СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“
ПИСМЕН КОНКУРСЕН ИЗПИТ ПО МАТЕМАТИКА II

30 май 2021 г.

Тема №1

Задача 1. Да се реши неравенството

$$|x^2 - 44x + 43| \leq x^2 - 90x + 2021.$$

Решение: Понеже $x^2 - 44x + 43 = (x-1)(x-43)$ и $x^2 - 90x + 2021 = (x-43)(x-47)$, то разглеждаме следните два случая:
1. При $x \in (-\infty, 1] \cup [43, \infty)$. Тогава неравенството е еквивалентно на $x^2 - 44x + 43 \leq x^2 - 90x + 2021$ и последователно получаваме $46x \leq 2021 - 43$, $46x \leq 43.47 - 43$, $46x \leq 46.43$ и $x \leq 43$. Като отчетем множеството за случай 1., получаваме $x \in (-\infty, 1] \cup \{43\}$.
2. При $x \in (1, 43)$. Тогава неравенството е еквивалентно на $-(x-1)(x-43) \leq (x-43)(x-47)$ и последователно получаваме $(x-43)((x-47)+(x-1)) \geq 0$, $(x-43)(2x-48) \geq 0$, $(x-43)(x-24) \geq 0$, $x - 24 \leq 0$ и $x \leq 24$. Като отчетем множеството за случай 2., получаваме $x \in (1, 24]$.

Окончателно $x \in (-\infty, 24] \cup \{43\}$.

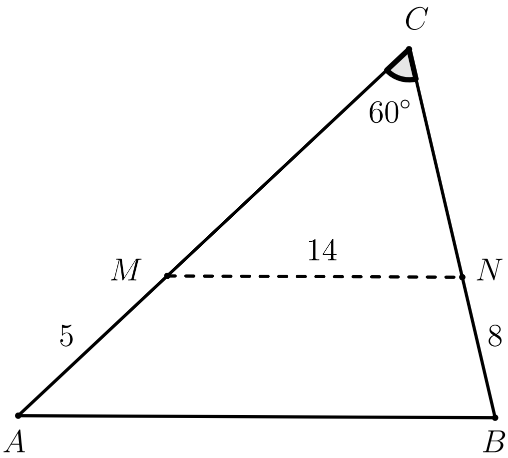
Задача 2. Точките M от страната AC и N от страната BC на триъгълник ABC са такива, че $MN || AB$, $AM = 5$, $BN = 8$ и $MN = 14$. Ако $\sphericalangle ACB = 60^\circ$, намерете дължините на страните на триъгълника и неговото лице.

Решение: Означаваме $MC = x$ и $NC = y$. От подобието на $\triangle MNC$ и $\triangle ABC$ (имат равни съответни ъгли) имаме $\dfrac{MC}{AC} = \dfrac{NC}{BC}$, $\dfrac{x}{x+5} = \dfrac{y}{y+8}$ и $\dfrac{x}{y} = \dfrac{5}{8}$. Нека $x = 5t$ и $y = 8t$.
От косинусова теорема за $\triangle MNC$ получаваме

$$MN^2 = MC^2 + NC^2 - 2.MC.NC.\cos 60^\circ,$$

$$14^2 = 25t^2 + 64t^2 - 2.5t.8t.\frac{1}{2},\ 196 = 49t^2,\ t^2 = 4 \text{ и } t = 2.$$

Тогава $x = 10$, $y = 16$ и съответно $AC = 5 + 10 = 15$ и $BC = 8 + 16 = 24$.



Отново от подобието на $\triangle MNC$ и $\triangle ABC$ имаме $\dfrac{AB}{MN} = \dfrac{AC}{MC} = \dfrac{15}{10} = \dfrac{3}{2}$ и тогава $AB = \dfrac{3}{2} MN = 21$.

От тук за лицето на триъгълника получаваме $S_{\triangle ABC} = \dfrac{AC.BC}{2} \sin 60^\circ = \dfrac{15.24}{2}.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 90\sqrt{3}$.

