Формула на Мертенс)*
При $x \geq 2$ е изпълнено

$$\prod_{p\leq x} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = \frac{e^{-G}}{\log x} + O\left(\frac{1}{(\log x)^2}\right),$$

където G е константата на Ойлер, определена в (1.2).

Доказателство. Виж Лема 3.3.4 в [17]. □

Чрез формулата на Мертенс лесно се доказват следните две леми:

Лема 2.1.11. *За всяко $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 3$ е изпълнено равенството*

$$\prod_{2<p<x} \left(1 - \frac{1}{p-1}\right) = \frac{C}{\log x} + O\left(\frac{1}{(\log x)^2}\right),$$

където C е константа.

Доказателство. Виж например Лема 2.6.5 в [16]. □

Лема 2.1.12. *Нека $2 \leq z_1 \leq z_2$. Тогава са в сила следните формули:*

$$\prod_{z_1 \leq p < z_2} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} = \frac{\log z_2}{\log z_1}\left(1 + O\left(\frac{1}{\log z_1}\right)\right),$$

$$\prod_{z_1 < p < z_2} \left(1 - \frac{1}{p-1}\right)^{-1} = \frac{\log z_2}{\log z_1}\left(1 + O\left(\frac{1}{\log z_1}\right)\right).$$

Доказателство. Виж например Лема 2.6.3 в [16]. □

Един от основните резултати за разпределението на простите числа ни дава следната

Лема 2.1.13. *(Теорема на Чебишев)*
За функциите на Чебишев, определени чрез (1.1)*, при $x \geq 2$ е изпълнено*

$$\pi(x) \asymp \frac{x}{\log x}, \qquad \theta(x) \asymp x, \qquad \psi(x) \asymp x.$$

Доказателство. Виж Теорема 3.1.4 в [17]. □

Следва Теоремата на Ландау.

Лема 2.1.14. *(Ландау)*
Нека $x \in \mathbb{R}$. Изпълнена е следната асимптотична формула

$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{\varphi(n)} = C \log x + O(1),$$

където $C > 0$ е константа.

Доказателство. Виж [61]. □

2.2 Леми за експоненциални суми и интеграли

Първата лема ни дава основно свойство на експоненциалната функция.

Лема 2.2.1. *Ако $n \in \mathbb{Z}$, то*

$$\int_0^1 e(tn)dt = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 0, \\ 0 & \text{при } n \neq 0. \end{cases}$$

Доказателство. Следва директно от дефиницията на функцията $e(t)$. □

Следва лема за оценка на експоненциална сума.

Лема 2.2.2. *Нека $M \in \mathbb{Z}$, $N \in \mathbb{N}$ и $t \in \mathbb{R}$. Тогава е в сила неравенството*

$$\left| \sum_{k=M+1}^{M+N} e(kt) \right| \leq \min\left(N, \frac{1}{2||t||}\right). \tag{2.1}$$

Доказателство. Това е Лема 5.2.1 в [17]. □

Следващата лема ни дава оценка за експоненциални интеграли.

Лема 2.2.3. *Нека функцията $f(x)$ е два пъти непрекъснато диференцируема в $[a, b]$ и с монотонна първа производна, такава че за всяко $x \in [a, b]$ е изпълнено $|f'(x)| \geq h > 0$. Тогава*

$$\left| \int_a^b e(f(x))dx \right| \ll h^{-1}.$$

Доказателство. Виж Лема 5.4.2. в [17]. □

Като следствие от последната лема имаме следната

Лема 2.2.4. *Изпълнена е следната оценка*

$$\int_a^b e(\alpha x)dx \ll \min\left(|b-a|, \frac{1}{|\alpha|}\right).$$

Доказателство. Следва директно от Лема 2.2.3 и от тривиалната оценка за интеграла. □

Един от основните резултати, свързан с оценки на експоненциални суми, е даден в следната

Лема 2.2.5. *(Ван-дер-Корпут)*

Нека $k \geq 2$ и $f(x)$ е k пъти непрекъснато диференцируема реалнозначна функция в интервала $[a, b]$. Нека

$$b - a \geq 10, \quad \mu \geq 1, \quad \rho > 0 \tag{2.2}$$

и

$$0 < \rho \le |f^{(k)}(x)| \le \mu\rho \quad \textit{при} \quad x \in [a,b]. \tag{2.3}$$

Тогава

$$\sum_{a<n\le b} e(f(n)) \ll \mu^{\frac{4}{2^k}}(b-a)\rho^{\frac{1}{2^k-2}} + (b-a)^{1-\frac{4}{2^k}}\rho^{-\frac{1}{2^k-2}}, \tag{2.4}$$

като константата в знака $\ll$ е абсолютна.

Доказателство. Виж Теорема 5.4.9 в [17]. □

Резултатът в следващата лема е по-добър от този в предходната, при големи стойности на r.

Лема 2.2.6. *Нека F, N са достатъчно големи, $N \le N_1 \le 2N$, и нека $r \in \mathbb{N}$, $r \ge 2$. Ако $f : [N, N_1] \to \mathbb{R}$ има непрекъснатата r-та производна и удовлетворява*

$$FN^{-r} \ll \left|f^{(r)}(x)\right| \ll FN^{-r} \qquad (N \le x \le N_1),$$

то

$$\sum_{N<n\le N_1} e(f(n)) \ll N^{1+\varepsilon}\left((FN^{-r})^{\nu} + N^{-\nu} + F^{-2\nu/r}\right), \tag{2.5}$$

където $\nu = (r^2 - r)^{-1}$ и $\varepsilon > 0$ е произволно малко.

Доказателство. В случая $r = 2$ виж Теорема 2.2 в [34]. Ако $r \ge 3$, виж Теорема 1 в [45]. □

В следващата лема даваме още един резултат, свързан с оценки на експоненциални суми.

Лема 2.2.7. *Нека са изпълнени условията на Лема 2.2.6 при $r = 3$. Тогава, ако $F \ge N$, то*

$$\sum_{N<n\le N_1} e(f(n)) \ll F^{1/6}N^{1/2} + N^{3/4}. \tag{2.6}$$

Ако е изпълнено и $|f''(x)| \ll FN^{-2}$ за всяко $x \in [N, N_1]$, то

$$\sum_{N<n\le N_1} e(f(n)) \ll F^{1/6}N^{1/2} + NF^{-1/3}. \tag{2.7}$$

Доказателство. Оценката в (2.6) е следствие от Теорема 2.6 в [34]. При $F \le N^{3/2}$ оценката в (2.7) следва от Лема 1 в [55]. В противен случай (2.7) следва от (2.6). □

2.3 Леми за суми по прости числа

И. М. Виноградов е намерил метод, чрез който да представяме суми по прости числа

$$\sum_{p\le X} f(p)$$

като линейна комбинация на суми от два типа. Тук f е комплекснозначна функция, която „осцилира“. Например $f(x) = e(g(x))$, където $g(x)$ е някаква реалнозначна функция.

Суми от първи тип:

$$\sum_{d\le u} \alpha_d \sum_{l\le \frac{X}{d}} f(dl).$$

Тук u е параметър, който нараства заедно с x, но доста по-бавно, а числата α_d са малки по модул.

Суми от втори тип:

$$\sum_{d>u} \sum_{\substack{l>u\\ dl\le X}} \alpha_d\beta_l f(dl),$$

където u е параметър, който нараства заедно с x, но доста по-бавно, а числата α_d и β_l са малки по модул.

Тъй като в сумите от първи тип няма коефициент зависещ от l, то те се оценяват сравнително лесно, като се използват свойствата на функцията f.

Да разгледаме сумата от втори тип

$$W = \sum_{D<d\le 2D} \sum_{L\le l\le 2L} \alpha_d\beta_l f(dl).$$

Нека предполагаме, че $|\alpha_d| \le 1$ и $|\beta_l| \le 1$. Като използваме неравенството на триъгълника, получаваме

$$|W| \le \sum_{D<d\le 2D} \left| \sum_{L<l\le 2L} \beta_l f(dl) \right|.$$

Сега прилагаме неравенството на Коши (Лема 2.1.1) и сменяме реда на сумиране. Намираме

$$\begin{aligned} |W|^2 &\le D \sum_{D<d\le 2D} \left| \sum_{L<l\le 2L} \beta_l f(dl) \right|^2 \\ &\le D \sum_{L<l_1\le 2L} \sum_{L<l_2\le 2L} \left| \sum_{D<d\le 2D} f(dl_1)\overline{f(dl_2)} \right|. \end{aligned}$$

(Друг вариант е след неравенството на Коши да използваме Лема 2.1.7.) В случая когато $f(x) = e(g(x))$, където $g(x)$ е реална функция, за оценяване на получените експоненциални суми можем да използваме например Лема 2.2.5.

Следващата лема ни дава удобен метод за представяне на суми по прости числа като линейна комбинация на суми от първи и от втори тип.

Лема 2.3.1. *(Тъждество на Вон)*

Нека $u, N, N_1 \in \mathbb{R}$, $1 < u \leq N < N_1$, и нека $f(n)$ е произволна функция, дефинирана за $n \in \mathbb{N}, n \in (N, N_1]$. Тогава е в сила тъждеството

$$\sum_{N<n\leq N_1} \Lambda(n)f(n) = S_1 - S_2 - S_3,$$

където

$$S_1 = \sum_{m\leq u} \mu(m) \sum_{\frac{N}{m}<l\leq\frac{N_1}{m}} (\log l) f(ml),$$

$$S_2 = \sum_{m\leq u^2} c(m) \sum_{\frac{N}{m}<l\leq\frac{N_1}{m}} f(ml),$$

$$S_3 = \sum_{\substack{N<ml\leq N_1 \\ m>u,\ l>u}} \sum a(m)\Lambda(l)f(ml),$$

и където

$$c(m) = \sum_{\substack{kn=m \\ k\leq u \\ n\leq u}} \mu(k)\Lambda(n),$$

$$a(m) = \sum_{\substack{n|m \\ n\leq u}} \mu(n).$$

Освен това са изпълнени неравенствата

$$|c(m)| \leq \log m, \qquad |a(m)| \leq \tau(m).$$

Доказателство.

Виж Лема 2.3.1 в [17]. □

Друг подобен резултат е даден в следната

Лема 2.3.2. *(Хийт-Браун)*

Нека $3 < U < V < Z < X$ и $Z - \frac{1}{2} \in \mathbb{N}$, $X \geq 64Z^2U$, $Z \geq 4U^2$, $V^3 \geq 32X$. Нека също така $F(n)$ е комплекснозначна функция, такава че $|F(n)| \leq 1$. Тогава сумата

$$\sum_{n\sim X} \Lambda(n)F(n)$$

може да се представи като линейна комбинация от $O(\log^{10} X)$ суми, всяка от които е сума от първи тип:

$$\sum_{m\sim M} \sum_{\substack{n\sim L \\ mn\sim X}} a_m F(mn)$$

с $L > Z$, или е сума от втори тип:

$$\sum_{m\sim M}\sum_{\substack{n\sim L\\ mn\sim X}} a_m b_n F(mn)$$

с $U < L < V$.

Доказателство. Виж Лема 3 от [46]. □

2.4 Леми от теория на решетото

Ще формулираме няколко леми, които представят основните резултати от теорията на линейното решето. Подробно изложение на теория на решетото може да се намери например в [35].

Лема 2.4.1. *(Решето на Розер)*

Нека $\omega(d)$ е мултипликативна функция, такава че

$$0 < \omega(p) < p, \quad \text{ако } p \in \mathcal{P}, \qquad \omega(p) = 0, \quad \text{ако} \quad p \notin \mathcal{P}, \tag{2.8}$$

където $\mathcal{P}$ е някакво множество от прости числа. Нека също така е изпълнено

$$\prod_{z_1 \le p < z_2}\left(1 - \frac{\omega(p)}{p}\right)^{-1} \le \frac{\log z_2}{\log z_1}\left(1 + \frac{K}{\log z_1}\right) \tag{2.9}$$

за някоя константа $K > 0$ и за всички z_1, z_2, такива че $2 \le z_1 \le z_2$.

Ако $D \in \mathbb{R}, D > 4$, то съществуват аритметични функции $\lambda^{\pm}(d)$ (наречени функции на Розер от ниво D) със следните свойства:

1. *За всяко естествено число d имаме*

$$|\lambda^{\pm}(d)| \le 1, \qquad \lambda^{\pm}(d) = 0, \quad \text{ако} \quad d > D \quad \text{или} \quad \mu(d) = 0.$$

2. *Ако $n \in \mathbb{N}$ то*

$$\sum_{d|n}\lambda^{-}(d) \le \sum_{d|n}\mu(d) \le \sum_{d|n}\lambda^{+}(d).$$

3. *Ако $z \in \mathbb{R}$, $z \ge 2$ е такова, че $z^2 \le D \le z^3$ и ако*

$$P(z) = \prod_{\substack{p<z\\ p\in\mathcal{P}}} p, \;\; \mathcal{B} = \prod_{p<z}\left(1 - \frac{\omega(p)}{p}\right), \;\; \mathcal{N}^{\pm} = \sum_{d|P(z)}\lambda^{\pm}(d)\frac{\omega(d)}{d}, \;\; s_0 = \frac{\log D}{\log z}, \tag{2.10}$$

то имаме

$$\mathcal{B} \le \mathcal{N}^{+} \le \mathcal{B}\left(F(s_0) + O\left((\log D)^{-\frac{1}{3}}\right)\right), \tag{2.11}$$

$$\mathcal{B} \ge \mathcal{N}^{-} \ge \mathcal{B}\left(f(s_0) + O\left((\log D)^{-\frac{1}{3}}\right)\right), \tag{2.12}$$

където $F(s)$ и $f(s)$ удовлетворяват

$$f(s) = 2e^{G}s^{-1}\log(s-1), \quad F(s) = 2e^{G}s^{-1} \quad \text{за} \quad 2 \le s \le 3. \tag{2.13}$$

Тук G е константата на Ойлер, определена в (1.2).

Доказателство. Това е частен случай на по-общ резултат. Виж например глава 4 от [35] или [51] и [52]. □

Следващата лема ни представя основното неравенство от тримерното векторно решето.

Лема 2.4.2. *Нека* $\Lambda_i, \Lambda_i^{\pm}$ *са реални числа удовлетворяващи* $\Lambda_i \in \{0,1\}$, $\Lambda_i^- \leq \Lambda_i \leq \Lambda_i^+$, $i = 1,2,3$. *Тогава*

$$\Lambda_1\Lambda_2\Lambda_3 \geq \Lambda_1^-\Lambda_2^+\Lambda_3^+ + \Lambda_1^+\Lambda_2^-\Lambda_3^+ + \Lambda_1^+\Lambda_2^+\Lambda_3^- - 2\Lambda_1^+\Lambda_2^+\Lambda_3^+. \tag{2.14}$$

Доказателство. Изложеното доказателство е подобно на това на Лема 13 в [22]. От това, че $\Lambda_i^- \leq \Lambda_i \leq \Lambda_i^+$ при $i = 1,2,3$, виждаме, че е достатъчно да докажем, че

$$\Lambda_1\Lambda_2\Lambda_3 \geq \Lambda_1\Lambda_2^+\Lambda_3^+ + \Lambda_1^+\Lambda_2\Lambda_3^+ + \Lambda_1^+\Lambda_2^+\Lambda_3 - 2\Lambda_1^+\Lambda_2^+\Lambda_3^+. \tag{2.15}$$

Ако $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \Lambda_3 = 1$, то (2.15) е изпълнено вследствие на това, че при $x, y, z \geq 1$ е изпълнено неравенството $1 \geq yz + xz + xy - 2xyz$. Това неравенство е изпълнено, т. к. при $x, y, z \geq 1$ имаме $z(y-1)(x-1) + y(z-1)(x-1) + (y-1)(z-1) \geq 0$.

Ако $\Lambda_1 = 0$, $\Lambda_2 = \Lambda_3 = 1$, то (2.15) е изпълнено вследствие на това, че при $x \geq 0$, $y, z \geq 1$ е изпълнено неравенството $0 \geq xz + xy - 2xyz$. Последното неравенство е изпълнено, т. к. при $x \geq 0$, $y, z \geq 1$ имаме $xz(y-1) + yx(z-1) \geq 0$.

В случаите $\Lambda_1 = \Lambda_2 = 0$, $\Lambda_3 = 1$ и $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \Lambda_3 = 0$ очевидно отново е изпълнено (2.15). Останалите случаи се разглеждат аналогично. □

2.5 Други леми

Следващата лема ни дава представяне на функцията $e(-\alpha\{y\})$.

Лема 2.5.1. *Нека* $\alpha \in (0,1)$, $y \in \mathbb{R}$ *и* $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 3$. *Тогава*

$$e(-\alpha\{y\}) = \sum_{|m| \leq M} c_m(\alpha) e(my) + O\left(\min\left(1, \frac{1}{M||y||}\right)\right), \tag{2.16}$$

където

$$c_m(\alpha) = \frac{1 - e(-\alpha)}{2\pi i(\alpha + m)}, \tag{2.17}$$

а константата в знака O *в* (2.16) *е абсолютна.*

Доказателство. Тази лема е доказана от Буриев (виж Лема 12 в [2]), но за улеснение на читателя тук ще изложим нейно доказателство.

Тъй като функцията $\{y\}$ е периодична с период 1, то ще докажем лемата само при $0 \leq y \leq 1$. Развиваме функцията $e(-\alpha\{y\})$ в ред на Фурие. Намираме, че при $y \in (0,1)$ е изпълнено

$$e(-\alpha\{y\}) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} c_m(\alpha) e(my),$$

където

$$c_m(\alpha) = \int\limits_0^1 e(-my)e(-\alpha\{y\})dy = \frac{1-e(-\alpha)}{2\pi i(\alpha+m)}.$$

Получаваме

$$e(-\alpha\{y\}) = \sum_{|m|\le M} c_m(\alpha)e(my) + R_{y,\alpha}(M),$$

където

$$R_{y,\alpha}(M) = \lim_{N\to\infty} \sum_{M<|m|\le N} c_m(\alpha)e(my).$$

При произволно $N > M$ прилагаме преобразованието на Абел (Лема 2.1.2) и получаваме

$$\left|\sum_{M<m\le N} c_m(\alpha)e(my)\right| = \left|\frac{1-e(-\alpha)}{2\pi i}\sum_{M<m\le N}\frac{e(my)}{\alpha+m}\right|$$

$$= \left|-\frac{1-e(-\alpha)}{2\pi i}\int\limits_M^N \sum_{M<m\le u} e(my)\left(-\frac{1}{(\alpha+u)^2}\right)du + c_N(\alpha)\sum_{M<m\le N} e(my)\right|$$

$$\le \frac{1}{\pi}\int\limits_M^N \left|\sum_{M<m\le u} e(my)\right| \frac{du}{(\alpha+u)^2} + \frac{1}{\pi(\alpha+N)}\left|\sum_{M<m\le N} e(my)\right|.$$

За експоненциалните суми в последната формула използваме Лема 2.2.2 и намираме

$$\left|\sum_{M<m\le N} c_m(\alpha)e(my)\right| \le \frac{1}{2\pi||y||}\left(\int\limits_M^N \frac{du}{(\alpha+u)^2} + \frac{1}{\alpha+N}\right) = \frac{1}{2\pi||y||(\alpha+M)} \le \frac{1}{M||y||}. \tag{2.18}$$

Извършваме граничен преход $N \to \infty$ и намираме

$$|R_{y,\alpha}(M)| \le \frac{1}{M||y||}.$$

При $||y|| \ge \frac{1}{10M}$ получаваме

$$|R_{y,\alpha}(M)| \le \frac{1}{M||y||} = \min\left(10, \frac{1}{M||y||}\right).$$

Нека сега е изпълнено $0 < ||y|| < \frac{1}{10M}$. От дефиницията за $R_{y,\alpha}(M)$ следва, че

$$|R_{y,\alpha}(M)| \leq |e(-\alpha\{y\})| + \left|\sum_{|m|\leq M} c_m(\alpha)e(my)\right|$$

$$\leq 1 + \frac{|(1-e(-\alpha))|}{2\pi}\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{1+\alpha} + \frac{1}{1-\alpha} + \left|\sum_{2\leq|m|\leq M}\frac{e(my)}{\alpha+m}\right|\right)$$

$$\leq 1 + \frac{|e^{-\pi i\alpha}2i\sin(\pi\alpha)|}{2\pi}\left(\frac{1}{\alpha} + 1 + \frac{1}{1-\alpha} + \left|\sum_{2\leq|m|\leq M}\frac{e(my)}{\alpha+m}\right|\right)$$

$$\leq 4 + \frac{1}{\pi}\left|\sum_{2\leq|m|\leq M}\frac{e(my)}{\alpha+m}\right|. \tag{2.19}$$

За горната сума имаме

$$\left|\sum_{2\leq|m|\leq M}\frac{e(my)}{\alpha+m}\right| = \left|\sum_{2\leq m\leq M}\left(\frac{e(my)}{\alpha+m} + \frac{e(-my)}{\alpha-m}\right)\right|$$

$$= \left|\sum_{2\leq m\leq M}\left(\frac{-2\alpha}{m^2-\alpha^2}\cos(2\pi my) + \frac{2im}{m^2-\alpha^2}\sin(2\pi my)\right)\right|$$

$$< 2\sum_{2\leq m\leq M}\frac{1}{m^2-1} + 2\pi\sum_{2\leq m\leq M}\frac{m||2my||}{m^2-1}$$

$$< 2 + 2\pi\sum_{2\leq m\leq M}\frac{m||2my||}{m^2-1}. \tag{2.20}$$

Ако $0 < y \leq \frac{1}{2}$, то $||y|| = y < \frac{1}{10M}$. Следователно $2my < 2M\frac{1}{10M} = \frac{1}{5}$. Оттук намираме $||2my|| = 2my$ и получаваме

$$\sum_{2\leq m\leq M}\frac{m||2my||}{m^2-1} = 2y\sum_{2\leq m\leq M}\frac{m^2}{m^2-1} < 2yM < \frac{1}{5}.$$

Ако $\frac{1}{2} < y < 1$, то $||y|| = 1-y$. Следователно $2my = 2m - 2m||y||$. Също така е изпълнено $2m||y|| < \frac{1}{5}$. Оттук намираме $||2my|| = 2m||y||$ и като следваме разсъжденията в предния случай намираме

$$\sum_{2\leq m\leq M}\frac{m||2my||}{m^2-1} = 2||y||\sum_{2\leq m\leq M}\frac{m^2}{m^2-1} < 2||y||M < \frac{1}{5}.$$

От (2.19) и (2.20) намираме

$$|R_{y,\alpha}(M)| < 4 + \frac{1}{\pi}\left(2 + 2\pi\frac{1}{5}\right) < 10.$$

Получихме, че при $0 < y < 1$ е изпълнено равенството (2.16).

При $y = 0$ или 1 имаме $||y|| = 0$ и следователно

$$\begin{aligned}
\left|e(-\alpha\{y\}) - \sum_{|m|\le M} c_m(\alpha)e(my)\right| &= \left|1 - \sum_{|m|\le M} c_m(\alpha)\right| \\
&\le 1 + \left|\sum_{|m|\le M} \frac{1 - e(-\alpha)}{2\pi i(m+\alpha)}\right| \\
&= 1 + \frac{|e^{-\pi i\alpha}2i\sin(\pi\alpha)|}{2\pi}\left|\frac{1}{\alpha} + 1 + \frac{1}{\alpha - 1} + \sum_{2\le|m|\le M}\frac{1}{m+\alpha}\right| \\
&\le 4 + \frac{1}{\pi}\left|\sum_{2\le m\le M}\left(\frac{1}{m+\alpha} + \frac{1}{-m+\alpha}\right)\right| \\
&\le 4 + \frac{2\alpha}{\pi}\sum_{2\le m\le M}\frac{1}{m^2 - \alpha^2} \\
&\le 4 + \frac{2}{\pi} \le 5.
\end{aligned}$$

С това лемата е доказана. □

Следващата лема ни дава оценка за сума от минимуми.

Лема 2.5.2. *Нека $M \in \mathbb{N}$, $M \ge 3$, $X \in \mathbb{R}$, $X \ge 0$, $0 < \mu < 1$ и $c \in \mathbb{R}$, $1 < c < 2$. Тогава е изпълнена оценката*

$$\sum_{\mu X < n \le X} \min\left(1, \frac{1}{M||n^c||}\right) \ll (\log M)\left(XM^{-1} + M^{\frac{1}{2}}X^{\frac{c}{2}}\right). \tag{2.21}$$

Доказателство. Нека първо да отбележим, че редът на Фурие за функцията $\min\left(1, \frac{1}{M||t||}\right)$ се задава чрез

$$\min\left(1, \frac{1}{M||t||}\right) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} b_M(k)e(kt), \tag{2.22}$$

където коефициентите на Фурие удовлетворяват

$$|b_M(k)| \leq \begin{cases} \frac{4\log M}{M} & \text{ако } k \in \mathbb{Z}, \\ \frac{M}{k^2} & \text{ако } k \in \mathbb{Z}, k \neq 0. \end{cases} \tag{2.23}$$

(Доказателство на последното твърдение може да се намери в [17], Лема 5.2.3.)

От (2.22) намираме

$$\sum_{\mu X < n \leq X} \min\left(1, \frac{1}{M||n^c||}\right) = \sum_{\mu X < n \leq X} \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_M(k) e(kn^c).$$

Сменяме реда на сумиране в последната формула и получаваме

$$\sum_{\mu X < n \leq X} \min\left(1, \frac{1}{M||n^c||}\right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_M(k) H(k), \tag{2.24}$$

където

$$H(k) = \sum_{\mu X < n \leq X} e(kn^c).$$

Сега, като използваме (2.23), (2.24) и тъждеството $|H(k)| = |H(-k)|$, намираме

$$\begin{aligned} \sum_{\mu X < n \leq X} \min\left(1, \frac{1}{M||n^c||}\right) &= b_M(0)H(0) + \sum_{k<0} b_M(k)H(k) + \sum_{k>0} b_M(k)H(k) \\ &\ll \frac{X \log M}{M} + \sum_{1 \leq k \leq M} |b_M(k)||H(k)| + \sum_{k>M} |b_m(k)||H(k)| \\ &\ll \frac{X \log M}{M} + \frac{\log M}{M} \sum_{1 \leq k \leq M} |H(k)| + M \sum_{k>M} \frac{|H(k)|}{k^2}. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Ако $\theta(x) = kx^c$, то $\theta''(x) = c(c-1)kx^{c-2} \asymp kX^{c-2}$ равномерно за $x \in [\mu X, X]$. Следователно можем да използваме теоремата на Ван-дер-Корпут (Теорема 2.2.5) и да заключим

$$H(k) \ll k^{\frac{1}{2}} X^{\frac{c}{2}} + k^{-\frac{1}{2}} X^{1-\frac{c}{2}} \ll k^{\frac{1}{2}} X^{\frac{c}{2}}. \tag{2.26}$$

От (2.25) и (2.26) получаваме (2.21). □

Следва една лема на Виноградов (виж [8], глава 1, §2). В оригиналната лема отсъства равенството (2.27), поради което тук ще приведем нейно доказателство.

