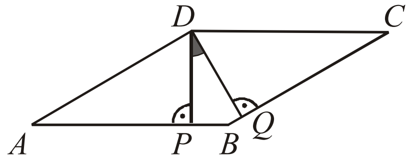
СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“
ПИСМЕН КОНКУРСЕН ИЗПИТ ПО МАТЕМАТИКА
ВТОРО РАВНИЩЕ
23 ЮНИ 2013 г.

ЗАДАЧИ И ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ – ТЕМА 1

1. Да се реши уравнението $|x+2|-3|x+1|=2x+1.$

Решение. В зависимост от знаците на изразите под знака за абсолютна стойност имаме три случая. Когато $x\in(-\infty;-2),$ $x+2<0$ и $x+1<0,$ т.е. $|x+2|=-x-2$ и $|x+1|=-x-1.$ В този интервал даденото уравнение е еквивалентно на уравнението $2x+1=2x+1,$ т.е. всяко $x\in(-\infty;-2)$ е решение на даденото уравнение. Ако $x\in[-2;-1)$, то $x+2\geq 0,$ $x+1<0$ и $|x+2|=x+2,$ $|x+1|=-x-1.$ В този интервал даденото уравнение е еквивалентно на уравнението $2x=-4$ и решението на даденото уравнение е $x=-2.$ Когато $x\in[-1;+\infty),$ $x+2>0$ и $x+1\geq 0,$ т.е. $|x+2|=x+2$ и $|x+1|=x+1.$ Така получаваме уравнението $-4x=2$, което има корен $x=-\frac{1}{2}.$ Окончателно решенията на модулното уравнение са $x\in(-\infty;-2]\cup\left\{-\frac{1}{2}\right\}.$

2. Даден е успоредник *ABCD* с височини $DP=15$ и $DQ=16$, като точките *P* и *Q* лежат съответно върху страните *AB* и *BC*. Да се намери лицето на успоредника, ако $\sphericalangle PDQ=30°.$



Решение. Тъй като $\sphericalangle BPD=\sphericalangle BQD=90°,$ то $\sphericalangle PBQ=180°-\sphericalangle PDQ=150°.$ Следователно $\sphericalangle BAD=\sphericalangle BCD=30°.$ От правоъгълния триъгълник ADP намираме $AD=\frac{DP}{\sin 30°}=30.$ Следователно лицето *S* на успоредника е $S=AD.DQ=480.$

3. Да се реши неравенството $3.9^x+14.3^x-5\geq 0.$

Решение. Полагаме $3^x=u,$ $u>0$ и получаваме неравенството $3u^2+14u-5\geq 0.$ Решението на последното неравенство е $u\in(-\infty;-5]\cup\left[\frac{1}{3};+\infty\right).$ Понеже $u>0,$ получаваме $3^x\in\left[\frac{1}{3};+\infty\right).$ Следователно $x\in[-1;+\infty).$

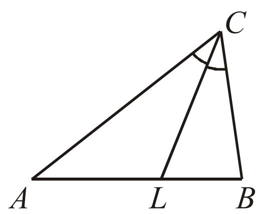
4. Да се реши уравнението $\sqrt{1-\cos x}=\sqrt{2}\cos x.$

Решение. *Първи начин*. Уравнението има решение при $\cos x\geq 0.$ Полагаме $\cos x=t,$ $t\in[0;1].$ Получаваме квадратното уравнение $2t^2+t-1=0,$ решенията на което са $t_1=-1$ и $t_2=\frac{1}{2}.$ Тъй като $t\in[0;1],$ от $t=\frac{1}{2}$ намираме $\cos x=\frac{1}{2}.$ Следователно всички решения на тригонометричното уравнение са $x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi,$ $k=0,\pm 1,\pm 2,\dots .$

Втори начин. Уравнението има решение при $\cos x \geq 0$. Така при $\cos x \geq 0$ получаваме $\sqrt{1-\cos x} = \sqrt{2}\cos x \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} = \cos x \Leftrightarrow \sqrt{\sin^2 \frac{x}{2}} = 1 - 2\sin^2 \frac{x}{2} \Leftrightarrow \left|\sin \frac{x}{2}\right| = 1 - 2\sin^2 \frac{x}{2}.$