Задача 3. Да се реши уравнението

$$\sqrt[3]{x-7} + \sqrt[3]{35-x} = 4.$$

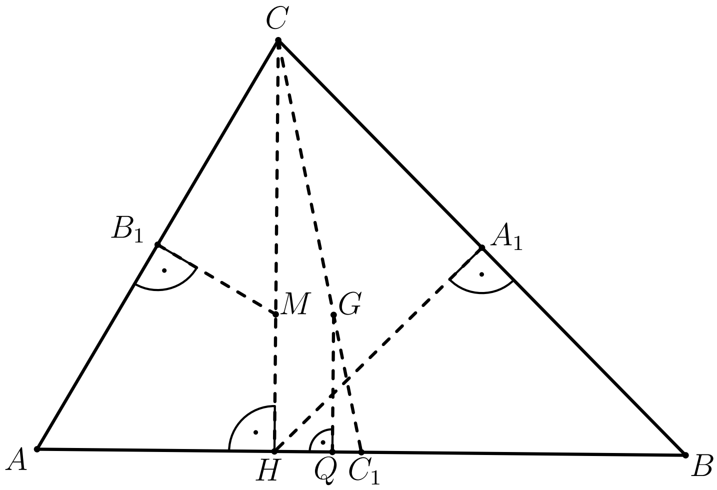
Решение:
Нека $\sqrt[3]{x-7} = u$ и $\sqrt[3]{35-x} = v$. Тогава $\left| \begin{array}{l} u + v = 4 \\ u^3 + v^3 = x - 7 + 35 - x = 28. \end{array} \right.$

Но $28 = u^3 + v^3 = (u+v)(u^2 - uv + v^2) = 4((u+v)^2 - 3uv) = 4(16 - 3uv)$.

От тук $7 = 16 - 3uv$ и $uv = 3$. Така за u и v получаваме следната система $\left| \begin{array}{l} u + v = 4 \\ uv = 3. \end{array} \right.$

От формулите на Виет u и v ще намерим, като решим квадратното уравнение $t^2 - 4t + 3 = 0$. Последното има корени 1 и 3. Тогава $u = 1, v = 3$ и $u = 3, v = 1$ са решенията на системата. При $u = 1$ получаваме $x = 8$, а при $u = 3$ получаваме $x = 34$. Решенията на задачата са $x = 8$ и $x = 34$.

Задача 4. В остроъгълния триъгълник ABC CH е височина, а G е пресечната точка на медианите. Пресечната точка на симетралата на отсечката AC с отсечката CH е точка M, като триъгълниците ABG и ABM са равнолицеви, а симетралата на отсечката BC минава през H. Намерете мерките на ъглите на $\triangle ABC$.



Решение: Нека A_1, B_1, и C_1, са съответно средите на страните BC, AC и AB на дадения триъгълник, а $Q \in AB$ е такава, че $GQ \perp AB$. От $GC_1 = \dfrac{1}{3}CC_1$ и подобието на $\triangle CHC_1$ и $\triangle GQC_1$ (общ ъгъл и $\sphericalangle CHC_1 = \sphericalangle GQC_1 = 90^\circ$) имаме $GQ = \dfrac{1}{3}CH$. От друга страна от $S_{\triangle ABM} = S_{\triangle ABG}$ получаваме $MH = GQ = \dfrac{1}{3}CH$.

HA_1 е симетрала, а $\triangle CHB$ е правоъгълен. Тогава $\triangle BHA_1$ и $\triangle CHA_1$ са еднакви и $\triangle CHB$ е равнобедрен правоъгълен. Така $\sphericalangle ABC = 45^\circ$.

От подобието на $\triangle AHC$ и $\triangle MB_1C$ (общ ъгъл и $\sphericalangle AHC = \sphericalangle MB_1C = 90^\circ$) имаме $\dfrac{HC}{B_1C} = \dfrac{CA}{CM}$ и последователно получаваме $\dfrac{HC}{\frac{1}{2}AC} = \dfrac{CA}{\frac{2}{3}CH}$, $\dfrac{CH^2}{AC^2} = \dfrac{3}{4}$ и $\dfrac{CH}{AC} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Но $\dfrac{CH}{AC} = \sin\sphericalangle BAC$ и тогава $\sphericalangle BAC = 60^\circ$.