Лема 2.5.3. *(Виноградов)*

Нека $r \in \mathbb{N}$ и нека $\alpha \in \mathbb{R}$ е такова, че $0 < \alpha \leq \frac{1}{4}$. Тогава съществува периодична функция $g(t)$ с период 1, която удовлетворява следните условия:

1. *$g(t) = 1$ при $t = 0$;*

2. $0 < g(t) < 1$ *при* $0 < |t| < \alpha$*;*

3. $g(t) = 0$ *при* $\alpha \leq |t| \leq \frac{1}{2}$*;*

4. $g(t)$ *се развива в ред на Фурие във вида*

$$g(t) = \alpha + \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} \beta_n e(nt),$$

където

$$|\beta_n| \leq \min\left(\alpha, \frac{1}{\pi|n|}\left(\frac{r}{\pi|n|\alpha}\right)^r\right).$$

Също така, при $0 \leq t \leq \alpha$ *за функцията* $g(t)$ *е изпълнено следното равенство*

$$g(t) + g\left(t - \alpha\right) = 1. \tag{2.27}$$

Доказателство.
Нека да дефинираме периодични с период 1 функции $g_0(t), g_1(t), \ldots, g_k(t)$, като

$$g_0(t) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad |t| < \frac{\alpha}{2}, \\ \frac{1}{2} & \text{при} \quad t = \pm\frac{\alpha}{2}, \\ 0 & \text{при} \quad \frac{\alpha}{2} < |t| \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

и

$$g_k(t) = \frac{r}{\alpha} \int\limits_{-\frac{\alpha}{2r}}^{\frac{\alpha}{2r}} g_{k-1}(t+u)du \quad \text{при} \quad k > 0.$$

Така дефинираната функция $g_k(t)$ притежава следните свойства:

1. $g_k(t) = 1 \quad \text{при} \quad -\frac{\alpha}{2} + \frac{k\alpha}{2r} \leq t \leq \frac{\alpha}{2} - \frac{k\alpha}{2r}$;
2. $0 < g_k(t) < 1 \quad \text{при} \quad -\frac{\alpha}{2} - \frac{k\alpha}{2r} < t < -\frac{\alpha}{2} + \frac{k\alpha}{2r} \quad \text{или при} \quad \frac{\alpha}{2} - \frac{k\alpha}{2r} < t < \frac{\alpha}{2} + \frac{k\alpha}{2r}$;
3. $g_k(t) = 0 \quad \text{при} \quad \frac{\alpha}{2} + \frac{k\alpha}{2r} \leq t \leq 1 - \frac{\alpha}{2} - \frac{k\alpha}{2r}$;
4. $g_k(t)$ се развива в ред на Фурие във вида

$$g_k(t) = \alpha + \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} \beta_{n,k} e(nt),$$

където

$$\beta_{n,k} = i\frac{e\left(-\frac{n\alpha}{2}\right) - e\left(\frac{n\alpha}{2}\right)}{2\pi n}\left(\frac{r\left(e\left(\frac{n\alpha}{2r}\right) - e\left(-\frac{n\alpha}{2r}\right)\right)}{2\pi i n\alpha}\right)^k.$$

Свойства $1-3$ следват директно от дефиницията на $g_k(t)$, а свойство 4 се доказва лесно с индукция по k. При $k=0$ очевидно е изпълнено. Нека сега $k \neq 0$. Да допуснем, че свойство 4 е вярно за $g_{k-1}(t)$. Тогава

$$\beta_{0,k} = \int\limits_0^1 g_k(t)dt = \int\limits_0^1 \frac{r}{\alpha} \int\limits_{-\frac{\alpha}{2r}}^{\frac{\alpha}{2r}} g_{k-1}(t+u)dudt$$

$$= \frac{r}{\alpha} \int\limits_{-\frac{\alpha}{2r}}^{\frac{\alpha}{2r}} \int\limits_0^1 g_{k-1}(t+u)dtdu = \frac{r}{\alpha} \int\limits_{-\frac{\alpha}{2r}}^{\frac{\alpha}{2r}} \alpha du = \alpha.$$

Също така

$$\beta_{n,k} = \int\limits_0^1 g_k(t)e(-nt)dt = \frac{r}{\alpha} \int\limits_{-\frac{\alpha}{2r}}^{\frac{\alpha}{2r}} \int\limits_0^1 g_{k-1}(t+u)e(-nt)dtdu$$

$$= \frac{r}{\alpha} \int\limits_{-\frac{\alpha}{2r}}^{\frac{\alpha}{2r}} e(nu) \int\limits_0^1 g_{k-1}(t+u)e(-n(t+u))dtdu = \frac{r}{\alpha} \int\limits_{-\frac{\alpha}{2r}}^{\frac{\alpha}{2r}} e(nu)\beta_{n,k-1}du$$

$$= \frac{r}{\alpha}\frac{1}{2\pi i n}\left(e\left(\frac{n\alpha}{2r}\right) - e\left(-\frac{n\alpha}{2r}\right)\right)\beta_{n,k-1}$$

$$= i\frac{e\left(-\frac{n\alpha}{2}\right) - e\left(\frac{n\alpha}{2}\right)}{2\pi n}\left(\frac{r\left(e\left(\frac{n\alpha}{2r}\right) - e\left(-\frac{n\alpha}{2r}\right)\right)}{2\pi i n\alpha}\right)^k.$$

Оттук следва, че свойство 4 е изпълнено за всяко k.

Избираме $g(t) = g_r(t)$. За така избраната функция са изпълнени условията в лемата. Остава само да докажем (2.27).

Очевидно за $g_0(t)$ е изпълнено

$$g_0(t) + g_0(t-\alpha) = 1 \qquad \text{при} \qquad -\frac{\alpha}{2} < t < \frac{3\alpha}{2}.$$

Лесно се проверява с индукция по k, че е изпълнено

$$g_k(t) + g_k(t-\alpha) = 1 \qquad \text{при} \qquad -\frac{\alpha}{2} + \frac{k\alpha}{2r} < t < \frac{3\alpha}{2} - \frac{k\alpha}{2r}.$$

Като изберем $k=r$ и вземем предвид избора на $g(t)$, получаваме (2.27) при $0 < t < \alpha$. От свойствата на $g(t)$ имаме, че (2.27) е изпълнено и при $t=0$ и $t=\alpha$, с което лемата е доказана. $\square$

Следващата лема ни дава представяне на функцията $\frac{1}{2} - \{t\}$.

Лема 2.5.4. *(Ваалер)*

Нека $H \geq 2$. Тогава, ако $\rho(t) = \frac{1}{2} - \{t\}$, то съществуват числа c_h $(0 < |h| \leq H)$, d_h $(|h| \leq H)$, такива че

$$\rho(t) = \sum_{0<|h|\leq H} c_h\, e(ht) + \Delta_H(t),$$

където

$$|\Delta_H(t)| \leq \sum_{|h|\leq H} d_h\, e(ht) \tag{2.28}$$

и

$$|c_h| \ll \frac{1}{|h|}, \quad |d_h| \ll \frac{1}{H}. \tag{2.29}$$

Доказателство. Виж [80]. □

Глава 3

Върху едно диофантово уравнение с едно просто и едно почти просто неизвестни

3.1 Формулировка на резултата

В тази глава ще докажем следната

Теорема 3.1.1. *(Ж. Петров, Д. Толев [70], 2016)*
Нека $1 < c < \frac{29}{28}$. Тогава всяко достатъчно голямо естествено число N може да се представи в следния вид

$$[p^c] + [m^c] = N, \tag{3.1}$$

където p е просто число и m е почти просто с не повече от $\left[\frac{52}{29-28c}\right] + 1$ прости делителя.

3.2 Доказателство на Теорема 3.1.1

3.2.1 Начало на доказателството

Нека $N \in \mathbb{N}$ е достатъчно голямо. Нека също така

$$1 < c < \frac{29}{28}, \qquad \gamma = \frac{1}{c}, \qquad P = 10^{-9} N^{\gamma}. \tag{3.2}$$

Ще предполагаме, че $\alpha > 0$ е константа, която ще изберем по-късно, и нека

$$z = N^{\alpha}, \qquad B_z = \prod_{p<z} p. \tag{3.3}$$

Ще разгледаме сумата

$$\Gamma = \sum_{\substack{P<p\leq 2P,\ m\in\mathbb{N} \\ [p^c]+[m^c]=N \\ (m,B_z)=1}} \log p. \tag{3.4}$$

Ако $\Gamma > 0$, то съществуват просто число p и естествено число m, удовлетворяващи условията в сумата. От условието $(m, B_z) = 1$ следва, че всеки прост делител на m е по-голям или равен на z. Нека допуснем, че m има l прости делителя, броени с техните кратности. Тогава от дефиницията на γ и z в (3.2) и (3.3) съответно намираме, че

$$N^\gamma \geq m \geq z^l = N^{\alpha l}$$

и следователно $l \leq \frac{\gamma}{\alpha}$. Оттук следва, че ако $\Gamma > 0$, то уравнението (3.1) има решение с просто число p и почти просто число m с не повече от $\left[\frac{\gamma}{\alpha}\right]$ прости делителя.

Въвеждаме следното означение

$$D = N^\delta, \tag{3.5}$$

където $\delta > 0$ е константа, която ще изберем по-късно.

Ще използваме решетото на Розер (Лема 2.4.1). В нашия случай $\mathcal{P}$ е множеството от всички прости числа и $\omega(p) = 1$, ако p е просто число, и $\omega(p) = 0$ в противен случай. Условието (2.8) очевидно е изпълнено, а условието (2.9) следва от Лема 2.1.12. От Лема 2.4.1 имаме, че съществува функция $\lambda(d)$ (ще пишем само $\lambda(d)$ вместо $\lambda^-(d)$, тъй като ще използваме само оценките отдолу) от ниво D на линейното решето, такава че

$$\sum_{d|k} \mu(d) \geq \sum_{d|k} \lambda(d) \qquad \text{за всяко} \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{3.6}$$

Също така имаме, че за $d \in \mathbb{N}$ е изпълнено

$$|\lambda(d)| \leq 1 \quad \text{за всяко} \;\; d\,; \qquad \lambda(d) = 0, \quad \text{ако} \quad d > D \quad \text{или} \quad \mu(d) = 0. \tag{3.7}$$

От Лема 2.4.1 имаме още, че

$$\sum_{d|B_z} \frac{\lambda(d)}{d} \geq \prod_{p<z} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \left(f(s_0) + O\left((\log D)^{-\frac{1}{3}}\right)\right), \tag{3.8}$$

където

$$s_0 = \frac{\log D}{\log z} = \frac{\delta}{\alpha} \tag{3.9}$$

и където $f(s)$ е долната функция на линейното решето, за която знаем, че

$$f(s) = 2e^G s^{-1} \log(s-1) \quad \text{при} \quad 2 < s < 3. \tag{3.10}$$

Тук G е константата на Ойлер, дефинирана в (1.2).

От Лема 2.1.8 и формули (3.4) и (3.6) намираме

$$\Gamma = \sum_{\substack{P<p\leq 2P,\, m\in\mathbb{N} \\ [p^c]+[m^c]=N}} (\log p) \sum_{d|(m,B_z)} \mu(d) \geq \sum_{\substack{P<p\leq 2P,\, m\in\mathbb{N} \\ [p^c]+[m^c]=N}} (\log p) \sum_{d|(m,B_z)} \lambda(d).$$

Сменяме реда на сумиране в последния израз и получаваме

$$\Gamma \geq \sum_{d|B_z} \lambda(d)\, G_d\,, \qquad \text{където} \qquad G_d = \sum_{\substack{P<p\leq 2P,\, m\in\mathbb{N} \\ [p^c]+[m^c]=N \\ m\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, d)}} \log p. \tag{3.11}$$

Представяме G_d в следния вид

$$G_d = \sum_{P<p\le 2P} (\log p)\, G'_{d,p}\,, \qquad \text{където} \qquad G'_{d,p} = \sum_{\substack{m\in\mathbb{N}\\ m\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,d)\\ [p^c]+[m^c]=N}} 1. \tag{3.12}$$

По-нататък, ясно е, че при реални числа a и b, за които $a<b$, броят на целите числа $n\in[a,b)$ е равен на

$$[-a]-[-b] = b-a-\rho(-b)+\rho(-a),$$

където $\rho(t)=\frac{1}{2}-\{t\}$. От това съображение, за $G'_{d,p}$ получаваме

$$G'_{d,p} = \sum_{\substack{m\in\mathbb{N}\\ m\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,d)\\ N-[p^c]\le m^c<N+1-[p^c]}} 1 = \sum_{\frac{1}{d}(N-[p^c])^\gamma\le m<\frac{1}{d}(N+1-[p^c])^\gamma} 1$$

$$= \frac{(N+1-[p^c])^\gamma-(N-[p^c])^\gamma}{d} + \rho\left(-\frac{1}{d}(N-[p^c])^\gamma\right) - \rho\left(-\frac{1}{d}(N+1-[p^c])^\gamma\right).$$

Използвайки тези формули, за сумата G_d от (3.12) намираме

$$G_d = \frac{1}{d}A(N) + \sum_{P<p\le 2P}(\log p)\left(\rho\left(-\frac{1}{d}(N-[p^c])^\gamma\right) - \rho\left(-\frac{1}{d}(N+1-[p^c])^\gamma\right)\right), \tag{3.13}$$

където

$$A(N) = \sum_{P<p\le 2P}(\log p)((N-[p^c]+1)^\gamma-(N-[p^c])^\gamma).$$

От това, че

$$(N-[p^c]+1)^\gamma = (N-[p^c])^\gamma+\gamma(N-[p^c])^{\gamma-1}+O\left(N^{\gamma-2}\right),$$

намираме

$$A(N) = \gamma\sum_{P<p\le 2P}(\log p)\left((N-[p^c])^{\gamma-1}+O\left(N^{\gamma-2}\right)\right).$$

Като използваме теоремата на Чебишев (Лема 2.1.13) и дефиницията на P от (3.2), получаваме

$$A(N)\asymp N^{2\gamma-1}. \tag{3.14}$$

От (3.11) и (3.13) намираме

$$\Gamma \ge \Gamma_0+\Sigma_0-\Sigma_1, \tag{3.15}$$

където

$$\Gamma_0 = A(N)\sum_{d|B_z}\frac{\lambda(d)}{d}, \tag{3.16}$$

$$\Sigma_j = \sum_{d|B_z}\lambda(d)\sum_{P<p\le 2P}(\log p)\,\rho\left(-\frac{1}{d}(N+j-[p^c])^\gamma\right), \qquad j=0,1. \tag{3.17}$$

Първо ще разгледаме Γ_0. От (3.3) и формулата на Мертенс (Лема 2.1.10) намираме

$$\prod_{p<z}\left(1-\frac{1}{p}\right) \asymp \frac{1}{\log z} \asymp \frac{1}{\log N}. \tag{3.18}$$

Нека δ и α са такива, че

$$2 < \frac{\delta}{\alpha} < 3. \tag{3.19}$$

Тогава от (3.9) и (3.10) следва, че съществува константа $\kappa > 0$, зависеща само от δ и α, такава че $f(s_0) > \kappa$. Следователно от (3.8) и (3.18) следва, че

$$\sum_{d|B_z} \frac{\lambda(d)}{d} \gg \frac{1}{\log N}. \tag{3.20}$$

От (3.14), (3.16) и (3.20) за Γ_0 получаваме

$$\Gamma_0 \gg \frac{N^{2\gamma-1}}{\log N}. \tag{3.21}$$

От (3.15) и (3.21) става ясно, че ако докажем, че

$$\Sigma_j \ll \frac{N^{2\gamma-1}}{(\log N)^2}, \qquad j = 0, 1, \tag{3.22}$$

то ще следва, че

$$\Gamma \gg \frac{N^{2\gamma-1}}{\log N}.$$

От последната оценка ще следва, че $\Gamma > 0$ при достатъчно големи N и следователно уравнението (3.1) ще има решение с просто число p и почти просто число m с не повече от $\left[\frac{\gamma}{\alpha}\right]$ прости делителя.

Остава да докажем оценките в (3.22) при условие, че

$$\frac{28}{29} < \gamma < 1, \qquad \delta < \frac{29\gamma - 28}{26}. \tag{3.23}$$

Остава да изберем

$$\alpha = \frac{29\gamma - 28}{52} - \varepsilon_0$$

за някое малко $\varepsilon_0 > 0$ и взимаме

$$\delta \in \left(2\alpha, \frac{29\gamma - 28}{26}\right).$$

Ако ε_0 е достатъчно малко, то условието (3.19) ще е изпълнено. От избора на c в (3.2) се вижда, че $\left[\frac{\gamma}{\alpha}\right] \le \left[\frac{52}{29-28c}\right] + 1$, с което доказателството на теоремата ще бъде завършено.

3.2.2 Оценки за сумите Σ_1 и Σ_2

Разглеждаме сумата Σ_j, дефинирана в (3.17). От теоремата на Ваалер (Лема 2.5.4) следва, че за $H \geq 2$ съществуват числа c_h $(0 < |h| \leq H)$, d_h $(|h| \leq H)$, за които са изпълнени неравенствата в (2.29) и сумата Σ_j може да се представи във вида

$$\Sigma_j = \Sigma_j' + \Sigma_j'', \tag{3.24}$$

където

$$\Sigma_j' = \sum_{d \leq D} \lambda(d) \sum_{P < p \leq 2P} (\log p) \sum_{0 < |h| \leq H} c_h \, e\left(-\frac{h}{d}(N + j - [p^c])^\gamma\right),$$

$$\Sigma_j'' = \sum_{d \leq D} \lambda(d) \sum_{P < p \leq 2P} (\log p) \, \Delta_H \left(-\frac{(N + j - [p^c])^\gamma}{d}\right).$$

Въвеждаме следното означение

$$W(v) = \sum_{P < p \leq 2P} (\log p) \, e(v(N + j - [p^c])^\gamma). \tag{3.25}$$

Нека първо да разгледаме Σ_j'. Сменяме реда на сумиране и използваме (2.29), (3.7) и (3.25), за да получим

$$\Sigma_j' = \sum_{d \leq D} \lambda(d) \sum_{0 < |h| \leq H} c_h \, W\left(-\frac{h}{d}\right) \ll \sum_{d \leq D} \sum_{1 \leq h \leq H} \frac{1}{h} \left| W\left(\frac{h}{d}\right)\right|. \tag{3.26}$$

За сумата Σ_j'' използваме (2.28), (2.29), (3.7) и (3.25) и намираме

$$\Sigma_j'' \ll \sum_{d \leq D} \sum_{P < p \leq 2P} (\log p) \sum_{|h| \leq H} d_h \, e\left(-\frac{h}{d}(N + j - [p^c])^\gamma\right)$$

$$= \sum_{d \leq D} \sum_{|h| \leq H} d_h \, W\left(-\frac{h}{d}\right) \ll \sum_{d \leq D} \sum_{|h| \leq H} \frac{1}{H} \left| W\left(\frac{h}{d}\right)\right|.$$

Като вземем предвид (3.2) и теоремата на Чебишев (Лема 2.1.13), намираме $W(0) \asymp N^\gamma$ и следователно

$$\Sigma_j'' \ll \sum_{d \leq D} \frac{N^\gamma}{H} + \sum_{d \leq D} \sum_{1 \leq h \leq H} \frac{1}{H} \left| W\left(\frac{h}{d}\right)\right|. \tag{3.27}$$

Избираме

$$H = dN^{1-\gamma}(\log N)^3 \tag{3.28}$$

и използваме (3.5), (3.24) и (3.26) – (3.28), за да получим

$$\Sigma_j \ll \frac{N^{2\gamma-1}}{(\log N)^2} + \sum_{d \leq D} \sum_{h \leq H} \frac{1}{h} \left| W\left(\frac{h}{d}\right)\right|, \quad j = 0, 1. \tag{3.29}$$

Сумата $W(v)$

За да оценим добре сумите Σ_j, ще ни е необходима достатъчно добра оценка за експоненциалната сума $W(v)$, дефинирана в (3.25). Това обаче е трудна задача поради наличието на $[p^c]$ във функцията в експонентата. Поради това ние ще представим тази сума като линейна комбинация от подобни суми (виж (3.53)), в които функцията в експонентата е гладка. След това ще използваме стандартни техники за оценяване на тези суми.

Нека $Z \geq 2$ е цяло число, което ще изберем по-късно. Ще използваме лемата на Виноградов (Лема 2.5.3) с параметри

$$\alpha = \frac{1}{2Z} \qquad \text{и} \qquad r = [\log N].$$

От лемата следва, че съществува периодична функция $g(t)$ с период 1 и имаща следните свойства:

$$g(0) = 1; \quad 0 < g(t) < 1 \ \text{ при } \ 0 < |t| < \frac{1}{2Z}; \quad g(t) = 0 \ \text{ при } \ \frac{1}{2Z} \leq |t| \leq \frac{1}{2}. \tag{3.30}$$

Също така от лемата имаме, че редът на Фурие за $g(t)$ се задава с

$$g(t) = \frac{1}{2Z} + \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} \beta_n \, e(nt),$$

където

$$|\beta_n| \leq \min\left(\frac{1}{2Z}, \frac{1}{\pi|n|}\left(\frac{2\,Z\,[\log N]}{\pi|n|}\right)^{[\log N]}\right).$$

От горната оценка за $|\beta_n|$ намираме

$$\sum_{|n| > Z(\log N)^4} |\beta_n| \ll N^{-\log\log N},$$

като константата в знака $\ll$ е абсолютна. Следователно

$$g(t) = \sum_{|n| \leq Z(\log N)^4} \beta_n \, e(nt) + O\left(N^{-\log\log N}\right), \tag{3.31}$$

където константата в знака O е абсолютна и

$$|\beta_n| \leq \frac{1}{2Z}. \tag{3.32}$$

Конструираме функции $g_z(t)$ по следния начин:

$$g_z(t) = g\left(t - \frac{z}{2Z}\right) \qquad \text{при} \qquad z = 0, 1, 2, \ldots, 2Z - 1. \tag{3.33}$$

Ясно е, че всяка от функциите $g_z(t)$ е периодична с период 1. Също така, като вземем предвид (3.30), виждаме, че

$$0 < g_z(t) \leq 1, \qquad \text{ако} \qquad \left|t - \frac{z}{2Z}\right| < \frac{1}{2Z}; \tag{3.34}$$

$$g_z(t) = 0, \qquad \text{ако} \qquad \frac{1}{2Z} \leq \left|t - \frac{z}{2Z}\right| \leq \frac{1}{2}. \tag{3.35}$$

От (3.33) следва, че ако $\beta_n^{(z)}$ е n-тия коефициент на Фурие за функцията $g_z(t)$, то $\beta_n^{(z)} = \beta_n\, e\left(-\frac{zn}{2Z}\right)$ и следователно $|\beta_n^{(z)}| = |\beta_n|$. Оттук и от (3.31) и (3.32) намираме, че за $z = 0, 1, \ldots, 2Z-1$ е изпълнено

$$g_z(t) = \sum_{|n| \leq Z(\log N)^4} \beta_n^{(z)}\, e(nt) + O\left(N^{-\log\log N}\right), \tag{3.36}$$

където константата в знака O е абсолютна и

$$|\beta_n^{(z)}| \leq \frac{1}{2Z}. \tag{3.37}$$

От (2.27), (3.33) и (3.35) намираме, че

$$\sum_{z=0}^{2Z-1} g_z(t) = 1 \qquad \text{за всяко} \quad t \in \mathbb{R}. \tag{3.38}$$

От (3.25) и (3.38) намираме

$$W(v) = \sum_{P<p\leq 2P} (\log p)\, e(v(N + j - [p^c])^\gamma) \sum_{z=0}^{2Z-1} g_z(p^c) = \sum_{z=0}^{2Z-1} W_z(v), \tag{3.39}$$

където

$$W_z(v) = \sum_{P<p\leq 2P} (\log p)\, g_z(p^c)\, e(v(N + j - [p^c])^\gamma). \tag{3.40}$$

При $z = 0$, вземайки предвид (3.2), намираме следната оценка

$$W_0(v) \ll \sum_{P<p\leq 2P} (\log p)\, g(p^c) \ll \log N \sum_{P<k\leq 2P} g(k^c).$$

Сега, като използваме (3.2), (3.31) и (3.32), намираме

$$W_0(v) \ll (\log N)\frac{P}{Z} + (\log N)\left|\sum_{P<k\leq 2P} \sum_{0<|n|\leq Z(\log N)^4} \beta_n\, e(nk^c)\right| + 1$$

$$\ll (\log N)\frac{N^\gamma}{Z} + \frac{\log N}{Z} \sum_{n\leq Z(\log N)^4} |\mathcal{H}_n| + 1, \tag{3.41}$$

където

$$\mathcal{H}_n = \sum_{P<k\le 2P} e(nk^c).$$

За горната сума ще използваме теоремата на Ван-дер-Корпут (Лема 2.2.5) с параметър $k = 2$ и $f(x) = nx^c$. Намираме $f''(x) = c(c-1)nx^{c-2} \asymp nP^{c-2}$ равномерно за $x \in [P, 2P]$. Виждаме, че условията (2.2) и (2.3) от теоремата са изпълнени при $\rho = nP^{c-2}$ и следователно от (2.4) за $\mathcal{H}_n$ намираме

$$\mathcal{H}_n \ll P\left(nP^{c-2}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(nP^{c-2}\right)^{-\frac{1}{2}} \ll P^{\frac{c}{2}}\, n^{\frac{1}{2}}. \tag{3.42}$$

