СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“

Писмен конкурсен изпит по Математика I

9 юни 2019 г.

Тема №1.

ОТГОВОРИ И ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ

- **Максималният брой точки** от трите части на изпита е **100**
- Правилно отбелязаният отговор на всяка задача от 1. до 20. се оценява както следва:

задачи от 1. до 10. – 2 точки **задачи от 11. до 20. – 3 точки**

1.	~~А~~	Б	В	Г	11.	~~А~~	Б	В	Г
2.	~~А~~	Б	В	Г	12.	А	Б	~~В~~	Г
3.	А	Б	~~В~~	Г	13.	А	Б	В	~~Г~~
4.	А	~~Б~~	В	Г	14.	А	Б	В	~~Г~~
5.	А	~~Б~~	В	Г	15.	А	~~Б~~	В	Г
6.	А	Б	В	~~Г~~	16.	А	Б	~~В~~	Г
7.	А	~~Б~~	В	Г	17.	А	~~Б~~	В	Г
8.	А	Б	~~В~~	Г	18.	А	Б	~~В~~	Г
9.	~~А~~	Б	В	Г	19.	А	Б	В	~~Г~~
10.	А	Б	В	~~Г~~	20.	~~А~~	Б	В	Г

- Правилно попълненият отговор на **всяка задача от 21. до 25.** се оценява с **4 точки**

21.	$A = 5$
22.	$x = \dfrac{22}{7}$
23.	$p\% = 15\%$
24.	220 000 лева през 2016 г.
25.	$AB = 20$

• **Пълното решение на всяка задача от 26. до 28. се оценява с 10 точки.**

Задача 26. Да се реши уравнението: $(x-3)\sqrt{x^2-5x+4}+6=2x$.

Решение: Допустими стойности за x в даденото уравнение са решенията на неравенството $x^2-5x+4\geq 0$ и това са $x\in(-\infty;1]\cup[4;+\infty)$.

Преобразуваме уравнението:

$$(x-3)\sqrt{x^2-5x+4}-2x+6=0, \qquad (x-3)\left(\sqrt{x^2-5x+4}-2\right)=0.$$

Решенията на последното уравнение са корените на уравненията

$$\sqrt{x^2-5x+4}-2=0 \qquad \text{и} \qquad x-3=0.$$

Записваме първото от тях във вида $\sqrt{x^2-5x+4}=2$ и след повдигане на втора степен на двете страни получаваме квадратното уравнение $x^2-5x=0$. Корените $x_1=0$ и $x_1=5$ са от допустимите стойности за x.

Решението на $x-3=0$ е $x_3=3$, което обаче не е от допустимите стойности за x на даденото уравнение.

Следователно, решенията на даденото уравнение са $x_1=0$ и $x_2=5$.

Задача 27. Числата a_1, a_2, a_3, a_4 образуват геометрична прогресия, а a_1-6, a_2, a_3, a_4-12 образуват аритметична прогресия. Да се намери сумата $a_1+a_2+a_3+a_4$.

Решение: Нека q е частното на геометричната прогресия a_1, a_2, a_3, a_4. Тогава имаме

$$\begin{aligned} &\div\!\!\div \quad a_1,\ a_2=a_1q,\ a_3=a_1q^2,\ a_4=a_1q^3,\\ &\div \quad a_1-6,\ a_1q,\ a_1q^2,\ a_1q^3-12. \end{aligned}$$

От свойствата на аритметичната прогресия получаваме системата:

$$\left|\begin{array}{l} a_1-6+a_1q^2=2a_1q,\\ a_1q+a_1q^3-12=2a_1q^2. \end{array}\right.$$

След умножаване на първото уравнение с $(-q)$ и почленно събиране с второто, получаваме уравнението

$$6q-12=0,$$

откъдето намираме $q=2$. Заместваме с така намерената стойност на q в първото уравнение на системата и за a_1 получаваме уравнението

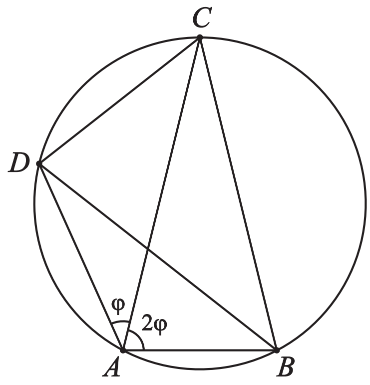
$$a_1-6+4a_1=4a_1.$$

Оттук, $a_1=6$ и тогава $a_2=6\,.\,2=12$, $a_3=6\,.\,2^2=24$, $a_4=6\,.\,2^3=48$.

Окончателно, $a_1+a_2+a_3+a_4=6+12+24+48=90$.

Задача 28. За четириъгълника $ABCD$ е дадено, че $\sphericalangle BAC = 2\sphericalangle CAD$, $AD = CD = 40$ и $BC = 60$. Ако четириъгълникът $ABCD$ е вписан в окръжност, да се намерят радиусът на тази окръжност и дължините на диагоналите AC и BD.

Решение: Означаваме $\sphericalangle CAD = \varphi$, тогава $\sphericalangle BAC = 2\varphi$. От $AD = CD$ следва $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{CD}$ и за вписаните в окръжността ъгли $\sphericalangle ABD$ и $\sphericalangle CBD$ имаме



$$\sphericalangle ABD = \frac{\overset{\frown}{AD}}{2} = \sphericalangle ACD = \sphericalangle CAD = \frac{\overset{\frown}{CD}}{2} = \sphericalangle CBD,$$

т.е. $\sphericalangle ABD = \sphericalangle CBD = \varphi$. Тогава $\sphericalangle ABC = 2\varphi = \sphericalangle BAC$ и $\triangle ABC$ е равнобедрен, като $AC = BC = 60$.

От синусовата теорема за $\triangle ACD$: $\dfrac{CD}{\sin\varphi} = 2R$, $\dfrac{20}{\sin\varphi} = R$.

От синусовата теорема за $\triangle ABC$: $\dfrac{BC}{\sin 2\varphi} = 2R$, $\dfrac{30}{\sin 2\varphi} = R$.

Следователно, $\dfrac{20}{\sin\varphi} = \dfrac{30}{\sin 2\varphi}$, $2\sin 2\varphi = 3\sin\varphi$, $4\sin\varphi\cos\varphi = 3\sin\varphi$, $(4\cos\varphi - 3)\sin\varphi = 0$.

Тъй като $0 < \varphi < 90^\circ$, $\sin\varphi \neq 0$ и тогава φ трябва да удовлетворява равенството $4\cos\varphi - 3 = 0$. Последователно намираме

$$\cos\varphi = \frac{3}{4}, \qquad \sin\varphi = \sqrt{1 - \cos^2\varphi} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{4}, \qquad R = \frac{20}{\sin\varphi} = \frac{80\sqrt{7}}{7}.$$

Диагоналът BD намираме със синусовата теорема от $\triangle ABD$, в който $\sphericalangle BAD = 3\varphi$. Имаме $\dfrac{BD}{\sin 3\varphi} = 2R$. Използвайки формулата $\sin 3\varphi = \sin\varphi\,(3 - 4\sin^2\varphi)$ получаваме

$$BD = 2R\sin 3\varphi = 2R\sin\varphi\,(3 - 4\sin^2\varphi) = 2\cdot\frac{80\sqrt{7}}{7}\cdot\frac{\sqrt{7}}{4}\left(3 - 4\cdot\frac{7}{16}\right) = 40\left(3 - \frac{7}{4}\right) = 50.$$

Окончателно, $AC = 60$, $BD = 50$, $R = \dfrac{80\sqrt{7}}{7}$.