За третият ъгъл $\sphericalangle ACB$ имаме $\sphericalangle ACB = 180^\circ - 45^\circ - 60^\circ = 75^\circ$.

Задача 5. Да се реши неравенството $\log_3\left(9^x - 1\right) < x - 1 + \log_3\left(3^x + 1\right)$;

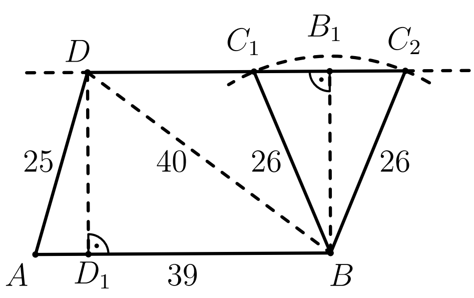
Решение: Неравенството има смисъл за $9^x - 1 > 0$ и $3^x + 1 > 0$ т.е. $9^x > 1 = 9^0$ и от $9 > 1$ имаме $x > 0$. За тези стойности на x неравенството е еквивалентно на

$\log_3\left(9^x - 1\right) < \log_3\left(\dfrac{3^x}{3}(3^x+1)\right)$. От $3 > 1$ имаме $9^x - 1 < \dfrac{3^x}{3}(3^x+1)$, $3.9^x - 3 < 3^x(3^x+1)$, $2.9^x - 3^x - 3 < 0$. Полагаме $3^x = t > 0$. Получаваме $2t^2 - t - 3 < 0$ с решение $t \in \left(-1, \dfrac{3}{2}\right)$, което заедно с $t > 0$ ни дава $t \in \left(0, \dfrac{3}{2}\right)$.

Тогава $3^x < \dfrac{3}{2} = 3^{\log_3\frac{3}{2}}$ и от $3 > 1$ имаме $x < \log_3\dfrac{3}{2} = 1 - \log_3 2$.

Отчитайки интервала на допустимите стойности, решението е $x \in \left(0, 1 - \log_3 2\right)$.

Задача 6. Да се пресметне лицето на трапеца $ABCD$ ($AB \parallel CD$), ако $AB = 39$, $AD = 25$, $BC = 26$, $BD = 40$;



Решение: Нека D_1, и B_1, са точки съответно от правите AB, и DC, като $DD_1 \perp AB$ и $BB_1 \perp DC$.

Прилагаме косинусова теорема за $\triangle ABD$. Имаме

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB.AD.\cos\sphericalangle BAD,$$
$$40^2 = 39^2 + 25^2 - 2.39.25.\cos\sphericalangle BAD$$

и получаваме $\cos\sphericalangle BAD = \dfrac{7}{25}$.

В правоъгълния $\triangle AD_1D$ намираме

$$AD_1 = AD.\cos\sphericalangle BAD = 7\frac{7}{25} = 7 \text{ и } DD_1 = \sqrt{AD^2 - AD_1^2} = \sqrt{25^2 - 7^2} = 24.$$

От това, че $\sphericalangle BAD$ е остър и $AD_1 < AB$ следва, че D_1 е от отсечката AB и тогава $D_1B = DB_1 = AB - AD_1 = 39 - 7 = 32$. Правата DB_1 е успоредна на правата AB и е на разстояние

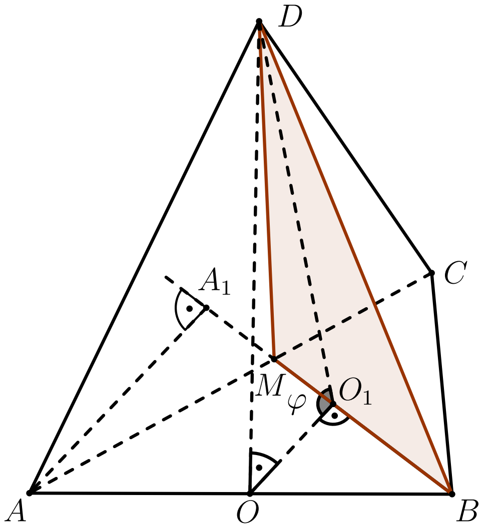
$24 = h = DD_1 = BB_1$ от AB, а точка C е от правата DB_1 и е такава, че $BC = 26$. Такива точки има 2 броя. Означаваме ги с C_1 и C_2, като $DC_1 < DB_1$, а $DC_2 > DB_1$. За разстоянието от всяка от тях до точка B_1 от Питагорова теорема за $\triangle CBB_1$ получаваме $CB_1 = \sqrt{26^2 - 24^2} = 10$.