При $\sin \frac{x}{2} \geq 0$ получаваме уравнението $2\sin^2 \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2} - 1 = 0,$ а при $\sin \frac{x}{2} < 0$ – уравнението $2\sin^2 \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} - 1 = 0.$ От уравнението $2\sin^2 \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2} - 1 = 0$ намираме $\sin \frac{x}{2} = -1$ и $\sin \frac{x}{2} = \frac{1}{2},$ а от $\sin \frac{x}{2} = \frac{1}{2}$ получаваме $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{6} + 2l\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + 4l\pi$ и $\frac{x}{2} = \pi - \frac{\pi}{6} + 2l\pi \Rightarrow x = -\frac{\pi}{3} + 2\left(2l+1\right)\pi.$ От уравнението $2\sin^2 \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} - 1 = 0$ намираме $\sin \frac{x}{2} = 1$ и $\sin \frac{x}{2} = -\frac{1}{2},$ а от $\sin \frac{x}{2} = -\frac{1}{2}$ получаваме $\frac{x}{2} = -\frac{\pi}{6} + 2m\pi \Rightarrow x = -\frac{\pi}{3} + 4m\pi$ и $\frac{x}{2} = \pi + \frac{\pi}{6} + 2m\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2\left(2m+1\right)\pi.$ Следователно всички решения на тригонометричното уравнение са $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$

5. В триъгълника ABC $BC = 5,$ $\sphericalangle ACB = 60^\circ$ и вътрешната ъглополовяща $CL = \frac{40\sqrt{3}}{13}$ $\left(L \in AB\right).$ Да се намери периметърът на триъгълника.



Решение. *Първи начин.* Като използваме стандартните означения за страните и ъглите на триъгълника, от формулата $CL = \frac{2ab}{a+b}\cos\frac{\gamma}{2}$ намираме $\frac{40\sqrt{3}}{13} = \frac{2b.5\sqrt{3}}{2\left(5+b\right)},$ откъдето $b = 8.$ От косинусовата теорема получаваме $c^2 = 8^2 + 5^2 - 2.8.5.\cos 60^\circ = 49,$ т.е. $c = 7.$ Следователно $P_{ABC} = 20.$

Втори начин. От косинусовата теорема, приложена за $\triangle BLC,$ намираме $BL^2 = \left(\frac{40\sqrt{3}}{13}\right)^2 + 5^2 - 2.\frac{40\sqrt{3}}{13}.5.\cos 30^\circ = \frac{1225}{169},$ откъдето $BL = \frac{35}{13}.$ От свойството на ъглополовящата имаме $\frac{AL}{BL} = \frac{AC}{BC},$ откъдето $AL = \frac{7}{13}b.$ От косинусовата теорема, приложена за $\triangle ALC,$ имаме $\left(\frac{7}{13}b\right)^2 = \left(\frac{40\sqrt{3}}{13}\right)^2 + b^2 - 2.\frac{40\sqrt{3}}{13}.b.\frac{\sqrt{3}}{2},$ откъдето получаваме $b^2 - 13b - 40 = 0.$ Корените на уравнението са $b_1 = 5$ и $b_2 = 8.$ Лесно може да се види (например като се построи), че триъгълникът ABC е еднозначно определен по дадените елементи. Ако $AC = 5$, то $\triangle ABC$ е равностранен и $CL = \frac{5\sqrt{3}}{2},$ което е невъзможно. Следователно $AC = 8$ и $P_{ABC} = 20.$

Трети начин. Както по-горе намираме $BL = \frac{35}{13}$ и $AL = \frac{7}{13}b.$ От косинусовата теорема, приложена за $\triangle ABC,$ имаме $\left(\frac{7}{13}b + \frac{35}{13}\right)^2 = b^2 + 25 - 5b,$ откъдето получаваме $8b^2 - 89b + 200 = 0.$ Корените на уравнението са $b_1 = \frac{25}{8}$ и $b_2 = 8.$ Ако $AC = \frac{25}{8},$ то $\triangle ALC$ не съществува, понеже не е изпълнено неравенството на триъгълника. Следователно $AC = 8$ и $P_{ABC} = 20.$