Въвеждаме следното условие за Z:

$$Z \ll N^{\frac{2\gamma-1}{3}} (\log N)^{-4}. \tag{3.43}$$

Тогава от (3.2) и (3.41) – (3.43) намираме

$$W_0(v) \ll (\log N)\left(\frac{N^\gamma}{Z} + N^{\frac{1}{2}}\, Z^{\frac{1}{2}}\, \log^6 N\right) \ll (\log N)\,\frac{N^\gamma}{Z}. \tag{3.44}$$

Сега да разгледаме сумата $W_z(v)$ при $z = 1, 2, \ldots, 2Z-1$. От (3.34) и (3.35) виждаме, че $g_z(p^c) \neq 0$ само когато $\{p^c\} \in \left(\frac{z-1}{2Z}, \frac{z+1}{2Z}\right)$. Следователно сумирането в сумата (3.40) извършваме само по тези p, за които $\{p^c\} = \frac{z}{2Z} + O\left(\frac{1}{Z}\right)$. В този случай имаме

$$v(N + j - [p^c])^\gamma = v\left(N + j - p^c + \frac{z}{2Z}\right)^\gamma + O\left(\frac{vN^{\gamma-1}}{Z}\right)$$

и следователно

$$e\left(v(N + j - [p^c])^\gamma\right) = e\left(v\left(N + j - p^c + \frac{z}{2Z}\right)^\gamma\right) + O\left(\frac{vN^{\gamma-1}}{Z}\right).$$

От горната формула и (3.40), за сумата $W_z(v)$ намираме

$$W_z(v) = V_z(v) + O\left(\frac{vN^{\gamma-1}}{Z} \sum_{P<p\le 2P} (\log p)\, g_z(p^c)\right), \tag{3.45}$$

където

$$V_z(v) = \sum_{P<p\le 2P} (\log p)\, g_z(p^c)\, e\left(v\left(N + j - p^c + \frac{z}{2Z}\right)^\gamma\right). \tag{3.46}$$

Следователно от (3.39), (3.44) и (3.45) намираме

$$W(v) = \sum_{z=1}^{2Z-1} W_z(v) + W_0(v) = \sum_{z=1}^{2Z-1} V_z(v) + O(\Xi) + O\left((\log N)\frac{N^\gamma}{Z}\right),$$

където

$$\Xi = \frac{vN^{\gamma-1}}{Z} \sum_{P<p\le 2P} (\log p) \sum_{z=1}^{2Z-1} g_z(p^c).$$

Като използваме (3.2), (3.38) и теоремата на Чебишев (Лема 2.1.13), намираме

$$\Xi \ll \frac{vN^{2\gamma-1}}{Z}$$

и следователно

$$W(v) = \sum_{z=1}^{2Z-1} V_z(v) + O\left(\frac{vN^{2\gamma-1}}{Z}\right) + O\left((\log N)\frac{N^\gamma}{Z}\right). \tag{3.47}$$

От този момент нататък ние ще предполагаме, че

$$v = \frac{h}{d}, \qquad \text{където} \qquad 1 \le h \le H, \quad 1 \le d \le D. \tag{3.48}$$

От (3.28) и (3.48) виждаме, че $vN^{2\gamma-1} \ll N^\gamma(\log N)^3$. Тогава формула (3.47) може да се запише като

$$W(v) = \sum_{z=1}^{2Z-1} V_z(v) + O\left((\log N)^3\frac{N^\gamma}{Z}\right). \tag{3.49}$$

От (3.29) и (3.49) намираме

$$\Sigma_j \ll \frac{N^{2\gamma-1}}{(\log N)^2} + \sum_{d\le D}\sum_{h\le H}\frac{1}{h}\sum_{z=1}^{2Z-1}|V_z(v)| + \sum_{d\le D}\sum_{h\le H}\frac{1}{h}\frac{N^\gamma}{Z}(\log N)^3. \tag{3.50}$$

Избираме Z такова, че

$$Z \asymp dN^{1-\gamma}(\log N)^7. \tag{3.51}$$

От (3.5) и (3.23) следва, че условието в (3.43) е изпълнено. Следователно от (3.5), (3.28), (3.50) и (3.51) получаваме

$$\Sigma_j \ll \frac{N^{2\gamma-1}}{(\log N)^2} + \sum_{d\le D}\sum_{h\le H}\frac{1}{h}\sum_{z=1}^{2Z-1}|V_z(v)|. \tag{3.52}$$

Сега да разгледаме сумата $V_z(v)$, която е дефинирана в (3.46), като v удовлетворява (3.48). От (3.36) виждаме, че за достатъчно големи N е изпълнено

$$V_z(v) = \sum_{P<p\le 2P}(\log p)\left(\sum_{|r|\le Z(\log N)^4}\beta_r^{(z)}\, e(rp^c)\right) e\left(v\left(N+j-p^c+\frac{z}{2Z}\right)^\gamma\right) + O(N^{-10})$$

$$= \sum_{|r|\le Z(\log N)^4}\beta_r^{(z)}\, U\left(N+j+\frac{z}{2Z}, r, v\right) + O(N^{-10}),$$

където

$$U = U(T,r,v) = \sum_{P<p\le 2P}(\log p)\, e(rp^c + v(T-p^c)^\gamma). \tag{3.53}$$

Нека да отбележим, че когато $0 \le j \le 1$ и $1 \le z \le 2Z-1$, то

$$N + j + \frac{z}{2Z} \in [N, N+2].$$

Следователно, като имаме предвид (3.37) и (3.51), намираме

$$V_z(v) \ll N^{-10} + \frac{1}{Z} \sum_{|r| \le R} \sup_{T \in [N, N+2]} |U(T, r, v)|,$$

където

$$R = dN^{1-\gamma} (\log N)^{12}. \tag{3.54}$$

Като заместим горния израз за $V_z(v)$ във формула (3.52), намираме

$$|\Sigma_1| + |\Sigma_2| \ll \frac{N^{2\gamma-1}}{(\log N)^2} + \sum_{d \le D} \sum_{h \le H} \frac{1}{h} \sum_{|r| \le R} \sup_{T \in [N, N+2]} |U(T, r, v)|. \tag{3.55}$$

Прилагане на Тъждеството на Вон

Означаваме

$$\phi(t) = rt^c + v(T - t^c)^\gamma, \tag{3.56}$$

$$f(m, l) = \phi(ml) = r(ml)^c + v(T - (ml)^c)^\gamma. \tag{3.57}$$

За сумата U, дефинирана в (3.53), използваме дефиницията на функцията $\Lambda(n)$ и намираме

$$U = \sum_{P < p \le 2P} (\log p)\, e(\phi(p)) = \sum_{P < n \le 2P} \Lambda(n)\, e(\phi(n)) - \sum_{\substack{P < p^k \le 2P \\ k \ge 2}} (\log p)\, e(\phi(p^k)). \tag{3.58}$$

Като използваме, че $|e(\phi(p^k))| \ll 1$ и теоремата на Чебишев (Лема 2.1.13), намираме

$$\sum_{\substack{P < p^k \le 2P \\ k \ge 2}} (\log p)\, e(\phi(p^k)) \ll \sum_{p \le (2P)^{\frac{1}{2}}} \log p \sum_{k \le \frac{\log(2P)}{\log p}} 1 \ll (\log P) \sum_{p \le P^{\frac{1}{2}}} 1 \ll P^{\frac{1}{2}}. \tag{3.59}$$

От (3.58) и (3.59) следва, че

$$U = \sum_{P < n \le 2P} \Lambda(n)\, e(\phi(n)) + O\left(P^{\frac{1}{2}}\right).$$

За горната сума прилагаме тъждеството на Вон (Лема 2.3.1) с параметри $N = P$, $N_1 = 2P$, $u = P^{\frac{1}{3}}$ и получаваме

$$U = U_1 - U_2 - U_3 - U_4 + O\left(P^{\frac{1}{2}}\right), \tag{3.60}$$

където

$$U_1 = \sum_{m \le P^{\frac{1}{3}}} \mu(m) \sum_{\frac{P}{m} < l \le \frac{2P}{m}} (\log l)\, e(f(m,l)), \tag{3.61}$$

$$U_2 = \sum_{m \le P^{\frac{1}{3}}} c(m) \sum_{\frac{P}{m} < l \le \frac{2P}{m}} e(f(m,l)), \tag{3.62}$$

$$U_3 = \sum_{P^{\frac{1}{3}} < m \le P^{\frac{2}{3}}} c(m) \sum_{\frac{P}{m} < l \le \frac{2P}{m}} e(f(m,l)), \tag{3.63}$$

$$U_4 = \sum_{\substack{P < ml \le 2P \\ m > P^{\frac{1}{3}},\ l > P^{\frac{1}{3}}}} \sum a(m)\, \Lambda(l)\, e(f(m,l)), \tag{3.64}$$

и също така са изпълнени неравенствата

$$|c(m)| \le \log m \qquad \text{и} \qquad |a(m)| \le \tau(m). \tag{3.65}$$

Следователно от (3.5), (3.23), (3.28), (3.54), (3.55) и (3.60) намираме

$$|\Sigma_1| + |\Sigma_2| \ll \frac{N^{2\gamma-1}}{(\log N)^2} + \sum_{i=1}^{4} \Omega_i, \tag{3.66}$$

където

$$\Omega_i = \sum_{d \le D} \sum_{h \le H} \frac{1}{h} \sum_{|r| \le R} \sup_{T \in [N, N+2]} |U_i|. \tag{3.67}$$

От (3.66) и (3.67) следва, че за да докажем, че е изпълнено (3.22), е достатъчно да докажем, че

$$\Omega_i \ll \frac{N^{2\gamma-1}}{(\log N)^2} \qquad \text{за} \qquad i = 1, 2, 3, 4. \tag{3.68}$$

3.2.3 Оценяване на сумите Ω_1 и Ω_2

Първо ще разгледаме Ω_2. От (3.57) намираме

$$f''_{ll}(m,l) = \pi_1 - \pi_2, \tag{3.69}$$

където

$$\pi_1 = m^2 rc(c-1)(ml)^{c-2}, \qquad \pi_2 = m^2 v(c-1)T(ml)^{c-2}(T - (ml)^c)^{\gamma-2}. \tag{3.70}$$

От (3.2), (3.48) и условията

$$P < ml \le 2P, \qquad N \le T \le N+2 \tag{3.71}$$

намираме

$$|\pi_1| \asymp |r|m^2N^{1-2\gamma} \qquad \text{и} \qquad \pi_2 \asymp vm^2N^{-\gamma}. \tag{3.72}$$

От (3.69) и (3.72) следва, че съществува достатъчно малка константа $\alpha_0 > 0$, такава, че ако $|r| \le \alpha_0 vN^{\gamma-1}$, то $|f''_{ll}| \asymp vm^2N^{-\gamma}$.

Аналогично от (3.69) и (3.72) следва, че съществува достатъчно голяма константа $A_0 > 0$, такава, че ако $|r| \ge A_0 vN^{\gamma-1}$, то $|f''_{ll}| \asymp |r|m^2N^{1-2\gamma}$.

Сега ще разделим сумата Ω_2 на четири части в зависимост от стойността на r:

$$\Omega_2 = \Omega_{2,1} + \Omega_{2,2} + \Omega_{2,3} + \Omega_{2,4}, \tag{3.73}$$

където

$$\text{в } \Omega_{2,1}: \qquad |r| \le \alpha_0 vN^{\gamma-1}, \tag{3.74}$$

$$\text{в } \Omega_{2,2}: \qquad -A_0 vN^{\gamma-1} < r < -\alpha_0 vN^{\gamma-1}, \tag{3.75}$$

$$\text{в } \Omega_{2,3}: \qquad \alpha_0 vN^{\gamma-1} < r < A_0 vN^{\gamma-1}, \tag{3.76}$$

$$\text{в } \Omega_{2,4}: \qquad A_0 vN^{\gamma-1} \le |r| \le R. \tag{3.77}$$

Ще отбележим, че от (3.28), (3.48) и (3.54) следва, че

$$vN^{\gamma-1} \ll (\log N)^3 \ll \frac{R}{\log N}. \tag{3.78}$$

Нека първо да разгледаме $\Omega_{2,4}$. От (3.67) и (3.77) намираме

$$\Omega_{2,4} = \sum_{d\le D} \sum_{h\le H} \frac{1}{h} \sum_{A_0 vN^{\gamma-1}\le|r|\le R} \sup_{T\in[N,N+2]} |U_2|. \tag{3.79}$$

Трябва да оценим сумата U_2, дефинирана в (3.62) при r, удовлетворяващо условието в (3.77). Константата A_0 е избрана по такъв начин, че ако $|r| \ge A_0 vN^{\gamma-1}$, то $|f''_{ll}| \asymp |r|m^2N^{1-2\gamma}$. Следователно за сумата $\sum_{\frac{P}{m}<l\le\frac{2P}{m}} e(f(m,l))$ ще използваме теоремата на Ван-дер-Корпут (Лема 2.2.5), за да получим

$$\begin{aligned}\sum_{\frac{P}{m}<l\le\frac{2P}{m}} e(f(m,l)) &\ll \frac{P}{m}(|r|m^2N^{1-2\gamma})^{\frac12} + (|r|m^2N^{1-2\gamma})^{-\frac12} \\ &= P|r|^{\frac12}N^{\frac12-\gamma} + |r|^{-\frac12}m^{-1}N^{-\frac12+\gamma}.\end{aligned}$$

Като използваме (3.2), намираме

$$\sum_{\frac{P}{m}<l\le\frac{2P}{m}} e(f(m,l)) \ll |r|^{\frac12}N^{\frac12}. \tag{3.80}$$

Следователно от (3.2), (3.62), (3.65) и (3.80) намираме

$$U_2 \ll |r|^{\frac12}\, N^{\frac12+\frac{\gamma}{3}}\, (\log N).$$

Като заместим тази оценка за U_2 във формула (3.79) и използваме (3.28) и (3.54), получаваме

$$\Omega_{2,4} \ll \sum_{d\le D}\sum_{h\le H}\frac{1}{h}\,N^{\frac{1}{2}+\frac{\gamma}{3}+\varepsilon}R^{\frac{3}{2}} \ll D^{\frac{5}{2}}\,N^{2-\frac{7\gamma}{6}+\varepsilon}.$$

Следователно от (3.5) и (3.23) получаваме

$$\Omega_{2,4} \ll \frac{N^{2\gamma-1}}{(\log N)^2}. \tag{3.81}$$

Нека сега да разгледаме $\Omega_{2,3}$. От (3.67) и (3.76) намираме

$$\Omega_{2,3} = \sum_{d\le D}\sum_{h\le H}\frac{1}{h}\sum_{\alpha_0 v N^{\gamma-1}<r<A_0 v N^{\gamma-1}}\ \sup_{T\in[N,N+2]}|U_2|. \tag{3.82}$$

От (3.57) намираме

$$f'''_{lll}(m,l) = m^3 rc(c-1)(c-2)(ml)^{c-3}+$$

$$+\,m^3 v(c-1)T(T-(ml)^c)^{\gamma-3}(ml)^{c-3}((2-c)T-(c+1)(ml)^c). \tag{3.83}$$

От (3.69), (3.70) и (3.83) виждаме, че

$$(c-2)f''_{ll}(m,l) - l f'''_{lll}(m,l) = v(c-1)(2c-1)Tm^{2c}l^{2c-2}\left(T-(ml)^c\right)^{\gamma-3}.$$

От горната формула, (3.2) и (3.71) получаваме

$$|(c-2)f''_{ll}(m,l) - l f'''_{lll}(m,l)| \asymp vm^2N^{-\gamma}.$$

Следователно съществува константа $\kappa_0>0$, зависеща само от c, такава че за всяко $l\in\left(\frac{P}{m},\frac{2P}{m}\right]$ е изпълнено поне едно от следните неравенства:

$$|f''_{ll}(m,l)| \ge \kappa_0 vm^2N^{-\gamma} \tag{3.84}$$

или

$$|f'''_{lll}(m,l)| \ge \kappa_0 vm^3N^{-2\gamma}. \tag{3.85}$$

Сега ще покажем, че интервалът $\left(\frac{P}{m},\frac{2P}{m}\right]$ може да се раздели на най-много 7 интервала, такива, че ако J е един от тях, то е изпълнено поне едно от следните твърдения:

Изпълнено е (3.84) за всяко $l\in J$.

Изпълнено е (3.85) за всяко $l\in J$.

За да докажем това, е достатъчно да докажем, че уравнението $|f''_{ll}(m,l)| = \kappa_0 vm^2N^{-\gamma}$ има най-много 6 решения в реални числа $l\in\left(\frac{P}{m},\frac{2P}{m}\right)$. Следователно достатъчно е да докажем, че ако C е константа независеща от l, то уравнението $f''_{ll}(m,l)=C$ има най-много 3 реални решения $l\in\left(\frac{P}{m},\frac{2P}{m}\right)$. От теоремата на Рол знаем, че между всеки

две решения на последното уравнение има решение (в реални числа l) на уравнението $f'''_{ll}(m,l)=0$. Следователно от (3.83) заключаваме, че е достатъчно да докажем, че уравнението

$$vT(T-(ml)^c)^{\gamma-3}((2-c)T-(c+1)(ml)^c)=rc(2-c)$$

има най-много две решения $l\in\left(\frac{P}{m},\frac{2P}{m}\right)$, което е еквивалентно на твърдението, че уравнението

$$(T-X)^{\gamma-3}((2-c)T-(c+1)X)=\frac{rc(2-c)}{vT}$$

има най-много две решения за $X\in(P^c,(2P)^c)$. Горното уравнение можем да запишем като

$$(\gamma-3)\log(T-X)+\log\left((2-c)T-(c+1)X\right)=\log\frac{rc(2-c)}{vT}. \tag{3.86}$$

Нека с $H(X)$ да означим функцията в лявата страна на уравнението (3.86). От теоремата на Рол знаем, че между всеки две решения на (3.86) има решение на уравнението $H'(X)=0$. Тъй като

$$H'(X)=\frac{3-\gamma}{T-X}-\frac{c+1}{(2-c)T-(c+1)X},$$

то виждаме, че $H'(X)=0$ за не повече от една стойност на X. Тогава (3.86) има не повече от две решения и следователно нашето твърдение е доказано.

От друга страна, от (3.69), (3.72), (3.83) и условието за r от (3.76) намираме

$$f''_{ll}(m,l)\ll vm^2N^{-\gamma}\qquad\text{и}\qquad f'''_{ll}(m,l)\ll vm^3N^{-2\gamma}.$$

Следователно интервалът $\left(\frac{P}{m},\frac{2P}{m}\right]$ може да се раздели на не повече от 7 интервала, такива че ако J е един от тях, то поне едно от следните твърдения е изпълнено:

$$|f''_{ll}(m,l)|\asymp vm^2N^{-\gamma}\qquad\text{равномерно за}\qquad l\in J, \tag{3.87}$$

$$|f'''_{ll}(m,l)|\asymp vm^3N^{-2\gamma}\qquad\text{равномерно за}\qquad l\in J. \tag{3.88}$$

Ако е изпълнено (3.87), то използваме теоремата на Ван-дер-Корпут (Лема 2.2.5) при $k=2$ и намираме

$$\sum_{l\in J}e(f(m,l))\ll\frac{P}{m}\left(vm^2N^{-\gamma}\right)^{\frac12}+\left(vm^2N^{-\gamma}\right)^{-\frac12}\ll v^{\frac12}N^{\frac\gamma2}+v^{-\frac12}m^{-1}N^{\frac\gamma2}. \tag{3.89}$$

Ако е изпълнено (3.88), то използваме теоремата на Ван-дер-Корпут (Лема 2.2.5) при $k=3$ и намираме

$$\sum_{l\in J}e(f(m,l))\ll\frac{P}{m}\left(vm^3N^{-2\gamma}\right)^{\frac16}+\left(\frac{P}{m}\right)^{\frac12}\left(vm^3N^{-2\gamma}\right)^{-\frac16}\ll v^{\frac16}m^{-\frac12}N^{\frac{2\gamma}{3}}+v^{-\frac16}m^{-1}N^{\frac{5\gamma}{6}}.$$

Следователно и в двата случая сумата $\sum_{l\in J}e(f(m,l))$ може да бъде оценена със сумата на изразите в десните страни на горните неравенства. Следователно

$$\sum_{\frac{P}{m}<l\le\frac{2P}{m}}e(f(m,l))\ll v^{\frac12}N^{\frac\gamma2}+v^{-\frac12}m^{-1}N^{\frac\gamma2}+v^{\frac16}m^{-\frac12}N^{\frac{2\gamma}{3}}+v^{-\frac16}m^{-1}N^{\frac{5\gamma}{6}}. \tag{3.90}$$

От (3.2), (3.62), (3.65) и (3.90) намираме

$$U_2 \ll \sum_{m \le P^{\frac{1}{3}}} c(m) \left(v^{\frac{1}{2}} N^{\frac{\gamma}{2}} + v^{-\frac{1}{2}} m^{-1} N^{\frac{\gamma}{2}} + v^{\frac{1}{6}} m^{-\frac{1}{2}} N^{\frac{2\gamma}{3}} + v^{-\frac{1}{6}} m^{-1} N^{\frac{5\gamma}{6}} \right)$$

$$\ll (\log N)^2 \left(v^{\frac{1}{2}} N^{\frac{5\gamma}{6}} + v^{-\frac{1}{2}} N^{\frac{\gamma}{2}} + v^{\frac{1}{6}} N^{\frac{5\gamma}{6}} + v^{-\frac{1}{6}} N^{\frac{5\gamma}{6}} \right). \tag{3.91}$$

Като използваме (3.28), (3.48), (3.78), (3.82) и (3.91), намираме

$$\Omega_{2,3} = \sum_{d \le D} \sum_{h \le H} \frac{1}{h} \sum_{\alpha_0 v N^{\gamma-1} < r < A_0 v N^{\gamma-1}} (\log N)^2 \left(v^{\frac{1}{2}} N^{\frac{5\gamma}{6}} + v^{-\frac{1}{2}} N^{\frac{\gamma}{2}} + v^{\frac{1}{6}} N^{\frac{5\gamma}{6}} + v^{-\frac{1}{6}} N^{\frac{5\gamma}{6}} \right)$$

$$\ll N^{\varepsilon} \sum_{d \le D} \sum_{h \le H} \frac{1}{h} \left(\frac{h^{\frac{1}{2}} N^{\frac{5\gamma}{6}}}{d^{\frac{1}{2}}} + \frac{h^{-\frac{1}{2}} N^{\frac{\gamma}{2}}}{d^{-\frac{1}{2}}} + \frac{h^{\frac{1}{6}} N^{\frac{5\gamma}{6}}}{d^{\frac{1}{6}}} + \frac{h^{-\frac{1}{6}} N^{\frac{5\gamma}{6}}}{d^{-\frac{1}{6}}} \right)$$

$$\ll N^{\varepsilon} \sum_{d \le D} \left(N^{\frac{1}{2}+\frac{\gamma}{3}} + d^{\frac{1}{2}} N^{\frac{\gamma}{2}} + N^{\frac{1}{6}+\frac{2\gamma}{3}} + d^{\frac{1}{6}} N^{\frac{5\gamma}{6}} \right)$$

$$\ll N^{\varepsilon} \left(D N^{\frac{1}{2}+\frac{\gamma}{3}} + D^{\frac{3}{2}} N^{\frac{\gamma}{2}} + D N^{\frac{1}{6}+\frac{2\gamma}{3}} + D^{\frac{7}{6}} N^{\frac{5\gamma}{6}} \right). \tag{3.92}$$

От (3.5), (3.23) и (3.92) получаваме

$$\Omega_{2,3} \ll \frac{N^{2\gamma-1}}{(\log N)^2}. \tag{3.93}$$

Нека сега да разгледаме $\Omega_{2,1}$. От (3.67) и (3.74) намираме

$$\Omega_{2,1} = \sum_{d \le D} \sum_{h \le H} \frac{1}{h} \sum_{|r| \le \alpha_0 v N^{\gamma-1}} \sup_{T \in [N, N+2]} |U_2|.$$

Избираме константа α_0 такава, че от (3.71) да следва, че $|f''_{ll}(m,l)| \asymp v m^2 N^{-\gamma}$ равномерно при $l \in \left(\frac{P}{m}, \frac{2P}{m}\right]$. Тогава сумата $\sum_{\frac{P}{m} < l \le \frac{2P}{m}} e\left(f(m,l)\right)$ може да бъде оценена от израза в дясната страна на (3.89) и също така оценката (3.90) отново е изпълнена. Следователно виждаме, че $\Omega_{2,1}$ може да бъде оценена по същия начин като $\Omega_{2,3}$, т. е.

$$\Omega_{2,1} \ll \frac{N^{2\gamma-1}}{(\log N)^2}. \tag{3.94}$$

Сумата $\Omega_{2,2}$ се разглежда по същия начин. От (3.69) – (3.72), (3.75) следва, че $|f''_{ll}(m,l)| \asymp v m^2 N^{-\gamma}$ и следователно оценката (3.90) е изпълнена отново. Следователно

$$\Omega_{2,2} \ll \frac{N^{2\gamma-1}}{(\log N)^2}. \tag{3.95}$$

От (3.73), (3.81), (3.93) - (3.95) намираме

$$\Omega_2 \ll \frac{N^{2\gamma-1}}{(\log N)^2}. \tag{3.96}$$

Нека сега да разгледаме Ω_1. За да оценим сумата U_1, която е дефинирана в (3.61), ще използваме преобразованието на Абел (Лема 2.1.2). Нека да въведем означението

$$Z(t) = \sum_{\frac{P}{m} < l \leq t} e(f(m,l)). \tag{3.97}$$

Тогава

$$U_1 = \sum_{m \leq P^{\frac{1}{3}}} \mu(m) \left(Z\left(\frac{2P}{m}\right) \log\left(\frac{2P}{m}\right) - \int\limits_{\frac{P}{m}}^{\frac{2P}{m}} \frac{Z(t)}{t} dt \right).$$

Следователно

$$\begin{aligned} |U_1| &\ll (\log N) \sum_{m \leq P^{\frac{1}{3}}} \left(\left| Z\left(\frac{2P}{m}\right) \right| + \int\limits_{\frac{P}{m}}^{\frac{2P}{m}} \frac{|Z(t)|}{t} dt \right) \\ &\ll (\log N) \sum_{m \leq P^{\frac{1}{3}}} \max_{\frac{P}{m} \leq t \leq \frac{2P}{m}} |Z(t)|. \end{aligned} \tag{3.98}$$