Тогава $DC_1 = DB_1 - 10 = 32 - 10 = 22$ и $DC_2 = DB_1 + 10 = 32 + 10 = 42$.

За лицата съответно получаваме:

$$S_{ABC_1D} = \frac{AB + DC_1}{2}h = \frac{39 + 22}{2}24 = 732 \text{ и } S_{ABC_2D} = \frac{AB + DC_2}{2}h = \frac{39 + 42}{2}24 = 972.$$

Задача 7. Основата на триъгълната пирамида $ABCD$ е триъгълник ABC със страни $AB = 10$, $BC = 8$ и $AC = 6$. Ортогоналната проекция върху основата ABC на върха на пирамидата D съвпада с центъра на описаната около пирамидата сфера. Точка M от отсечката AC е такава, че $V_{ABMD} : V_{MBCD} = 1 : 2$. Намерете косинуса на ъгъла, който сключват помежду си равнините MBD и ABC.



Решение: От това, че $AB^2 = AC^2 + BC^2$ следва, че $\triangle ABC$ е правоъгълен. Условието, че центърът на описаната сфера O е от равнината ABC означава, че O е центърът на описаната около $\triangle ABC$ окръжност, т.е. O е средата на хипотенузата AB. Тогава $OA = OB = OC = 5$ и също така $OD = 5$.

От $V_{ABMD} : V_{MBCD} = 1 : 2$ последователно получаваме $S_{ABM} : S_{MBC} = 1 : 2$, и $AM : CM = 1 : 2$. Тогава $CM = 4$ и $AM = 2$.

Нека $O_1 \in MB$ е такава, че $OO_1 \perp MB$ и $A_1 \in MB$ е такава, че $AA_1 \perp MB$. От това, че DO е перпендикулярна на равнината ABC и $OO_1 \perp MB$ следва, че равнината OO_1D е перпендикулярна на правата MB и от тук $DO_1 \perp MB$. Така линейният ъгъл на двустенния ъгъл, който сключват помежду си равнините MBD и ABC, е $\sphericalangle OO_1D$. Означаваме го с φ. За да намерим $\cos\varphi$, трябва в правоъгълния $\triangle O_1DO$ (с $\sphericalangle O_1OD = 90^\circ$) да намерим дължината на катета OO_1.

Първи начин: От $S_{ABM} : S_{MBC} = 1 : 2$ и $S_{MBC} = \frac{4.8}{2} = 16$ получаваме $S_{ABM} = 8$. От Питагорова теорема за правоъгълния $\triangle MBC$ имаме $MB = \sqrt{MC^2 + BC^2} = \sqrt{4^2 + 8^2} = 4\sqrt{5}$. Тогава за височината към страната MB на $\triangle ABM$ имаме $AA_1 = \frac{2S_{\triangle ABM}}{MB} = \frac{2.8}{4\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}}$.

Тогава $OO_1 = \frac{1}{2}AA_1 = \frac{2}{\sqrt{5}}$ като средна отсечка в $\triangle AA_1B$.

Втори начин: В правоъгълния $\triangle ABC$ имаме $\sin\sphericalangle CAB = \frac{4}{5}$. От Питагорова теорема за правоъгълния $\triangle MBC$ имаме $MB = 4\sqrt{5}$. От синусова теорема за $\triangle ABM$ получаваме

$$\frac{\sin\sphericalangle ABM}{AM} = \frac{\sin\sphericalangle MAB}{MB}, \frac{\sin\sphericalangle ABM}{AM} = \frac{\sin\sphericalangle CAB}{MB}, \frac{\sin\sphericalangle ABM}{2} = \frac{\frac{4}{5}}{4\sqrt{5}}, \text{ и } \sin\sphericalangle ABM = \frac{2}{5\sqrt{5}}.$$