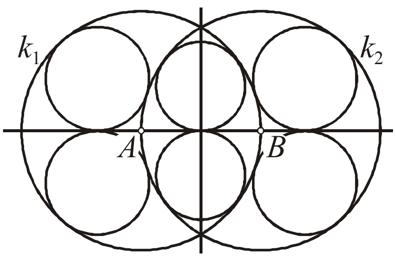
6. Дадена е функцията $f(x)=x^3+ax^2+bx+c,$ където a, b и c са реални параметри. Графиката на функцията минава през точка с координати $(0;3)$, има локален екстремум в точка с абсциса $x_0=2$ и допирателната към графиката на функцията, в точка от графиката с абсциса 1, сключва с положителната посока на абсцисната ос ъгъл $135°$. Да се намери най-голямата стойност на функцията в интервала $[1;3]$.

Решение. От $f(0)=3$ получаваме $c=3$. Тъй като $f(x)$ има локален екстремум в точка с абсциса $x_0=2$, то $f'(2)=0$. Понеже допирателната към графиката на функцията в точка от графиката с абсциса 1 сключва с положителната посока на абсцисната ос ъгъл $135°$, то $f'(1)=-1$. Имаме $f'(x)=3x^2+2ax+b$ и от $f'(2)=0$, получаваме $12+4a+b=0$, а от $f'(1)=-1$: $3+2a+b=-1$. Така

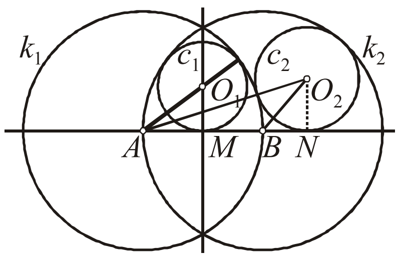
$$\left|\begin{array}{l}12+4a+b=0\\3+2a+b=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left|\begin{array}{l}4a+b=-12\\2a+b=-4\end{array}\right.\Rightarrow a=-4, b=4.$$ Следователно $f(x)=x^3-4x^2+4x+3.$

Понеже $f'(x)=3x^2-8x+4=(3x-2)(x-2)$, то функцията расте в интервала $\left(-\infty;\frac{2}{3}\right)$, намалява в интервала $\left(\frac{2}{3};2\right)$ и отново расте в $(2;+\infty)$. Получаваме, че при $x=\frac{2}{3}$ функцията има локален максимум, а при $x=2$ – локален минимум. Следователно най-голямата стойност на функцията в интервала $[1;3]$ е по-голямото от числата $f(1)$ и $f(3)$. Тъй като $f(1)=4$, а $f(3)=6$, най-голямата стойност в интервала $[1;3]$ е 6.

7. Дадена е отсечка $AB=8$ и две окръжности k_1 и k_2 съответно с центрове A и B и радиуси равни на 8. Да се намери радиусът на окръжност, която се допира до двете окръжности k_1 и k_2 и правата AB.



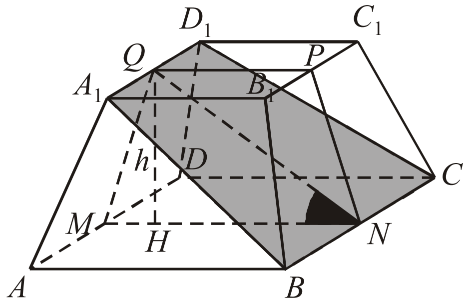
Решение. Има шест окръжности, които се допират до двете дадени окръжности и правата AB. Тъй като конфигурацията е симетрична относно правите AB и симетралата на отсечката AB, то трябва да намерим радиусите на двете окръжности c_1 и c_2. Ако x е радиусът на окръжността c_1, то $AO_1=8-x$ и от $\triangle AO_1M$ имаме $(8-x)^2=4^2+x^2$, откъдето $x=3$. Ако радиусът на окръжността c_2 е y имаме $AO_2=8+y$ и $BO_2=8-y$. Така за полупериметъра p на $\triangle AO_2B$ имаме $p=\frac{1}{2}(8+y+8-y+8)=12$ и за лицето намираме



