СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“

Писмен конкурсен изпит по Математика I

23 май 2021 г.

Тема №3.

Отговорите на задачите от 1. до 20. включително отбелязвайте в листа за отговори!

Задача 1. Кое от посочените числа е най-голямо:

А) $\left(\frac{8}{9}\right)^{-2}$ ***Б)*** $\left(\frac{81}{64}\right)^{1/2}$ ***В)*** $\left(\frac{125}{27}\right)^{-1/3}$ ***Г)*** $\left(\frac{64}{27}\right)^{-2/3}$

Задача 2. Изразът $A = \frac{2}{x-3} - \frac{x+2}{x^2-6x+9} \cdot \frac{3x-9}{4-x^2}$, при $x \notin \{-2; 2; 3\}$, е тъждествено равен на:

А) $\frac{x+2}{x-3}$ ***Б)*** $\frac{2x-1}{x^2-5x+6}$ ***В)*** $\frac{x+3}{x-2}$ ***Г)*** $\frac{3x+1}{x^2-5x+6}$

Задача 3. Допустимите стойности за x в израза $\sqrt{\frac{4}{7-x}} - \sqrt{x-5}$ са:

А) $x \in (-\infty; 5)$ ***Б)*** $x \in (-5; 7)$ ***В)*** $x \in (7; \infty)$ ***Г)*** $x \in [5; 7)$

Задача 4. Решенията на неравенството $\frac{(3-x)^2(x+2)}{x-5} < 0$ са:

А) $x \in (-\infty; 5)$ ***Б)*** $x \in (-5; 2)$ ***В)*** $x \in (-2; 3) \cup (3; 5)$ ***Г)*** $x \in (-2; 5) \cup (5; \infty)$

Задача 5. Стойността на израза $B = (\log_{1/9} 27 - \log_{1/3} 1) \log_3 81$ е равна на:

А) -8 ***Б)*** -6 ***В)*** 2 ***Г)*** 4

Задача 6. Решенията $(x; y)$ на системата $\left| \begin{array}{l} x^2 + 3y - 11 = 0 \\ 2x + y - 6 = 0 \end{array} \right.$, са:

А) $(3 - \sqrt{2}; 2\sqrt{2})$ *и* $(3 + \sqrt{2}; -2\sqrt{2})$ ***Б)*** $(0; 6)$ *и* $(\sqrt{11}; 0)$

В) $(3; 0)$ *и* $(2; 2)$ ***Г)*** $(2 - \sqrt{3}; 2\sqrt{3})$ *и* $(2 + \sqrt{3}; -2\sqrt{3})$

Задача 7. Ако t_1 и t_2 са корените на уравнението $t^2 - 7t + 10 = 0$, то $x_1 = \frac{t_1}{t_2}$ и $x_2 = \frac{t_2}{t_1}$ са корени на уравнението:

А) $9x^2 - 10x + 9 = 0$ ***Б)*** $x^2 + 29x + 1 = 0$ ***В)*** $7x^2 - 10x + 7 = 0$ ***Г)*** $10x^2 - 29x + 10 = 0$

Задача 8. Стойността на израза $C = \operatorname{tg} 15^\circ + 4 \sin 75^\circ \cos 15^\circ$ е равна на:

А) $2 + \sqrt{3}$ ***Б)*** 4 ***В)*** $4 - 2\sqrt{3}$ ***Г)*** 2

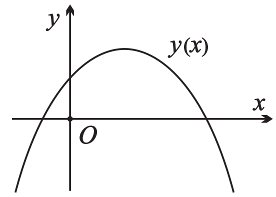
Задача 9. Триъгълникът ABC има периметър равен на 48 и $3AC - 2AB = 12$. Ако ъглополовящата CL на $\sphericalangle ACB$, $L \in AB$, разделя страната AB в отношение $AL : BL = 2 : 1$, то дължината на страната AB е равна на:

А) 18 ***Б)*** 20 ***В)*** 21 ***Г)*** 24

Задача 10. В триъгълник ABC, $\sphericalangle ACB = 90^\circ$, $BC = 6\sqrt{5}$ и височината CD, $D \in AB$, е такава, че $AD = 3$. Тогава синусът на $\sphericalangle BAC$ е равен на:

А) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ***Б)*** $\frac{3}{5}$ ***В)*** $\frac{5\sqrt{2}}{9}$ ***Г)*** $\frac{\sqrt{5}}{4}$

Задача 11. На чертежа е изобразена графиката на функцията $y(x) = -x^2 + bx + c$. В сила са неравенствата:



А) $b < 0$ *и* $c > 0$ ***Б)*** $b > 0$ *и* $c > 0$
В) $b > 0$ *и* $c < 0$ ***Г)*** $b < 0$ *и* $c < 0$

Задача 12. Числова редица е зададена с формулите $u_0 = 1$, $u_n = 2u_{n-1} + 1$, $n = 1, 2, \ldots$ Общият член u_n на редицата е равен на:

А) $n^2 + n + 1$ ***Б)*** $2n + 1$ ***В)*** $2(n+1)^2 - 1$ ***Г)*** $2^{n+1} - 1$

Задача 13. Сборът на всички двуцифрени числа, кратни на 4, е равен на:

А) 1160 ***Б)*** 1164 ***В)*** 1188 ***Г)*** 1196

Задача 14. Най-голямата стойност на функцията $f(x) = 2 - \dfrac{\cos 2x}{\cos^2 x}$, $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$, е равна на:

А) 2 ***Б)*** 3 ***В)*** 4 ***Г)*** 5

Задача 15. В университетската книжарница се продават 4 различни книги по алгебра, 3 различни книги по геометрия и 5 различни книги по информатика. По колко начина студент може да си закупи общо 5 различни книги, от които 2 по алгебра, 1 по геометрия и 2 по информатика:

А) 150 ***Б)*** 180 ***В)*** 200 ***Г)*** 205

Задача 16. Студент регистрирал дневните си разходи в продължение на една седмица и те били: 20, 16, 21, 19, 26, 28, 24 лв., съответно. Ако S е средноаритметичното, а P – медианата на това множество от данни, тогава:

А) $P = S + 1$ ***Б)*** $S = P + 2$ ***В)*** $S = P + 1$ ***Г)*** $P = S + 2$

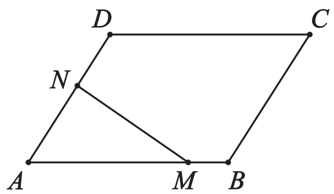
Задача 17. За $\triangle ABC$ е дадено $\sin \sphericalangle BAC = \dfrac{15}{17}$, височината през върха C е $CH = 24$ и радиусът на описаната окръжност около $\triangle ABC$ окръжност е $R = 17$. Радиусът на вписаната окръжност в $\triangle BCH$ е равен на:

А) 3 ***Б)*** 4 ***В)*** 5 ***Г)*** 6

Задача 18. В $\triangle ABC$, точката M е среда на страната AB, $AB = 10$, $CM = 7$ и $\sphericalangle BMC = 45^\circ$. Тогава е изпълнено:

А) $BC^2 + AC^2 > 100$ ***Б)*** $AC^2 = 100 - BC^2$ ***В)*** $BC^2 + AC^2 < 100$ ***Г)*** $BC^2 + 100 = AC^2$

Задача 19. На чертежа, $ABCD$ е успоредник, $AM : MB = 4 : 1$ и $AN : ND = 3 : 2$. Отношението на лицата $S_{AMN} : S_{ABCD}$ е равно на:



А) $4 : 25$ ***Б)*** $1 : 5$ ***В)*** $6 : 25$ ***Г)*** $12 : 25$

Задача 20. Четириъгълникът $ABCD$ е вписан в окръжност с радиус $R = 8$. Ако е известно, че $BC = CD = DA$ и $\sphericalangle BCD = 120^\circ$, то периметърът на четириъгълника $ABCD$ е равен на:

А) 30 ***Б)*** 32 ***В)*** 36 ***Г)*** 40

Отговорите на задачите от 21. до 25. включително запишете в листа за отговори!

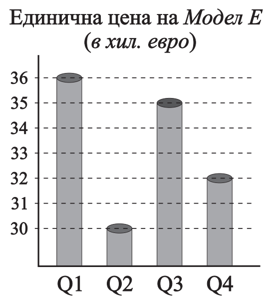
Задача 21. Ако $\lg(n-1) = 1 + \dfrac{1}{1+\log_2 5} + \dfrac{\log_2 101}{1+\log_2 5}$, то числото n е равно на:

Задача 22. Решенията на уравнението $\sqrt{x+2} - \sqrt{2x-3} = 1$ са:

Задача 23. Във всяка от банките е направен влог от $10\,000$ лева при следните условия:
- в Банка X: при $(p+2)\,\%$ годишен лихвен процент и проста лихва;
- в Банка Y: при $p\,\%$ годишен лихвен процент и сложна лихва.

След две години натрупаната сума в Банка X се оказала с 375 лева повече, отколкото в Банка Y. Числото p е равно на:

Задача 24. На кръговата диаграма е дадено дяловото разпределение на продажбите на електромобил *Модел E* според броя продадени електромобили в първо тримесечие Q1, второ тримесечие Q2, трето тримесечие Q3. През последното тримесечие Q4 са продадени 4000 броя *Модел E*, което съставлява 20% от броя на продадените електромобили за цялата година. На колонната диаграма е показана продажната цена на *Модел E* през всяко от тримесечията. Средният доход за тримесечие в евро от продажбите на *Модел E* през годината е равен на:



Задача 25. В триъгълник ABC, $AB = 23$, $\sphericalangle ABC = 2\sphericalangle BAC$ и $\sin\sphericalangle BAC = \dfrac{1}{3}$. Дължината на най-късата страна на триъгълника е равна на:

Пълните решения на задачи 26., 27. и 28. запишете в свитъка за решения!

Задача 26. Три числа образуват геометрична прогресия. Сборът на първите две числа от прогресията е равен на (-8), а сборът от квадратните корени на първото и третото число е равен на 10. Да се намерят числата на прогресията.

Задача 27. Конспект за изпит съдържа 36 въпроса. Всеки изпитен билет съдържа 2 различни въпроса от конспекта. Колко е най-малкият брой въпроси от конспекта, които трябва да научи студент, така че вероятността да знае и двата въпроса от произволно изтеглен билет да бъде поне $60\,\%$?

Задача 28. Даден е квадрат $ABCD$. Точките E и F лежат върху диагонала BD, като E е между B и F, $BE = 3$, $EF = 5$ и $FD = 4$. Да се докаже, че в четириъгълника $AECF$ може да се впише окръжност и да се намери радиусът на тази окръжност.

Време за работа 4 часа.

Драги кандидат-студенти,
- *номерирайте всички страници на беловата си;*
- *означавайте ясно началото и края на решението на всяка от задачите от 26. до 28., включително;*
- *решението на всяка от задачите от 26. до 28., включително, трябва да започва на нова страница;*
- *не смесвайте белова и чернова;*
- *черновата не се проверява и не се оценява.*

Изпитната комисия ви пожелава успешна работа!