От (3.62), (3.65), (3.97) и (3.98) следва, че U_1 се оценява като сумата U_2. Следователно, като процедираме както при оценяването за Ω_2, намираме

$$\Omega_1 \ll \frac{N^{2\gamma-1}}{(\log N)^2}. \tag{3.99}$$

3.2.4 Оценяване на сумите Ω_3 и Ω_4 и завършване на доказателството

Нека първо да разгледаме сумата Ω_4, която е дефинирана в (3.67). Ще разделим сумата U_4, зададена в (3.64), на $O(\log N)$ суми от вида

$$W_{M,L} = \sum_{L < l \leq 2L} b(l) \sum_{\substack{M < m \leq 2M \\ \frac{P}{l} < m \leq \frac{2P}{l}}} a(m) e(f(m,l)), \tag{3.100}$$

където

$$a(m) \ll N^{\varepsilon}, \quad b(l) \ll N^{\varepsilon}, \quad P^{\frac{1}{3}} \leq M \leq P^{\frac{1}{2}} \ll L \ll P^{\frac{2}{3}}, \quad ML \asymp P. \tag{3.101}$$

От (3.100), (3.101) и неравенството на Коши (Лема 2.1.1) намираме

$$|W_{M,L}|^2 \ll N^{\varepsilon} L \sum_{L < l \leq 2L} \left| \sum_{M_1 < m \leq M_2} a(m)\, e(f(m,l)) \right|^2, \tag{3.102}$$

където

$$M_1 = \max\left(M, \frac{P}{l}\right), \qquad M_2 = \min\left(2M, \frac{2P}{l}\right). \tag{3.103}$$

Към вътрешната сума в (3.102) прилагаме неравенството от Лема 2.1.7, като в нашия случай $\xi(m) = a(m)\, e(f(m,l))$, $a = M_1, b = M_2$. Точната стойност на Q ще изберем по-късно. Засега само ще считаме, че

$$Q \leq M. \tag{3.104}$$

Намираме, че

$$|W_{M,L}|^2 \ll N^{\varepsilon} L \sum_{L<l\leq 2L} \frac{M}{Q} \sum_{|q|\leq Q} \left(1 - \frac{|q|}{Q}\right)$$

$$\times \sum_{\substack{M_1<m\leq M_2 \\ M_1<m+q\leq M_2}} a(m+q)\, \overline{a(m)}\, e(f(m+q,l) - f(m,l)).$$

В израза от дясната страна на горната формула отделяме събираемите, за които $q = 0$ и, като вземем предвид (3.101) и (3.103), получаваме

$$|W_{M,L}|^2 \ll \frac{N^{\varepsilon}(LM)^2}{Q} + \frac{N^{\varepsilon} LM}{Q} \sum_{0<|q|\leq Q} \sum_{\substack{M<m\leq 2M \\ M<m+q\leq 2M}} \left| \sum_{L_1<l\leq L_2} e\left(Y_{m,q}(l)\right) \right|, \tag{3.105}$$

където

$$L_1 = \max\left(L, \frac{P}{m}, \frac{P}{m+q}\right), \qquad L_2 = \min\left(2L, \frac{2P}{m}, \frac{2P}{m+q}\right) \tag{3.106}$$

и

$$Y(l) = Y_{m,q}(l) = f(m+q,l) - f(m,l). \tag{3.107}$$

Виждаме, че сумата по отрицателните q във формула (3.105) е равна на сумата по положителните q, следователно

$$|W_{M,L}|^2 \ll \frac{N^{\varepsilon}(LM)^2}{Q} + \frac{N^{\varepsilon} LM}{Q} \sum_{1\leq q\leq Q} \sum_{M<m\leq 2M-q} \left| \sum_{L_1<l\leq L_2} e\left(Y_{m,q}(l)\right) \right|. \tag{3.108}$$

Да разгледаме функцията $Y(l)$, която дефинирахме в (3.107). От (3.56) и (3.57) намираме

$$Y(l) = \int_m^{m+q} f_t'(t,l)dt = \int_m^{m+q} l\phi'(tl)dt$$

и следователно

$$Y''(l) = \int_m^{m+q} (2t\phi''(tl) + lt^2\phi'''(tl))dt, \qquad Y'''(l) = \int_m^{m+q} (3t^2\phi'''(tl) + lt^3\phi^{(4)}(tl))dt. \tag{3.109}$$

От (3.56) и (3.109) намираме

$$Y''(l) = \int\limits_{m}^{m+q} (\Phi_1(t) - \Phi_2(t))dt, \tag{3.110}$$

където

$$\Phi_1(t) = rc^2(c-1)t^{c-1}l^{c-2}, \tag{3.111}$$

$$\Phi_2(t) = v(c-1)Tt^{c-1}l^{c-2}\left(T - (tl)^c\right)^{\gamma-3}\left(cT + (c-1)(tl)^c\right). \tag{3.112}$$

Ако $t \in [m, m+q]$, то $tl \asymp P$. Тогава от условието

$$N \leq T \leq N+2 \tag{3.113}$$

и дефиницията на P намираме, че равномерно за $t \in [m, m+q]$ имаме

$$|\Phi_1(t)| \asymp |r|\, m\, N^{1-2\gamma} \qquad \text{и} \qquad \Phi_2(t) \asymp v\, m\, N^{-\gamma}. \tag{3.114}$$

От (3.110) и (3.114) виждаме, че съществува достатъчно малка константа $\alpha_1 > 0$, такава, че ако $|r| \leq \alpha_1 v N^{\gamma-1}$, то $|Y''(l)| \asymp qvmN^{-\gamma}$.

Аналогично, от (3.110) и (3.114) виждаме, че съществува достатъчно голяма константа $A_1 > 0$, такава, че ако $|r| \geq A_1 v N^{\gamma-1}$, то $|Y''(l)| \asymp |r|qmN^{1-2\gamma}$. Следователно удобно е да разделим сумата Ω_4 на 4 суми в зависимост от стойността на r по следния начин:

$$\Omega_4 = \Omega_{4,1} + \Omega_{4,2} + \Omega_{4,3} + \Omega_{4,4}, \tag{3.115}$$

където

$$\text{в } \Omega_{4,1}: \qquad |r| \leq \alpha_1 v N^{\gamma-1}, \tag{3.116}$$

$$\text{в } \Omega_{4,2}: \qquad -A_1 v N^{\gamma-1} < r < -\alpha_1 v N^{\gamma-1}, \tag{3.117}$$

$$\text{в } \Omega_{4,3}: \qquad \alpha_1 v N^{\gamma-1} < r < A_1 v N^{\gamma-1}, \tag{3.118}$$

$$\text{в } \Omega_{4,4}: \qquad A_1 v N^{\gamma-1} \leq |r| \leq R. \tag{3.119}$$

Първо ще разгледаме сумата $\Omega_{4,4}$. От (3.64) (3.67) (3.100) и (3.119) намираме

$$\Omega_{4,4} \ll (\log N) \sum_{d \leq D} \sum_{h \leq H} \frac{1}{h} \sum_{A_1 v N^{\gamma-1} \leq |r| \leq R} \sup_{\substack{T \in [N, N+2] \\ M, L\,:\,(3.101)}} |W_{M,L}|. \tag{3.120}$$

Супремумът се взима по $T \in [N, N+2]$ и M, L, удовлетворяващи условията (3.101).

Нека разгледаме сумата $W_{M,L}$. Както споменахме по-горе, при $|r| \geq A_1 v N^{\gamma-1}$, равномерно за $l \in (L_1, L_2]$ е изпълнено $Y''(l) \asymp |r|qmN^{1-2\gamma}$. Следователно можем

да използваме теоремата на Ван-дер-Корпут (Лема 2.2.5) при $k = 2$. Като вземем предвид (3.2), (3.101) и (3.106), намираме

$$\sum_{L_1<l\le L_2} e(Y(l)) \ll L(|r|qmN^{1-2\gamma})^{\frac{1}{2}} + (|r|qmN^{1-2\gamma})^{-\frac{1}{2}} \ll |r|^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}} M^{-\frac{1}{2}} N^{\frac{1}{2}}. \tag{3.121}$$

От (3.2), (3.101), (3.108) и (3.121) намираме

$$W_{M,L} \ll N^{\varepsilon} \left(N^{\gamma} Q^{-\frac{1}{2}} + |r|^{\frac{1}{4}} Q^{\frac{1}{4}} N^{\frac{1}{4}+\frac{5\gamma}{8}} \right). \tag{3.122}$$

От (3.28), (3.54), (3.120) и (3.122) получаваме

$$\Omega_{4,4} \ll N^{\varepsilon} \sum_{d\le D} \sum_{h\le H} \frac{1}{h} \sum_{|r|\le dN^{1-\gamma}(\log N)^{12}} \left(N^{\gamma} Q^{-\frac{1}{2}} + |r|^{\frac{1}{4}} Q^{\frac{1}{4}} N^{\frac{1}{4}+\frac{5\gamma}{8}} \right)$$

$$\ll N^{\varepsilon} \left(D^2 N Q^{-\frac{1}{2}} + Q^{\frac{1}{4}} D^{\frac{9}{4}} N^{\frac{3}{2}-\frac{5\gamma}{8}} \right).$$

Избираме

$$Q = \left[D^{-\frac{1}{3}} N^{\frac{5\gamma}{6}-\frac{2}{3}} \right]. \tag{3.123}$$

От (3.2) и (3.101) виждаме, че при така избраното Q условието (3.104) е изпълнено. Тогава от (3.5) и (3.23) получаваме

$$\Omega_{4,4} \ll \frac{N^{2\gamma-1}}{(\log N)^2}. \tag{3.124}$$

Нека сега да разгледаме $\Omega_{4,3}$. От (3.64), (3.67), (3.100) и (3.118) намираме

$$\Omega_{4,3} \ll (\log N) \sum_{d\le D} \sum_{h\le H} \frac{1}{h} \sum_{\alpha_1 v N^{\gamma-1} < r < A_1 v N^{\gamma-1}} \sup_{\substack{T\in[N,N+2] \\ M,L\,:\,(3.101)}} |W_{M,L}|. \tag{3.125}$$

Да разгледаме $W_{M,L}$. От (3.109) – (3.112) намираме

$$Y'''(l) = \int_m^{m+q} (\Psi_1(t) + \Psi_2(t))\, dt, \tag{3.126}$$

където

$$\Psi_1(t) = r\, c^2\, (c-1)\, (c-2)\, t^{c-1}\, l^{c-3}, \tag{3.127}$$

$$\Psi_2(t) = v\, (c-1)\, T\, t^{c-1}\, l^{c-3}\, (T - (tl)^c)^{\gamma-4}$$

$$\times \Big(c(2-c)\, T^2 + (-4c^2 + 3c - 2)\, T\, (tl)^c + (1-c^2)\, (tl)^{2c} \Big). \tag{3.128}$$

От (3.110) – (3.112) и (3.126) – (3.128) намираме

$$lY'''(l) + (2-c)Y''(l) = -\int\limits_{m}^{m+q} \Theta(t)\,dt,$$

където

$$\Theta(t) = v(c-1)Tt^{2c-1}l^{2c-2}\left(T-(tl)^c\right)^{\gamma-4}\left(2c(2c-1)T + (2c^2-3c+1)(tl)^c\right).$$

Като използваме (3.2), (3.101) и (3.113), намираме, че за $t \in [m, m+q]$ е изпълнено

$$\Theta(t) \asymp vmN^{-\gamma}.$$

Следователно

$$|(2-c)Y''(l) + lY'''(l)| \asymp qmvN^{-\gamma}$$

равномерно за $l \in (L_1, L_2]$.

Следователно съществува константа $\kappa_1 > 0$, зависеща само от c, такава че за всяко $l \in (L_1, L_2]$ е изпълнено поне едно от следните неравенства:

$$|Y''(l)| \geq \kappa_1 vqmN^{-\gamma}, \tag{3.129}$$

$$|Y'''(l)| \geq \kappa_1 vqm^2N^{-2\gamma}. \tag{3.130}$$

Сега ще покажем, че интервалът $(L_1, L_2]$ може да се раздели на не повече от 13 интервала, такива, че ако J е един от тях, то поне едно от долните твърдения е изпълнено:

Изпълнено е (3.129) за всяко $l \in J$.

Изпълнено е (3.130) за всяко $l \in J$.

За да докажем това, е достатъчно да покажем, че уравнението $|Y''(l)| = \kappa_1 vqmN^{-\gamma}$ има най-много 12 решения в реални числа $l \in (L_1, L_2)$. Следователно, достатъчно е да докажем, че ако C е константа, независеща от l, то уравнението $Y''(l) = C$ има най-много 6 реални решения $l \in (L_1, L_2)$. От теоремата на Рол знаем, че между всеки две решения на последното уравнение има решение на уравнението

$$Y'''(l) = 0. \tag{3.131}$$

Следователно достатъчно е да докажем, че уравнението (3.131) има не повече от 5 решения в реални числа $l \in (L_1, L_2)$.

От (3.83) и (3.107) виждаме, че (3.131) е еквивалентно на уравнението

$$(m+q)^c\big(T-(m+q)^cl^c\big)^{\gamma-3}\big((2-c)T-(c+1)(m+q)^cl^c\big)$$

$$-\,m^c\left(T-m^cl^c\right)^{\gamma-3}\left((2-c)T-(c+1)m^cl^c\right) = \frac{rc(2-c)\big((m+q)^c-m^c\big)}{vT}.$$

Нека $X = l^c$. Дефинираме

$$\mathcal{F}(X) = (m+q)^c\big(T-(m+q)^cX\big)^{\gamma-3}\big((2-c)T-(c+1)(m+q)^cX\big)$$

$$-\,m^c\,(T-m^cX)^{\gamma-3}\,\big((2-c)T-(c+1)m^cX\big).$$

Достатъчно е да докажем, че ако B не зависи от X, то уравнението $\mathcal{F}(X) = B$ има не повече от 5 решения за $X \in (L_1^c, L_2^c)$.

Като използваме още веднъж теоремата на Рол, виждаме, че е достатъчно да докажем, че уравнението $\mathcal{F}'(X) = 0$ има не повече от 4 решения за $X \in (L_1^c, L_2^c)$. Уравнението $\mathcal{F}'(X) = 0$ можем да запишем като

$$(m+q)^{2c}\big(T-(m+q)^cX\big)^{\gamma-4}\big((4c+2\gamma-6)T+(2c-\gamma+1)(m+q)^cX\big)$$

$$= m^{2c}\big(T-m^cX\big)^{\gamma-4}\big((4c+2\gamma-6)T+(2c-\gamma+1)m^cX\big),$$

което е еквивалентно на

$$\mathcal{G}(X) = 2\log m^c - 2\log(m+q)^c,$$

където

$$\mathcal{G}(X) = (\gamma-4)\log\big(T-(m+q)^cX\big) + \log\big((4c+2\gamma-6)T+(2c+1-\gamma)(m+q)^cX\big)$$

$$-\,(\gamma-4)\log\big(T-m^cX\big) - \log\big((4c+2\gamma-6)T+(2c+1-\gamma)m^cX\big).$$

Аналогично стигаме до заключението, че е достатъчно да докажем, че уравнението

$$\mathcal{G}'(X) = 0 \tag{3.132}$$

има не повече от 3 решения за $X \in (L_1^c, L_2^c)$. Това може лесно да се покаже, тъй като

$$\mathcal{G}'(X) = \frac{(4-\gamma)(m+q)^c}{T-(m+q)^cX} + \frac{(2c+1-\gamma)(m+q)^c}{(4c+2\gamma-6)T+(2c+1-\gamma)(m+q)^cX}$$

$$-\,\frac{(4-\gamma)m^c}{T-m^cX} - \frac{(2c+1-\gamma)m^c}{(4c+2\gamma-6)T+(2c+1-\gamma)m^cX}.$$

Като приведем под общ знаменател и извършим елементарни преобразования, намираме, че броят на решенията на (3.132) е по-малък или равен на 3.

От друга страна, от (3.110), (3.114), (3.118) и (3.126) – (3.128) намираме

$$Y''(l) \ll vqmN^{-\gamma} \qquad \text{и} \qquad Y'''(l) \ll vqm^2N^{-2\gamma}.$$

Следователно интервалът $(L_1, L_2]$ може да се раздели на не повече от 13 подинтервала, такива, че ако J е един от тях, то поне едно от долните твърдения е изпълнено:

$$|Y''(l)| \asymp vqmN^{-\gamma} \qquad \text{равномерно за} \qquad l \in J, \tag{3.133}$$

$$|Y'''(l)| \asymp vqm^2N^{-2\gamma} \qquad \text{равномерно за} \qquad l \in J. \tag{3.134}$$

Ако е изпълнено (3.133), то като използваме (3.2), (3.101) и теоремата на Ван-дер-Корпут (Лема 2.2.5) при $k = 2$, намираме

$$\sum_{l\in J} e(Y(l)) \ll L(qvmN^{-\gamma})^{\frac{1}{2}} + (qvmN^{-\gamma})^{-\frac{1}{2}}$$
$$\ll q^{\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}}LM^{\frac{1}{2}}N^{-\frac{\gamma}{2}} + q^{-\frac{1}{2}}v^{-\frac{1}{2}}M^{-\frac{1}{2}}N^{\frac{\gamma}{2}}. \tag{3.135}$$

Когато е изпълнено (3.134), използваме (3.2), (3.101) и теоремата на Ван-дер-Корпут (Лема 2.2.5) при $k = 3$, за да намерим

$$\sum_{l\in J} e(Y(l)) \ll L(qvm^2N^{-2\gamma})^{\frac{1}{6}} + L^{\frac{1}{2}}(qvm^2N^{-2\gamma})^{-\frac{1}{6}}$$
$$\ll q^{\frac{1}{6}}v^{\frac{1}{6}}LM^{\frac{1}{3}}N^{-\frac{\gamma}{3}} + q^{-\frac{1}{6}}v^{-\frac{1}{6}}L^{\frac{1}{2}}M^{-\frac{1}{3}}N^{\frac{\gamma}{3}}. \tag{3.136}$$

Следователно и в двата случая сумата $\sum_{l\in J} e(Y(l))$ може да се оцени от сумата на изразите в десните страни на неравенствата (3.135) и (3.136). Получаваме

$$\sum_{L_1<l\le L_2} e(Y(l)) \ll q^{\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}}LM^{\frac{1}{2}}N^{-\frac{\gamma}{2}}+q^{-\frac{1}{2}}v^{-\frac{1}{2}}M^{-\frac{1}{2}}N^{\frac{\gamma}{2}}+q^{\frac{1}{6}}v^{\frac{1}{6}}LM^{\frac{1}{3}}N^{-\frac{\gamma}{3}}+q^{-\frac{1}{6}}v^{-\frac{1}{6}}L^{\frac{1}{2}}M^{-\frac{1}{3}}N^{\frac{\gamma}{3}}.$$

От горната оценка, (3.101) и (3.108) намираме

$$|W_{M,L}|^2 \ll N^{\varepsilon}\frac{P^2}{Q}+$$
$$+\frac{N^{\varepsilon}}{Q}\sum_{1\le q\le Q}\Big(q^{\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}}P^{\frac{9}{4}}N^{-\frac{\gamma}{2}} + q^{-\frac{1}{2}}v^{-\frac{1}{2}}P^{\frac{5}{4}}N^{\frac{\gamma}{2}} + q^{\frac{1}{6}}v^{\frac{1}{6}}P^{\frac{13}{6}}N^{-\frac{\gamma}{3}} + q^{-\frac{1}{6}}v^{-\frac{1}{6}}P^{\frac{19}{12}}N^{\frac{\gamma}{3}}\Big).$$

Сега като извършим сумирането по q и вземем предвид (3.2), получаваме

$$W_{M,L} \ll N^{\varepsilon}\left(N^{\gamma}Q^{-\frac{1}{2}} + v^{\frac{1}{4}}Q^{\frac{1}{4}}N^{\frac{7\gamma}{8}} + v^{-\frac{1}{4}}Q^{-\frac{1}{4}}N^{\frac{7\gamma}{8}} + v^{\frac{1}{12}}Q^{\frac{1}{12}}N^{\frac{11\gamma}{12}} + v^{-\frac{1}{12}}Q^{-\frac{1}{12}}N^{\frac{23\gamma}{24}}\right).$$

Използваме горната оценка за $W_{M,L}$ в (3.125). От (3.28), (3.48) и (3.78) намираме

$$\Omega_{4,3} \ll N^{\varepsilon}\sum_{d\le D}\sum_{h\le H}\frac{1}{h}\sum_{r<A_1\log^3 N}\Big(N^{\gamma}Q^{-\frac{1}{2}} + \Big(\frac{h}{d}\Big)^{\frac{1}{4}}Q^{\frac{1}{4}}N^{\frac{7\gamma}{8}}$$

$$+\Big(\frac{h}{d}\Big)^{-\frac{1}{4}}Q^{-\frac{1}{4}}N^{\frac{7\gamma}{8}} + \Big(\frac{h}{d}\Big)^{\frac{1}{12}}Q^{\frac{1}{12}}N^{\frac{11\gamma}{12}} + \Big(\frac{h}{d}\Big)^{-\frac{1}{12}}Q^{-\frac{1}{12}}N^{\frac{23\gamma}{24}}\Big)$$

$$\ll N^{\varepsilon}\left(DN^{\gamma}Q^{-\frac{1}{2}} + DQ^{\frac{1}{4}}N^{\frac{1}{4}+\frac{5\gamma}{8}} + D^{\frac{5}{4}}Q^{-\frac{1}{4}}N^{\frac{7\gamma}{8}} + DQ^{\frac{1}{12}}N^{\frac{1}{12}+\frac{5\gamma}{6}} + D^{\frac{13}{12}}Q^{-\frac{1}{12}}N^{\frac{23\gamma}{24}}\right).$$

От избора на Q, който направихме в (3.123), става ясно, че при условията за γ и δ от (3.23) имаме

$$\Omega_{4,3} \ll \frac{N^{2\gamma-1}}{(\log N)^2}. \tag{3.137}$$

Нека сега да разгледаме $\Omega_{4,1}$. Ние избрахме константата α_1, така че от (3.71) и (3.116) следва, че $Y''(l) \asymp vqmN^{-\gamma}$ равномерно за $l \in (L_1, L_2]$. Тогава сумата $\sum_{\frac{P}{m}<l\leq\frac{2P}{m}} e\left(Y(l)\right)$ може да се оцени от израза в дясната страна на (3.135). Като извършим същите разсъждения както при оценяването на $\Omega_{4,3}$, получаваме

$$\Omega_{4,1} \ll \frac{N^{2\gamma-1}}{(\log N)^2}. \tag{3.138}$$

По същия начин процедираме и с $\Omega_{4,2}$. Този път $Y''(l) \asymp qvm^2N^{-2\gamma}$ равномерно за $l \in (L_1, L_2]$. Тогава сумата $\sum_{\frac{P}{m}<l\leq\frac{2P}{m}} e\left(Y(l)\right)$ може да се оцени от израза в дясната страна на (3.136), откъдето намираме, че

$$\Omega_{4,2} \ll \frac{N^{2\gamma-1}}{(\log N)^2}. \tag{3.139}$$

От (3.115), (3.124) и (3.137) – (3.139) намираме

$$\Omega_4 \ll \frac{N^{2\gamma-1}}{(\log N)^2}. \tag{3.140}$$

Остана да оценим само сумата Ω_3. От (3.63), (3.65) и (3.67) виждаме, че сумата Ω_3 може да се раздели на $O(\log N)$ суми от вида (3.100), където отново са изпълнени условията (3.101). Аналогично на оценяването на Ω_4, намираме

$$\Omega_3 \ll \frac{N^{2\gamma-1}}{(\log N)^2}. \tag{3.141}$$

От (3.96), (3.99), (3.140) и (3.141) следва, че (3.68) е изпълнено, с което теоремата е доказана. $\square$

Глава 4

Едно уравнение с прости числа от специален вид

4.1 Формулировка на резултата

В тази глава ще докажем следното твърдение:

Теорема 4.1.1. *(Ж. Петров [69], 2017)*
Нека $1 < c < \frac{17}{16}$. Тогава за всяко достатъчно голямо естествено число N, уравнението

$$[p_1^c] + [p_2^c] + [p_3^c] = N \tag{4.1}$$

има решение в прости числа p_1, p_2, p_3, такива че всяко от числата $p_1 + 2$, $p_2 + 2$, $p_3 + 2$ има не повече от $\left[\frac{95}{17-16c}\right]$ прости делителя, броени с техните кратности.

4.2 Доказателство на Теорема 4.1.1

4.2.1 Начало на доказателството

Нека η, δ, ξ и μ са положителни реални числа, зависещи от c, на които ще определим точната стойност по-късно. Сега допускаме само, че удовлетворяват условията

$$\xi + 3\delta < \frac{12}{25}, \qquad 2 < \frac{\delta}{\eta} < 3, \qquad \mu < 1. \tag{4.2}$$

Нека също така

$$X = N^{\frac{1}{c}}, \qquad z = X^{\eta}, \qquad D = X^{\delta}, \qquad \Delta = X^{\xi - c} \tag{4.3}$$

и

$$P(z) = \prod_{2<p<z} p. \tag{4.4}$$

Ще разгледаме сумата

$$\Gamma = \sum_{\substack{\mu X < p_1, p_2, p_3 \le X \\ [p_1^c]+[p_2^c]+[p_3^c]=N \\ (p_i+2, P(z))=1,\ i=1,2,3}} (\log p_1)(\log p_2)(\log p_3). \tag{4.5}$$

Ако докажем, че

$$\Gamma > 0, \tag{4.6}$$

то уравнението (4.1) има решение в прости числа p_1, p_2, p_3, удовлетворяващи условията в сумата Γ. Нека допуснем, че $p_i + 2$ има l прости делителя, броени с техните кратности. От (4.3), (4.4) и условието $(p_i + 2, P(z)) = 1$ следва, че

$$X + 2 \geq p_i + 2 \geq z^l = X^{\eta l}$$

и следователно $l \leq \frac{1}{\eta}$. Това означава, че $p_i + 2$ има не повече от $[\eta^{-1}]$ прости делителя броени с техните кратности. Следователно, за да докажем Теорема 4.1.1, трябва да докажем (4.6) за подходящо η.