Тогава в правоъгълния $\triangle OBO_1$ имаме $OO_1 = OB.\sin\sphericalangle ABM = 5.\frac{2}{5\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

След намирането на OO_1 от Питагорова теорема в правоъгълния $\triangle O_1DO$ имаме

$$DO_1 = \sqrt{OD^2 + OO_1^2} = \sqrt{\frac{129}{5}} \text{ и тогава } \cos\varphi = \frac{OO_1}{DO_1} = \frac{\frac{2}{\sqrt{5}}}{\sqrt{\frac{129}{5}}} = \frac{2}{\sqrt{129}}.$$

Задача 8. Да се намери най-голямата стойност на функцията $f(x) = -x^2 + 4x - 1$ в множеството от решенията на уравнението $\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\ x = 4\sin x - 1$.

Решение:

За функцията $f(x) = -x^2 + 4x - 1$ получаваме $f'(x) = -2x + 4$. Имаме $f'(x) > 0$ в $(-\infty, 2)$ и $f'(x) < 0$ в $(2, \infty)$. Това означава, че функцията расте в $(-\infty, 2)$ и намалява в $(2, \infty)$. Най-голямата стойност на функцията $f(x)$ в множеството от решенията на тригонометричното уравнението ще се достига в най-близкото до 2 решение на уравнението.

За тригонометричното уравнение: то има смисъл за такива x, за които $\cos x \neq 0$. Това означава $x \neq (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$ за всяко цяло число k.

Последователно получаваме:

$\sqrt{3}\sin x = 4\sin x.\cos x - \cos x$, $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 4\sin x.\cos x$,

$\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \dfrac{1}{2}\cos x = 2\sin x.\cos x$, $\sin x.\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) + \cos x.\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \sin 2x$,

$\sin\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) = \sin 2x$, $\sin 2x - \sin\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) = 0$,

$2\sin\dfrac{2x - \left(x + \frac{\pi}{6}\right)}{2}\cos\dfrac{2x + \left(x + \frac{\pi}{6}\right)}{2} = 0$,

$2\sin\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{12}\right)\cos\left(\dfrac{3x}{2} + \dfrac{\pi}{12}\right) = 0$.

Тук имаме две възможности:

I. $\sin\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{12}\right) = 0$. Тогава $\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{12} = k.\pi$ за всяко цяло число k.

Имаме първа група решения $x = u_k = \dfrac{12k+1}{6}\pi$ за всяко цяло число k.

II. $\cos\left(\dfrac{3x}{2} + \dfrac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\dfrac{18x + \pi}{12}\right) = 0$.

Тогава $\dfrac{18x + \pi}{12} = (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$ за всяко цяло число k.

Имаме втора група решения $x = v_k = \dfrac{12k+5}{18}\pi$ за всяко цяло число k.

От първата група кандидати за най-близки до 2 са $u_0 = \dfrac{\pi}{6} < 2$ и $u_1 = \dfrac{13\pi}{12} > 2$.

От втората група кандидати за най-близки до 2 са $v_0 = \dfrac{5\pi}{18} < 2$ и $v_1 = \dfrac{17\pi}{18} > 2$.

В сила са следните неравенства $u_0 = \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{3\pi}{18} < \dfrac{5\pi}{18} = v_0$ и $v_1 = \dfrac{17\pi}{18} < \pi < \dfrac{13\pi}{12} = u_1$.

Така кандидати за най-близки до 2 са $v_0 = \dfrac{5\pi}{18} < 2$ и $v_1 = \dfrac{17\pi}{18} > 2$.

Ще покажем, че $v_1 - 2 < 2 - v_0$. Проверяваме дали $\dfrac{17\pi}{18} - 2 < 2 - \dfrac{5\pi}{18}$?

Последното е равносилно на $11\pi < 36$ и от $11\pi < 11.3,2 = 35,2 < 36$ е вярно.

Получихме, че най-близо до 2 от решенията на тригонометричното уравнение е $v_1 = \dfrac{17\pi}{18}$.

За най-голямата стойност на функцията получаваме $f(v_1) = -\dfrac{289}{324}\pi^2 + \dfrac{34}{9}\pi - 1$.