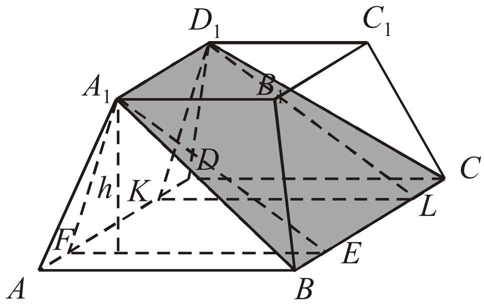
$S_{AO_2B}=\sqrt{12(12-(8+y))(12-(8-y))(12-8)}=$

$=4\sqrt{3(4-y)(4+y)}=4\sqrt{3(16-y^2)}$. От друга страна $S_{AO_2B}=\frac{1}{2}AB.O_2N=4y.$ Така от $4y=4\sqrt{3(16-y^2)}$ намираме $y=2\sqrt{3}.$

8. Дадена е правилна четириъгълна пресечена пирамида $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с основни ръбове $AB = 8$ и $A_1B_1 = 4.$ Сечението на пирамидата с равнина, минаваща през ръбовете BC и A_1D_1, сключва с голямата основа ъгъл $30°$. Да се намери в какво отношение сечението дели обема на пирамидата.



Решение. Сечението е равнобедреният трапец BCD_1A_1. Равнината през средите на ръбовете BC, AD и A_1D_1 е перпендикулярна на тези ръбовете, откъдето следва, че тя е перпендикулярна на равнината на основата, т.е. че височината в равнобедрения трапец $MNPQ$ е височината на пирамидата. Също така, понеже $BC \perp (MNP)$, то $\sphericalangle MNQ = 30°$. Очевидно $MN = 8$ и $PQ_1 = 4.$ Тъй като $NH = \frac{1}{2}(MN + PQ) = 6,$ то $h = QH = NH.\operatorname{tg}30° = 2\sqrt{3}.$ Така за обема V на пресечената пирамида намираме $V = \frac{1}{3}(8^2 + 4^2 + 8.4).2\sqrt{3} = \frac{224\sqrt{3}}{3},$ т.е. $V = \frac{224\sqrt{3}}{3}.$



Нека V_1 е обемът на частта $ABCDA_1D_1$ от пирамидата, която е под равнината на сечението. Разделяме този многостен с равнини през върховете A_1 и D_1, успоредни на равнината $MNQ.$ Така получаваме две еднакви пирамиди $ABEFA_1$ и $CDKLD_1$ и права триъгълна призма $A_1EFD_1LK.$ Пирамидите са с основи правоъгълниците $ABEF$ и $CDKL$ и височина височината на пресечената пирамида h, а призмата е с основи A_1EF и $D_1LK.$ Очевидно $EF = KL = AB = 8,$ а от равнобедрения трапец BCD_1A_1 получаваме $BE = CL = 2$ и $EL = 4.$ Така $V_1 = 2V_{ABEFA_1} + V_{A_1EFD_1LK} =$

$= 2.\frac{1}{3}.8.2.2\sqrt{3} + \frac{1}{2}.8.2\sqrt{3}.4 = \frac{64\sqrt{3}}{3} + 32\sqrt{3} = \frac{160\sqrt{3}}{3},$ т.е. $V_1 = \frac{160\sqrt{3}}{3}.$ Ако V_2 е обемът на частта от пирамидата над равнината на сечението, то $V_2 = V - V_1 = \frac{64\sqrt{3}}{3}.$ Следователно отношението е $\frac{V_2}{V_1} = \frac{2}{5}.$