Използвайки Лема 2.1.8 за $i = 1, 2, 3$, определяме

$$\Lambda_i = \sum_{d|(p_i+2,P(z))} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{ако } (p_i + 2, P(z)) = 1, \\ 0 & \text{в противен случай.} \end{cases} \tag{4.7}$$

За Γ получаваме

$$\Gamma = \sum_{\substack{\mu X < p_1, p_2, p_3 \leq X \\ [p_1^c]+[p_2^c]+[p_3^c]=N}} \Lambda_1 \Lambda_2 \Lambda_3 (\log p_1)(\log p_2)(\log p_3).$$

Като използваме Лема 2.2.1, намираме

$$\Gamma = \sum_{\mu X < p_1, p_2, p_3 \leq X} \Lambda_1 \Lambda_2 \Lambda_3 (\log p_1)(\log p_2)(\log p_3) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e(\alpha([p_1^c] + [p_2^c] + [p_3^c] - N)) d\alpha.$$

Нека $\lambda^{\pm}(d)$ са функциите на Розер от ниво D (виж Лема 2.4.1). В нашия случай $\mathcal{P}$ е множеството от всички нечетни прости числа и $\omega(d) = \frac{d}{\varphi(d)}$. Условието (2.8) очевидно е изпълнено, а условието (2.9) е изпълнено поради Лема 2.1.12.

Нека означим

$$\Lambda_i^{\pm} = \sum_{d|(p_i+2,P(z))} \lambda^{\pm}(d), \qquad i = 1, 2, 3. \tag{4.8}$$

Тогава от Лема 2.4.1, (4.7) и (4.8) намираме

$$\Lambda_i^- \leq \Lambda_i \leq \Lambda_i^+.$$

От Лема 2.4.2 следва, че

$$\Gamma \geq \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 - 2\Gamma_4,$$

където $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_4$ са сумите, съответстващи на събираемите в дясната страна на (2.14). Имаме $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3$, където

$$\Gamma_1 = \sum_{\mu X < p_1, p_2, p_3 \leq X} \Lambda_1^- \Lambda_2^+ \Lambda_3^+ (\log p_1)(\log p_2)(\log p_3) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e(\alpha([p_1^c] + [p_2^c] + [p_3^c] - N)) d\alpha$$

и

$$\Gamma_4 = \sum_{\mu X < p_1, p_2, p_3 \le X} \Lambda_1^+ \Lambda_2^+ \Lambda_3^+ (\log p_1)(\log p_2)(\log p_3) \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e(\alpha([p_1^c] + [p_2^c] + [p_3^c] - N)) d\alpha.$$

Следователно

$$\Gamma \ge 3\Gamma_1 - 2\Gamma_4. \tag{4.9}$$

Първо ще разгледаме Γ_1. Имаме

$$\Gamma_1 = \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e(-N\alpha) L^-(\alpha) L^+(\alpha)^2 d\alpha, \tag{4.10}$$

където

$$L^\pm(\alpha) = \sum_{\mu X < p \le X} (\log p) e(\alpha [p^c]) \sum_{d | (p+2, P(z))} \lambda^\pm(d).$$

Сменяме реда на сумиране в $L^\pm(\alpha)$ и получаваме

$$L^\pm(\alpha) = \sum_{d | P(z)} \lambda^\pm(d) \sum_{\substack{\mu X < p \le X \\ p+2 \equiv 0 \pmod d}} (\log p) e(\alpha [p^c]).$$

Разделяме интеграла от (4.10) на две части:

$$\Gamma_1 = \Gamma_1' + \Gamma_1'', \tag{4.11}$$

където

$$\Gamma_1' = \int\limits_{|\alpha| < \Delta} e(-N\alpha) L^-(\alpha) L^+(\alpha)^2 d\alpha, \tag{4.12}$$

$$\Gamma_1'' = \int\limits_{\Delta < |\alpha| < \frac{1}{2}} e(-N\alpha) L^-(\alpha) L^+(\alpha)^2 d\alpha \tag{4.13}$$

и Δ е дефинирана в (4.3).

Аналогично, за Γ_4 имаме представянето

$$\Gamma_4 = \Gamma_4' + \Gamma_4'', \tag{4.14}$$

където

$$\Gamma_4' = \int\limits_{|\alpha| < \Delta} e(-N\alpha) L^+(\alpha)^3 d\alpha, \tag{4.15}$$

$$\Gamma_4'' = \int\limits_{\Delta < |\alpha| < \frac{1}{2}} e(-N\alpha) L^+(\alpha)^3 d\alpha \tag{4.16}$$

и Δ е дефинирана в (4.3).

4.2.2 Интегралите Γ_1' и Γ_4'

Ще разгледаме сумата

$$L(\alpha) = \sum_{d \le D} \lambda(d) \sum_{\substack{\mu X < p \le X \\ p+2 \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, d)}} (\log p) e(\alpha [p^c]), \tag{4.17}$$

където $\lambda(d)$ са реални числа, удовлетворяващи условията

$$|\lambda(d)| \le 1, \qquad \lambda(d) = 0 \quad \text{ако} \quad 2|d \quad \text{или} \quad \mu(d) = 0. \tag{4.18}$$

За $L(\alpha)$ намираме при $|\alpha| < \Delta$

$$\begin{aligned} L(\alpha) &= \sum_{d \le D} \lambda(d) \sum_{\substack{\mu X < p \le X \\ p+2 \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, d)}} (\log p) e(\alpha p^c + O(|\alpha|)) \\ &= \sum_{d \le D} \lambda(d) \sum_{\substack{\mu X < p \le X \\ p+2 \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, d)}} (\log p) e(\alpha p^c)(1 + O(|\alpha|)) \\ &= \overline{L}(\alpha) + O(\Delta X (\log X)), \end{aligned} \tag{4.19}$$

където

$$\overline{L}(\alpha) = \sum_{d \le D} \lambda(d) \sum_{\substack{\mu X < p \le X \\ p+2 \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, d)}} (\log p) e(\alpha p^c). \tag{4.20}$$

За $\overline{L}(\alpha)$ ще използваме асимптотичната формула от следната

Лема 4.2.1. *Нека D и Δ са дефинирани от* (4.3)*. Нека също така ξ, δ и μ удовлетворяват* (4.2)*. Тогава ако*

$$I(\alpha) = \int_{\mu X}^{X} e(\alpha t^c) dt, \tag{4.21}$$

то при $|\alpha| < \Delta$ за сумата $\overline{L}(\alpha)$, дефинирана в (4.20)*, е изпълнена следната асимптотична формула*

$$\overline{L}(\alpha) = \sum_{d \le D} \frac{\lambda(d)}{\varphi(d)} I(\alpha) + O(X (\log X)^{-A}), \tag{4.22}$$

където A е произволно голяма константа.

Доказателство. Това е Лема 10 от [79]. □

Следователно от (4.3), (4.19) и (4.22) получаваме, че ако $\xi < c$, то

$$L(\alpha) = \sum_{d \le D} \frac{\lambda(d)}{\varphi(d)} I(\alpha) + O(X(\log X)^{-A}). \tag{4.23}$$

Ако $|\alpha| < \Delta$, то от (2.10) и (4.23) намираме

$$L^{\pm}(\alpha) = \mathcal{N}^{\pm} I(\alpha) + O(X(\log X)^{-A}). \tag{4.24}$$

Нека

$$\mathcal{M}^{\pm} = \mathcal{M}^{\pm}(\alpha) = \sum_{d \le D} \frac{\lambda^{\pm}(d)}{\varphi(d)} I(\alpha) = \mathcal{N}^{\pm} I(\alpha). \tag{4.25}$$

От Лема 2.1.14 и (4.18) намираме

$$\mathcal{M}^{\pm} \ll (\log X)|I(\alpha)|. \tag{4.26}$$

Като използваме (4.24), (4.25) и тъждеството

$$L^-(L^+)^2 = (L^- - \mathcal{M}^-)(L^+)^2 + (L^+ - \mathcal{M}^+)\mathcal{M}^- L^+ + (L^+ - \mathcal{M}^+)\mathcal{M}^+\mathcal{M}^- + \mathcal{M}^-(\mathcal{M}^+)^2,$$

намираме

$$|L^-(L^+)^2 - \mathcal{M}^-(\mathcal{M}^+)^2| \ll X(\log X)^{-A} \left(|L^+|^2 + |\mathcal{M}^-|^2 + |\mathcal{M}^+|^2\right). \tag{4.27}$$

Нека

$$B = \int\limits_{|\alpha|<\Delta} e(-N\alpha)\mathcal{M}^-(\alpha)(\mathcal{M}^+(\alpha))^2 d\alpha. \tag{4.28}$$

От (4.12), (4.26) – (4.28) намираме

$$\Gamma_1' - B \ll X(\log X)^{2-A} \left(\int\limits_{|\alpha|<\Delta} |L^+(\alpha)|^2 d\alpha + \int\limits_{|\alpha|<\Delta} |I(\alpha)|^2 d\alpha \right). \tag{4.29}$$

Необходима ни е следната лема, която е аналог на Лема 11 от [79].

Лема 4.2.2. *Ако $\Delta \le X^{1-c}$, то за сумата $L(\alpha)$, дефинирана в* (4.17)*, и за интеграла $I(\alpha)$, дефиниран в* (4.21)*, е изпълнено*

$$\int\limits_{|\alpha|<\Delta} |L(\alpha)|^2 d\alpha \ll X^{2-c}(\log X)^6, \tag{4.30}$$

$$\int\limits_{|\alpha|<\Delta} |I(\alpha)|^2 d\alpha \ll X^{2-c}(\log X), \tag{4.31}$$

$$\int\limits_{|\alpha|<1} |L(\alpha)|^2 d\alpha \ll X(\log X)^6. \tag{4.32}$$

Доказателство.
Първо ще докажем (4.30). Имаме

$$J = \int\limits_{|\alpha|<\Delta} |L(\alpha)|^2 d\alpha$$

$$= \int\limits_{|\alpha|<\Delta} \sum_{d_1\le D} \lambda(d_1) \sum_{\substack{\mu X<p_1\le X\\ d_1|p_1+2}} (\log p_1) e(\alpha[p_1^c]) \sum_{d_2\le D} \lambda(d_2) \sum_{\substack{\mu X<p_2\le X\\ d_2|p_2+2}} (\log p_2) e(-\alpha[p_2^c]) d\alpha$$

$$= \sum_{d_1,d_2\le D} \lambda(d_1)\lambda(d_2) \sum_{\substack{\mu X<p_1,p_2\le X\\ d_i|p_i+2,\ i=1,2}} (\log p_1)(\log p_2) \int\limits_{|\alpha|<\Delta} e(\alpha([p_1^c]-[p_2^c])) d\alpha.$$

За интеграла в горната формула използваме оценката от Лема 2.2.4, а за $\lambda(d_i)$ използваме (4.18) и намираме

$$J \ll (\log X)^2 \sum_{d_1,d_2\le D} \sum_{\substack{\mu X<n_1,n_2\le X\\ d_i|n_i+2,\ i=1,2}} \min\left(\Delta, \frac{1}{|[n_1^c]-[n_2^c]|}\right).$$

Сменяме реда на сумиране и използваме неравенството $xy \le x^2+y^2$. Получаваме

$$J \ll (\log X)^2 \sum_{\mu X<n_1,n_2\le X} \tau(n_1+2)\tau(n_2+2) \min\left(\Delta, \frac{1}{|[n_1^c]-[n_2^c]|}\right)$$

$$\ll (\log X)^2 \sum_{\mu X<n_1,n_2\le X} \tau^2(n_1+2) \min\left(\Delta, \frac{1}{|[n_1^c]-[n_2^c]|}\right)$$

$$\ll (\log X)^2 (T+R), \tag{4.33}$$

където

$$T = \Delta \sum_{\substack{\mu X<n_1,n_2\le X\\ |[n_1^c]-[n_2^c]|\le\frac{1}{\Delta}}} \tau^2(n_1+2),$$

$$R = \sum_{\substack{\mu X<n_1,n_2\le X\\ |[n_1^c]-[n_2^c]|>\frac{1}{\Delta}}} \frac{\tau^2(n_1+2)}{|[n_1^c]-[n_2^c]|}.$$

За T използваме Лема 2.1.9 и намираме

$$T \ll X^{1-c} X (\log X)^3 = X^{2-c} (\log X)^3. \tag{4.34}$$

За R имаме

$$R \ll (\log X) \max_{\frac{1}{\Delta} \le l \le EX^c} \sum_{\substack{\mu X < n_1, n_2 \le X \\ l < |[n_1^c] - [n_2^c]| \le 2l}} \frac{\tau^2(n_1+2)}{|[n_1^c] - [n_2^c]|},$$

където E е константа. Намираме

$$R \ll (\log X) \max_{\frac{1}{\Delta} \le l \le EX^c} \left(\frac{1}{l} \sum_{\mu X < n_1 \le X} \tau^2(n_1+2) \sum_{\substack{\mu X < n_2 \le X \\ [n_1^c] - 2l \le [n_2^c] \le [n_1^c] + 2l}} 1 \right)$$

$$\ll (\log X) \max_{\frac{1}{\Delta} \le l \le EX^c} \left(\frac{1}{l} \sum_{\mu X < n_1 \le X} \tau^2(n_1+2) \sum_{\substack{\mu X < n_2 \le X \\ n_1^c - 3l \le n_2^c \le n_1^c + 3l}} 1 \right).$$

Ако $\frac{1}{\Delta} \le l \le aX^c$, където $a > 0$ е достатъчно малка константа, такава че

$$n_1^c - 3l \ge \mu^c X^c - 3aX^c = (\mu^c - 3a)X^c > 0,$$

то използваме теоремата за средните стойности и намираме

$$\frac{1}{l} \sum_{\mu X < n_1 \le X} \tau^2(n_1+2) \sum_{\substack{\mu X < n_2 \le X \\ n_1^c - 3l \le n_2^c \le n_1^c + 3l}} 1 \ll \frac{1}{l} \sum_{\mu X < n_1 \le X} \tau^2(n_1+2)(lX^{1-c}+1)$$

$$\ll \left(X^{1-c} + \frac{1}{l} \right) \sum_{n_1 \le X} \tau^2(n_1+2).$$

Сега от Лема 2.1.9 получаваме

$$R \ll X(\log X)^4 (X^{1-c} + \Delta).$$

Ако $\Delta \le X^{1-c}$, то

$$R \ll X^{2-c} (\log X)^4. \tag{4.35}$$

Ако е изпълнено $aX^c < l \le EX^c$, то

$$\frac{1}{l} \sum_{\mu X < n_1 \le X} \tau^2(n_1+2) \sum_{\substack{\mu X < n_2 \le X \\ n_1^c - 3l \le n_2^c \le n_1^c + 3l}} 1 \ll \frac{1}{l} \sum_{n_1 \le X} \sum_{n_2 \le X} \tau^2(n_1+2) \ll \frac{X^2 (\log X)^3}{l} \ll X^{2-c} (\log X)^3$$

и отново е в сила оценката (4.35).

От (4.33)–(4.35) следва (4.30).

Сега ще докажем (4.31). Използваме, че $|I(\alpha)|^2 = I(\alpha)I(-\alpha)$, сменяме реда на интегрирането и използваме Лема 2.2.4, за да получим

$$\int\limits_{|\alpha|<\Delta} |I(\alpha)|^2 d\alpha = \int\limits_{\mu X}^{X}\int\limits_{\mu X}^{X}\int\limits_{|\alpha|<\Delta} e(\alpha(t_1^c - t_2^c))d\alpha dt_1 dt_2$$

$$\ll \int\limits_{\mu X}^{X}\int\limits_{\mu X}^{X} \min\left(\Delta, \frac{1}{|t_1^c - t_2^c|}\right) dt_1 dt_2$$

$$\ll U + V, \tag{4.36}$$

където

$$U = \int\limits_{\mu X \le t_2 \le X} \int\limits_{\substack{\mu X \le t_1 \le X \\ |t_1^c - t_2^c| \le \frac{1}{\Delta}}} \Delta dt_1 dt_2,$$

$$V = \int\limits_{\mu X \le t_2 \le X} \int\limits_{\substack{\mu X \le t_1 \le X \\ |t_1^c - t_2^c| > \frac{1}{\Delta}}} \frac{1}{|t_1^c - t_2^c|} dt_1 dt_2.$$

За U използваме теоремата за средните стойности и намираме

$$U \ll \Delta \int\limits_{\mu X \le t_2 \le X} \int\limits_{\substack{\mu X \le t_1 \le X \\ \left(t_2^c - \frac{1}{\Delta}\right)^{\frac{1}{c}} \le t_1 \le \left(t_2^c + \frac{1}{\Delta}\right)^{\frac{1}{c}}}} 1 dt_1 dt_2 \ll \Delta \int\limits_{\mu X \le t_2 \le X} \frac{(t_2^c)^{\frac{1}{c}-1}}{\Delta} dt_2 \ll X^{2-c}. \tag{4.37}$$

Интегрирането във V разбиваме на части като $V \le \sum_l V_l$, където

$$V_l = \int\limits_{\mu X \le t_2 \le X} \int\limits_{\substack{\mu X \le t_1 \le X \\ l < |t_1^c - t_2^c| \le 2l}} \frac{1}{|t_1^c - t_2^c|} dt_1 dt_2$$

и l приема стойности $2^k/\Delta, k = 0, 1, 2, \ldots$ и $l \le X^c$. Тогава

$$V_l \ll \frac{1}{l} \int\limits_{\mu X \le t_2 \le X} \int\limits_{\substack{\mu X \le t_1 \le X \\ (t_2^c + l)^{\frac{1}{c}} \le t_1 \le (t_2^c + 2l)^{\frac{1}{c}}}} 1 dt_1 dt_2 \ll \frac{1}{l} \int\limits_{\mu X \le t_2 \le X} l (t_2^c)^{\frac{1}{c}-1} dt_2 \ll X^{2-c}. \tag{4.38}$$

Получаваме, че $V \ll X^{2-c} \log X$. От тук и (4.36) и (4.37) следва (4.31).

Неравенството (4.32) доказваме аналогично на (4.30), като използваме формула (4.33) и $\Delta = 1$. $\square$

Като използваме оценките (4.30) и (4.31) от горната лема, за разликата $\Gamma_1' - B$ от (4.29) намираме

$$\Gamma_1' - B \ll X^{3-c}(\log X)^{8-A}. \tag{4.39}$$

Нека да разгледаме интеграла

$$B_1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e(-N\alpha)I(\alpha)^3 d\alpha, \tag{4.40}$$

където $I(\alpha)$ е дефинирана в (4.21).

Сега ще докажем следната лема, която е аналог на Лема 6 в [78].

Лема 4.2.3. *За интеграла, дефиниран в* (4.40)*, е изпълнена следната оценка*

$$B_1 \gg X^{3-c}. \tag{4.41}$$

Доказателство. Нека за $t \in \mathbb{R}$ да дефинираме функция $g(t)$ като

$$g(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e(-N\alpha t)I(\alpha)^3 d\alpha,$$

където $I(\alpha)$ е дефинирана в (4.21).

При $y \in \mathbb{R}$, $y \geq 0$ дефинираме и функцията

$$F(y) = \int\limits_{0}^{y} g(t)dt.$$

Изпълнено е следното равенство

$$F'(y) = g(y).$$

При $y = 1$ получаваме

$$F'(1) = g(1) = B_1. \tag{4.42}$$

От равномерната сходимост на интеграла $g(t)$ намираме

$$\begin{aligned} F(y) &= \int\limits_{\mu X}^{X}\int\limits_{\mu X}^{X}\int\limits_{\mu X}^{X}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e\left(\alpha\left(t_1^c + t_2^c + t_3^c\right)\right)\int\limits_{0}^{y} e(-N\alpha t)dtd\alpha dt_1dt_2dt_3 \\ &= \int\limits_{\mu X}^{X}\int\limits_{\mu X}^{X}\int\limits_{\mu X}^{X}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e\left(\alpha\left(t_1^c + t_2^c + t_3^c\right)\right)\frac{1 - e(-\alpha N y)}{2\pi i N\alpha}d\alpha dt_1dt_2dt_3. \end{aligned}$$

Правим смяна на променливите $z_i = t_i^c$, $i = 1, 2, 3$. Получаваме

$$F(y) = \frac{1}{c^3} \int\limits_{(\mu X)^c}^{X^c} \int\limits_{(\mu X)^c}^{X^c} \int\limits_{(\mu X)^c}^{X^c} (z_1 z_2 z_3)^{\frac{1}{c}-1} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e(\alpha(z_1 + z_2 + z_3)) \frac{1 - e(-\alpha N y)}{2\pi i N \alpha} d\alpha dz_1 dz_2 dz_3.$$

Използваме, че $\frac{\sin(ax)}{x}$ е четна функция на x, а $\frac{\cos(ax)}{x}$ е нечетна функция на x. Получаваме

$$F(y) = \frac{1}{c^3} \int\limits_{(\mu X)^c}^{X^c} \int\limits_{(\mu X)^c}^{X^c} \int\limits_{(\mu X)^c}^{X^c} (z_1 z_2 z_3)^{\frac{1}{c}-1} \times$$
$$\times \int\limits_{0}^{\infty} \frac{\sin(2\pi\alpha(z_1 + z_2 + z_3)) - \sin(2\pi\alpha(z_1 + z_2 + z_3 - Ny))}{\pi N \alpha} d\alpha dz_1 dz_2 dz_3.$$

Сега използваме Лема 2.1.5 и достигаме до

$$F(y) = \frac{1}{c^3} \iiint\limits_{(\mu X)^c < z_i < X^c, i=1,2,3} \frac{\operatorname{sign}(z_1 + z_2 + z_3) - \operatorname{sign}(z_1 + z_2 + z_3 - Ny)}{2N} (z_1 z_2 z_3)^{\frac{1}{c}-1} dz_1 dz_2 dz_3$$

$$= \frac{1}{c^3} \iiint\limits_{\substack{(\mu X)^c < z_i < X^c, i=1,2,3 \\ 0 < z_1 + z_2 + z_3 < yN}} \frac{(z_1 z_2 z_3)^{\frac{1}{c}-1}}{N} \, dz_1 dz_2 dz_3.$$

Имаме

$$F'(1) = \frac{1}{2} \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{F(1+h) - F(1-h)}{h}$$

$$= \frac{1}{2c^3} \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{1}{h} \iiint\limits_{\substack{(\mu X)^c < z_i < X^c, i=1,2,3 \\ (1-h)N < z_1 + z_2 + z_3 < (1+h)N}} \frac{(z_1 z_2 z_3)^{\frac{1}{c}-1}}{N} \, dz_1 dz_2 dz_3$$

$$> \frac{1}{2c^3} \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{(X^{3c})^{\frac{1}{c}-1}}{hN} \iiint\limits_{\substack{(\mu X)^c < z_i < X^c, i=1,2,3 \\ (1-h)N < z_1 + z_2 + z_3 < (1+h)N}} 1 \, dz_1 dz_2 dz_3.$$

Използваме (4.3) и виждаме, че при $\mu < 6^{-\frac{1}{c}}$ е изпълнено

$$F'(1) > \frac{1}{2c^3} X^{3-4c} \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{1}{h} \iiint\limits_{\substack{\frac{N}{6} < z_i < \frac{N}{2}, \, i=1,2,3 \\ (1-h)N < z_1 + z_2 + z_3 < (1+h)N}} 1 \, dz_1 dz_2 dz_3.$$

Извършваме смяна на променливите $z_i = \frac{N}{3} + \frac{N}{6}x_i$ и $h = \frac{H}{6}$. Получаваме

$$F'(1) > \frac{1}{72c^3}X^{3-c} \lim_{\substack{H\to 0\\ H>0}} \frac{1}{H} \iiint\limits_{\substack{-1<x_i<1,\ i=1,2,3\\ -H<x_1+x_2+x_3<H}} 1\ dx_1dx_2dx_3.$$

Използваме Лема 2.1.6 и намираме $F'(1) \gg X^{3-c}$. От това неравенство и (4.42) следва твърдението на лемата. □

За $I(\alpha)$ използваме Лема 2.2.3 и намираме $I(\alpha) \ll |\alpha|^{-1}X^{1-c}$. Тогава от (4.3), (4.25), (4.26), (4.28) и (4.40) намираме

$$|\mathcal{N}^-(\mathcal{N}^+)^2B_1 - B| \ll (\log X)^3 \int\limits_{|\alpha|>\Delta} |I(\alpha)|^3 d\alpha \ll (\log X)^3 X^{3-c-2\xi}. \tag{4.43}$$

Ако $A = 12$, то като използваме (4.39) и (4.43), намираме

$$\Gamma_1' = \mathcal{N}^-(\mathcal{N}^+)^2B_1 + O(X^{3-c}(\log X)^{-4}). \tag{4.44}$$

Аналогично за Γ_4' доказваме, че

$$\Gamma_4' = (\mathcal{N}^+)^3B_1 + O(X^{3-c}(\log X)^{-4}). \tag{4.45}$$

4.2.3 Оценка на интегралите Γ_1'' и Γ_4'' и завършване на доказателството

Ще разгледаме интегралите Γ_1'' и Γ_4'', дефинирани в (4.13) и (4.16), съответно. Ще покажем, че те са достатъчно малки. Избираме

$$\xi = \frac{16c-5}{32}, \qquad \delta = \frac{17-16c}{32}. \tag{4.46}$$

Очевидно е, че за Γ_1'' имаме

$$\Gamma_1'' \ll \max_{\Delta\le|\alpha|\le\frac{1}{2}} |L^-(\alpha)| \int\limits_0^1 |L^+(\alpha)|^2 d\alpha.$$

Използваме Лема 4.2.2 и намираме, че

$$\Gamma_1'' \ll X(\log X)^6 \max_{\Delta\le|\alpha|\le\frac{1}{2}} |L^-(\alpha)|. \tag{4.47}$$

От (4.17) виждаме, че

$$L(\alpha) = L_1(\alpha) + O\left(X^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right), \tag{4.48}$$

където

$$L_1(\alpha) = \sum_{d\le D} \lambda(d) \sum_{\substack{\mu X<n\le X\\ n+2\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, d)}} \Lambda(n)e(\alpha[n^c]).$$

Нека $M = X^{\kappa}$, за някое κ, което ще бъде определено точно по-нататък. Сега за $L_1(\alpha)$ използваме Лема 2.5.1 с параметри $x = \alpha$, $y = n^c$ и M (нека отбележим, че $[t] = t - \{t\}$). Намираме

$$L_1(\alpha) = \sum_{|m|\le M} c_m \sum_{d\le D} \lambda(d) \sum_{\substack{\mu X<n\le X \\ n+2\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, d)}} \Lambda(n) e((\alpha+m)n^c) +$$

$$+ O\left(X^{\varepsilon} \sum_{\mu X<n\le X} \min\left(1, \frac{1}{M||n^c||}\right)\right). \qquad (4.49)$$

