СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“

Писмен конкурсен изпит по Математика I

10 юни 2017 г.

Тема №1.

Отговорите на задачите от 1. до 20. включително отбелязвайте в листа за отговори!

Задача 1. Стойността на израза $\sqrt[3]{\left(2-\sqrt{3}\right)^3}+\sqrt{\left(\sqrt{2}-3\right)^2}$ е равна на:

А) $5-\sqrt{3}-\sqrt{2}$ ***Б)*** $5-\sqrt{5}$ ***В)*** 0 ***Г)*** $\sqrt{2}-\sqrt{3}-1$

Задача 2. Ако $\dfrac{y}{x}=\dfrac{4}{3}$, то стойността на израза $\dfrac{|x+y|\sqrt{x^2+y^2}}{11x^2-3xy}$ е равна на:

А) $\dfrac{2}{9}$ ***Б)*** $\dfrac{5}{9}$ ***В)*** $\dfrac{9}{5}$ ***Г)*** $\dfrac{245}{9}$

Задача 3. Допустимите стойности на израза $\dfrac{a^2-1}{a}\sqrt{\dfrac{a+2}{a^4+1}}$ са:

А) $a\in(-\infty;-2)$ ***Б)*** $a\in[-1;0)\cup(0;1)$ ***В)*** $a\in[-2;\infty)$ ***Г)*** $a\in[-2;0)\cup(0;\infty)$

Задача 4. Решенията на неравенството $\dfrac{x+1}{x-4}+\dfrac{x}{x-1}\leqq\dfrac{2x^2+2x-1}{x^2-5x+4}$ са:

А) $x\in(0;\infty)$ ***Б)*** $x\in(1;4)$ ***В)*** $x\in(-\infty;0)\cup[1;4)$ ***Г)*** $x\in[0;1)\cup(4;\infty)$

Задача 5. Стойността на израза $\log_{32}4\cdot\left(1+9^{\log_3 8}\right)^{\log_{65}5}$ е равна на:

А) 1 ***Б)*** 2 ***В)*** 3 ***Г)*** 4

Задача 6. Броят на корените на уравнението $(2x^2+9x-5)\sqrt{4-x^2}=0$ е равен на:

А) 1 ***Б)*** 2 ***В)*** 3 ***Г)*** 4

Задача 7. Ако x_1 и x_2 са корените на уравнението $6x^2+x-2=0$, то $t_1=x_1^2$ и $t_2=x_2^2$ са корени на уравнението:

А) $36t^2-25t+4=0$ ***Б)*** $25t^2-36t+4=0$ ***В)*** $4t^2-25t+36=0$ ***Г)*** $4t^2-36t+25=0$

Задача 8. Ако $a=\sin 37^\circ$, то $\sin 2017^\circ$ е равно на:

А) $2a$ ***Б)*** $\sqrt{1-a^2}$ ***В)*** $-a$ ***Г)*** $\sqrt{3}\,a$

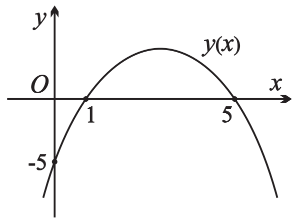
Задача 9. В окръжност е прекарана хорда AB с дължина 20. През точката A е построена допирателната t към окръжността. През точката B е прекарана права g, успоредна на t и пресичаща окръжността в точка C, като $BC=24$. Дължината на диаметъра на окръжността е равна на:

А) 25 ***Б)*** 20 ***В)*** $\dfrac{25}{2}$ ***Г)*** 9

Задача 10. В правоъгълен триъгълник ABC, $\sphericalangle ACB=90^\circ$ и точка D върху катета BC е такава, че $BD=7$, $CD=4$ и $\sphericalangle ADB=120^\circ$. Периметърът на $\triangle ABC$ е равен на:

А) 30 ***Б)*** $22+11\sqrt{2}$ ***В)*** 36 ***Г)*** $24+4\sqrt{3}$

Задача 11. На чертежа е изобразена графиката на квадратната функция $y(x)$. Най-голямата стойност на $y(x)$ е равна на:



А) 3 ***Б)*** 4 ***В)*** 5 ***Г)*** 6

Задача 12. За геометричната прогресия $a_1, a_2, \dots, a_5$ е дадено $a_4 = a_3 + 4$ и $a_5 = a_4 + 12$. Първият член a_1 на прогресията е равен на:

А) $\frac{1}{81}$ ***Б)*** $\frac{1}{3}$ ***В)*** $\frac{2}{9}$ ***Г)*** 18

Задача 13. Дадена е редицата $c_1, c_2, \dots, c_{10}$ с общ член $c_n = 2^n - 3n + 5$. Сумата от членовете на редицата е равна на:

А) 1930 ***Б)*** 1931 ***В)*** 1937 ***Г)*** 3979

Задача 14. Най-голямата стойност на функцията $f(x) = 3(\cos x + \sin x)^2 - 1$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, е равна на:

А) -1 ***Б)*** 2 ***В)*** 5 ***Г)*** 11

Задача 15. Върховете на правилен десетоъгълник са оцветени през един в червено и останалите в черно. Разглеждаме триъгълниците, чиито върхове съвпадат с върхове на десетоъгълника. Броят на триъгълниците от този тип, с два червени и един черен връх, е равен на:

А) 25 ***Б)*** 36 ***В)*** 48 ***Г)*** 50

Задача 16. Студент решил да изследва статистически колко време изчаква на спирката в Студентски град до идването на първия автобус № 94. Резултатите от първите 10 измервания са: 3, 7, 5, 3, 2, 4, 2, 7, 3, 8 минути, съответно. Модата M, медианата P и средноаритметичното S на този статистически ред удовлетворяват неравенството:

А) $P < \frac{M+S}{2}$ ***Б)*** $M < \frac{P+S}{3}$ ***В)*** $S < \frac{M+P}{2}$ ***Г)*** $P < \frac{M+S}{3}$

Задача 17. В $\triangle ABC$ височината CH има дължина 5, $BC = 9$ и радиусът на описаната окръжност има дължина 6. Дължината на страната AC е равна на:

А) 6 ***Б)*** 7 ***В)*** $\frac{20}{3}$ ***Г)*** 10

Задача 18. Ако в $\triangle ABC$ дължините на страните са $AB = 11$, $BC = 9$ и $AC = 4$, то $\cos(\sphericalangle A + \sphericalangle B)$ е равен на:

А) $-\frac{1}{3}$ ***Б)*** $\frac{2}{3}$ ***В)*** $\frac{1}{4}$ ***Г)*** $\frac{1}{3}$

Задача 19. Даден е успоредник $ABCD$. Върху страната CD е избрана точка E, така че лицето на трапеца $ABED$ е 6 пъти по-голямо от лицето на $\triangle BCE$. Точката E дели страната CD в отношение $CE : DE$ равно на:

А) $2:5$ ***Б)*** $2:7$ ***В)*** $1:6$ ***Г)*** $3:5$

Задача 20. Четириъгълникът $ABCD$ е вписан в окръжност и $AB = 8$, $BC = 13$, $AD = 8$, $\sphericalangle ABC = 60^\circ$. Дължината на страната CD е равна на:

А) 4 ***Б)*** 5 ***В)*** 6 ***Г)*** 7

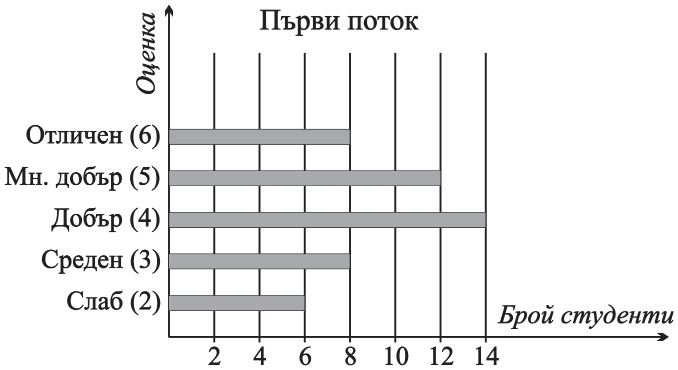
Отговорите на задачите от 21. до 25. включително запишете в листа за отговори!