Сега се нуждаем от следната

Лема 4.2.4. *Нека D, Δ са дефинирани в* (4.3) *и ξ, δ са определени от* (4.46). *Нека също така $\lambda(d)$ удовлетворява* (4.18) *и c_m са дефинирани в* (2.17). *Тогава за всяко $M \in \mathbb{N}$, $M \ge 3$ е изпълнена оценката*

$$\max_{\Delta\le\alpha\le M+1} \left| \sum_{|m|\le M} c_m \sum_{d\le D} \lambda(d) \sum_{\substack{\mu X<n\le X \\ n+2\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, d)}} \Lambda(n) e(\alpha n^c) \right| \ll$$

$$\ll X^{\varepsilon} \left(X^{\frac{1}{3}+\frac{c}{2}} D M^{\frac{1}{2}} + X^{1-\frac{c}{2}} \Delta^{-\frac{1}{2}} + X^{\frac{3}{4}+\frac{c}{6}} D^{\frac{2}{3}} M^{\frac{1}{6}} + X^{\frac{5}{6}} + X^{1-\frac{c}{6}} D^{\frac{1}{3}} \Delta^{-\frac{1}{6}} + X^{1-\frac{c}{4}} \Delta^{-\frac{1}{4}} \right).$$

Доказателство. Виж Лема 15 в [79]. □

Като използваме Лема 2.5.2, Лема 4.2.4, формули (4.48) и (4.49), намираме

$$\max_{\Delta\le\alpha\le M+1} |L(\alpha)| \ll X^{\varepsilon} \Big(X^{\frac{1}{3}+\frac{c}{2}} D M^{\frac{1}{2}} + X^{1-\frac{c}{2}} \Delta^{-\frac{1}{2}} + X^{\frac{3}{4}+\frac{c}{6}} D^{\frac{2}{3}} M^{\frac{1}{6}} +$$

$$+ X^{\frac{5}{6}} + X^{1-\frac{c}{6}} D^{\frac{1}{3}} \Delta^{-\frac{1}{6}} + X^{1-\frac{c}{4}} \Delta^{-\frac{1}{4}} + X M^{-1} \Big).$$

От последната формула, (4.3) и (4.47) намираме

$$\Gamma_1'' \ll X^{\varepsilon} \left(X^{\frac{4}{3}+\frac{c}{2}+\delta+\frac{\kappa}{2}} + X^{\frac{7}{4}+\frac{c}{6}+\frac{2\delta}{3}+\frac{\kappa}{6}} + X^{\frac{11}{6}} + X^{2+\frac{\delta}{3}-\frac{\xi}{6}} + X^{2-\kappa} \right). \qquad (4.50)$$

Избираме $\kappa = \frac{8c-5}{56}$. От (4.46) и (4.50) заключаваме, че ако $1 < c < \frac{17}{16}$, то

$$\Gamma_1'' \ll X^{3-c-\varepsilon}.$$

Аналогично доказваме, че

$$\Gamma_4'' \ll X^{3-c-\varepsilon}.$$

От (4.9), (4.11), (4.14) и (4.41) – (4.45) получаваме

$$\Gamma \ge (3\mathcal{N}^- - 2\mathcal{N}^+)(N^+)^2 B_1 + O(X^{3-c}(\log X)^{-4}). \qquad (4.51)$$

Сега ще намерим долна граница за разликата $3\mathcal{N}^- - 2\mathcal{N}^+$. От Лема 2.1.11 става ясно, че за $\mathcal{B}$, дефинирано в (2.10), е изпълнено

$$\mathcal{B} \asymp (\log X)^{-1}. \tag{4.52}$$

От (2.11) и (2.12) виждаме, че

$$3\mathcal{N}^- - 2\mathcal{N}^+ \geq \mathcal{B}(3f(s_0) - 2F(s_0)) + O\left(\log X)^{-\frac{4}{3}}\right),$$

където s_0 е дефинирана в (2.10), а $F(s)$ и $f(s)$ са дадени в (2.13). Ако изберем $s_0 = 2{,}95$, то от (2.10), (4.3) и (4.46) намираме

$$\eta = \frac{\delta}{2{,}95} = \frac{17 - 16c}{94{,}4}$$

и също така от (2.13) намираме $3f(s_0) - 2F(s_0) > 0$.

Сега от (2.11), (4.41), (4.51) и (4.52) получаваме

$$\Gamma \gg X^{3-c}(\log X)^{-3}.$$

Следователно $\Gamma > 0$ и оттук следва и верността на Теорема 4.1.1. $\square$

Глава 5

Неравенството на Пятецкий-Шапиро с прости числа от вида на Пятецкий-Шапиро

5.1 Формулировка на резултата

В тази глава ще докажем следния резултат:

Теорема 5.1.1. *(А. Кумчев, Ж. Петров [59], 2018)*
Нека $c > 5$, $c \notin \mathbb{N}$ и $1 - \rho < \gamma < 1$, където $\rho = (8c^2 + 12c + 12)^{-1}$. Тогава, ако $s \geq 4c \log c + \frac{4}{3}c + 10$ и N е достатъчно голямо, то неравенството

$$|p_1^c + p_2^c + \cdots + p_s^c - N| < (\log N)^{-1} \tag{5.1}$$

има решение в прости числа $p_1, p_2, \ldots, p_s \in \mathcal{N}_\gamma$, където $\mathcal{N}_\gamma$ е дефинирано в (1.10).

Също така ще докажем и следните твърдения при $s = 2$, 3 и 4 и когато c и γ са близки до 1.

Теорема 5.1.2. *(А. Кумчев, Ж. Петров [59], 2018)*
Нека $\gamma < 1 < c$ и $15(c-1) + 28(1-\gamma) < 1$. Тогава при достатъчно големи N неравенството

$$|p_1^c + p_2^c + p_3^c - N| < (\log N)^{-1}$$

има решение в прости числа $p_1, p_2, p_3 \in \mathcal{N}_\gamma$.

Теорема 5.1.3. *(А. Кумчев, Ж. Петров [59], 2018)*
Нека $\gamma < 1 < c$ и $8(c-1) + 21(1-\gamma) < 1$. Тогава при достатъчно големи N неравенството

$$|p_1^c + p_2^c + p_3^c + p_4^c - N| < (\log N)^{-1}$$

има решение в прости числа $p_1, p_2, p_3, p_4 \in \mathcal{N}_\gamma$.

Теорема 5.1.4. *(А. Кумчев, Ж. Петров [59], 2018)*
Нека $\gamma < 1 < c$ и $8(c-1) + 21(1-\gamma) < 1$. За големи Z, нека с $\mathcal{E}(Z)$ означим множеството от тези $N \in (Z/2, Z]$, за които неравенството

$$|p_1^c + p_2^c - N| < (\log N)^{-1}$$

няма решение в прости числа $p_1, p_2 \in \mathcal{N}_\gamma$. Тогава, ако $|\mathcal{E}(Z)|$ означава лебеговата мярка на $\mathcal{E}(Z)$, то

$$|\mathcal{E}(Z)| \ll Z \exp\left(-\left(\frac{\log\left(\frac{2Z}{3}\right)}{c}\right)^{\frac{1}{4}}\right).$$

5.2 Означения и помощни леми

В тази глава ще предполагаме, че $\gamma, c \in \mathbb{R}$ са такива, че $0 < \gamma < 1 < c$. Нека $\psi(x) = x - [x] - 1/2$ и $\Psi_\gamma(n) = \psi(-(n+1)^\gamma) - \psi(-n^\gamma)$. Също така ще означаваме $\mathcal{N}_\gamma(X) = \mathcal{N}_\gamma \cap (X/2, X]$, където $\mathcal{N}_\gamma$ е определено в (1.10).

Дефинираме и следните функции

$$S(\theta; X) = \sum_{p \in \mathcal{N}_\gamma(X)} (\log p) e(\theta p^c),$$

$$S_0(\theta; X) = \sum_{p \sim X} \gamma p^{\gamma-1} (\log p) e(\theta p^c),$$

$$S_1(\theta; X) = \sum_{p \sim X} \Psi_\gamma(p) (\log p) e(\theta p^c),$$

$$T(\theta; X) = \sum_{n \in \mathcal{N}_\gamma(X)} e(\theta n^c),$$

$$T_0(\theta; X) = \sum_{n \sim X} \gamma n^{\gamma-1} e(\theta n^c),$$

$$T_1(\theta; X) = \sum_{n \sim X} \Psi_\gamma(n) e(\theta n^c),$$

$$V(\theta; X) = \gamma \int_{X/2}^{X} u^{\gamma-1} e(\theta u^c) du.$$

Ще формулираме и докажем леми, които ще използваме за доказателството на основните резултати.

Лема 5.2.1. *Нека $\{a_n\}$ е редица от комплексни числа, такава че $|a_n| \leq A$. Тогава*

$$\sum_{n \in \mathcal{N}_\gamma(X)} a_n = \gamma \sum_{n \sim X} a_n n^{\gamma-1} + \sum_{n \sim X} a_n \Psi_\gamma(n) + O\left(AX^{\gamma-1}\right).$$

Доказателство.

От дефиницията на $\mathcal{N}_\gamma$ в (1.10) следва, че $n \in \mathcal{N}_\gamma$ ако съществува $m \in \mathbb{N}$, такова че $n = [m^{1/\gamma}]$. Оттук следва, че $n \le m^{1/\gamma} < n+1$, което е еквивалентно с $n^\gamma \le m < (n+1)^\gamma$. Намираме

$$\sum_{n \in \mathcal{N}_\gamma(X)} a_n = \sum_{n \sim X} \sum_{n^\gamma \le m < (n+1)^\gamma} a_n.$$

Използваме очевидното равенство

$$\sum_{n^\gamma \le m < (n+1)^\gamma} 1 = [-n^\gamma] - [-(n+1)^\gamma] = (n+1)^\gamma - n^\gamma + \Psi_\gamma(n)$$

и оценката $|a_n|.|\gamma(\gamma-1)n^{\gamma-2}| = O(AX^{\gamma-1})$ и получаваме твърдението на лемата. $\square$

Като директно следствие от горната лема имаме

$$S(\theta; X) = S_0(\theta; X) + S_1(\theta; X) + O(1) \tag{5.2}$$

и

$$T(\theta; X) = T_0(\theta; X) + T_1(\theta; X) + O(1). \tag{5.3}$$

Лема 5.2.2. *Нека $0 < \sigma < (2\gamma - 1)/3$ и $X^{1-\gamma+\sigma} \le H \le X^{\gamma-2\sigma}$. Нека също така $\{a_n\}$ е редица от комплексни числа, такава че $|a_n| \le A$. Тогава*

$$\sum_{n \sim X} a_n \Psi_\gamma(n) \ll \sup_{\substack{Y \sim X \\ u \in \{0,1\}}} \sum_{1 \le |h| \le H} \Phi(h) \left| \sum_{Y < n \le X} a_n e(h(n+u)^\gamma) \right| + AX^{\gamma-\sigma},$$

където $\Phi(h) = \min\left(X^{\gamma-1}, |h|^{-1}\right)$.

Доказателство.

За функцията $\Psi_\gamma(n)$ ще използваме лемата на Ваалер (Лема 2.5.4). Намираме

$$\sum_{n \sim X} a_n \Psi_\gamma(n) \ll \sum_{1 \le |h| \le H} \frac{1}{|h|} \left| \sum_{n \sim X} a_n \left(e(-hn^\gamma) - e(-h(n+1)^\gamma)\right) \right| + AH^{-1} \sum_{|h| \le H} \left| \sum_{n \sim X} e(-hn^\gamma) \right|. \tag{5.4}$$

За второто събираемо в дясната страна на горното неравенство използваме теоремата на Ван-дер-Корпут (Лема 2.2.5) при $k = 2$ и получаваме

$$AH^{-1} \sum_{|h| \le H} \left| \sum_{n \sim X} e(-hn^\gamma) \right| \ll AXH^{-1} + AH^{-1} \sum_{1 \le h \le H} \left(h^{1/2} X^{\gamma/2} + h^{-1/2} X^{1-\gamma/2}\right) \ll AX^{\gamma-\sigma}. \tag{5.5}$$

За първата сума в дясната страна на (5.4) използваме преобразованието на Абел (Лема 2.1.2) и намираме

$$\sum_{1 \le |h| \le H} \frac{1}{|h|} \left| \sum_{n \sim X} a_n \left(e(-hn^\gamma) - e(-h(n+1)^\gamma)\right) \right| \ll$$

$$\ll \sum_{1 \le |h| \le H} \frac{1}{|h|} \left(\left| \varphi_h(X) \sum_{n \sim X} a_n e(-hn^\gamma) \right| + \int_{\frac{X}{2}}^{X} \left| \sum_{X/2 < n \le t} a_n e(-hn^\gamma) \frac{\partial \varphi_h(t)}{\partial t} \right| dt \right),$$

където $\varphi_h(n) = 1 - e\left(h\left(n^\gamma - (n+1)^\gamma\right)\right)$. Използваме оценките $|\varphi_h(n)| \ll hX^{\gamma-1}$ и $|\partial\varphi_h(t)/\partial t| \ll ht^{\gamma-2}$ и получаваме, че дясната страна в горното неравенство е ограничена от

$$X^{\gamma-1} \sup_{Y\sim X} \sum_{1\le|h|\le H} \left| \sum_{Y<n\le X} a_n e(hn^\gamma) \right|. \tag{5.6}$$

От друга страна, като използваме неравенството на триъгълника за същата сума, получаваме, че тя е ограничена и от

$$\max_{u\in\{0,1\}} \sum_{1\le|h|\le H} \frac{1}{|h|} \left| \sum_{n\sim X} a_n e(h(n+u)^\gamma) \right|. \tag{5.7}$$

От (5.4) – (5.7) следва верността на твърдението в лемата. □

Лема 5.2.3. *Нека I е произволен краен интервал от $\mathbb{R}$. В сила са следните оценки*

$$\int_I |S(\theta;X)|^2\, d\theta \ll |I|X^\gamma(\log X)^2 + X^{2\gamma-c}(\log X)^3, \tag{5.8}$$

$$\int_I |T(\theta;X)|^2\, d\theta \ll |I|X^\gamma + X^{2\gamma-c}(\log X), \tag{5.9}$$

$$\int_I |V(\theta;X)|^2\, d\theta \ll X^{2\gamma-c}(\log X). \tag{5.10}$$

Доказателство.

Първо ще докажем (5.8). Използваме оценката $|\mathcal{N}_\gamma(X)| \ll X^\gamma$ и Лема 2.2.4 и намираме

$$\begin{aligned}
\int_I |S(\theta;X)|^2\, d\theta &= \sum_{p_1,p_2\in\mathcal{N}_\gamma(X)} (\log p_1)(\log p_2) \int_I e(\theta(p_1^c - p_2^c))\, d\theta \\
&\ll (\log X)^2 \sum_{n_1,n_2\in\mathcal{N}_\gamma(X)} \min\left(|I|, |n_1^c - n_2^c|^{-1}\right) \\
&\ll |I|X^\gamma(\log X)^2 + X^{1-c}(\log X)^2 \sum_{\substack{n_1,n_2\in\mathcal{N}_\gamma(X)\\ n_1<n_2}} (n_2-n_1)^{-1}.
\end{aligned}$$

Виждаме, че ако $n_i = \left[m_i^{1/\gamma}\right]$, то $m_i \sim X^\gamma$, следователно

$$\int\limits_I |S(\theta;X)|^2\,d\theta \ll |I|X^\gamma(\log X)^2 + X^{-c}(\log X)^2 \sum_{\substack{m_1,m_2\sim X^\gamma\\ m_1<m_2}} \left(m_2^{1/\gamma} - m_1^{1/\gamma} - 1\right)^{-1}$$

$$\ll |I|X^\gamma(\log X)^2 + X^{\gamma-c}(\log X)^2 \sum_{\substack{m_1,m_2\sim X^\gamma\\ m_1<m_2}} (m_2 - m_1)^{-1}$$

$$\ll |I|X^\gamma(\log X)^2 + X^{2\gamma-c}(\log X)^3.$$

Неравенството (5.9) доказваме по същия начин, както доказахме (5.8). Неравенството (5.10) доказваме аналогично на оценката (4.31) от Лема 4.2.2. Имаме

$$\int\limits_I |V(\theta)|^2 d\theta \ll U + V,$$

където

$$U = \int\limits_{X\le u_2\le 2X} u_2^{\gamma-1} \int\limits_{\substack{X\le u_1\le 2X\\ |u_1^c-u_2^c|\le\frac{1}{|I|}}} u_1^{\gamma-1}|I|du_1du_2,$$

$$V = \int\limits_{X\le u_2\le 2X} u_2^{\gamma-1} \int\limits_{\substack{X\le u_1\le 2X\\ |u_1^c-u_2^c|>\frac{1}{|I|}}} \frac{u_1^{\gamma-1}}{|u_1^c-u_2^c|}du_1du_2.$$

В този случай вместо формули (4.37) и (4.38) имаме $U \ll X^{2\gamma-c}$ и $V \ll X^{2\gamma-c}$. $\square$

Следващите две леми ще използваме за оценка на сумата $T(\theta;X)$.

Лема 5.2.4. *Нека $1/2 < \gamma < 1 < c$, $|h| \le X^{4/3-\gamma}$ и $X^{\gamma-c} \le |\theta| \le X^\delta$, където $\delta > 0$ е достатъчно малко. Тогава за $u \in \{0,1\}$, $Y \sim X$ е изпълнена оценката*

$$\sum_{Y<n\le X} e(\theta n^c + h(n+u)^\gamma) \ll X^{1-\nu},$$

където $\nu = (c^2+3c+2)^{-1}$.

Доказателство.

Нека $X^\alpha = |\theta|X^c$, $F = X^\alpha + |h|X^\gamma$ и $f(x) = \theta x^c + h(x+u)^\gamma$. От условията в лемата следва, че $X^\gamma \le |\theta|X^c = X^\alpha \le X^{c+\delta}$. Следователно $\gamma \le \alpha \le c+\delta$. За $f(x)$ намираме $|f^{(r)}(x)| \asymp X^\alpha X^{-r} + |h|X^{\gamma-r}$. Ще разгледаме два случая в зависимост от стойността на α.

Случай 1: $\alpha \geq 3/2$. Тогава $|f^{(r)}(x)| \asymp X^{\alpha-r}$. Също така имаме $\alpha+1 \leq \lceil\alpha\rceil+1 \leq 2\alpha$. Използваме Лема 2.2.6 с $r = \lceil\alpha\rceil + 1$. При този избор на r най-големият член в оценката (2.5) е вторият. Намираме

$$\sum_{Y<n\leq X} e(f(n)) \ll X^{1-1/(r^2-r)+\varepsilon} \ll X^{1-\nu}.$$

Случай 2: $\gamma \leq \alpha < 3/2$. В този случай имаме $X^{1/2} < F \leq X^{3/2}$. Можем да разделим интервала $(Y, X]$ на не повече от 3 интервала, такива че във всеки един от тях е изпълнено $|f^{(r)}(x)| \asymp FX^{-r}$ за $r = 2$ или $r = 3$. Също така винаги имаме $|f''(x)| \ll FX^{-2}$. Тогава, като използваме оценката (2.7) от Лема 2.2.7 и Лема 2.2.6 с $r = 2$, намираме

$$\sum_{Y<n\leq X} e(f(n)) \ll F^{1/2+\varepsilon} + F^{1/6}X^{1/2} + XF^{-1/3} \ll X^{5/6+\varepsilon} \ll X^{1-\nu}.$$

□

Лема 5.2.5. *Нека* $1-\nu < \gamma < 1 < c$, *където* $\nu = (c^2+3c+2)^{-1}$. *Ако* $X^{\gamma-c} \leq |\theta| \leq X^{\delta}$, *където* $\delta > 0$ *е достатъчно малко, то е изпълнена оценката*

$$T(\theta; X) \ll X^{1-\nu+\varepsilon}.$$

Доказателство.
За $T_0(\theta; X)$ използваме преобразованието на Абел (Лема 2.1.2) и намираме

$$T_0(\theta; X) = \gamma \left(X^{\gamma-1} \sum_{n\sim X} e(\theta n^c) - (\gamma-1) \int\limits_{X/2}^{X} \sum_{X/2<n\leq t} e(\theta n^c) t^{\gamma-2} dt \right).$$

От Лема 5.2.4 при $h = 0$ следва, че $\sum_{n\sim X} e(\theta n^c) \ll X^{1-\nu}$. От горната формула получаваме

$$T_0(\theta; X) \ll X^{\gamma-\nu}. \tag{5.11}$$

За $T_1(\theta; X)$ използваме Лема 5.2.2 със $\sigma = \nu + \gamma - 1$, $H = X^{\nu}$ и $a_n = e(\theta n^c)$. Получаваме

$$T_1(\theta; X) \ll \sup_{\substack{Y\sim X \\ u\in\{0,1\}}} \sum_{1\leq|h|\leq H} |h|^{-1} \left| \sum_{Y<n\leq X} e(\theta n^c + h(n+u)^{\gamma}) \right| + X^{\gamma-\sigma}.$$

От Лема 5.2.4 и горната формула получаваме

$$T_1(\theta; X) \ll X^{1-\nu+\varepsilon}. \tag{5.12}$$

От (5.3), (5.11) и (5.12) следва верността на лемата. □

Следват леми, необходими за доказателството на Теорема 5.1.1.

Лема 5.2.6. *Нека $c > 5$, $3/4 < \gamma < 1$, $|h| \leq X^{4/3-\gamma}$ и $X^{\gamma-c-\delta} \leq |\theta| \leq X^{\delta}$, където $\delta > 0$ е достатъчно малко. Нека също така $\{a_m\}$ е редица от комплексни числа, такава че $|a_m| \ll 1$. Тогава, ако*

$$M \ll X^{1/2+\rho}, \tag{5.13}$$

където $\rho = (8c^2 + 12c + 12)^{-1}$, то за $u \in \{0, 1\}$, $Y \sim X$ е изпълнена оценката

$$\sum_{m\sim M} \sum_{Y<mk\leq X} a_m e(\theta(mk)^c + h(mk+u)^{\gamma}) \ll X^{1-\rho+\varepsilon}.$$

Доказателство.

Нека $X^{\alpha} = |\theta|X^c$, $F = X^{\alpha} + |h|X^{\gamma}$, $K = X/M$ и $f_m(x) = \theta(mx)^c + h(mx+u)^{\gamma}$, $Y/m < x \leq X/m$. От условията в лемата следва, че $X^{\gamma-\delta} \leq |\theta|X^c = X^{\alpha} \leq X^{c+\delta}$. Следователно $\gamma - \delta \leq \alpha \leq c + \delta$. За $f(x)$ намираме $|f_m^{(r)}(x)| \asymp X^{\alpha}K^{-r} + |h|X^{\gamma}K^{-r}$. Ще разгледаме два случая в зависимост от стойността на α.

Случай 1: $\alpha \geq 4/3 + \delta$. Тогава имаме $|f_m^{(r)}(x)| \asymp X^{\alpha}K^{-r}$ за произволно естествено число r и за всяко x, такова че $Y < mx \leq X$. Избираме такова r, че

$$K^{r-2} \leq X^{\alpha} < K^{r-1}. \tag{5.14}$$

Имаме, че $r \geq 3$. Като използваме Лема 2.2.6 намираме

$$\sum_{Y<mk\leq X} e(f_m(k)) \ll K^{1+\varepsilon}\big((X^{\alpha}K^{-r})^{\nu} + K^{-\nu} + X^{-2\nu/r}\big) \ll K^{1-\nu+\varepsilon}, \tag{5.15}$$

където $\nu = 1/(r^2 - r)$. От (5.13) и (5.14) следва, че

$$r \leq \frac{2\alpha}{1-2\rho} + 2.$$

Също така имаме, че $\alpha < c$ и $\rho < 1/(8c^2)$. Намираме

$$r(r-1) \leq \left(\frac{2\alpha}{1-2\rho} + 2\right)\left(\frac{2\alpha}{1-2\rho} + 1\right)$$

$$< \left(\frac{8c^3}{4c^2-1} + 2\right)\left(\frac{8c^3}{4c^2-1} + 1\right).$$

При $c > 5$ е изпълнено $r(r-1) < 4c^2 + 6c + 4.5$. От тук следва, че $-1/(r^2 - r) < -2\rho$.

От (5.13) и (5.15) получаваме

$$\sum_{m\sim M} \sum_{Y<mk\leq X} a_m e(f_m(k)) \ll MK^{1-1/(r^2-r)+\varepsilon} \ll X^{1-\rho+\varepsilon}.$$

Случай 2: $\gamma - \delta \leq \alpha < 4/3 + \delta$. В този случай имаме $F < K^3$. Избираме $r \in \{2, 3, 4\}$, такова че $K^{r-2} \leq F < K^{r-1}$. Ще отбележим, че ако неравенството

$$\left|f_m^{(s)}(x)\right| \asymp FK^{-s} \tag{5.16}$$

при $s = r$ не е изпълнено за някое x, удовлетворяващо $Y < mx \leq X$, то това x принадлежи на подинтервал на $(Ym^{-1}, Xm^{-1}]$, където (5.16) е изпълнено при $s = r+1$. Следователно, когато $K^{r-2} \leq F \leq K^{r-1}$, можем да комбинираме r и $r+1$ от (2.5), за да получим

$$\sum_{Y<mk\leq X} e(f_m(k)) \ll K^{1+\varepsilon}\left(K^{-\nu} + F^{-2\nu/(r+1)}\right), \tag{5.17}$$

където $\nu = \nu_{r+1} = (r^2+r)^{-1}$. Когато $r = 3$ или 4, от (5.17) следва (5.15) с $\nu = 1/24$ и $\nu = 1/25$, съответно. Когато $r = 2$, използваме, че $F \geq X^{\gamma-\delta}$, и получаваме

$$\sum_{Y<mk\leq X} e(f_m(k)) \ll K^{1+\varepsilon}F^{-1/9} \ll K^{1-\gamma/9+\delta} \ll K^{11/12}.$$

Следователно в този случай (5.15) е изпълнено при $(r^2-r)^{-1} = 1/25$, с което лемата е доказана. □

Лема 5.2.7. *Нека $c > 5$, $1-2\rho < \gamma < 1$, където $\rho = (8c^2+12c+12)^{-1}$, $|h| \leq X^{4/3-\gamma}$ и $X^{\gamma-c-\delta} \leq |\theta| \leq X^{\delta}$, където $\delta > 0$ е достатъчно малко. Нека също така (a_m) и (b_k) са редици от комплексни числа, такива че $|a_m| \ll 1$ и $|b_k| \ll 1$. Тогава, ако*

$$X^{2\rho} \leq M \leq X^{1/3}, \tag{5.18}$$

то за $u \in \{0,1\}$, $Y \sim X$ е изпълнена оценката

$$\sum_{m\sim M}\sum_{Y<mk\leq X} a_m b_k e(\theta(mk)^c + h(mk+u)^\gamma) \ll X^{1-\rho+\varepsilon}.$$

Доказателство.

Нека $X^\alpha = |\theta|X^c$, $K = X/M$, $F = X^\alpha + |h|X^\gamma$ и $f_m(x) = \theta(mx)^c + h(mx+u)^\gamma$. Нека също така с W да означим двойната сума

$$\sum_{m\sim M}\sum_{Y<mk\leq X} a_m b_k e(f_m(k)).$$

Трябва да докажем, че $W \ll X^{1-\rho+\varepsilon}$. Първо използваме неравенството на Коши за сумата W и намираме

$$|W|^2 \ll K \sum_{K/2<k\leq 2K}\left|\sum_{\substack{m\sim M\\ Y<mk\leq X}} a_m e(f_m(k))\right|^2.$$

Сега използваме Лема 2.1.7 с $Q = X^{2\rho-\varepsilon}$. Намираме

$$|W|^2 \ll \frac{X}{Q}\sum_{K/2<k\leq 2K}\sum_{|q|\leq Q}\left(1-\frac{|q|}{Q}\right)\sum_{m\in\mathcal{I}} a_{m+q}\overline{a_m}\, e(g_{q,m}(k)), \tag{5.19}$$

където $g_{q,m}(x) = f_{m+q}(x) - f_m(x)$ и $\mathcal{I}$ е подинтервал на $(M/2, M]$, дефиниран от неравенствата

$$Y < km \leq X, \quad Y < k(m+q) \leq X. \tag{5.20}$$

Събираемото при $q = 0$ от сумата в (5.19) оценяваме тривиално и сменяме реда на сумиране в останалата сума. Получаваме

$$|W|^2 \ll \frac{X^2}{Q} + \frac{X}{Q} \sum_{1 \leq |q| \leq Q} \sum_{m \sim M} \left| \sum_{k \in \mathcal{I}'} e(g_{q,m}(k)) \right|, \tag{5.21}$$

където $\mathcal{I}'$ е подинтервал на $(K/2, 2K]$, образуван от условията (5.20). Сега ще разгледаме два случая в зависимост от стойността на α.

Случай 1: $\alpha \geq 4/3 + \delta$. В този случай имаме

$$\left| g_{q,m}^{(r)}(x) \right| \asymp |q| X^{\alpha-1} K^{1-r}$$

за всяко $r \in \mathbb{N}$ и всяко $x \in \mathcal{I}'$. Избираме r такова, че $K^{r-3} \leq X^{\alpha-1+2\rho} < K^{r-2}$ и използваме Лема 2.2.6 и Лема 2.2.7, за да получим

$$\sum_{k \in \mathcal{I}'} e(g_{q,m}(k)) \ll K^{1-\nu+\varepsilon} \left(1 + (|q| X^{-2\rho})^{-\beta}\right),$$

където $\nu = (r^2 - r)^{-1}$ и $\beta = \beta_r \in (0, 1/3)$. Използваме тази оценка за (5.21) и сумираме по m и q. Получаваме

$$|W|^2 \ll X^{2-2\rho+\varepsilon} + X^{2+\varepsilon} K^{-\nu}. \tag{5.22}$$

От (5.18) и дефиницията на α, ρ и r, намираме

$$r(r-1) \leq \left(\frac{3\alpha}{2} + \frac{3}{2} + 3\rho\right)\left(\frac{3\alpha}{2} + \frac{1}{2} + 3\rho\right) < \frac{9c^2}{4} + 3c + 2,$$

при условието, че $c > 5$ и δ е достатъчно малко. Следователно, $K^{-\nu} \ll X^{-2\rho}$ и твърдението на лемата следва от (5.22).

Случай 2: $\gamma - \delta \leq \alpha < 4/3 + \delta$. В този случай имаме $1 \leq F X^{-1+2\rho} \leq K$. Ние можем да разделим интервала $\mathcal{I}'$ на не повече от 3 подинтервала, във всеки от които имаме

$$\left| g_{q,m}^{(r)}(x) \right| \asymp |q| F X^{-1} K^{1-r}$$

при $r = 3$ или $r = 4$. Следователно, при $r = 3$ и $r = 4$ от (2.5) намираме

$$\sum_{k \in \mathcal{I}'} e(g_{q,m}(k)) \ll K^{23/24+\varepsilon} \left(1 + (|q| X^{-2\rho})^{-1/9}\right).$$

Оттук и от (5.18) и (5.21) получаваме

$$|W|^2 \ll X^{2-2\rho+\varepsilon} + X^{2+\varepsilon} K^{-1/24} \ll X^{2-2\rho+\varepsilon}.$$

С това доказваме твърдението от лемата. $\square$

Лема 5.2.8. *Нека* $c > 5$, $1-\rho < \gamma < 1$, *където* $\rho = (8c^2+12c+12)^{-1}$ *и* $X^{\gamma-c-\delta} \leq |\theta| \leq X^{\delta}$, *където* $\delta > 0$ *е достатъчно малко. Тогава*

$$S(\theta; X) \ll X^{1-\rho+\varepsilon}.$$

Доказателство.
От (5.2) следва, че е достатъчно да докажем

$$S_j(\theta; X) \ll X^{1-\rho+\varepsilon} \qquad (j = 0, 1).$$

От Лема 5.2.2 с $\sigma = \rho + \gamma - 1$, $H = X^{\rho}$ и $a_p = (\log p)e(\theta p^c)$ виждаме, че за $S_1(\theta; X)$ трябва да покажем, че

$$\sum_{1\leq|h|\leq H} \Phi(h) \left| \sum_{Y<p\leq X} (\log p)e(\theta p^c + h(p+u)^{\gamma}) \right| \ll X^{1-\rho+\varepsilon},$$

където $u \in \{0, 1\}$ и $Y \sim X$. Следователно е достатъчно да докажем, че

$$\sum_{Y<n\leq X} \Lambda(n)e(\theta n^c + h(n+u)^{\gamma}) \ll X^{1-\rho+\varepsilon} \tag{5.23}$$

за всяко h, такова че $1 \leq |h| \leq H$. Тъй като желаната оценка за $S_0(\theta; X)$ следва от (5.23) при $h = 0$, то трябва да докажем (5.23) за всяко $|h| \leq H$.

Нека u, v, z, където $z - \frac{1}{2} \in \mathbb{N}$, са параметри, които ще изберем, такива че

$$3 < u < v < z, \quad z \geq 4u^2, \quad 64uz^2 \leq x < 32x \leq v^3. \tag{5.24}$$

Използваме комбинаторната лема на Хийт-Браун (Лема 2.3.2), с която разбиваме сумата в (5.23) на линейна комбинация от $O(\log^8 X)$ двойни суми

$$\sum_{m\sim M} \sum_{Y<mk\leq X} a_m b_k e\left(\theta(mk)^c + h(mk+u)^{\gamma}\right)$$

от два типа:

1. Тип I: където $a_m \ll m^{\varepsilon}$, $b_k = 1$ или $\log k$, $M \leq Xz^{-1}$;
2. Тип II: където $a_m \ll m^{\varepsilon}$, $b_k \ll k^{\varepsilon}$, $u \leq M \leq v$.

Ако изберем $u = X^{2\rho}$, $v = 4X^{1/3}$ и $z = \lfloor \frac{1}{10} X^{1/2-\rho} \rfloor - \frac{1}{2}$, то условията (5.24) са изпълнени и можем да използваме Лема 5.2.6 и Лема 5.2.7, за да оценим сумите от първи и втори тип и да завършим доказателството на (5.23). □

Лема 5.2.9. *Нека* $11/12 < \gamma < 1 < c$ *и* $|\theta| \leq X^{\gamma-c-\delta}$, *където* $\delta > 0$ *е достатъчно малко. Тогава*

$$S_1(\theta; X) \ll X^{11/12+\delta}.$$

Доказателство.
Подобно на доказателството на Лема 5.2.8, достатъчно е да докажем, че

$$\sum_{1\le|h|\le H}\Phi(h)\left|\sum_{Y<p\le X}(\log p)e\left(\theta p^c+h(p+u)^\gamma\right)\right|\ll X^{11/12+\delta/2}, \tag{5.25}$$

където $u\in\{0,1\}$, $Y\sim X$ и $H=X^{1-\gamma+\delta}$. Ако $\theta=u=0$, то (5.25) е частен случай на Теорема 4.14 в [34] (виж стр. 50–53 в [34] в случая с експоненциалната двойка $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$). В противен случай твърдението може да бъде получено по подобен начин, тъй като при предположението за u и θ имаме

$$\left|\frac{d^j}{dx^j}\left(\theta x^c+h(x+u)^\gamma\right)\right|\asymp\left|\frac{d^j}{dx^j}\left(hx^\gamma\right)\right|\qquad(j=1,2),$$

когато $1\le|h|\le H$ и $x\sim X$. □

Следват леми, необходими за доказателството на Теорема 5.1.2 и Теорема 5.1.3.

Лема 5.2.10. *Нека $6\rho<\gamma<1<c<3/2-6\rho$ и $X^{\gamma-c-\delta}\le|\theta|\le X^\delta$, където $\delta>0$ е достатъчно малко и $\rho\in(0,1/12)$. Тогава*

$$S_0(\theta;X)\ll X^{\gamma-\rho+\delta}.$$

Доказателство.
Нека $Y\sim X$. От Лема 10 в [78] намираме

$$\sum_{Y<p\le X}(\log p)e(\theta p^c)\ll|\theta|^{1/2}X^{(2c+1)/4+\varepsilon}+|\theta|^{1/6}X^{(2c+9)/12+\varepsilon}+X^{1-\gamma/6+\delta}.$$

При условията в лемата, оценката за $S_0(\theta;X)$ се получава чрез преобразованието на Абел (Лема 2.1.2). □

Лема 5.2.11. *Нека $3\rho<\gamma<1<c$, $1\le|h|\le X^\rho$ и $X^{\gamma-c-\delta}\le|\theta|\le X^\delta$, където $0<\rho<c/6$ и $\delta>0$ е достатъчно малко. Нека също така (a_m) е редица от комплексни числа, такава че $|a_m|\ll1$. Тогава, ако*

$$M\ll\min\left(X^{1-(c+\delta)/2-\rho},X^{1-(\gamma+3\rho)/2}\right), \tag{5.26}$$

то за $u\in\{0,1\}$, $Y\sim X$ е изпълнена оценката

$$\sum_{m\sim M}\sum_{Y<mk\le X}a_m e\left(\theta(mk)^c+h(mk+u)^\gamma\right)\ll X^{1-\rho}.$$

Доказателство.
Нека $K=X/M$, $F=|\theta|X^c+|h|X^\gamma$ и $f_m(x)=\theta(mx)^c+h(mx+u)^\gamma$. При $Y<mx\le X$ имаме $|f_m''(x)|\ll FK^{-2}$ и е изпълнена поне една от оценките

$$|f_m^{(r)}(x)|\asymp FK^{-r}\qquad(r=2,3).$$

Като използваме оценката (2.7) от Лема 2.2.7 и оценката (2.5) при $r = 2$ от Лема 2.2.6, намираме

$$\sum_{Y<mk\leq X} e(f_m(k)) \ll F^{1/2} + F^{1/6}K^{1/2} + F^{-1/3}K. \tag{5.27}$$

Тъй като ние използваме оценката (2.7) само при $|\theta|X^c \asymp |h|X^\gamma$, то вторият член в (5.27) можем да заместим с $|\theta|^{1/6}X^{c/6+1/2}M^{-1/2}$. Получаваме

$$\sum_{m\sim M}\sum_{Y<mk\leq X} e(f_m(k)) \ll F^{1/2}M + (|\theta|X^c)^{1/6}(XM)^{1/2} + X^{1-\gamma/3}. \tag{5.28}$$

От горното неравенство и от условията за ρ, θ, h и M следва твърдението на лемата. □

В следващите две леми ще предполагаме, че за $\rho > 0$ са изпълнени условията

$$c + 14\rho < 2, \qquad 2\gamma + 14\rho < 3, \qquad 2c + 12\rho < 3. \tag{5.29}$$

Лема 5.2.12. *Нека $1/2 + 4\rho < \gamma < 1 < c$, $1 \leq |h| \leq X^\rho$ и $X^{\gamma-c-\delta} \leq |\theta| \leq X^\delta$, където $\delta > 0$ е достатъчно малко, $\rho > 0$ и са изпълнени условията в (5.29). Нека също така (a_m) и (b_k) са редици от комплексни числа, такива че $|a_m| \ll 1$ и $|b_k| \ll 1$. Тогава, ако*

$$X^{2\rho} \leq M \leq X^{1-2\rho}, \tag{5.30}$$

то за $u \in \{0, 1\}$, $Y \sim X$ е изпълнена оценката

$$\sum_{\substack{m\sim M\\ Y<mk\leq X}}\sum_{k\sim K} a_m b_k e(\theta(mk)^c + h(mk+u)^\gamma) \ll X^{1-\rho+\delta}.$$

Доказателство.
Нека $F = |\theta|X^c + |h|X^\gamma$. Нека също така с W да означим сумата

$$\sum_{\substack{m\sim M\\ Y<mk\leq X}}\sum_{k\sim K} a_m b_k e(\theta(mk)^c + h(mk+u)^\gamma).$$

Трябва да докажем, че $W \ll X^{1-\rho+\delta}$. От симетрията можем да допуснем, че $M \leq K$. Следователно $M \ll X^{1/2}$. Подобно на (5.21) намираме

$$|W|^2 \ll \frac{X^2}{Q} + \frac{X}{Q}\sum_{1\leq|q|\leq Q}\sum_{m\sim M}\left|\sum_{mk\in\mathcal{I}} e(g_{q,m}(k))\right|, \tag{5.31}$$

където $Q = X^{2\rho-\varepsilon}$, $\mathcal{I}$ е подинтервал на $(Y, X]$ и

$$g_{q,m}(x) = \theta((m+q)^c - m^c)x^c + h\left(((m+q)x+u)^\gamma - (mx+u)^\gamma\right).$$

Аналогично на (5.27) и (5.49), намираме

$$\sum_{Y<mk\leq X} e(g_{q,m}(k)) \ll G_q^{1/2} + (\Delta_q|\theta|X^c)^{1/6}K^{1/2} + G_q^{-1/3}K,$$

където $\Delta_q = |q|M^{-1}$ и $G_q = \Delta_q F$. Заместваме в (5.31) и получаваме

$$W^2 \ll X^2Q^{-1} + X^{5/4}(FQ)^{1/2} + X^{5/3}(|\theta|X^cQ)^{1/6} + X^{(13-2\gamma)/6}Q^{-1/3}.$$

От горното неравенство и от условията за ρ, θ и h следва твърдението на лемата. □

Лема 5.2.13. *Нека $1-\rho < \gamma < 1 < c$ и $X^{\gamma-c-\delta} \leq |\theta| \leq X^{\delta}$, където $\delta > 0$ е достатъчно малко, $\rho > 0$ и са изпълнени условията* (5.29). *Тогава*

$$S_1(\theta; X) \ll X^{1-\rho+\delta}.$$

Доказателство.

Като следваме разсъжденията в доказателството на Лема 5.2.8, виждаме, че е достатъчно да докажем оценката

$$\sum_{Y \leq n \leq X} \Lambda(n) e(\theta n^c + h(n+u)^{\gamma}) \ll X^{1-\rho+\delta}$$

при $u \in \{0,1\}$, $Y \sim X$ и $1 \leq |h| \leq X^{\rho}$. Използваме тъждеството на Вон (Лема 2.3.1) и разбиваме горната сума на $O(\log X)$ суми от вида

$$\sum_{m \sim M} \sum_{Y < mk \leq X} a_m b_k e(\theta(mk)^c + h(mk+u)^{\gamma}).$$

Както обикновено тази сума ще наричаме сума от първи тип, ако $a_m \ll m^{\varepsilon}$, $b_k = 1$ или $\log k$, $M \leq U^2$, и ще наричаме сума от втори тип, ако $a_m \ll m^{\varepsilon}$, $b_k \ll k^{\varepsilon}$, $U \leq M \leq XU^{-1}$ (тук $U \leq X^{1/2}$ е параметър който ще изберем по-късно).

За сумите от втори тип използваме Лема 5.2.12 и получаваме исканата оценка, при условие че е изпълнено (5.29) и (5.30). Тъй като сумите от първи тип могат да се разглеждат като частен случай на сумите от втори тип, то можем да оценим сумите от първи тип като използваме или Лема 5.2.11, или Лема 5.2.12. Условията (5.26) и (5.30) се препокриват, когато

$$c + 6\rho < 2 - \delta, \quad \gamma + 7\rho < 2.$$

Тези условия следват от (5.29), затова ние можем да оценим сумите от първи тип, когато

$$M \leq X^{1-2\rho}.$$

Следователно чрез Лема 5.2.11 и Лема 5.2.12 можем да оценим всички двойни суми, произлизащи от прилагането на тъждеството на Вон, като изберем U такова, че

$$X^{2\rho} \leq U \leq X^{1/2-\rho}.$$

Тъй като от условията (5.29) следва $\rho < 1/14$, то можем да изберем $U = X^{1/3}$. □

Лема 5.2.14. *Нека $\gamma < 1 < c$, $15(c-1) + 28(1-\gamma) < 1$ и $X^{\gamma-c-\delta} \leq |\theta| \leq X^{\delta}$, където $\delta > 0$ е достатъчно малко. Тогава*

$$S(\theta; X) \ll X^{2\gamma-c-2\delta}.$$

Доказателство.
От (5.2) следва, че е достатъчно да докажем, че

$$S_j(\theta; X) \ll X^{2\gamma-c-2\delta} \qquad (j = 0, 1). \tag{5.32}$$

Използваме Лема 5.2.10 с $\rho = c - \gamma + 3\delta$. Тогава оценката за $S_0(\theta; X)$ в (5.32) е изпълнена, при условие че

$$14(c-1) + 12(1-\gamma) < 1. \tag{5.33}$$

За сумата $S_1(\theta; X)$ използваме Лема 5.2.13 с $\rho = c + 1 - 2\gamma + 3\delta$. Условията в (5.29) са изпълнени, ако

$$15(c-1) + 28(1-\gamma) < 1, \quad 14(c-1) + 26(1-\gamma) < 1, \quad 14(c-1) + 24(1-\gamma) < 1.$$

От първото от тези неравенства следват останалите, както и неравенството в (5.33). При така избраното ρ оценката в (5.32) е изпълнена. С това лемата е доказана. □

Лема 5.2.15. *Нека $\gamma < 1 < c$, $8(c-1) + 21(1-\gamma) < 1$ и $X^{\gamma-c-\delta} \le |\theta| \le X^{\delta}$, където $\delta > 0$ е достатъчно малко. Тогава*

$$S(\theta; X) \ll X^{(3\gamma-c)/2-\delta}.$$

Доказателство.
Както при доказателството на Лема 5.2.14, ще използваме (5.2) и Лема 5.2.10 с $\rho = (c-\gamma)/2 + 2\delta$ и Лема 5.2.13 с $\rho = (2 + c - 3\gamma)/2 + 2\delta$. При този избор, от Лема 5.2.10 имаме условието $8(c-1) + 6(1-\gamma) < 1$, а от Лема 5.2.13

$$8(c-1) + 21(1-\gamma) < 1, \quad 7(c-1) + 19(1-\gamma) < 1, \quad 8(c-1) + 18(1-\gamma) < 1.$$

От първото от горните неравенства следват всички останали. □

5.3 Доказателство на Теорема 5.1.1

5.3.1 Начало на доказателството

Ще използваме известен метод на Харди и Литлууд, за да намалим броя на неизвестните s в (5.1). Това може да се постигне, като дадем по-строги ограничения за някои от променливите.

Нека $s = 2t + 2u + 1$, като точните стойности на t и u ще изберем по-късно. За големи N определяме

$$X = N^{1/c}, \qquad X_0 = (3u)^{-1}X, \qquad X_1 = X, \qquad X_j = \tfrac{1}{2}X_{j-1}^{1-1/c} \quad (2 \le j \le t). \tag{5.34}$$

Ще използваме варианта на Девънпорт-Хейлброн на кръговия метод, за да броим решенията на (5.1) в прости числа $p_1, \ldots, p_s$, такива че

$$p_1, \ldots, p_{2u+1} \in \mathcal{N}_\gamma(X_0), \qquad p_{2u+2j}, p_{2u+2j+1} \in \mathcal{N}_\gamma(X_j) \quad (1 \le j \le t). \tag{5.35}$$

Дефинираме ядро $K \in C^\infty(\mathbb{R})$, такова че

$$\widehat{K}(t) \geq 0, \qquad \tfrac{1}{4}\mathbf{1}_I(4x) \leq K(x) \leq \mathbf{1}_I(x),$$

където $\mathbf{1}_I$ е характеристичната функция на интервала $I = [-1, 1]$. Можем да получим тези условия, ако K е дефинирано като конволюция $K = \widetilde{K} \star \widetilde{K}$, където $\widetilde{K} \in C^\infty(\mathbb{R})$ е четна и удовлетворява $\mathbf{1}_I(4x) \leq \widetilde{K}(x) \leq \mathbf{1}_I(2x)$. (Виж Лема 2.1.4.)

Ще разгледаме следната сума

$$R(N) = \sum_{\substack{p_1,\dots,p_s \\ (5.35)}} \left(\prod_{j=1}^{s} (\log p_j) \right) K_\tau(p_1^c + \cdots + p_s^c - N),$$

където $K_\tau(x) = K(x/\tau)$, $\tau = (\log N)^{-1}$ и сумирането е по p_i, удовлетворяващи (5.35). От формулата на Фурие за обръщането следва, че

$$R(N) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}_1(\theta) e(-N\theta)\, d_\tau\theta, \tag{5.36}$$

където $d_\tau\theta = \widehat{K_\tau}(\theta)\, d\theta$ и

$$\mathcal{F}_j(\theta) = S(\theta; X_0)^{2u+j} S(\theta; X_1)^2 \cdots S(\theta; X_t)^2 \qquad (j = 0, 1). \tag{5.37}$$

Означаваме

$$\Xi = \tau \left(X_1^2 \cdots X_t^2 X^{2u+1} \right)^\gamma X^{-c}.$$

Ще докажем, че

$$R(N) \gg \Xi. \tag{5.38}$$

За да получим горната оценка, ще разделим интеграла (5.36) на части. Ще намерим оценки на подинтегралната функция върху една голяма дъга, две малки дъги и два безкрайни интервала (тривиална област).