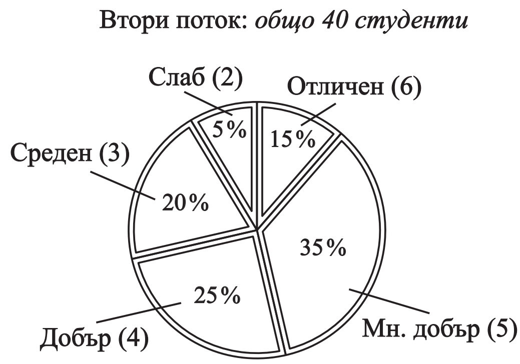
Задача 21. Стойността на израза $\dfrac{6\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{12}\right)}{\mathrm{cotg}^2\left(\frac{5\pi}{12}\right)-2\,\mathrm{tg}^2\left(\frac{\pi}{12}\right)+1}$ е равна на:

Задача 22. Решенията на уравнението $\sqrt{3x^2-12x-11}+3=x$ са:

Задача 23. На 1 юни 2016 г. се прави поръчка за подготвянето и отпечатването на учебник, с единична цена 8 лв., като се очаква учебникът да е готов след една година. Едновременно с поръчката, предвидените за целта 10 000 лв. са вложени в банка при условията на сложно олихвяване на всеки 6 месеца и 8% годишен лихвен процент. Една година по-късно издателят обявява цена на готовия учебник с 5% по-висока от първоначалната. Колко учебника по-малко са закупени с парите от влога на 2 юни 2017 г., поради увеличението на цената на учебника?

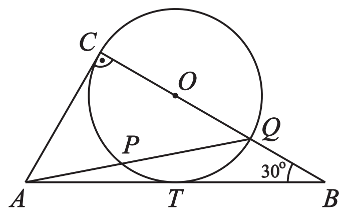
Задача 24. Първокурсниците във факултет са разделени в два потока. На диаграмите са показани резултатите от изпита по програмиране за всеки от потоците.





Средният успех на студентите от първи курс по програмиране е:

Задача 25. За правоъгълния $\triangle ABC$ е дадено $AB=\sqrt{21}$, $\sphericalangle C=90^\circ$ и $\sphericalangle B=30^\circ$. Построена е окръжност с диаметър CQ, $Q\in BC$, и допираща се до AB в точката T. Нека P е пресечната точка на AQ с окръжността. Дължината на отсечката PQ е равна на:

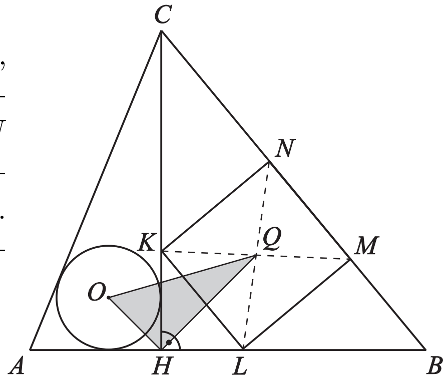


Пълните решения на задачи 26., 27. и 28. запишете в свитъка за решения!

Задача 26. Да се реши системата $\left| \begin{array}{l} \dfrac{y^2+1}{x} - \dfrac{10x}{y^2+1} + 3 = 0 \\ x - 2y - 3 = 0 \end{array} \right.$.

Задача 27. Хвърляме два разноцветни зара едновременно. Да се намери вероятността произведението на точките от двата зара да бъде по-голямо от удвоения им сбор.

Задача 28. В $\triangle ABC$ е прекарана височината CH $(H \in AB)$, като $AH = 5$, $BH = 9$, $CH = 12$. В $\triangle AHC$ е вписана окръжност с център O. В $\triangle BHC$ е вписан квадрат $KLMN$ $(K \in CH,\ L \in BH$ и $M, N \in BC)$, както е показано на чертежа, и нека Q е пресечната точка на диагоналите на квадрата. Да се намерят дължината на радиуса на окръжността, дължината на страната на квадрата $KLMN$ и лицето на $\triangle OHQ$.



Време за работа 4 часа.

Драги кандидат-студенти,

- *номерирайте всички страници на беловата си;*
- *означавайте ясно началото и края на решението на всяка от задачите от 26. до 28. включително;*
- *решението на всяка от задачите от 26. до 28. включително трябва да започва на нова страница;*
- *не смесвайте белова и чернова;*
- *черновата не се проверява и не се оценява.*

Изпитната комисия ви пожелава успешна работа!