5.3.2 Тривиална област

Първо ще оценим приноса от големите θ за интеграла в (5.36). Нека $\delta = \delta(c, \gamma) > 0$ е достатъчно малко фиксирано число. От компактността на ядрото K имаме

$$\widehat{K_\tau}(\theta) = \tau \widehat{K}(\tau\theta) \ll_j \frac{\tau}{(1 + \tau|\theta|)^{j+2}}.$$

Следователно, ако фиксираме $j \geq (c+1)\delta^{-1}$, то

$$\int_{|\theta| \geq X^\delta} |\mathcal{F}_1(\theta)|\, d_\tau\theta \ll \int_{|\theta| \geq X^\delta} \frac{\Xi X^c\, d\theta}{(1 + \tau|\theta|)^{j+2}} \ll \Xi X^{-1}. \tag{5.39}$$

5.3.3 Малки дъги

Множеството от малките дъги е

$$\mathfrak{m} = \left\{\theta : X^{\gamma-c-\delta} \le |\theta| \le X^{\delta}\right\}.$$

От Лема 5.2.8 имаме

$$\sup_{\theta\in\mathfrak{m}} |S(\theta; X_0)| \ll X^{1-\rho+\varepsilon}, \tag{5.40}$$

където $\rho = (8c^2+12c+12)^{-1}$. От друга страна, за $\mathcal{F}_0(\theta)$, дефинирано в (5.37), имаме

$$\int\limits_{\mathfrak{m}} |\mathcal{F}_0(\theta)|\, d_\tau\theta \le \int\limits_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}_0(\theta)|\, d_\tau\theta,$$

а последният интеграл е ограничен от $(\log X)^{s-1}$ пъти броя на решенията на диофантовото неравенство

$$\left|x_1^c - x_2^c + x_3^c - x_4^c + \cdots + x_{s-2}^c - x_{s-1}^c\right| < \tau$$

в естествени числа $x_1, \ldots, x_{s-1}$, такива че

$$x_1, \ldots, x_{2u} \in \mathcal{N}_\gamma(X_0), \qquad x_{2u+2j-1}, x_{2u+2j} \in \mathcal{N}_\gamma(X_j) \quad (1 \le j \le t).$$

Следователно

$$\int\limits_{\mathfrak{m}} |\mathcal{F}_0(\theta)|\, d_\tau\theta \ll X^{\varepsilon} \int\limits_{\mathbb{R}} |\mathcal{G}(\theta)|^2\, d_{4\tau}\theta, \tag{5.41}$$

където

$$\mathcal{G}(\theta) = T(\theta; X_0)^u\, T(\theta; X_1) \cdots T(\theta; X_t).$$

За интеграла $\int_{\mathbb{R}} |\mathcal{G}(\theta)|^2\, d_{4\tau}\theta$ също ще използваме кръговия метод. Подобно на (5.39) имаме

$$\int\limits_{|\theta|\ge X^{\delta}} |\mathcal{G}(\theta)|^2\, d_{4\tau}\theta \ll \Xi X^{-1-\gamma}. \tag{5.42}$$

За интервала $(-X^{\gamma-c}, X^{\gamma-c})$ използваме оценката (5.9) от Лема 5.2.3 и намираме

$$\int\limits_{-X^{\gamma-c}}^{X^{\gamma-c}} |\mathcal{G}(\theta)|^2\, d_{4\tau}\theta \ll \Xi X^{c-3\gamma} \int\limits_{-X^{\gamma-c}}^{X^{\gamma-c}} |T(\theta; X_1)|^2\, d\theta \ll \Xi X^{-\gamma+\varepsilon}. \tag{5.43}$$

При $X^{\gamma-c} \le |\theta| \le X^{\delta}$ използваме Лема 5.2.5 и намираме

$$\int\limits_{X^{\gamma-c}}^{X^{\delta}} |\mathcal{G}(\theta)|^2\, d_{4\tau}\theta \ll X^{2u(1-\nu)+\varepsilon} \int\limits_{\mathbb{R}} \prod_{j=1}^{t} |T(\theta; X_j)|^2\, d_{4\tau},$$

където $\nu = (c^2+3c+2)^{-1}$. Последният интеграл е ограничен от броя на решенията на неравенството

$$\left|x_1^c - x_2^c + x_3^c - x_4^c + \cdots + x_{2t-1}^c - x_{2t}^c\right| < 4\tau \tag{5.44}$$

в естествени числа $x_{2j-1}, x_{2j} \in \mathcal{N}_\gamma(X_j)$, $1 \le j \le t$. От дефиницията на X_j имаме, че $|x_1^c - x_2^c| \ge |x_1 - x_2| c X^{c-1}$ и $|x_3^c - x_4^c + \cdots + x_{2t-1}^c - x_{2t}^c| < 2^c X_2^c + O(X_3^c) < cX^{c-1}$. Следователно неравенството (5.44) има само диагонални решения (т. е. тези, за които $x_{2j-1} = x_{2j}$, $1 \le j \le t$). Следователно

$$\int\limits_{X^{\gamma-c}}^{X^\delta} |\mathcal{G}(\theta)|^2 \, d_{4\tau}\theta \ll X^{2u(1-\nu)+\varepsilon}(X_1 \cdots X_t)^\gamma. \tag{5.45}$$

Като използваме дефиницията на X_j от (5.34), намираме, че

$$X^{2u(1-\nu)+\varepsilon}(X_1 \cdots X_t)^\gamma \ll \Xi X^{-\gamma+\Delta+\varepsilon}, \tag{5.46}$$

където

$$\Delta = 2u(1-\gamma-\nu) + c - \gamma \sum_{j=0}^{t-1} \left(1 - \frac{1}{c}\right)^j.$$

Сега използваме, че $-\gamma \sum_{j=0}^{t-1} \left(1 - \frac{1}{c}\right)^j = -\gamma c + \gamma c \left(1 - \frac{1}{c}\right)^t$ и неравенството $\left(1 - \frac{1}{c}\right)^t < e^{-t/c}$ и намираме

$$\Delta < (1-\gamma)(2u+c) + \gamma c e^{-t/c} - 2u\nu.$$

Избираме $t = \lceil 2c \log c \rceil$ и $u = \left\lceil \frac{2}{3}c + \frac{1}{2} \right\rceil + 2$, използваме условието $0 < 1 - \gamma < \rho$ и получаваме

$$\begin{aligned} \Delta &< \left(\frac{7c}{3} + 7\right)\rho + \frac{1}{c} - \left(\frac{4c}{3} + 5\right)\nu \\ &= -\frac{(c-3)(c^3 + 21c^2 + 22c + 24)}{12c(c+1)(c+2)(2c^2+3c+3)} < 0. \end{aligned}$$

Като комбинираме (5.41)–(5.43), (5.45) и (5.46), намираме

$$\int\limits_{\mathfrak{m}} |\mathcal{F}_0(\theta)| \, d_\tau\theta \ll \Xi X^{-\gamma+\varepsilon},$$

и следователно от (5.40) и условието в теоремата $1 - \rho < \gamma$ окончателно получаваме

$$\int\limits_{\mathfrak{m}} |\mathcal{F}_1(\theta)| \, d_\tau\theta \ll \Xi X^{-\delta}. \tag{5.47}$$

5.3.4 Голяма дъга

Голямата дъга за интеграла в (5.36) е отвореният интервал

$$\mathfrak{M} = \left(-X^{\gamma-c-\delta}, X^{\gamma-c-\delta}\right).$$

Когато $\gamma < 1$, $|\theta| < X^{\gamma-c}$ и $Y \sim X$, от Лема 14 в [78] следва

$$\sum_{Y < p \le X} (\log p) e(\theta p^c) = \int\limits_Y^X e(\theta u^c) \, du + O\left(X^{1-2\eta(X)}\right),$$

където $\eta(X) = (\log X)^{-3/4}$. Като използваме преобразованието на Абел (Лема 2.1.2), намираме

$$S_0(\theta; X_j) = V(\theta; X_j) + O\left(X_j^{\gamma - 2\eta(X)}\right) \tag{5.48}$$

за $j = 0, 1$. Когато $j \geq 2$, същата формула следва от асимптотичния закон за разпределение на простите числа. Като комбинираме (5.2), (5.48) и Лема 5.2.9, получаваме, че при $\theta \in \mathfrak{M}$ имаме

$$S(\theta; X_j) = V(\theta; X_j) + O\left(X_j^{\gamma - 2\eta(X)}\right). \tag{5.49}$$

Нека

$$\mathcal{F}^*(\theta) = V(\theta; X_0)^{2u+1} V(\theta; X_1)^2 \cdots V(\theta; X_t)^2.$$

От (5.49) намираме

$$\mathcal{F}_1(\theta) - \mathcal{F}^*(\theta) \ll \tau^{-1} \Xi X^{c - 2\gamma - 2\eta(X)} \left(|S(\theta; X_0)|^2 + |V(\theta; X_0)|^2\right)$$

за всяко $\theta \in \mathfrak{M}$. Използваме (5.8) и (5.10) и получаваме, че

$$\int\limits_{\mathfrak{M}} \left(\mathcal{F}_1(\theta) - \mathcal{F}^*(\theta)\right) e(-N\theta)\, d_\tau\theta \ll \Xi X^{c - 2\gamma - 2\eta(X)} X^{2\gamma - c} (\log X)^3 \ll \Xi X^{-\eta(X)}.$$

Тъй като от Лема 3.1 в [34] имаме

$$V(\theta; X) \ll X^{\gamma - c} |\theta|^{-1},$$

то

$$\int\limits_{\mathfrak{M}} \mathcal{F}_1(\theta) e(-N\theta)\, d_\tau\theta = \int\limits_{\mathbb{R}} \mathcal{F}^*(\theta) e(-N\theta)\, d_\tau\theta + O\left(\Xi X^{-\eta(X)}\right). \tag{5.50}$$

Също така, както при доказателството на Лема 6 в [78], имаме

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \mathcal{F}^*(\theta) e(-N\theta)\, d_\tau\theta \gg \Xi. \tag{5.51}$$

От (5.39), (5.47), (5.50), (5.51) следва (5.38). С това Теорема 5.1.1 е доказана. □

5.4 Доказателство на Теорема 5.1.2 и Теорема 5.1.3

Нека $X = (N/2)^{1/c}$ и $\tau = (\log N)^{-1}$. Ще разгледаме сумата

$$R(N) = \sum_{p_1, \ldots, p_s \in \mathcal{N}_\gamma(X)} \left(\prod_{j=1}^{s} (\log p_j)\right) K_\tau(p_1^c + \cdots + p_s^c - N),$$

където $s = 3$ или $s = 4$ и K_τ е ядрото от доказателството на Теорема 5.1.1. Нека $\delta > 0$ е достатъчно малко. Подобно на доказателството на Теорема 5.1.1, имаме

$$R(N) = \int\limits_{\mathbb{R}} S(\theta; X)^s e(-N\theta)\, d_\tau\theta$$

и

$$\int\limits_{|\theta|\geq X^{\delta}} |S(\theta;X)|^s \, d_\tau\theta \ll \tau X^{s\gamma-c-1},$$

$$\int\limits_{\mathfrak{M}} S(\theta;X)^s e(-N\theta) \, d_\tau\theta \gg \tau X^{s\gamma-c}, \tag{5.52}$$

където $\mathfrak{M} = (-X^{\gamma-c-\delta}, X^{\gamma-c-\delta})$. Следователно, за да докажем Теорема 5.1.2 и Теорема 5.1.3, трябва да докажем само, че

$$\int\limits_{\mathfrak{m}} S(\theta;X)^s e(-N\theta) \, d_\tau\theta \ll \tau X^{s\gamma-c-\delta}, \tag{5.53}$$

където $\mathfrak{m} = \left\{\theta : X^{\gamma-c-\delta} \leq |\theta| \leq X^{\delta}\right\}$. Използваме оценката (5.8) от Лема 5.2.3 и виждаме, че (5.53) следва от

$$\sup_{\theta\in\mathfrak{m}} |S(\theta;X)|^{s-2} \ll X^{(s-1)\gamma-c-2\delta}. \tag{5.54}$$

Последната формула следва от Лема 5.2.14, когато $s = 3$, и от Лема 5.2.15, когато $s = 4$. С това двете теореми са доказани. □

5.5 Доказателство на Теорема 5.1.4

Нека за големи стойности на Z да положим $N \sim Z$, $X = \left(\frac{2Z}{3}\right)^{\frac{1}{c}}$, $\tau = (\log Z)^{-1}$ и $\eta(X) = (\log X)^{-\frac{3}{4}}$. Ще докажем, че

$$\int\limits_{Z/2}^{Z} \left| \int\limits_{\mathfrak{M}} \left(S(\theta;X)^2 - V(\theta;X)^2\right) e(-N\theta) \, d_\tau\theta \right|^2 dN \ll \tau^2 X^{4\gamma-c-4\eta(X)} \tag{5.55}$$

и

$$\int\limits_{Z/2}^{Z} \left| \int\limits_{\mathfrak{m}} S(\theta;X)^2 e(-N\theta) \, d_\tau\theta \right|^2 dN \ll \tau^2 X^{4\gamma-c-\delta}. \tag{5.56}$$

Нека с $\mathbf{1}_{\mathcal{B}}$ да означим индикаторната функция за измеримо множество $\mathcal{B}$. Първо ще докажем (5.55). От равенството на Планшерел (Лема 2.1.3) имаме, че

$$\int\limits_{Z/2}^{Z} \left| \int\limits_{\mathbb{R}} F(\theta) e(-N\theta) d\theta \right|^2 dN \leq \int\limits_{\mathbb{R}} \left| \int\limits_{\mathbb{R}} F(\theta) e(-N\theta) d\theta \right|^2 dN = \int\limits_{\mathbb{R}} |F(\theta)|^2 d\theta.$$

В нашия случай функцията $F(\theta) = (S(\theta;X)^2 - V(\theta;X)^2)\,\widehat{K_\tau}(\theta)\mathbf{1}_{\mathfrak{M}}$. Намираме, че изразът в лявата страна във формула (5.55) е ограничен от

$$\int\limits_{\mathfrak{M}} \left|\left(S(\theta;X)^2 - V(\theta;X)^2\right)\widehat{K_\tau}(\theta)\right|^2 d\theta$$

$$\ll \sup_{\theta\in\mathfrak{M}} |S(\theta;X) - V(\theta;X)|^2 \int\limits_{\mathfrak{M}} |(S(\theta;X) + V(\theta;X))|^2 \left|\widehat{K_\tau}(\theta)\right|^2 d\theta$$

$$\ll \tau^2 \left(X^{\gamma-2\eta(X)}\right)^2 X^{2\gamma-c} = \tau^2 X^{4\gamma-c-4\eta(X)}.$$

В последната оценка използвахме формула (5.49) и Лема 5.2.3.

За да докажем (5.56), отново използваме равенството на Планшерел, но този път с функцията $F(\theta) = S(\theta;X)^2\widehat{K_\tau}(\theta)\mathbf{1}_{\mathfrak{m}}$. Намираме

$$\int\limits_{Z/2}^{Z} \left|\int\limits_{\mathfrak{m}} S(\theta;X)^2 e(-N\theta)\, d_\tau\theta\right|^2 dN \ll \int\limits_{\mathfrak{m}} \left|S(\theta;X)^2\widehat{K_\tau}(\theta)\right|^2 d\theta$$

$$\ll \sup_{\theta\in\mathfrak{m}} |S(\theta;X)|^2 \int\limits_{\mathfrak{m}} |S(\theta;X)|^2 \left|\widehat{K_\tau}(\theta)\right|^2 d\theta$$

$$\ll \tau^2 X^{3\gamma-c-2\delta} X^{\gamma+\delta} = \tau^2 X^{4\gamma-c-\delta}.$$

За последната оценка използвахме формула (5.54) и Лема 5.2.3.

Ако с $\mathcal{E}(Z)$ означим множеството от тези $N \in (Z/2, Z]$, за които оценките (5.52) и (5.53) не са изпълнени, то от (5.55) и (5.56) следва, че за мярката на $\mathcal{E}(Z)$ е изпълнено

$$\mathcal{E}(Z)\left(\tau X^{2\gamma-c}\right)^2 \ll \tau^2 X^{4\gamma-c-\eta(X)}.$$

Следователно

$$\mathcal{E}(Z) \ll X^{c-\eta(X)}.$$

От избора на X и $\eta(X)$ в началото на доказателството на Теорема 5.1.4 намираме

$$\mathcal{E}(Z) \ll Z \exp\left(-\left(\frac{\log\left(\frac{2Z}{3}\right)}{c}\right)^{\frac{1}{4}}\right).$$

С това Теорема 5.1.4 е доказана. □

Библиография

[1] Архипов Г. И., Житков А. Н., *Теорема Варинга с нецелым показателем*, Изв. АН СССР, Сер. Матем., 48 (1984), 1138–1150.

[2] Буриев К., *Аддитивные задачи с простыми числами*, Дис. канд. физ.-матем. наук. М. МГУ, (1989).

[3] Виноградов И. М., *К вопросу о верхней границе для* $G(n)$, Изв. АН СССР. Сер. матем., 23, (2) (1959), 637–642.

[4] Виноградов И. М., *Представление нечетного сила суммой трех простых чисел*, ДАН, 15 (1937), 291–294.

[5] Гриценко С. А., *Три аддитивные задачи*, Изв. РАН, Сер. матем., 56 (1992), 1198–1216.

[6] Илин В., Садовничи В., Сендов Б., *Математически анализ*, първа част, „Наука и изкуство“, София, 1984.

[7] Илин В., Садовничи В., Сендов Б., *Математически анализ*, втора част, „Наука и изкуство“, София, 1989.

[8] Карацуба А. А., *Основы аналитической теории чисел*, „Наука“, Москва, 1983.

[9] Конягин С. В., *Аддитивная проблема с дробными степенями*, Матем. заметки, 73 (2003), 633–636.

[10] Лапорта М. Б., Толев Д. И., *Об одном уравнении с простыми числами*, Матем. заметки, 57 (1995), 926–929.

[11] Пятетский-Шапиро И. И., *Об одном варианте проблемы Варинга-Гольдбаха*, Матем. сб., 30(72), (1) (1952), 105–120.

[12] Пятетский-Шапиро И. И., *О распреленении простых чисел в последовательностях вида* $[f(n)]$, Матем. сб., 33(75) (3), (1953), 559–566.

[13] Рудин У., *Реален и комплексен анализ*, „Наука и изкуство“, София, 1984.

[14] Сегал Б. И., *Об едной теореме, аналогичной теореме Варинга*, ДАН СССР, 2 (1933), 47–49.

[15] Сегал Б. И., *Теорема Варинга для степеней с дробными и иррациональными показателями*, Тр. Физ.-матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 5 (1934), 73–86.

[16] Тодорова Т., *Три задачи от Аналитичната теория на числата*, дисертация, Софийски Университет - София, (2015).

[17] Толев Д. И., *Лекции по елементарна и аналитична теория на числата*, УИ „Св. Климент Охридски“, 2016.

[18] Akbal Y., Güloğlu A., *Waring-Goldbach problem with Piatetski-Shapiro primes*, Journal of Number Theory, 185 (2018), 80–92.

[19] Baker R., Weingartner A., *A ternary diophantine inequality over primes*, Acta Arith., 162 (2014), 159–196.

[20] Balog A., Friedlander J. B., *A hybrid of theorems of Vinogradov and Piatetski-Shapiro*, Pacific J. Math., 156 (1992), 45–62.

[21] Brun V., *Le crible d'Eratostène et le théorème de Goldbach*, C. R. Acad. Sci., Paris, 168 (1919), 544–546.

[22] Brüdern J., Fouvry E., *Lagrange's Four Squares Theorem with almost prime variables*, J. Reine Angew. Math., 454 (1994), 59–96.

[23] Brüdern J., Fouvry E., *Le crible a vecteurs*, Compos. Math., 102 (1996), 337–355.

[24] Brüdern J., Kumchev A, *Diophantine approximation by cubes of primes and an almost prime. II*, Illinois J. Math., 45 (1), (2001), 309–321.

[25] Cai Y., *A ternary diophantine inequality involving primes*, Inernational Journal of Number Theory 14 (2018), no. 8, 2257–2268.

[26] Cai Y., *Lagrange's four squares theorem with variables of special type*, Intern. J. Number Theory, 6 (2010), no. 8, 1801–1817.

[27] Cai Y., Lu M., *Additive problems involving primes of special type*, Acta Arith. 140, 2 (2009), 189–204.

[28] Cao X., Zhai W., *On a binary diophantine inequality*, Adv. Math. (China), 6 (2003), 706–721.

[29] Chen J. R., *On the representation of a larger even integer as the sum of a prime and the product of at most two primes*, Sci. Sinica, 16 (1973), 157–176.

[30] Davenport H., *On Waring's problem for fourth powers*, Ann. of Math. (2), 40 (1939), 731–747.

[31] Deshouillers J. M., *Probleme de Waring avec exposants non entiers*, Bull. Soc. Math. France, 101 (1973), 285–295.

[32] Deshouillers J. M., *Un problème binaire en théorie additive*, Acta Arith., 25 (1973 – 1974), 393–403.

[33] Erdös P., Nathanson M. B., *Lagrange's Theorem and Thin Subsequences of Squares*, Contributions to Probability (J. Gani, V. K. Rohatgi, eds.), Academic Pres, New York, (1981), 3–9.

[34] Graham S. W., Kolesnik G. A., *Van der Corput's Method of Exponencial Sums*, Cambridge University Press, 1991.

[35] Greaves G., *Sieves in number theory*, Springer, 2001.

[36] Hardy G. H., Littlewood J. E., *A new solution of Waring's problem*, Quart. J. Math. Oxford, 48 (1919), 272–293.

[37] Hardy G. H., Littlewood J. E., *Some problems of "Partitio Numerorum".I. A new solution of Waring's problem*, Göttingen Nach. r. 1920 (1920), 33–54.

[38] Hardy G. H., Littlewood J. E., *Some problems of "Partitio Numerorum".III. On the expression of a number as a sum of primes*, Acta Math., 44 (1923), 1–70.

[39] Hardy G. H., Littlewood J. E., *Some problems of "Partitio Numerorum".IV. The singular series in Waring's problem and the value of the number* $G(k)$, Math. Z., 12 (1922), 161–188.

[40] Hardy G. H., Littlewood J. E., *Some problems of "Partitio Numerorum". V. A further contribution to the study of Goldbach's problem*, Proc. London Math. Soc. (2), 22 (1923), 45–56.

[41] Hardy G. H., Littlewood J. E., *Some problems of "Partitio Numerorum". VI. Further researches in Waring's problem*, Math. Z., 23 (1925), 1–37.

[42] Harman G., *On the distribution of* αp *modulo one*, J. London Math. Soc. (2), 27 (1983), 9–18.

[43] Harman G., *On the distribution of* αp *modulo one II*, Proc. London Math. Soc. (3), 72 (1996), 241–260.

[44] Heath-Brown D. R., Tolev D. I., *Lagrange's four squares theorem with one prime and three almost-prime variables*, J. Reine Angew. Math., 558 (2003), 159–224.

[45] Heath-Brown, D. R, *A new* $k-th$ *derivative estimate for exponential sums via Vinogradov's mean value*, Tr. Mat. Inst. Steklova, 296 (2017), 95–110.

[46] Heath-Brown D. R., *The Pjatetski-Sapiro prime number theorem*, J. Number Theory, 16 (1983), 242–266.

[47] Helfgott H. A., *The ternary Goldbach conjecture is true*, http://arxiv.org/pdf/1312.7748.pdf

[48] Hilbert D., *Beweis für die Darstellbarkeit der ganzen Zahlen durch eine feste Anzahl nter Potenzen (Waringsche Problem)*, Math. Ann., 67 (1909), 281–300.

[49] Hua L. K., *Additive Theory of Prime Numbers*, American Mathematical Society, Providence, RI, (1965).

[50] Hua L. K., *Some results in the additive prime number theory*, Quart. J. Math. Oxford, 9 (1938), 68–80.

[51] Iwaniec H., *A new form of the error term in the linear sieve*, Acta Arith., 37 (1980), 307—320.

[52] Iwaniec H., *Rosser's sieve*, Acta Arith. 36 (1980), 171—202.

[53] Iwaniec H., *On sums of two norms from cubic fields*, Journées de théorie additive des nombres, Université de Bordeaux I, (1977), 71–89.

[54] Jia C. H., *On the Piatetski-Shapiro-Vinogradov theorem*, Acta Arith., 73 (1995), 1–28.

[55] Kumchev A., *A binary additive equation involving fractional powers*, Int. J. Number Theory, 5 (2009), 281–292.

[56] Kumchev A., *A diophantine inequality involving prime powers*, Acta Arith. 89 (1999), 311–330.

[57] Kumchev A., *On the Piatetski-Shapiro-Vinogradov theorem*, J. Theor. Nombres Bordeaux, 9 (1997), 11–23.

[58] Kumchev A,. Laporta M., *On a binary diophantine inequality involving prime powers*, Millenial Conference on Number Theory, At Urbana, IL, Volume: Number Theory for the Millennium, II (2000).

[59] Kumchev A., Petrov Zh., *A hybrid of two theorems of Piatetski-Shapiro*, Monatshefte für Mathematik, (2018), 1–22. https://doi.org/10.1007/s00605-018-1217-4

[60] Kumchev A., Wooley T. D., *On the Waring-Goldbach problem for seventh and higher powers*, Monatsh. Math., 183 (2017), 303–310.

[61] Landau E., *Über die zahlentheoretische Funktion $\phi(n)$ und ihre beziehung zum Goldbachschen Satz*, Nachr. koninglichen Gesellschaft wiss, Göttingen Math.Phys. klasse, (1900), 177–186.

[62] Li H. Z., *A hybrid of theorems of Goldbach and Piatetski-Shapiro*, Acta Arith., 107 (2003), 307–326.

[63] Linnik Y. V., *On the representation of large numbers as sums of seven cubes*, Mat. Sbornik N. S., 12 (1943), 218–224.

[64] Linnik Y. V., *An elementary solution of the problem of Waring by Schnirelman's method*, Rec. Math. [Mat. Sbornik] N. S., 12(54): 2 (1943), 225–230.

[65] Matomäki K., Shao X., *Vinogradov's three primes theroem with almost twin primes*, Compos. Math., 153 (2017), 1220–1256.

[66] Maynard J., *Small gaps between primes*, Ann. of Math. (2), 181 (1) (2015), 383–413.

[67] Mirek M., *Roth's theorem in the Piatetski-Shapiro primes*, Rev. Mat. Iberoam., 31 (2015), 617–656.

[68] Peneva T., *On the ternary Goldbach problem with primes p_i such that $p_i + 2$ are almost-prime*, Acta Math. Hungar., 86 (2000), 305–318.

[69] Petrov Zh., *On an equation involving fractional powers with prime numbers of a special type*, Annual of Sofia University, 104, (2017), 171–183.

[70] Petrov Zh., Tolev D., *On an equation involving fractional powers with one prime and one almost prime variables*, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, 298, 24, (2017), 38–56.

[71] Polymath, *Variants of the Selberg sieve, and bounded intervals containing many primes*, Research in the Mathematical Sciences, 2014, 1–12.

[72] Ricci G., *Sull'andamento della differenza di numeri primi consecutivi*, Riv. Mat. Univ. Parma, 5 (1954), 3—54.

[73] Rivat J., Wu J., *Prime numbers of the form* $[n^c]$, Glasgow Math. J., 43 (2001), no. 2, 237–254.

[74] Selberg A., *Sieve methods*, Proc. Sympos. Pure Math., 20 (1971), 311–351.

[75] Selberg A., *The general sieve method and its place in prime number theory*, Proc. Internat. Congress Math., Cambridge, Mass., 1 (1950), 286–292.

[76] Tolev D. I., *Additive problems with prime numbers of special type*, Acta Arith., 96 (2000), 53–88.

[77] Tolev D. I., *Arithmetic progressions of prime-almost-prime twins*, Acta Arith., 88 (1999), 67–98.

[78] Tolev D. I., *On a diophantine inequality involving prime numbers*, Acta Arith., 61 (3) (1992), 289–306.

[79] Tolev D. I., *On a diophantine inequality with prime numbers of a special type*, Tr. Mat. Inst. Steklova, 299 (2017), 261–282.

[80] Vaaler J. D., *Some extremal problems in Fourier analysis*, Bull. Amer. Math. Soc. 12 (1985), 183–216.

[81] Vinogradov I. M., *Some theorems concerning the theory of primes*, Mat. Sbornik N.S., 2 (1937), 179–195.

[82] Vaughan R. C., The Hardy-Littlewood method, Cambridge Tracts in Mathematics, Second Edition, 1997.

[83] Wirsing E., *Thin subbases*, Analysis, 6 (1986), 285–308.

[84] Wooley T. D., *Large improvements in Waring's problem*, Ann. of Math. (2), 135 (1992), 131–164.

[85] Wooley T. D., *Multigrade efficient congruencing and Vinogradov's mean value theorem*, Proc. London Math. Soc. (3), 111 (2015), no. 3, 519–560.

[86] Wooley T. D., *Vinogradov's mean value theorem via efficient congruencing*, Ann. of Math. (2) 175 (2012), no. 3, 1575–1627.

[87] Zhang D. Y., Zhai W. G, *The Waring-Goldbach problem in thin sets of primes. II*, Acta Math. Sinica (Chin. Ser.), 48 (2005), 809–816.

[88] Zhang Y., *Bounded gaps between primes*, Annals of Mathematics, April (2013).